arXiv:2304.06561v1 [math.FA] 13 Apr 2023

Nguyen 在具有唯一切锥的度量测度空间中研究 Sobolev 空间的方法

Camillo Brena* Andrea Pinamonti†

2023年4月14日

摘要

我们将 Nguyen 对 Sobolev 空间的刻画 $W^{1,p}$ [Ngu06，Ngu08] 推广到 PI度量测度空间，其中在 m-几乎处处的点，切空间（按 Gromov–Hausdorff 意义）唯一，且为维数固定的欧几里得空间。我们还将[CLL14]推广到 PI度量测度空间，其中在 m-几乎处处的点，切空间唯一，且等于齐性维数固定的海森堡群。此方法比 [Ngu06，Ngu08]中的方法更简单，且截然不同。

1 引言

在 21 世纪初，分数阶 s-半范数的研究引起了极大关注。当 Bourgain、Brezis 和 Mironescu [BBM01] 一方面，以及 Maz'ya 和 Shaposhnikova [MS02] 另一方面证明，它们可以被视为在 $L^p(\mathbb{R}^n)$-范数与$W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$-半范数之间进行插值的泛函时，这一研究获得了极大推动。更确切地说，以下重要的渐近公式分别在 [BBM01] 和 [MS02] 中得到证明：对于任意 $p \in (1,\infty)$、 $s \in (0,1)$、 $n \in \mathbb{N}$ 以及 $f \in \bigcup_{0<s<1} W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$，若其具有有界支撑，则有

$$\lim_{s\nearrow 1} (1-s)\|f\|^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = K\|Df\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{BBM}$$

and

$$\lim_{s\searrow 0} s\|f\|^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = L\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{MS}$$

其中 $K = K(p,n) > 0$, $L = L(p,n) > 0$和 $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ 定义为半范数有限的 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 函数集合

$$\|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} := \left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}.$$

后来，人们研究了这些结果在欧几里得空间中的若干不同推广：例如，参见 Ponce [Pon04], Leoni–Spector [LS14, LS11], Brezis–Nguyen [BN16a, BN16b, BN17, BN18],Pinamonti–Vecchi–Squassina [PSV19], Nguyen–Pinamonti–Vecchi–Squassina [NPSV20], Brezis– Van Schaftingen–Yung [BVSY21b, BVSY21a, BSVSY22], Maalaoui–Pinamonti [MP19], Garofalo– Tralli [GT22], Alonso Ruiz–Baudoin–Chen–Rogers–Shanmugalingam–Teplyaev [RBC+20], Alonso Ruiz–Baudoin [RB23]。

受此前结果[Ngu06、Ngu08、Ngu11a、Ngu11b], 的启发，H.M. Nguyen 利用一类完全不同的非局部泛函，对 Sobolev 空间给出了新的刻画，另见 [BN06]。具体而言，

*camillo.brena@sns.it，比萨高等师范学校，骑士广场 7 号，56126 比萨，意大利。
†andrea.pinamonti@unitn.it，数学系，特伦托大学`，ViaSommarive 14，38123 波沃（特伦托），意大利。

定理 1. 设 $p \in (1,\infty)$ 且 $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$。则

$$\lim_{\delta \searrow 0} \iint_{|f(x)-f(y)|>\delta} \frac{\delta^p}{|x-y|^{n+p}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{C_{n,p}}{p} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{D}f|^p(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

and

$$\lim_{\delta \searrow 0} \iint_{|f(x)-f(y)|\le 1} \frac{\delta |f(x)-f(y)|^{p+\delta}}{|x-y|^{n+p}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = C_{n,p} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{D}f|^p(x)\mathrm{d}x,$$

其中

$$C_{n,p} := \int_{v \in S^{n-1}} |e \cdot v|^p \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(v) \qquad \textit{for any } e \in S^{n-1}.$$

BV 空间也有类似结果 [DÓ2, Pon04], 磁性 Sobolev 空间 [NPSV20, NS19]以及海森堡群 [CLL。

在 [Bre02, 注 6], Brezis 建议将该理论推广到更一般的度量测度空间（X, d, m）。朝这一方向的首次尝试之一由 Di Marino–Squassina[DS19], 提出，他们假设测度 m 是倍增的，并且该空间支持（1, p）-庞加莱´不等式。他们展示了以下结果，以及其他一些结果。

定理 2. 设 (X, d, m) 是某个 $p \in (1,\infty)$ 的 p-PI空间。那么，存在两个常数$C_L, C_U > 0$，使得对每个 $f \in L^p$(X)，以下结论成立：

$$C_L \mathrm{Ch}_p(f) \le \limsup_{\rho \searrow 0} \iint_{|f(x)-f(y)|>\delta} \frac{\delta^p}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p} \mathsf{dm}(x)\mathsf{dm}(y) \le C_U \mathrm{Ch}_p(f),$$

其中 Ch$_p(f)$ 定义见 (8)。

此外，对 [DS19] 的进一步考察可得以下两个定理。尤其是，定理3 是定理2的直接推论，而定理 [DS19, 定理1。5], 而定理 4则取自 [DS19, 定理 1 的证明。5]由于第二个结果并未在 [DS 19], 中明确陈述，我们在第3.2节补充几行关于其证明的内容。

定理 3. 设 (X, d, m) 是某个 $p \in (1,\infty)$ 的 p-PI空间。设 $f \in L^p$(X)。那么 $f \in W^{1,p}$(X) 当且仅当

$$\sup_{\delta \in (0,1)} \iint_{|f(x)-f(y)|>\delta} \frac{\delta^p}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p} \mathsf{dm}(y)\mathsf{dm}(x) < \infty.$$

定理 4. 设 (X, d, m) 是某个 $p \in (1,\infty)$ 的 p-PI空间。设 $f \in L^p$(X)。那么 $f \in W^{1,p}$(X) 当且仅当

$$\sup_{\delta \in (0,1)} \iint_{|f(x)-f(y)|\le 1} \frac{\delta |f(x)-f(y)|^{p+\delta}}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p} \mathsf{dm}(y)\mathsf{dm}(x) < \infty$$

and

$$\iint_{|f(x)-f(y)|>1} \frac{1}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p} \mathsf{dm}(y)\mathsf{dm}(x) < \infty.$$

本文将定理 1 推广到具有唯一切锥的 PI 度量测度空间情形。更准确地说，我们考虑这样的 PI 度量测度空间：对于 m-几乎处处的 $x \in \mathsf{X}$，其切空间（在 Gromov–Hausdorff 意义下）要么是维数固定的欧几里得空间 n，要么是齐性维数固定的海森堡群 Q。这一类空间包含许多重要的例子，例如闭黎曼流形、权重连续且有上下界的加权欧几里得空间、RCD(0, N) 空间、Ahlfors RCD(K, N) 空间、具有有限测度的 RCD(K, N) 空间以及海森堡群。我们特别指出，定理 1 的证明深度依赖若干重要的几何事实，例如任意两点都可以由一条线段连接，以及单位球面在各个方向上具有一致性。一般的度量测度空间并不具备这两项性质。因此，我们的证明与经典证明完全不同，并且类似于 [G´or22] 在度量情形下通过放大证明 Bourgain–Brezis–Mironescu 型定理的方法，参见[BPP22、LPZ22]。

1.1 结果陈述

现在我们准确陈述本文的主要结果。首先给出关于空间 (X,d,m) 的主要假设（重整化测度的定义见 (12) 和 (13)：

假设 A. 我们称 PI空间 (X,d,m) 满足假设 A ， 如果

$$\mathrm{Tan}_x(\mathsf{X},\mathsf{d},\mathsf{m})=\{(\mathbb{R}^n,\mathsf{d}_e,\underline{\mathcal{L}}^n,0)\}\qquad \text{for } \mathsf{m}\text{-a.e. } x\in\mathsf{X} \tag{2}$$

and

$$\exists\Theta_n(\mathsf{m},x):=\lim_{r\searrow 0}\frac{\mathsf{m}(B_r(x))}{\omega_n r^n}\in(0,\infty)\qquad \text{for } \mathsf{m}\text{-a.e. } x\in\mathsf{X}. \tag{3}$$

或者,

假设 B. 我们称 PI空间 (X,d,m) 满足假设 B ， 如果

$$\mathrm{Tan}_x(\mathsf{X},\mathsf{d},\mathsf{m})=\{(\mathbb{H}^n,\mathsf{d}_{\mathbb{H}},\underline{\mathcal{L}}^{2n+1},0)\}\qquad \text{for } \mathsf{m}\text{-a.e. } x\in\mathsf{X} \tag{4}$$

and

$$\exists\Theta_n(\mathsf{m},x):=\lim_{r\searrow 0}\frac{\mathsf{m}(B_r(x))}{\omega_n r^{2n+2}}\in(0,\infty)\qquad \text{for } \mathsf{m}\text{-a.e. } x\in\mathsf{X}. \tag{5}$$

我们指出，满足假设 A 的空间是 n-可整流的 ([Bat22])。对于满足假设 B的空间，只要 [ALDM23猜想 7。1] 成立，类似的结论也成立。

定义5。对于 $n\in\mathbb{N}$ 和 $p\in(1,\infty)$，我们定义：

$$C_{n,p}:=\begin{cases}\displaystyle\int_{\{v\in\mathbb{R}^n:|v|=1\}}|e\cdot v|^p\mathsf{d}\mathcal{H}^{n-1}(v) & \text{for any } e\in\mathbb{R}^n \text{ with } |v|=1,\\ & \text{in the case of Assumption A},\\ \displaystyle\int_{\{v\in\mathbb{H}^n:\|v\|=1\}}|\zeta\cdot v|^p\mathsf{d}\sigma(v) & \text{for any horizontal } \zeta\in\mathbb{H}^n \text{ with } \|\zeta\|=1,\\ & \text{in the case of Assumption B},\end{cases}$$

其中 σ 是一个合适的拉东测度，参见引理 14。

现在我们陈述本文的主要结果。其证明推迟至第 3.2 节。

定理 6. 设(X,d,m) 是某个 $p\in(1,\infty)$-PI空间 p，满足假设 A或假设 B。设 $f\in W^{1,\,p}(\mathsf{X})$。则

$$\lim_{\delta\searrow 0}\iint_{|f(x)-f(y)|>\delta}\frac{\delta^p}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p}\mathsf{dm}(y)\mathsf{dm}(x)=\frac{C_{n,p}}{p\omega_n}\int_{\mathsf{X}}|\mathrm{D}_p f|^p(x)\mathsf{dm}(x) \tag{6}$$

and

$$\lim_{\delta\searrow 0}\iint_{|f(x)-f(y)|\le 1}\frac{\delta|f(x)-f(y)|^{p+\delta}}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p}\mathsf{dm}(y)\mathsf{dm}(x)=\frac{C_{n,p}}{\omega_n}\int_{\mathsf{X}}|\mathrm{D}_p f|^p(x)\mathsf{dm}(x), \tag{7}$$

其中 $C_{n,\,p}$ 如定义5。

据我们所知，定理 6 代表了定理 1 首次向一大类度量测度空间的推广，并为在度量测度空间的框架下研究更一般的泛函铺平了道路。我们注意到，切空间在某种意义下唯一这一假设相当精确，参见例如 [G´or22，例4。4]。

2 预备知识

本节汇总一些预备概念，全文中都会用到这些概念。对于函数空间，我们使用标准记号（例如，LIP 表示 Lipschitz 函数空间），并添加下标 bs 以表示具有有界支撑的函数所构成的子空间。

Sobolev 空间。
度量测度空间是指三元组 (X, d, m)，其中 (X, d) 是完备可分度量空间，m 是定义在 X 上且在球上有限的 Borel 测度。带基点的度量测度空间是指四元组 (X, d, m x)，其中 (X, d, m) 是度量测度空间，且 $x \in$ X。

给定任意 $p \in (1,\infty)$，函数 $f \in L^p(\mathsf{m})$ 的 Cheeger p-能量 Ch$_p(f)$ 定义为

$$\mathrm{Ch}_p(f) := \inf_{(f_n)} \liminf_n \int \mathrm{lip}(f_n)^p \mathsf{dm}, \tag{8}$$

其中，下确界取遍所有序列 $(f_n)_n \subseteq \mathrm{LIP}_{\mathrm{bs}}(\mathsf{X}) \cap L^p(\mathsf{m})$，使得 $f_n \to f$ in$L^p(\mathsf{m})$。这里，$g \in$LIP(X) 的斜率 lip$(g) : \mathsf{X} \to [0,+\infty)$ 定义为

$$\mathrm{lip}(g)(x) := \limsup_{y\to x} \frac{|g(x)-g(y)|}{\mathsf{d}(x,y)},$$

当 x 是孤立点时，我们约定 lip$(g)(x) = 0$。Sobolev 空间 $W^{1,p}$(X) 定义为

$$W^{1,p}(\mathsf{X}) := \big\{ f \in L^p(\mathsf{m}) \;\big|\; \mathrm{Ch}_p(f) < +\infty \big\}.$$

对于任意 $f \in W^{1,p}$(X)，存在唯一函数 $|\mathrm{D}_p f| \in L^p(\mathsf{m})$，称为 f 的最小 p-松弛斜率，并且 f 的 Cheeger p-能量可以表示为

$$\mathrm{Ch}_p(f) = \int |\mathrm{D}_p f|^p \mathsf{dm}.$$

参见 [AGS14，AGS13] 在 [Che99] 中，以了解上述概念和结果的更多细节。我们强调，$|\mathrm{D}_p f|$通常取决于 p （不过，这种情况不会出现在 PI 空间中，例如参见[ACDM15，附录 C] 或 [BB11，定理 A。9]）。

PI 空间。
我们回顾 PI 空间类的定义。

定义 7. 设 (X, d, m) 是一个度量测度空间。那么：

i) 我们称 (X, d, m) 是一致加倍的，如果存在一个常数 $C_D > 0$ 使得然而 at

$$\mathsf{m}(B_{2r}(x)) \le C_D \mathsf{m}(B_r(x)) \qquad \text{for every } x \in \mathsf{X} \text{ and } r > 0. \tag{9}$$

ii) 对于 $p \in (1,\infty)$，如果存在一个常数 $C_P > 0$，使得

$$\fint_{B_r(x)} \Big| f - \fint_{B_r(x)} f \mathsf{dm} \Big| \mathsf{dm} \le C_P r \Big(\fint_{B_r(x)} \mathrm{lip}(f)^p \mathsf{dm} \Big)^{1/p} \qquad \text{for every } x \in \mathsf{X} \text{ and } r > 0,$$

每当 $f \in$LIP$_{\mathrm{bs}}$(X) 时。

iii) 如果 (X, d, m) 是一个 p-PI空间，意味着它是一致加倍的，并且支持 $(1,p)$-Poincar´e 不等式，即满足上面的 i) 和 ii)。如果 $p \in (1,\infty)$ 的取值并不重要，我们就简单地称 (X, d, m) 为 PI空间。

注 8。 我们经常需要使用下面的引理 9 ，该引理取自 [DS19]。我们提醒一下，要将该引理应用于度量测度空间 (X，d，m)，需要参考测度满足完整的加倍条件，即存在某个 $C_D > 0$ 满足 (9)。特别地，局部一致加倍性质要求对于每个 $R > 0$ 都存在 $C_D(R) > 0$ 使得

$$\mathsf{m}(B_{2r}(x)) \le C_D(R)\mathsf{m}(B_r(x)) \qquad \text{for every } x \in \mathsf{X} \text{ and } r \in (0, R)$$

对于我们的目的而言是不够的。这就是为什么我们要求 PI 空间的定义中条件（9）成立，尽管如今通常将仅局部一致加倍的空间也纳入 PI 空间这一类。关于 Poincar´é 不等式的表述，也有类似的考量，参见 [DS19]中的假设。

不过，要证明我们的主要定理6，较弱形式的（1，p）-Poincar´é 不等式就足够了：只需假设存在一个常数 $\lambda \ge 1$ ，并且对任意半径 $R > 0$，存在一个常数$C_P = C_P(R) > 0$，使得

$$\fint_{B_r(x)} \left| f - \fint_{B_r(x)} f \mathsf{dm} \right| \mathsf{dm} \le C_P r \left(\fint_{B_{\lambda r}(x)} \mathrm{lip}(f)^p \mathsf{dm} \right)^{1/p} \qquad \text{for every } x \in \mathsf{X} \text{ and } r \in (0, R),$$

每当 $f \in \mathrm{LIP}_{\mathrm{bs}}(\mathsf{X})$. 这是因为，Poincar´é 不等式仅用于应用 [Che99] 的结果（在 [Che99] 中，除测度的加倍条件外，所采用的假设就是这一较弱形式的 Poincar´é 不等式）：

- 在引理 13 和引理 14的放大论证中，我们需要将 Lipschitz 函数的放大刻画为广义线性函数，
- 在定理 6的证明中，我们需要局部Lipschitz常数与最小弱上梯度之间的对应关系，见下文中的（11）。

不过请注意，证明定理时仍然需要一致倍增条件6 （参见命题15的证明）。■

引理 9 ([DS19，引理 2。8])。 设 (X，d，m) 为一致倍增度量测度空间。那么，对于每个 $x \in$X 和 $R > 0$，，

$$\int_{\mathsf{X} \setminus B_R(x)} \frac{1}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p} \mathsf{dm}(y) \le \frac{C}{R^p}, \tag{10}$$

其中常数 $C > 0$ 仅取决于 (X, d, m)。

的关键性质 p-PI 空间，由[Che99], 证明的是

$$|\mathrm{D}_p f| = \mathrm{lip}(f) \quad \mathsf{m}\text{-a.e.} \qquad \text{for every } f \in \mathrm{LIP}_{\mathrm{bs}}(\mathsf{X}). \tag{11}$$

点测度 Gromov–Hausdorff 拓扑。

本文放大论证中的一个基本概念是带基点的测度 Gromov–Hausdorff（pmGH）收敛（例如参见 [GMS15] 及其中的参考文献）。取一列$(\mathsf{X}_n, \mathsf{d}_n, \mathsf{m}_n, x_n)_n$ 带基点的一致加倍空间，它们具有相同的 (9) 中的常数 C_D。若存在一个完备度量空间 (Z, d_Z) 以及等距嵌入 ι_n: (X_n, d_n) $\hookrightarrow$ (Z, d_Z)，对 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 均成立，使得.....则称 (X_n, d_n, m_n, x_n) 在 pmGH 意义下收敛到带基点的度量测度空间 (X_∞, d_∞, m_∞, x_∞)。

$$(\iota_n)_\# \mathsf{m}_n \rightharpoonup (\iota_\infty)_\# \mathsf{m}_\infty \qquad \text{in duality with } C_{\mathrm{bs}}(\mathsf{Z}),$$

并且 $\iota_n(x_n) \to \iota_\infty(x_\infty)$。如果我们有一个函数序列 $f_n : \mathsf{X}_n \to \mathbb{R}$，对于 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，我们说 f_n 局部一致收敛于 f （关于实现 (Z,d_Z)），如果对于每个R、$\varepsilon > 0$，存在 $\bar{n} \in \mathbb{N}$ 和 $\delta > 0$ 使得

$$|f_n(x) - f_\infty(x')| < \varepsilon \qquad \text{if } x' \in B_R(x_\infty) \subseteq \mathsf{X}_\infty,\ x \in \mathsf{X}_n, \text{ where } n \ge \bar{n} \text{ and } \mathsf{d}_Z(\iota_n(x), \iota_\infty(x')) < \delta.$$

根据格罗莫夫紧致性定理，任意一族带基点的一致倍增空间 $\left(\left(\mathsf{X}_n,\ \mathsf{d}_n,\ \mathsf{m}_n,\ x_n\right)\right)_n$，共享(9)中的相同常数 C_D，使得

$$\sup_n \mathsf{m}_n(B_1(x)) < \infty$$

在点测度 Gromov–Hausdorff 拓扑下是预紧的。

给定一个带基点的度量测度空间 $(\mathsf{X}, \mathsf{d}, \mathsf{m}\ x)$ 和半径 $r > 0$，我们将归一化测度 m_r^x 定义为

$$\mathsf{m}_r^x := \frac{\mathsf{m}}{\mathsf{m}(B_r(x))}.$$

切锥 $\mathrm{Tan}_x(\mathsf{X}, \mathsf{d}, \mathsf{m})$ 定义为所有满足以下条件的带基点的度量测度空间 $(\mathsf{Y}, \mathsf{d}_\mathsf{Y}, \mathsf{m}_\mathsf{Y}, y)$ 的集合：对于某个序列 $(r_i)_i$，有 $(\mathsf{X}\ r_i^{-1}\mathsf{d}, \mathsf{m}_{r_i}^x, x) \to (\mathsf{Y}, \mathsf{d}_\mathsf{Y}, \mathsf{m}_\mathsf{Y}, y)$ 在点测度 Gromov–Hausdorff 意义下成立，且 $r_i \searrow 0$。得益于点测度 Gromov–Hausdorff 收敛的紧致性，对于每个一致加倍度量测度空间 $(\mathsf{X}, \mathsf{d}, \mathsf{m})$ 以及每个 $x \in \mathsf{X}$，我们都有 $\mathrm{Tan}_x(\mathsf{X}, \mathsf{d}, \mathsf{m}) \neq \emptyset$。我们将 $\underline{\mathcal{L}}^n$ 定义为归一化勒贝格测度，即。

$$\underline{\mathcal{L}}^n = (\mathcal{L}^n)_1^0 = \frac{1}{\omega_n}\mathcal{L}^n, \tag{12}$$

其中 $\omega_n := \mathcal{L}^n(B_1(0))$。

海森堡群

我们将海森堡群 $\mathbb{H}^n$ 表示为集合 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^{2n+1}$；因此，其点将表示为 $x = (z,t) = (\zeta + i\eta, t) = (\zeta, \eta, t)$，其中 $z \in \mathbb{C}^n$, $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$。$\mathbb{H}^n$上的群运算定义如下：当 $x = (z,t) \in \mathbb{H}^n$ 且 $x' = (z',t') \in \mathbb{H}^n$ 时，

$$x \cdot x' := \left(z + z', t + t' + 2\mathrm{Im}\left(\langle z, \bar{z'}\rangle\right)\right),$$

其中 $\bar{z} \in \mathbb{C}$ 表示 $z \in \mathbb{C}$的共轭。因此，很容易验证，群单位元是原点 0，而点的逆元为 $(z,t)^{-1} = (-z, -t)$。我们还引入以下非等向膨胀族，因为它们是海森堡群几何中的基础：若 $x = (z,t) \in \mathbb{H}^n$ 且 $\lambda > 0$,

$$\delta_\lambda(x) := (\lambda z, \lambda^2 t).$$

海森堡群 $\mathbb{H}^n$ 具有拓扑维数为 $2n+1$的李群结构。其由左不变向量场构成的李代数 $\mathfrak{h}_n$ 是二阶分层的，并且由（线性）向量场 $(2n+1)-$ $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n, T$生成。回顾一下，绝对连续曲线$\gamma$：$[a,b] \to \mathbb{H}^n$ 是水平的，当存在 $u_1, \ldots, u_{2n} \in L^1[a,b]$ 使得对几乎所有 $t \in [a,b]$:

$$\gamma'(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(u_i(t) X_i(\gamma(t)) + u_{i+n}(t) Y_i(\gamma(t))\right).$$

定义此类曲线的水平长度为 γ $L(\gamma) = \int_a^b |u(t)|\mathrm{d}t$，其中 $u = (u_1, .., u_{2n})$，而 $|\cdot|$表示 $\mathbb{R}^{2n}$上的欧几里得范数。点 x、$y \in \mathbb{H}^n$ 之间的 Carnot-Carath´eodory 距离（CC 距离）定义为:

$$d_{\mathbb{H}}(x,y) = \inf\{L(\gamma) : \gamma\colon [0,1] \to \mathbb{H}^n \text{ horizontal joining } x \text{ to } y\}.$$

乔-拉谢夫斯基定理意味着，$\mathbb{H}^n$ 中的任意两点都可以通过水平曲线连接 [BLU07，定理 9.1。3]。由此可知，CC 距离确实是 $\mathbb{H}^n$上的一个距离。为简便起见，我们记 $\|x\|$ 而不记作 $d_{\mathbb{H}}(x,0)$。众所周知，$d_{\mathbb{H}}$ 诱导的拓扑与欧几里得距离诱导的拓扑相同，但二者并非 Lipschitz 等价。

$\mathbb{H}^n$ 的 Haar 测度由勒贝格测度 $\mathcal{L}^{2n+1}$ 给出。除非另有说明，当说某个性质在 $\mathbb{H}^n$ 上几乎处处成立时，我们总是指相对于 $\mathcal{L}^{2n+1}$ 几乎处处成立。与欧几里得情形一样，我们将 $\underline{\mathcal{L}}^{2n+1}$ 定义为归一化勒贝格测度，即。

$$\underline{\mathcal{L}}^{2n+1} = \frac{1}{\omega_n}\mathcal{L}^{2n+1} \tag{13}$$

其中 $\omega_n = \mathcal{L}^{2n+1}(B_1(0))$ 和 $B_1(0)$ 表示相对于 $d_{\mathbb{H}}$ 的单位球。

3 主要部分

3.1 辅助结果

泛函 I_δ 和 J_δ

定义10. 设 $p \in (1,\infty)$，并设 $f \in L^p(\mathsf{m})$。我们对 $\delta > 0$ 定义：

$$I_\delta(f) := \iint_{|f(x)-f(y)|>\delta} \frac{\delta^p}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p}\mathsf{dm}(y)\mathsf{dm}(x)$$

and

$$J_\delta(f) := \iint_{|f(x)-f(y)|\le 1} \frac{\delta|f(x)-f(y)|^{p+\delta}}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p}\mathsf{dm}(y)\mathsf{dm}(x).$$

下面的引理从本质上说是[NPSV18中的公式（3.6）]，并可由I_δ 的定义以及三角不等式蕴含

$$\chi_{\{|f(x)-f(y)|>\delta\}} \le \chi_{\{|g(x)-g(y)|>(1-\varepsilon)\delta\}} + \chi_{\{|(f-g)(x)-(f-g)(y)|>\varepsilon\delta\}}$$

对每个 $\delta,\varepsilon > 0$ 均成立。

引理 11. 设 $p \in (1,\infty)$，并设 $f,g \in L^p(\mathsf{m})$。那么，若 $\delta,\varepsilon > 0$,

$$I_\delta(f) \le \frac{1}{(1-\varepsilon)^p} I_{(1-\varepsilon)\delta}(g) + \frac{1}{\varepsilon^p} I_{\varepsilon\delta}(f-g). \tag{14}$$

下面的引理从道义上说可由证明 [DS19，定理1。5], 我们也将以 [CLL14，引理 2。3]。

引理 12。令 $p \in (1,\infty)$ 并令 $f \in L^p(\mathsf{m})$。那么，对于每个 $\varepsilon \in (0,1)$,

$$\int_0^1 \varepsilon\delta^{\varepsilon-1} I_\delta(f)\mathsf{d}\delta = \frac{1}{p+\varepsilon}\left(J_\varepsilon(f) + \varepsilon\iint_{|f(x)-f(y)|>1} \frac{1}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p}\mathsf{dm}(y)\mathsf{dm}(x)\right). \tag{15}$$

证明。首先注意到,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varepsilon\delta^{p+\varepsilon-1}\chi_{\{|f(x)-f(y)|>\delta\}}(x,y)\mathsf{d}\delta &= \frac{\varepsilon}{p+\varepsilon}(|f(x)-f(y)|\wedge 1)^{p+\varepsilon} \\ &= \frac{1}{p+\varepsilon}\Big(\varepsilon\chi_{\{|f(x)-f(y)|\le 1\}}(x,y)|f(x)-f(y)|^{p+\varepsilon} + \varepsilon\chi_{\{|f(x)-f(y)|>1\}}(x,y)\Big),\end{aligned}$$

那么（15）由 Fubini定理得出。 □

放大论证

引理 13。 设 (X,d,m) 是满足假设 PI 空间 A。设 $f \in \mathrm{LIP}(\mathsf{X})$。那么，对于每个 $p \in (1,\infty)$,

$$\lim_{\delta\searrow 0}\int_{\mathsf{X}} \chi_{\{|f(y)-f(x)|>\delta\}}(x,y)\frac{\delta^p}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p}\mathsf{dm}(y) = \frac{C_{n,p}}{p\omega_n}\mathrm{lip}(f)^p(x) \qquad \textit{for } \mathsf{m}\textit{-a.e. } x, \tag{16}$$

其中 $C_{n,\ p}$ 与定义5相同。

证明。 我们证明 (16) 在任意固定点 x 处成立，只要该点满足假设 A的结论以及 [Che99，定理 10 的结论。2]. 经过缩放，我们可以假设 f 是 1-利普希茨的。任取序列 $\delta_k \searrow 0$，只需证明我们可以提取一个（不重新标记的）子序列，使得该子序列满足 (16) 中的极限。

得益于格罗莫夫紧致性定理，阿尔泽`拉–阿斯科利定理以及 x 的选择（特别是（2））， 我们可以假设（至多取一个不重新标记的子序列）

$$(\mathsf{X}, \mathsf{d}_{\delta_k}, \mathsf{m}^x_{\delta_k}, x) := (\mathsf{X}, \delta_k^{-1}\mathsf{d}, \mathsf{m}/\mathsf{m}(B_{\delta_k}(x)), x) \to (\mathbb{R}^n, \mathsf{d}_e, \underline{\mathcal{L}}^n, 0) \qquad \text{in the pmGH topology}$$

并且 $f_k := \delta_k^{-1}(f - f(x))$ 局部一致收敛到线性函数 $L_x\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，其中
对于某个 $\zeta \in S^{n-1}$，

$$L_x(y) = \mathrm{lip}(f)(x)(y \cdot \zeta) \qquad \text{for every } y \in \mathbb{R}^n$$

（参见 [G´or22，命题 3。3] 或 [BPP22，引理 3。3]），相对于一个实现（Z，d_Z）以及等距嵌入（ι_k）$_k$。

我们记 $C > 0$ 为一个仅依赖于（X，d，m）且在证明过程中可能变化的常数。如果$R > 0$，由（10），对每个 k，

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathsf{X}\setminus B_{\delta_k R}(x)} \chi_{\{|f(y)-f(x)|>\delta_k\}}(x,y)\frac{\delta_k^p}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p}\mathsf{dm}(y)\\
&\quad\le \delta_k^p \int_{\mathsf{X}\setminus B_{\delta_k R}(x)} \frac{1}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p}\mathsf{dm}(y)\\
&\quad\le \delta_k^p \frac{C}{(\delta_k R)^p} = \frac{C}{R^p}.
\end{aligned} \tag{17}$$

现在，对于 $\varepsilon \in (0,1)$，我们通过 $\varphi_\varepsilon \in \mathrm{LIP}(\mathbb{R})$ 定义

$$\varphi_\varepsilon(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \le 1-\varepsilon,\\ x/\varepsilon + (\varepsilon-1)/\varepsilon & \text{if } 1-\varepsilon \le x \le 1,\\ 1 & \text{if } 1 \le x; \end{cases}$$

并且我们将 $\psi_\varepsilon \in \mathrm{LIP}(\mathbb{R})$ 定义为

$$\psi_\varepsilon(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \le 1-2\varepsilon,\\ x/\varepsilon + (2\varepsilon-1)/\varepsilon & \text{if } 1-2\varepsilon \le x \le 1-\varepsilon,\\ 1 & \text{if } 1-\varepsilon \le x \le 1,\\ -x/\varepsilon + (\varepsilon+1)/\varepsilon & \text{if } 1 \le x \le 1+\varepsilon,\\ 0 & \text{if } 1+\varepsilon \le x. \end{cases}$$

注意，对于每个 ε，$\varphi_\varepsilon \circ |f_k|$ 都局部一致收敛到 $\varphi_\varepsilon \circ |L_x|$；同样，将 φ_ε 替换为 ψ_ε 时，随着 f_k 局部一致收敛到 L_x，结论也成立。

现在我们进行计算，由于是 f 1-Lipschitz，

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{\delta_k R}(x)} \chi_{\{|f(y)-f(x)|>\delta_k\}}(x,y)\frac{\delta_k^p}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p}\mathsf{dm}(y)\\
&\quad= \int_{B_{\delta_k R}(x)\setminus B_{\delta_k}(x)} \chi_{\{|f(y)-f(x)|>\delta_k\}}(x,y)\frac{\delta_k^n}{\mathsf{d}(x,y)^n\mathsf{m}(B_{\delta_k}(x))}\frac{\delta_k^p}{\mathsf{d}(x,y)^p}\mathsf{dm}(y) + \omega^{\mathrm{I}}_{k,R},
\end{aligned} \tag{18}$$

其中

$$\omega^{\mathrm{I}}_{k,R} := \int_{B_{\delta_k R}(x)\setminus B_{\delta_k}(x)} \chi_{\{|f(y)-f(x)|>\delta_k\}}(x,y)\left(\frac{1}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))} - \frac{\delta_k^n}{\mathsf{d}(x,y)^n\mathsf{m}(B_{\delta_k}(x))}\right)\frac{\delta_k^p}{\mathsf{d}(x,y)^p}\mathsf{dm}(y).$$

然后，回忆一下（10）以及（3），

$$\begin{aligned}
|\omega^{\mathrm{I}}_{k,R}| &\le \int_{B_{\delta_k R}(x)\setminus B_{\delta_k}(x)} \left|1 - \frac{\delta_k^n\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))}{\mathsf{d}(x,y)^n\mathsf{m}(B_{\delta_k}(x))}\right| \frac{\delta_k^p}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p}\mathsf{dm}(y)\\
&\le \sup_{y\in B_{\delta_k R}(x)} \left|1 - \frac{\delta_k^n\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))}{\mathsf{d}(x,y)^n\mathsf{m}(B_{\delta_k}(x))}\right| \int_{\mathsf{X}\setminus B_{\delta_k}(x)} \frac{\delta_k^p}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p}\mathsf{dm}(y) \to 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

因此，我们归结为计算当 $k\to\infty$ 时的极限：

$$\begin{aligned}&\int_{B_{\delta_k R}(x)\setminus B_{\delta_k}(x)}\chi_{\{|f(y)-f(x)|>\delta_k\}}(x,y)\frac{\delta_k^{n+p}}{\mathsf{d}(x,y)^{n+p}}\frac{1}{\mathsf{m}(B_{\delta_k}(x))}\mathsf{dm}(y)\\&\quad=\int_{B_R^k(x)\setminus B_1^k(x)}\chi_{\{|f_k|>1\}}(y)\frac{1}{\mathsf{d}_{\delta_k}(x,y)^{n+p}}\mathsf{dm}_{\delta_k}^x(y)\\&\quad=\int_{B_R^k(x)\setminus B_1^k(x)}\varphi_\varepsilon(|f_k(y)|)\frac{1}{\mathsf{d}_{\delta_k}(x,y)^{n+p}}\mathsf{dm}_{\delta_k}^x(y)+\omega_{k,R,\varepsilon}^{\mathrm{II}},\end{aligned}\tag{20}$$

其中

$$\omega_{k,R,\varepsilon}^{\mathrm{II}}:=\int_{B_R^k(x)\setminus B_1^k(x)}\left(\chi_{\{|f_k|>1\}}(y)-\varphi_\varepsilon(|f_k(y)|)\right)\frac{1}{\mathsf{d}_{\delta_k}(x,y)^{n+p}}\mathsf{dm}_{\delta_k}^x(y).$$

我们可以估计

$$\begin{aligned}|\omega_{k,R,\varepsilon}^{\mathrm{II}}|&\le\int_{B_R^k(x)\setminus B_1^k(x)}\left|\chi_{\{|f_k|>1\}}(y)-\varphi_\varepsilon(|f_k(y)|)\right|\frac{1}{\mathsf{d}_{\delta_k}(x,y)^{n+p}}\mathsf{dm}_{\delta_k}^x(y)\\&\le\int_{B_R^k(x)\setminus B_1^k(x)}\psi_\varepsilon(|f_k(y)|)\frac{1}{\mathsf{d}_{\delta_k}(x,y)^{n+p}}\mathsf{dm}_{\delta_k}^x(y).\end{aligned}\tag{21}$$

因此，由（18）和（20）可知

$$\begin{aligned}&\limsup_k\left|\int_{B_{\delta_k R}(x)}\chi_{\{|f(y)-f(x)|>\delta_k\}}(x,y)\frac{\delta_k^p}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p}\mathsf{dm}(y)\right.\\&\qquad\left.-\int_{B_R^k(x)\setminus B_1^k(x)}\varphi_\varepsilon(|f_k(y)|)\frac{1}{\mathsf{d}_{\delta_k}(x,y)^{n+p}}\mathsf{dm}_{\delta_k}^x(y)\right|\\&\le\limsup_k\left(|\omega_{k,R}^{\mathrm{I}}|+|\omega_{k,R,\varepsilon}^{\mathrm{II}}|\right).\end{aligned}\tag{22}$$

利用局部一致收敛，我们计算得

$$\lim_k\int_{B_R^k(x)\setminus B_1^k(x)}\varphi_\varepsilon(|f_k(y)|)\frac{1}{\mathsf{d}_{\delta_k}(x,y)^{n+p}}\mathsf{dm}_{\delta_k}^x(y)=\int_{B_R(0)\setminus B_1(0)}\varphi_\varepsilon(|L_x(y)|)\frac{1}{|y|^{n+p}}\mathsf{d}\underline{\mathcal{L}}^n(y)$$

同理，

$$\lim_k\int_{B_R^k(x)\setminus B_1^k(x)}\psi_\varepsilon(|f_k(y)|)\frac{1}{\mathsf{d}_{\delta_k}(x,y)^{n+p}}\mathsf{dm}_{\delta_k}^x(y)=\int_{B_R(0)\setminus B_1(0)}\psi_\varepsilon(|L_x(y)|)\frac{1}{|y|^{n+p}}\mathsf{d}\underline{\mathcal{L}}^n(y).$$

我们简要说明这一结论。我们可以设想这样一种情形：有一个函数序列 g_k，它局部一致收敛到 g_∞，其中 g_∞ 是利普希茨函数。接着，我们将 g_∞ 延拓为 $(\mathsf{Z},\mathsf{d}_\mathsf{Z})$ 上的一个利普希茨函数，并将其记为 g'_∞，即 $g'_\infty\circ\iota_\infty=g_\infty$。那么，若 $\varphi\in C_{\mathrm{bs}}(\mathsf{Z})$，

$$\int_\mathsf{X}\varphi g_k\mathsf{dm}_{\delta_k}^x=\int_\mathsf{X}\varphi g'_\infty\mathsf{dm}_{\delta_k}^x+\int_\mathsf{X}\varphi(g_k-g'_\infty)\mathsf{dm}_{\delta_k}^x.$$

因此，只要我们证明……，该结论便可由 $\mathsf{m}_{\delta_k}^x$ 到 $\underline{\mathcal{L}}^n$ 的弱收敛推出。

$$\int_{B_R^k(x)}|g_k-g'_\infty|\mathsf{dm}_{\delta_k}^x\to0.$$

由 g_k 到 g_∞ 的局部一致收敛以及 g'_∞ 的 Lipschitz 性质可知，$|g_k-g'_\infty|$ 局部一致收敛于 0，因此只需证明：对于每个 $\tau>0$，都存在 $k\in\mathbb{N}^-$，使得对每个 $k\ge k$ 和 $y\in B_{\delta_k(R+1)}(x)$，都存在 $y'\in B_{R+2}(0)$，满足 $\mathsf{d}_\mathsf{Z}(\iota_k(y)\ \iota_\infty(y'))<\tau$。利用标准论证，很容易通过反证法证明这一点。

因此，考虑到 (22)、(19) 和 (21)，可得

$$\begin{aligned}\limsup_k \Big| \int_{B_{\delta_k R}(x)} \chi_{\{|f(y)-f(x)|>\delta_k\}}(x,y)\frac{\delta_k^p}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p}\mathsf{dm}(y) \\ - \int_{B_R(0)\setminus B_1(0)} \varphi_\varepsilon(|L_x(y)|)\frac{1}{|y|^{n+p}}\mathsf{d}\underline{\mathcal{L}}^n(y)\Big| \\ \le \int_{B_R(0)\setminus B_1(0)} \psi_\varepsilon(|L_x(y)|)\frac{1}{|y|^{n+p}}\mathsf{d}\underline{\mathcal{L}}^n(y).\end{aligned}$$

现在我们可以令 $\varepsilon \searrow 0$，从而推知

$$\begin{aligned}\limsup_k \Big| \int_{B_{\delta_k R}(x)} \chi_{\{|f(y)-f(x)|>\delta_k\}}(x,y)\frac{\delta_k^p}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p}\mathsf{dm}(y) \\ - \int_{B_R(0)\setminus B_1(0)} \chi_{\{|L_x|\ge 1\}}(y)\frac{1}{|y|^{n+p}}\mathsf{d}\underline{\mathcal{L}}^n(y)\Big| \\ \le \int_{B_R(0)\setminus B_1(0)} \chi_{\{|L_x|=1\}}(y)\frac{1}{|y|^{n+p}}\mathsf{d}\underline{\mathcal{L}}^n(y) = 0,\end{aligned}$$

它是集合 $\{|L_x|=1\}$，该集合要么为空，要么是两个超平面的并集。

总而言之，再结合（17），我们可以推知

$$\begin{aligned}&\lim_k \int_{\mathsf{X}} \chi_{\{|f(y)-f(x)|>\delta_k\}}(x,y)\frac{\delta_k^p}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p}\mathsf{dm}(y) \\ &= \int \chi_{\{|L_x|\ge 1\}}(y)\frac{1}{|y|^{n+p}}\mathsf{d}\underline{\mathcal{L}}^n(y) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\{y:\mathrm{lip}(f)(x)|y\cdot\zeta|\ge 1\}}\frac{1}{|y|^{n+p}}\mathsf{d}\mathcal{L}^n(y).\end{aligned} \tag{23}$$

N现在，若 $\mathrm{lip}(f)(x) \neq 0$，我们作变量替换 $z = y\mathrm{lip}(f)(x)$，便可得到

$$\begin{aligned}&\int_{\{y:\mathrm{lip}(f)(x)|y\cdot\zeta|\ge 1\}}\frac{1}{|y|^{n+p}}\mathsf{d}\mathcal{L}^n(y) = \mathrm{lip}(f)^p(x)\int_{\{z:|z\cdot\zeta|\ge 1\}}\frac{1}{|z|^{n+p}}\mathsf{d}\mathcal{L}^n(z) \\ &= \mathrm{lip}(f)^p(x)\int_{S^{n-1}}\int_0^\infty \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{n+p}}\chi_{\{\rho|\hat{z}\cdot\zeta|\ge 1\}}\mathsf{d}\rho\mathsf{d}\mathcal{H}^{n-1}(\hat{z}) \\ &= \mathrm{lip}(f)^p(x)\int_{S^{n-1}}\int_{1/|\hat{z}\cdot\zeta|}^\infty \rho^{-p-1}\mathsf{d}\rho\mathsf{d}\mathcal{H}^{n-1}(\hat{z}) \\ &= \mathrm{lip}(f)^p(x)\int_{S^{n-1}}\frac{|\hat{z}\cdot\zeta|^p}{p}\mathsf{d}\mathcal{H}^{n-1}(\hat{z}),\end{aligned}$$

这里用到了极坐标。因此，回顾$C_{n的p}$ 定义5中的定义，

$$\int_{\{y:\mathrm{lip}(f)(x)|y\cdot\zeta|\ge 1\}}\frac{1}{|y|^{n+p}}\mathsf{d}\mathcal{L}^n(y) = \mathrm{lip}(f)^p(x)\frac{C_{n,p}}{p}. \tag{24}$$

注意，即使 $\mathrm{lip}(f)(x) = 0$，（24）仍然成立。因此，（16）由（23）和（24）推出。引理14。□

设 (X,d,m) 是一个满足假设 PI B 的 PI 空间。设 $f \in \mathrm{LIP}(\mathsf{X})$。那么，对每个 $p \in (1,\infty)$，

$$\lim_{\delta\searrow 0}\int_{\mathsf{X}} \chi_{\{|f(y)-f(x)|>\delta\}}(x,y)\frac{\delta^p}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p}\mathsf{dm}(y) = \frac{C_{n,p}}{p\omega_n}\mathrm{lip}(f)^p(x) \qquad \textit{for } \mathsf{m}\textit{-a.e. } x, \tag{25}$$

其中 $C_{n,\ p}$ 与定义5中相同。

证明。 证明与引理 13 的证明完全相同，以下澄清一些技术细节。与引理 13一样，经过适当缩放后，我们可以假设 f 是 1-利普希茨的。任取序列 $\delta_k \searrow 0$，只需证明可以提取一个（不重新标记的）子序列，使该子序列满足式（16）中的极限关系。

由格罗莫夫紧致性定理、阿尔泽`拉–阿斯科利定理以及 x 的选取（特别是（4））， 我们可以假设（取一个不重新标记的子序列后）

$$(\mathsf{X}, \mathsf{d}_{\delta_k}, \mathsf{m}^x_{\delta_k}, x) := (\mathsf{X}, \delta_k^{-1}\mathsf{d}, \mathsf{m}/\mathsf{m}(B_{\delta_k}(x)), x) \to (\mathbb{H}^n, \mathsf{d}_{\mathbb{H}}, \underline{\mathcal{L}}^{2n+1}, 0) \qquad \text{in the pmGH topology}$$

并且 $f_k := \delta_k^{-1}(f - f(x))$ 局部一致收敛于线性函数 $L_x\colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$，其中，对于某个 $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_{2n}, 0)$，且 $(\zeta_1, \dots, \zeta_{2n}) \in \mathbb{S}^{2n-1}$，

$$L_x(y) = \mathrm{lip}(f)(x)(y \cdot \zeta) \qquad \text{for every } y \in \mathbb{H}^n$$

（见 [G´or22，定理 4。2]）。沿用引理 13 证明中的（5）和（19），（此处假设（5）发挥作用），我们归结为计算下式的极限

$$\int_{B_{\delta_k R}(x)\setminus B_{\delta_k}(x)} \chi_{\{|f(y)-f(x)|>\delta_k\}}(x,y)\frac{\delta_k^{2n+2}}{\mathsf{d}(x,y)^{2n+2}\mathsf{m}(B_{\delta_k}(x))}\frac{\delta_k^p}{\mathsf{d}(x,y)^p}\mathsf{dm}(y).$$

因此， 采用引理 13证明中的相同计算后，我们只需计算 e

$$\frac{1}{\omega_n}\int_{\{y\in\mathbb{H}^n:\mathrm{lip}(f)(x)|y\cdot\zeta|\geq 1\}}\frac{1}{\|y\|^{Q+p}}\mathsf{d}\mathcal{L}^{2n+1}(y)$$

其中 $Q := 2n + 2$。现在，如果 $\mathrm{lip}(f)(x) \neq 0$，我们进行变量代换 $z = \delta_{\mathrm{lip}(f)(x)}y$，于是得到

$$\begin{aligned}\int_{\{y:\mathrm{lip}(f)(x)|y\cdot\zeta|\geq 1\}}\frac{1}{\|y\|^{Q+p}}\mathsf{d}\mathcal{L}^{2n+1}(y) &= \mathrm{lip}(f)(x)^p\int_{\{z:|z\cdot\zeta|\geq 1\}}\frac{1}{\|z\|^{Q+p}}\mathsf{d}\mathcal{L}^{2n+1}(z)\\ &= \mathrm{lip}(f)(x)^p\int_{\mathbb{H}^n}\chi_{\{z:|z\cdot\zeta|\geq 1\}}\frac{1}{\|z\|^{Q+p}}\mathsf{d}\mathcal{L}^{2n+1}(z).\end{aligned}$$

令 $z = \delta_h\sigma$，其中 $\sigma \in \Sigma := \{u \in \mathbb{H}^n\colon \|u\| = 1\}$ 且 $h \in [0, \infty)$。那么

$$\begin{aligned}\mathrm{lip}(f)(x)^p\int_{\mathbb{H}^n}\chi_{\{z:|z\cdot\zeta|\geq 1\}}\frac{1}{\|z\|^{Q+p}}\mathsf{d}\mathcal{L}^{2n+1}(z) &= \mathrm{lip}(f)(x)^p\int_\Sigma\int_0^\infty \chi_{\{h|v\cdot\zeta|\geq 1\}}\frac{h^{Q-1}}{h^{Q+p}}\mathsf{d}h\mathsf{d}\sigma(v)\\ &= \mathrm{lip}(f)(x)^p\int_\Sigma\int_0^\infty \chi_{\{h|v\cdot\zeta|\geq 1\}}\frac{1}{h^{p+1}}\mathsf{d}h\mathsf{d}\sigma(v)\\ &= \mathrm{lip}(f)(x)^p\int_\Sigma\int_{1/|v\cdot\zeta|}^\infty \frac{1}{h^{p+1}}\mathsf{d}h\mathsf{d}\sigma(v)\\ &= \frac{\mathrm{lip}(f)(x)^p}{p}\int_\Sigma |v\cdot\zeta|^p\mathsf{d}\sigma(v),\end{aligned}$$

其中 $\mathsf{d}\sigma$ 是 Σ上的一个合适的 Radon 测度，参见 [FS82，命题 1。15]证明完毕。 □

放大论证的应用

命题 15。 设 (X,d,m) 是一个 PI 空间，满足假设 A 或假设 B。设 $f \in \mathrm{LIP}_{\mathrm{bs}}(\mathsf{X})$。那么，对于每个 $p \in (1, \infty)$，

$$\lim_{\delta\searrow 0} I_\delta(f) = \frac{C_{n,p}}{p\omega_n}\int_{\mathsf{X}}\mathrm{lip}(f)^p\mathsf{dm}, \tag{26}$$

其中 $C_{n,\ p}$ 与定义5中的相同。

证明。 令 $C>0$ 表示一个仅依赖于（X，d，m）的常数，并且在证明过程中可能变化。通过缩放，我们可以假设 f 是 1-利普希茨的，因此根据（10），对于每个 $x\in\mathsf{X}$，

$$\begin{aligned}&\int_{\mathsf{X}}\chi_{\{|f(x)-f(y)|>\delta\}}(x,y)\frac{\delta^p}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p}\mathsf{dm}(y)\\&\quad\le\int_{\mathsf{X}\setminus B_\delta(x)}\frac{\delta^p}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p}\mathsf{dm}(y)\le C.\end{aligned}\tag{27}$$

固定 $\bar{x}\in\mathsf{X}$ 和 $\bar{r}>0$，使得 f 的支集包含于 $\hat{}B_1:=B_{\bar{r}}(\bar{x})$ 中，并令 $\hat{}B_2:=B_{\bar{r}+1}(\bar{x})$。现在我们进行计算，注意到若 $x\notin\hat{}B_2$ 且 $y\notin\hat{}B_1$，则 $f(x)=f(y)=0$，根据 Fubini定理，

$$\begin{aligned}&\int_{\mathsf{X}\setminus\hat{B}_2}\int_{\mathsf{X}}\chi_{\{|f(x)-f(y)|>\delta\}}(x,y)\frac{\delta^p}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p}\mathsf{dm}(y)\mathsf{dm}(x)\\&\quad\le\int_{\mathsf{X}\setminus\hat{B}_2}\int_{\hat{B}_1}\frac{\delta^p}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p}\mathsf{dm}(y)\mathsf{dm}(x)\\&\quad=\delta^p\int_{\hat{B}_1}\int_{\mathsf{X}\setminus\hat{B}_2}\frac{1}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p}\mathsf{dm}(x)\mathsf{dm}(y)\\&\quad\le\delta^p\int_{\hat{B}_1}\int_{\mathsf{X}\setminus B_1(y)}\frac{1}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p}\mathsf{dm}(x)\mathsf{dm}(y)\le\delta^p\mathsf{m}(\hat{B}_1)C,\end{aligned}\tag{28}$$

其中最后一个不等式由（10）得出。

此外，由（27），结合控制收敛定理以及引理 16 中的（13 ）或引理25）中的（14 ），可推知

$$\begin{aligned}&\lim_{\delta\searrow0}\int_{\hat{B}_2}\int_{\mathsf{X}}\chi_{\{|f(x)-f(y)|>\delta\}}(x,y)\frac{\delta^p}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p}\mathsf{dm}(y)\mathsf{dm}(x)\\&\quad=\int_{\hat{B}_2}\frac{C_{n,p}}{p\omega_n}\mathrm{lip}(f)^p(x)\mathsf{dm}(x).\end{aligned}\tag{29}$$

因此，（26）由（28）和（29）推出。 □

注记 16。 值得注意的是，引理 13 和命题15 在“局部版本”中也成立，即在开集 $\Omega\subseteq\mathsf{X}$上积分，证明相同。例如，若 (X,d,m) 是满足假设 A 的 PI空间，$\Omega\subseteq\mathsf{X}$ 是开集且 $f\in\mathrm{LIP}_{\mathrm{bs}}(\mathsf{X})$，那么，对每个 $p\in(1,\infty)$，

$$\lim_{\delta\searrow0}\iint_{\{(x,y)\in\Omega\times\Omega:|f(x)-f(y)|>\delta\}}\frac{\delta^p}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p}\mathsf{dm}(y)\mathsf{dm}(x)=\frac{C_{n,p}}{p\omega_n}\int_\Omega\mathrm{lip}(f)^p\mathsf{dm},$$

其中$C_{n,\ p}$ 如定义5所述。 ■

3.2 主要结果的证明

我们首先回顾定义 I_δ 和 J_δ，见定义10。

定理4的证明。 首先假设 $f\in W^{1,\ p}(\mathsf{X})$。根据定理3 可得

$$\sup_{\delta\in(0,1)}I_\delta(f)<\infty.$$

然后我们可以对 $\varepsilon\in(0,1)$ 在（15）中的取上确界，并证明该断言。

反过来，假设

$$\sup_{\delta\in(0,1)}\iint_{|f(x)-f(y)|\le1}\frac{\delta|f(x)-f(y)|^{p+\delta}}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p}\mathsf{dm}(y)\mathsf{dm}(x)<\infty$$

并且

$$\iint_{|f(x)-f(y)|>1} \frac{1}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p}\mathsf{dm}(y)\mathsf{dm}(x) < \infty.$$

因此，

$$\sup_{\delta\in(0,1)} \iint_{\mathsf{X}\times\mathsf{X}} \frac{\delta(|f(x)-f(y)|\wedge 1)^{p+\delta}}{\mathsf{m}(B_{\mathsf{d}(x,y)}(x))\mathsf{d}(x,y)^p}\mathsf{dm}(y)\mathsf{dm}(x) < \infty,$$

以便我们可以沿用 [DS19中定理 1 下界的证明。5] 并得出 $f \in W^{1,p}(\mathsf{X})$。

□

定理 6 的证明。考虑到命题 15 和定理 2，该证明与 [NPSV18，命题 3.3] 的证明并无太大不同。根据 [ACDM15] （以及直接的逼近论证），我们有一个序列 $(f_l)_l \subseteq \mathrm{LIP}_{\mathrm{bs}}(\mathsf{X})$，满足 $f_l \to f$ 属于 $W^{1,p}(\mathsf{X})$。我们利用引理 11 的 (14) 推知，对每个 l，以及每个 $\delta, \varepsilon \in (0,1)$，

$$I_\delta(f) \le \frac{1}{\varepsilon^p} I_{\varepsilon\delta}(f-f_l) + \frac{1}{(1-\varepsilon)^p} I_{(1-\varepsilon)\delta}(f_l). \tag{30}$$

因此，利用命题 15 和定理 2 的 (C_U)（其中给出了

$$\limsup_{\delta\searrow 0} I_\delta(f) \le \frac{C_U}{\varepsilon^p}\mathrm{Ch}_p(f-f_l) + \frac{1}{(1-\varepsilon)^p}\frac{C_{n,p}}{p\omega_n}\mathrm{Ch}_p(f_l),$$

由于上极限具有次可加性。现在令 $l\to\infty$ 以推得

$$\limsup_{\delta\searrow 0} I_\delta(f) \le \frac{1}{(1-\varepsilon)^p}\frac{C_{n,p}}{p\omega_n}\mathrm{Ch}_p(f)$$

然后令 $\varepsilon \searrow 0$ 以推得

$$\limsup_{\delta\searrow 0} I_\delta(f) \le \frac{C_{n,p}}{p\omega_n}\mathrm{Ch}_p(f). \tag{31}$$

在（30）中交换 f 和 f_l 的角色，

$$I_\delta(f_l) - \frac{1}{\varepsilon^p} I_{\varepsilon\delta}(f-f_l) \le \frac{1}{(1-\varepsilon)^p} I_{(1-\varepsilon)\delta}(f),$$

因此，再由命题 15 的（26）和定理 2 （其中对 C_U的定义），

$$\frac{C_{n,p}}{p\omega_n}\mathrm{Ch}_p(f_l) - \frac{C_U}{\varepsilon^p}\mathrm{Ch}_p(f-f_l) \le \frac{1}{(1-\varepsilon)^p}\liminf_{\delta\searrow 0} I_\delta(f),$$

由于下极限具有超可加性。再次，我们令 $l\to\infty$ 从而推得

$$\frac{C_{n,p}}{p\omega_n}\mathrm{Ch}_p(f) \le \frac{1}{(1-\varepsilon)^p}\liminf_{\delta\searrow 0} I_\delta(f)$$

然后我们令 $\varepsilon \searrow 0$ 从而推得

$$\frac{C_{n,p}}{p\omega_n}\mathrm{Ch}_p(f) \le \liminf_{\delta\searrow 0} I_\delta(f). \tag{32}$$

因此，（6）由（31）和（32）得出。此外，我们可以用（6）在（$\varepsilon \searrow 0$ 15）中令，从而推出（7）。

□

致谢：我们衷心感谢 Gioacchino Antonelli 就 [ALDM23] 的内容与我们进行了有益的讨论，也感谢 Hoai-Minh Nguyen 对本稿早期版本提出了宝贵意见。本研究的部分工作是在第一作者访问特伦托大学期间完成的`；第一作者谨向该研究所致以谢意，感谢其热情接待。

参考文献

[ACDM15] Luigi Ambrosio、Maria Colombo 和 Simone Di Marino。《度量测度空间中的 Sobolev 空间：自反性与斜率的下半连续性》。载于《演化对象的变分方法》，纯粹数学高级研究第 67 卷，第 1–58 页。日本数学会，［东京］, 2015。[AGS13] Luigi Ambrosio、Nicola Gigli 和 Giuseppe Savar´è。《度量测度空间中 Lipschitz 函数的稠密性与弱梯度的等价性》。《伊比利亚美洲数学评论》，29(3):969–996，2013年。[AGS14] Luigi Ambrosio、Nicola Gigli 和 Giuseppe Savar´è。《度量测度空间中的微积分与热流，以及在具有里奇曲率下界的空间中的应用》。《数学发明》，195(2):289–391，2014年。[ALDM23] Gioacchino Antonelli、Enrico Le Donne 和 Andrea Merlo。《卡诺可求长化与 Alberti表示》，2023年。[Bat22] David Bate。《利用切空间刻画可求长度量空间》。《数学发明》，230(3):995–1070，2022年。[BB11] Anders Bj¨orn 和 Jana Bj¨orn。《度量空间上的非线性势理论》，EMS数学专著丛书第 17 卷。欧洲数学学会（EMS），苏黎世，2011年。[BBM01] Jean Bourgain、Haim Brezis 和 Petru Mironescu。《重新审视 Sobolev 空间》。载于《最优控制与偏微分方程》，第 439–455 页。IOS，阿姆斯特丹，2001年。[BLU07] Andrea Bonfiglioli、Ermanno Lanconelli 和 Francesco Uguzzoni。《分层李群及其次拉普拉斯算子的势理论》。施普林格数学专著。施普林格，柏林，2007年。[BN06] Jean Bourgain 和 Hoai-Minh Nguyen。《Sobolev 空间的一种新刻画》。《巴黎科学院数学报告》，343(2):75–80，2006年。[BN16a] Ha¨ïm Brezis 和 Hoai-Minh Nguyen。《重新审视 BBM公式》。《林琴国家科学院院刊：数学与应用》，27(4):515–533，2016年。[BN16b] Ha¨ïm Brezis 和 Hoai-Minh Nguyen。《BV范数的两种精妙凸非局部逼近》。《非线性分析》，137:222–245，2016年。[BN17] Ha¨ïm Brezis 和 Hoai-Minh Nguyen。《收敛至全变差的非凸非局部泛函》。《巴黎科学院数学报告》，355(1):24–27，2017年。[BN18] Ha¨ïm Brezis 和 Hoai-Minh Nguyen。《与全变差相关的非局部泛函及其与图像处理的联系》。《偏微分方程年刊》，4(1):第 9 号论文，77，2018年。[BPP22] Camillo Brena、Enrico Pasqualetto 和 Andrea Pinamonti。《通过热核的短时行为研究 RCD空间上的 Sobolev 函数与 BV 函数》。预印本，arXiv:2212.03910，2022年。[Bre02] Ha¨ïm Brezis。《如何识别常函数：与 Sobolev 空间的联系》。《数学科学进展》，57(4(346)):59–74，2002年。[BSVSY22] Ha¨ïm Brezis、Andreas Seeger、Jean Van Schaftingen 和 Po-Lam Yung。《再论 Sobolev 空间》。预印本，arXiv:2202.01410，2022年。[BVSY21a] Ha¨ïm Brezis、Jean Van Schaftingen 和 Po-Lam Yung。《分数阶 Sobolev、Gagliardo 和 Nirenberg 估计失效时转向洛伦兹空间》。《Calc. Var. Partial Differential Equations》，60(4):第 129 号论文，12，2021年。

[BVSY21b] Ha¨ım Brezis、Jean Van Schaftingen 和 Po-Lam Yung。Sobolev 范数的一个惊人公式。美国国家科学院院刊，118(8)：论文编号 e2025254118，6，2021年。[Che99] Jeff Cheeger。度量测度空间上 Lipschitz 函数的可微性。Geom. Funct. Anal.，9(3)：428–517，1999。[CLL14] Xiaoyue Cui、Nguyen Lam 和 Guozhen Lu。海森堡群上 Sobolev 空间的新刻画。《泛函分析杂志》，267(8)：2962–2994，2014年。[Dó2] Juan D´avila。关于有界变差函数的一个未决问题。Calc. Var. Partial Differential Equations，15(4)：519–527，2002。[DS19] Simone Di Marino 和 Marco Squassina。Sobolev 度量空间的新刻画。《泛函分析杂志》，276(6)：1853–1874，2019。[FS82] Gerald B. Folland 和 Elias Stein。齐性群上的 Hardy 空间。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1982年。[GMS15] Nicola Gigli、Andrea Mondino 和 Giuseppe Savar´e。带基点非紧度量测度空间的收敛，以及 Ricci 曲率界和热流的稳定性。Proc. Lond. Math. Soc. (3)，111(5)：1071–1129，2015年。[G´or22] Wojciech G´orny。具有欧几里得切锥的度量空间中的 Bourgain–Brezis–Mironescu 方法。《几何分析杂志》，32(4)：128，2022年。[GT22] Nicola Garofalo 和 Giulio Tralli。二阶 Carnot 群中的 Bourgain-Brezis-Mironescu-Davila 定理，2022年。即将发表于《分析与几何通讯》。[LPZ22] Panu Lahti、Andrea Pinamonti 和 Xiaodan Zhou。通过度量空间中的非局部泛函刻画 BV 函数和 Sobolev 函数。预印本，arXiv:2207.02488，2022年。[LS11] Giovanni Leoni 和 Daniel Spector。Sobolev 和 BV 空间的刻画。J. Funct. Anal.，261(10)：2926–2958，2011年。[LS14] Giovanni Leoni 和 Daniel Spector。“Sobolev 和BV空间的刻画”勘误 [J. Funct. Anal. 261 (10) (2011) 2926–2958]。J. Funct. Anal.，266(2)：1106–1114，2014年。[MP19] Ali Maalaoui 和 Andrea Pinamonti。Carnot 群中的插值与分数阶 Sobolev 空间。《非线性分析》，179：91–104，2019年。[MS02] V. Maz’ya 和 T. Shaposhnikova。关于分数阶 Sobolev 空间极限嵌入的 Bourgain、Brezis 和 Mironescu 定理。J. Funct. Anal.，195(2)：230–238，2002年。[Ngu06] Hoai-Minh Nguyen。Sobolev 空间的一些新刻画。J. Funct. Anal.，237(2)：689–720，2006年。[Ngu08] Hoai-Minh Nguyen。Sobolev 空间的进一步刻画。J. Eur. Math. Soc. (JEMS)，10(1)：191–229，2008年。[Ngu11a] Hoai-Minh Nguyen。 Γ-收敛、Sobolev 范数与 BV 函数。Duke Math. J.，157(3)：495–533，2011年。[Ngu11b] Hoai-Minh Nguyen。若干与 Sobolev 范数相关的不等式。Calc. Var. Partial Differential Equations，41(3-4)：483–509，2011年。

[NPSV18] Hoai-Minh Nguyen、Andrea Pinamonti、Marco Squassina 和 Eugenio Vecchi。磁性 Sobolev 空间的新刻画。Advances in Nonlinear Analysis，7(2):227–245，2018年。[NPSV20] Hoai-Minh Nguyen、Andrea Pinamonti、Marco Squassina 和 Eugenio Vecchi。磁性 Sobolev 空间的一些刻画。Complex Var. Elliptic Equ.，65(7):1104–1114，2020年。[NS19] Hoai-Minh Nguyen 和 Marco Squassina。关于各向异性 Sobolev 空间。Commun. Contemp. Math.，21(1):1850017，13，2019年。[Pon04] Augusto C. Ponce。Sobolev 空间的新方法及其与 Γ- 收敛的联系。Calc. Var. Partial Differential Equations，19(3):229–255，2004年。[PSV19] Andrea Pinamonti、Marco Squassina 和 Eugenio Vecchi。磁性 BV 函数与 Bourgain-Brezis-Mironescu 公式。Adv. Calc. Var.，12(3):225–252，2019年。[RB23] Patricia Alonso Ruiz 和 Fabrice Baudoin。黎曼流形上 BV 函数的又一种热半群刻画。预印本，arXiv:2010.12131，2023年。[RBC+20] Patricia Alonso Ruiz、Fabrice Baudoin、Li Chen、Luke G. Rogers、Nageswari Shanmugalingam 和 Alexander Teplyaev。通过 Dirichlet 空间上的热半群刻画 Besov 类 I：Sobolev 型不等式。J. Funct. Anal.，278(11):108459，48，2020年。