高功率磁屏蔽霍尔推力器的降阶粒子网格模拟

M. Reza[*1]、F. Faraji[*]、A. Knoll[*]、A. Piragino[†2]、T. Andreussi[†2]、T. Misuri[‡]

[*]等离子体推进实验室，航空系，帝国理工学院，英国伦敦

[†]土木与工业工程系，比萨大学，比萨，意大利

[‡] SITAEL SpA，比萨，意大利

摘要：近年来，为满足新一代在轨服务和探测任务的需求，高功率磁屏蔽霍尔推力器应运而生。尽管目前已有少数此类推力器进入开发后期和鉴定试验阶段，但对于这类采用非常规磁场拓扑的大尺寸推力器中等离子体的行为和演化，仍有许多未解之谜。鉴于霍尔推力器中的等离子体过程具有复杂的多维特性，高保真粒子网格（PIC）模拟是研究复杂等离子体行为的理想工具。然而，传统多维PIC方案的计算成本极高，使得在不采用任何会改变物理过程的加速因子的情况下模拟高功率推力器并不可行。新型降阶“准二维”PIC方案可显著降低PIC模拟所需的计算成本。因此，本文通过对一台20千瓦级磁屏蔽霍尔推力器进行轴向-方位和径向-方位坐标下的模拟，展示了降阶PIC方法在高功率霍尔推力器物理过程的高效、自洽研究中的适用性。轴向-方位准二维模拟针对三种运行工况开展，采用了对推力器固有三维构型相当简化的表述。尽管如此，我们仍自洽地解析了长达650 μs、前所未有的放电演化过程，未采用任何临时设定的电子迁移率模型，捕捉到了多个呼吸振荡周期，并且在各种运行工况下，实验性能参数的近似精度达到70%至80%。径向-方位角模拟在放电通道内对应不同轴向位置的三个横截面上进行，进一步揭示了方位向不稳定性的演化，以及由此导致的电子跨场迁移率和等离子体-壁面相互作用的变化。具体而言，我们观察到，在推力器通道出口平面附近形成了一种长波长、相对低频的波模态，它会引发显著的电子输运和离子加热。

第1节：引言

如今，人们正在规划创新性的近地空间和行星际空间任务，旨在一方面实现对太空的可持续、负责任利用，另一方面拓展人类探索太空的能力，从月球到火星乃至更远之处。高功率磁屏蔽霍尔推力器 [1][2][3][4] 目前被视为最有希望实现这些新型任务方案的电推进（EP）概念之一。事实上，这类推力器兼具高推进剂吞吐能力和长寿命特性，而这正是新一代任务所必需的 [5]。此外，这些先进的霍尔推力器还具备霍尔推力器技术通常具有的高推力功率比和运行灵活性。

然而，近十年来对此类霍尔推力器的研发和测试经验，一方面揭示了将这项新技术发展至取得认证并具备飞行条件所需的巨大成本和时间。另一方面，过去几年对霍尔推力器开展的大量研究表明，地面真空测试设施会影响磁屏蔽和传统“非屏蔽”构型霍尔装置的性能与稳定性 [6][7][8][9]。事实上，观察发现，测试环境会改变其基本物理过程，例如电子的跨场迁移率和整体放电动力学 [10][11][12]，，从而显著影响表征/认证测试结果对于在轨运行的可靠性。最后，全球范围内日益形成共识：目前的认证策略主要侧重于针对预定运行方案对霍尔推进系统进行单次寿命测试，这并非最可靠的方法，因为从统计角度看，这种方法缺乏足够的统计数据，无法可靠地量化风险并制定适当的安全裕度 [13]。

上述认识再次凸显了高保真预测模型的必要性。这类模型有助于霍尔推力器的设计、开发和测试，从而减少所需的成本和时间；

[1] 通讯作者 (m.reza20@imperial.ac.uk)[2] 前任所属机构：
SITAEL SpA

同时提升这项技术的可靠性，尤其是考虑到这些装置最有望应用于复杂且要求严苛的任务场景。

无论如何，多年来，针对低计算成本流体等离子体模拟代码 [14]-[19] 开发可靠且具有普适性的闭合模型的努力，至今仍未完全成功，因此这些数值工具还无法作为霍尔推力器等离子体行为的预测模型使用。此外，尽管传统的全动理学PIC代码能够提供高水平的保真度，并有能力揭示潜在的物理过程及其相互作用，但对于实际尺寸的大功率霍尔推力器而言，在不采用任何会改变物理过程的加速缩放因子的情况下，其计算成本极其高昂，因此将其作为辅助设计和测试的工具并不现实。为直观体现这一巨大的计算成本，根据参考文献 [20], 模拟150 μ次中等功率等级、5 kW轴向-方位角构型霍尔推力器放电演化的过程，需要在1500个中央处理器上运行一年多的时间。鉴于传统PIC模拟在先进霍尔推力器建模方面难以承受的成本，近年来，人们采用流体/PIC混合模拟 [21]-[23] 研究这些器件的工作物理机制；尽管这类模拟为侵蚀等离子体现象提供了宝贵的洞见， [21], 但缺乏对电子动力学的自洽描述，因此依赖于使用需要通过实验数据进行调节的临时性电子输运模型。

在这方面，降阶PIC方案有望成为先进霍尔推力器等离子体动理学建模领域的一项突破，使自洽模拟所需的计算成本仅为传统多维PIC方案的一小部分。本研究的主要目标正是证明降阶PIC作为一种经济高效的工程建模工具的适用性。文献 [24][25]介绍了降阶PIC方案的概念，以及将其实现为用于准二维模拟的静电显式代码IPPL[1]-Q2D。降阶PIC以将模拟域分解为所谓的“区域”为基础，并采用一种降维技术，使得能够在每个区域内分别解析沿相关模拟方向的等离子体参数变化。IPPL-Q2D代码已在符合霍尔推力器几何特征的轴向-方位坐标和径向-方位坐标构型中得到全面验证[24][25]。我们特别证明，在轴向-方位坐标中，“单区域”准二维模拟可将计算成本降低两个数量级，同时捕捉方位向不稳定性对电子横向输运的平均影响，从而能够相当准确地预测沿推力器轴向的等离子体动力学[26][27][28]。此外，在径向-方位坐标中，我们表明，与完整二维模拟相比，“多区域”准二维模拟可实现约一个数量级的加速，并能高保真地预测相关物理过程及等离子体性质分布，其结果与完整二维模拟相符[25]。因此，在先前的工作中[29] ，我们采用“多区域”准二维模拟，在通用的径向-方位 $E \times B$ 模拟设置中，全面研究了磁场梯度、二次电子发射和等离子体密度对不稳定性及波致电子输运的影响。

因此，本文介绍了我们对20千瓦级磁屏蔽霍尔推力器研制型——SITAEL的HT20k——开展单区域轴向-方位向和多区域径向-方位角准二维PIC模拟所得到的结果，该推力器已在文献[12] 和[30]中进行了描述。值得注意的是，诸如HT20k这样的磁屏蔽霍尔推力器具有复杂的磁场拓扑，且沿径向存在较大的梯度。这意味着，与采用常规磁场拓扑的霍尔推力器相比，这些推力器中的等离子体构型呈现出更显著的三维特性。因此，针对HT20k的轴向-方位向模拟构型本质上无法解析径向梯度。无论如何，通过采用单区域近似开展准二维轴向-方位向模拟，我们主要旨在研究此类自洽且低计算成本的动理学模拟在预测实验性能参数和整体放电动力学方面所能达到的准确程度。反过来，开展径向-方位角模拟是为了补充轴向-方位向研究，强调磁场中的径向梯度对等离子体性质径向分布以及相关等离子体过程时空演化的重要影响。

第2节：准二维轴向-方位向模拟

单区域准二维轴向-方位向模拟的设置见第2.1节。在第2.2节中，我们将讨论这些模拟对整体性能参数和宏观特性的预测。

[1] 帝国等离子体推进实验室

放电特性、方位角波的特征、等离子体各组分轴向和方位角分布函数的演变，以及电子轴向迁移率的总体分布。

2.1. 模拟**的设置和条件**

轴向-方位向模拟在构型空间中为准二维，在速度空间中为三维。模拟的计算域是一个笛卡尔 $x-z$ 平面，其中 x 坐标沿轴向，z 坐标沿方位角方向。阳极位于计算域左侧，而阴极边界位于右端。沿轴向，通道出口平面位于计算域中部，即 x/L_x= 1.0。因此，模拟的羽流长度等于通道的轴向范围。沿方位角方向，计算域长度为 2 厘米。

模拟开始时，电子和离子分别按照 10 eV（电子）和 0.5 eV（离子）的麦克斯韦分布进行采样。随后，这些粒子在整个计算域内均匀注入，且注入位置完全相同。为维持放电，每个时间步都会从阴极边界以 5 eV 半麦克斯韦分布采样电子，并将其注入计算域。待注入的电子数量根据阴极处的准中性方法确定 [20]。

如第1节所述，采用“单区域”分解[24][27] 来近似二维等离子体电势。在 IPPL-Q2D 中，利用降维技术得到的耦合一维泊松方程组，通过降维泊松求解器（RDPS）[24]求解，以获得沿模拟方向的一维电势函数。计算域轴向两端采用狄利克雷电势边界条件，阴极侧为 0 V，阳极侧为 300 V。方位角方向的两端采用周期性边界条件。轴向和方位角方向的电势边界条件在 RDPS 中的处理方法见参考文献 [24]。

对于等离子体粒子的边界条件，假设方位角方向为周期性边界。因此，从计算域一端离开的粒子会从另一端重新注入。沿轴向，抵达计算域阳极侧或阴极侧的离子和电子均会从模拟中移除。不过，模拟中考虑了阳极上的离子复合及由此产生的中性粒子注入。

轴向-方位向模拟中，中性粒子的动力学通过求解一维轴向流体欧拉系统方程，以其密度和速度的演化来描述。对中性粒子采用流体描述，符合当前研究群体在轴向-方位向模拟中所采用的做法 [20][31]。有关我们的中性粒子流体求解器、基准测试结果，以及其在 SPT100 型霍尔推力器计算域的一维轴向和准二维轴向-方位向模拟中的应用，详见参考文献 [32]。在该文献中，作者证明，在缺少径向维度，尤其是缺少羽流中性粒子的径向膨胀时，使用一维欧拉系统方程描述中性粒子，可视为对其动力学-DSMC 处理的一种合理近似。

假设中性粒子流以 650 K 的温度保持等温。因此，不求解能量方程，而是使用状态方程闭合欧拉系统。由于将中性粒子视为流体，为计入阳极上离子复合产生的中性粒子，计算相应的质量流率，并将其加到由气体分配器注入的质量流率中 [20]。忽略真空腔室中残余中性粒子造成的背景压力以及阴极羽流中的中性粒子数量。因此，不考虑从阴极边界注入中性粒子。

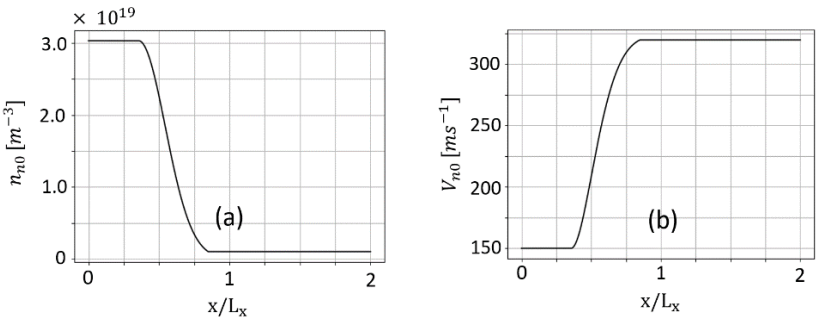

图1：轴向-方位向 HT20k 仿真所用的中性粒子密度（左）和中性粒子速度（右）的初始轴向分布

中性粒子密度和轴向速度的初始分布如图1所示。需要指出的是，初始中性粒子密度和速度分布的具体选择主要影响初始放电瞬态，而采用不同初始分布的模拟最终应当收敛到相似的准稳态。因此，预计图1所示的初始分布不会在放电演化的初始瞬态阶段之后显著影响等离子体行为。

在模拟中使用蒙特卡罗碰撞（MCC）方案[33]解析电子-中性粒子碰撞。本研究在MCC模块中纳入了以下碰撞事件：单电离、四种激发以及弹性动量转移碰撞。这些碰撞的横截面取自Biagi-v7.1 数据集 [34]。未考虑离子-中性粒子碰撞和离子-电子碰撞。特别是关于电子-离子碰撞，先前的研究（例如文献[20], ）发现，其影响较小，尤其是在不考虑电子-壁面相互作用时。

表1总结了准二维轴向-方位向模拟所用的数值参数和物理参数。

参数	值 [单位]
计算参数	
网格尺寸（$\Delta x = \Delta z$）	20 $[\mu m]$
时间步长 (ts)	2×10^{-12} $[s]$
轴向网格每个单元的初始宏粒子数 $(N_{ppc,\ x})$	25
方位向网格每个单元的初始宏粒子数 $(N_{ppc,z})$	120
总模拟时间	650 $[\mu s]$
物理参数	
初始等离子体密度 $(n_{i,0})$	1×10^{17} [米$^{-3}$]
电子温度 $(T_{e,\ 0})$（初始负载）	10 $[eV]$
电子温度（$T_{e,c}$）（阴极注入）	5 $[eV]$
离子注入温度（$T_{i,0}$）	0.5 $[eV]$
中性粒子温度 (T_n)	650 $[K]$
阳极电压 (V_a)	300 $[V]$

表1：用于 HT20k 轴向-方位向模拟的数值参数和物理参数汇总。

针对HT20k的三种运行条件进行了轴向-方位向模拟，其中推力器以氙作为推进剂运行。表2概述了运行参数。不同运行条件下的峰值磁场强度均以案例 II的峰值磁场强度为基准进行归一化，该值表示为B_0。

仿真案例/ 运行参数	放电电压 **[V]**	阳极质量流率 [毫克/秒]	磁场峰值强度 **[mT]**
I	300	25	$B_{\bar{1}}$ 0.8$B_{\ 0}$
II	300	30	$B_2 = B_0$
III	300	35	$B_{\bar{3}}$ 1.5$B_{\ 0}$

表 2：准二维轴向-方位向模拟所采用的 HT20k 运行条件

图2展示了不同模拟运行工况下归一化径向磁场强度的轴向分布。对于轴向-方位向模拟，磁场仅有一个径向分量（指向模拟平面外），其大小沿轴向的变化如图2所示。

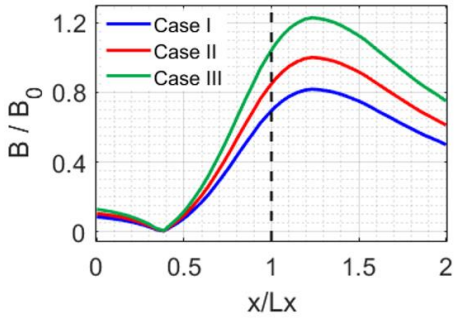

图2：三个模拟工况的归一化径向磁场强度轴向分布

2.2. 结果与讨论

我们首先参考表3和图3，讨论准二维轴向-方位向模拟的结果。表3列出了各运行工况下预测的性能参数；图3则对比了模拟性能与文献[12]所报告的测量性能随阳极质量流率（AMFR）的变化情况。应SIT AEL要求，图中数据以无量纲形式呈现。具体而言，每个预测或测量的性能参数均以工况II、阳极质量流率为30 mg/s时该参数对应的测量值进行归一化。

如第2节所述，我们在模拟中未考虑中性粒子背景压力效应，因此，我们的设置相当于推力器在背景压力确实可以忽略不计的太空中运行。相应地，对于三种模拟运行工况，我们在图3中给出了较高和较低背景压力水平下的实验性能。对此，图3中以绿色圆点表示的实验数据点对应于背景压力降低一半时测得的性能。

模拟			
	工况I	案例 II	工况III
$\boldsymbol{I_d}$ $[\boldsymbol{A}]$	22.8	27.5	29.8
$\boldsymbol{T}$ $[\boldsymbol{mN}]$	350	456	510
$\boldsymbol{I_{sp}}$ $[\boldsymbol{s}]$	1906	1834	1773
$\boldsymbol{\eta_T}$ [%]	35.8	42	41.6

表3：HT20k 在三种运行条件下准二维模拟所得的时间平均性能参数

表3所示的预测性能值是对多个呼吸振荡周期取平均后得到的。在这方面，我们在模拟中将瞬时放电电流（I_d）计算为每个时间步长到达阳极的电子通量与离子通量之差。此外，我们还在模拟过程中使用以下关系式估算推力（T）和比冲（I_{sp}）的瞬时值：

$$T = \frac{A_{real}}{A_{sim}} \sum_n \mathcal{W}_n M_i v_{ix,n}, \quad \text{(Eq. 1)}$$

$$I_{sp} = \frac{\sum_n \mathcal{W}_n v_{ix,n}}{g_0 \sum_n \mathcal{W}_n}. \quad \text{(Eq. 2)}$$

在公式1和2中，A_{real} 和A_{sim} 分别为推力器的真实横截面积和模拟横截面积，$\mathcal{W}_n$ 为每个时间步长穿过阴极边界的每个离子的宏粒子权重，$v_{ix,\ n}$ 为每个逸出离子的轴向速度，M_i 为氙离子质量，g_0 为海平面处的重力加速度。推力效率使用推力和放电电流的时间平均值计算，表示为

$$\eta_T = \frac{T^2}{2\dot{m}_n I_d V_a}, \quad \text{(Eq. 3)}$$

其中，$\dot{m}_n$ 是从阳极注入的氙质量流率。

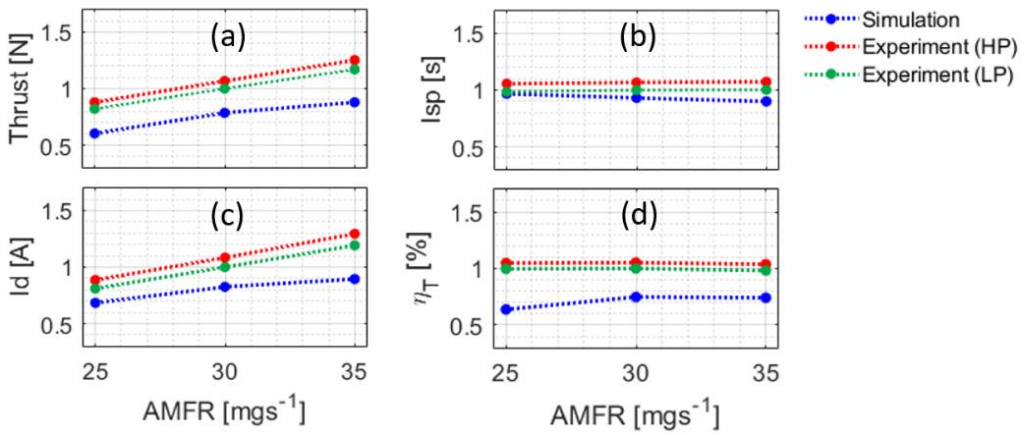

图3：模拟和实验所得归一化全局性能参数随阳极质量流率的变化 [12]；(a) 推力，(b) 比冲，(c) 放电电流，(d) 推力效率。所示低压（LP）数据点对应的性能测量值是在背景压力降低至高压（HP）数据点所对应压力一半时获得的。

从图3可以看出，随着质量流率从工况I增加到工况III，预测的时间平均推力和放电电流呈上升趋势，与实验趋势一致。推力效率随质量流率的变化也与实验结果几乎相同。

然而，模拟所得比冲会随着质量流率增加而略有下降，而实验结果中的比冲几乎保持不变。这种趋势差异的原因在于，模拟预测羽流中存在数量相对可观的慢离子群，且其占比会随质量流率增加而变得更加显著。稍后展示宏观等离子体特性分布时，将进一步阐明这一解释。尽管如此，轴向-方位向模拟中存在这样的慢离子群，而它很可能并不存在于真实推力器的羽流中；我们认为，这是因为轴向-方位向模拟无法解析现实中固有于磁屏蔽拓扑结构的磁场径向梯度所产生的约束效应。因此，未能解析径向梯度将导致模拟预测的推力和比冲与实测值之间出现偏差。事实上，正如第3.2节的径向-方位角模拟结果将证实的那样，磁场径向梯度会影响调控电子能量的等离子体过程。因此，若能解析径向坐标，预计通道内的电离会增强，使大多数离子在电场强度最大区域（加速区）之前生成，从而显著减少慢离子群。

参见图3，所有模拟工况的准二维模拟均给出了自洽的性能预测；在较低背压下，这些预测与实验值的误差范围分别为：放电电流15-25 %、推力20-25 %、比冲2-10 %。与实验值η_T相比，所有工况的推力效率误差也在25-30 %之间。

我们认为，所有模拟工况的性能参数误差都在合理可接受的范围内，尤其考虑到轴向-方位向模拟对实际推力器的表征较为简单，且采用了简化假设。不过，我们将在下文按重要性顺序指出我们认为导致实验性能与仿真性能出现差异的主要因素。需要注意的是，预计在模拟中一并解决以下所有因素后，预测的性能参数将逐渐趋近实验值。

a. 未解析径向物理：正如第1节所强调的，磁屏蔽霍尔推力器的磁拓扑及其等离子体构型本质上是三维的。因此，径向过程和梯度预计会在决定等离子体状态及其相关物理现象方面发挥重要作用，进而影响装置的整体行为和性能。第3节中的径向-方位角 HT20k 仿真正是基于上述假设开展的，结果证实了径向梯度和相互作用对等离子体过程具有重大影响。因此，我们认为，轴向-方位向模拟中缺少径向坐标，因而无法解析其对系统动力学的相应影响，是模拟性能与测量性能之间偏差的最主要来源。

b. 二维问题的单区域近似：尽管已证明，轴向-方位向模拟域的单区域近似能够自洽地捕捉方位向不稳定性对电子输运的平均影响，从而无需采用任何临时设定的迁移率模型，但它仍是针对二维问题所能建立的最简单近似。这意味着，由于采用了特定程度的降阶，单区域模拟的预测可能存在固有误差。降阶误差是任何降阶模型的典型特征，即使是全流体或混合模拟也不例外；在这类模拟中，以流体描述电子，作为一种降阶模型，取代了更准确的动力学描述，因此限制了模拟解析某些过程的能力，例如影响电子行为和/或速度分布函数（VDF）的动力学现象。无论如何，与传统二维 PIC 模拟相比，单区域降阶模拟能提供最大的计算优势。这正是本研究能够在不采用任何会改变物理过程的加速因子的情况下，对 HT20k 推力器的扩展计算域进行长时间模拟的关键；而这类加速因子本身也会给模拟预测带来误差。当然，根据我们先前的研究 [26][28], , 尽管单区域轴向-方位向模拟具有较好的准确性，但通过将计算域划分为多个区域来提高近似阶数，尤其是沿轴向划分，可以进一步减小降阶给性能预测带来的潜在误差。在这方面，基准算例 [24][25], 已验证，随着近似阶数提高，模拟结果会收敛至相应的全二维 PIC 模拟结果；同时，文中也提供了各近似阶数对应的计算加速比。

c. **缺少背景压力和来自阴极的额外中性粒子流率**：众所周知，测试设施中的背景中性粒子以及阴极质量流量分数（该分数决定阴极羽流中性粒子群体的重要性）会影响霍尔推力器的性能 [12][35]。这两个因素已被证明会对放电动力学产生类似的影响 [35], , 并增加霍尔推力器近羽流区中性粒子的数密度。升高的中性粒子数密度有一部分会被吸入推力器的放电通道，从而人为地增加推力器的有效质量流率 [12]。背景中性粒子和阴极中性粒子还会通过影响电子横向电场迁移率等基础过程，改变推力器的整体行为 [7][9][12]。因此，我们从图3中观察到，在较低的真空腔室压力下，所有测量性能参数均有所降低；并且随着质量流率增加，高背压与低背压下性能之间的差异略有增大。在这方面，尽管近年来已开展了一些工作 [12][36][37] , 旨在建立关系式，以量化背景压力对霍尔推力器性能和稳定性的影响，从而最终根据地面表征结果推导在轨性能指标，但目前仍没有可推广的方法或公式来实现这一目的。因此，我们选择在本文的轴向-方位向模拟中排除中性粒子背压的影响，同时承认这将不可避免地在预测性能中引入误差。

d. 忽略多价离子：模拟工况对应于相对较低的 300 V 放电电压下的运行条件，这为在模拟中忽略多价离子的假设提供了依据。然而，在真实环境中，通常存在一定数量的多价离子，尤其是二价离子，并且它们会对放电电流、推力和比冲产生贡献。由于目前没有关于所研究 HT20k 运行条件下多价离子群体占比的信息，我们无法量化忽略这些离子群体所带来的确切误差。不过，可以合理地认为，模拟中未能解析多价离子，可能导致模拟性能与测量性能之间存在一定差异。

e. 未考虑离子-中性粒子电荷交换（CEX）碰撞：众所周知，CEX碰撞在霍尔推力器的近羽流区域十分显著。此外，CEX碰撞和动量交换碰撞可能会抑制离子声不稳定性，也可能影响离子的速度分布函数。然而，在参考文献 [32], 中，我们表明，在无法捕捉羽流膨胀的轴向和轴向-方位角模拟中，加入CEX可能会导致离子速度预测偏低。如果在中性粒子模型中计入离子-中性粒子相互作用的影响，进而会导致羽流中的中性粒子温度和速度不切实际地偏高。这些后果确实是轴向和轴向-方位角设置所固有的，因为这类设置会高估CEX

由于与离子束相互作用的中性粒子密度增加，碰撞频率随之升高。因此，这里的模拟未考虑电荷交换碰撞，因为在不解析径向坐标的情况下，无法准确捕捉电荷交换碰撞及其影响。

基于上述说明，我们通过图4展示轴向-方位向模拟的结果。图4显示了三个模拟工况下放电电流信号的时间演化。此外，我们在图5中绘制了工况I至III的离子数密度信号的平均一维快速傅里叶变换（FFT），以评估轴向放电振荡的频率成分。

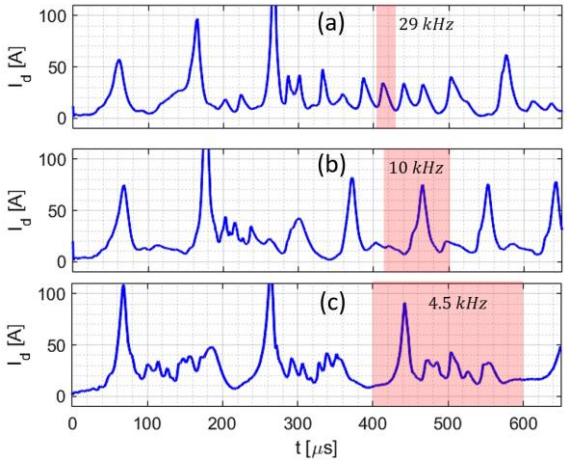

图4：（a）工况I、（b）案例II 和（c）工况III 的放电电流时间演化。高亮区域分离出了放电达到准稳态后的周期性行为中的一个周期。

从图4可以看出，所有模拟都已达到准稳态，并呈现出类似呼吸模态的周期性振荡。这一观察结果表明，单区域准二维模拟所解析的方位向不稳定性对电子轴向迁移率的平均影响，已足以维持放电并促使呼吸模态振荡发展。

然而，从图4可以看出，在不同运行工况下，放电振荡的振幅和频率各不相同。尤其是工况I和工况III，均呈现“低频”和“高频”全局放电振荡；从图5(a)和(c)中相应的FFT图也可以清楚地看到这一点。模拟预测的峰值频率与HT20k推力器三个模拟工况下实验放电电流中观测到的峰值频率一致。实验中观测到的全局放电振荡峰值频率为：工况I约为9 kHz和25 kHz；工况II和III则低于5 kHz和20 kHz。虽然无法排除实验中的高频峰值与阴极运行有关的可能性，但它们很可能与推力器本身有关，因为在磁场强度较高时并未观察到这些峰值。

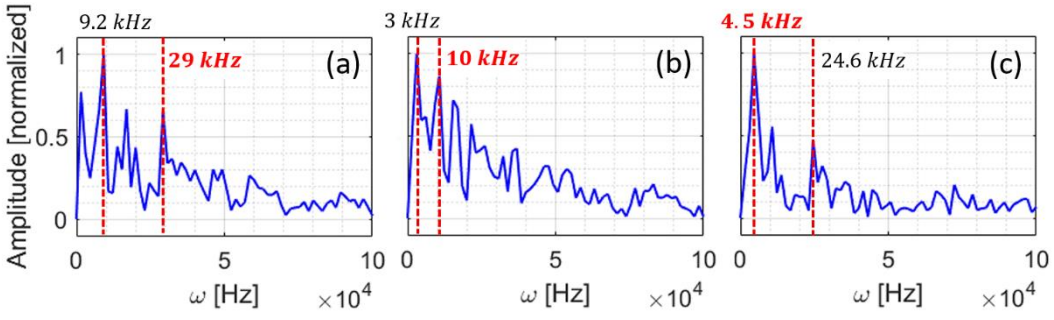

图5：准二维模拟中，沿所有轴向位置取平均的离子数密度信号的一维FFT图；(a)工况I，(b)工况II，(c)工况III。图中标出了FFT图中占主导地位的两个频率。每幅图中以红色突出显示的频率，对应于图4中各工况放电电流演化图里可观察到的周期性模式频率。

从图4可以观察到，在工况I中，放电呈现出复杂的演化过程：振荡频率先从约300 μs开始升高，此时模拟据称已达到准稳态

状态，随后又从约550 μs开始降低。这种行为使得为工况I确定单一的呼吸频率颇具挑战性。

在工况II和工况III中，与工况I相比，磁场峰值强度和质量流率依次增大。从图4和图5中的（b）和（c）图可以看出，达到准稳态后，放电中占主导地位的重复周期频率在工况II下约为10 kHz，在工况III下约为4.5 kHz。值得一提的是，文献[38] 的实验结果也显示，在放电电压约为300 V时，随着磁场强度增加，全局放电振荡的主频会降低。

在继续讨论其余结果之前，我们要强调，轴向-方位向模拟的预测结果并未与等离子体性质的直接精细测量结果进行比较，因为目前尚无针对HT20k的此类测量。因此，在考察以下结果时，应牢记本研究缺乏详细的实验验证。

图6至图8展示了HT20k在三种运行工况下进行准二维模拟所得的若干宏观放电特性的时空演化。图6展示了离子数密度和离子轴向速度的演化。图6(a)中每幅离子数密度演化图上还叠加了相应模拟工况的放电电流信号，该信号以相应放电电流的最大值进行归一化。此外，图6(b)中的白色曲线和青色曲线分别表示放电演化过程中离子零速度点和声速点轴向位置的变化。需要指出的是，离子零速度点表示离子开始向阳极回流的轴向位置。

从图 6(a) 可以看出，离子数密度（n_i）的演化如预期般与放电电流相关。事实上，放电电流的峰值对应于阳极附近离子（等离子体）数密度的最大值。此外，从图 6(b) 的离子轴向速度图中可以观察到离子的加速和向下游传播。在这方面，在通道出口上游产生的离子会加速至约 20,000 m/s，并向羽流方向传播。因此，离子零速度点和声速点的位置会随时间振荡。这两个离子特征速度点之间的轴向距离也随时间变化：当离子向羽流方向传播时，该距离达到最大；当离子前沿位于上游时，该距离则最小。

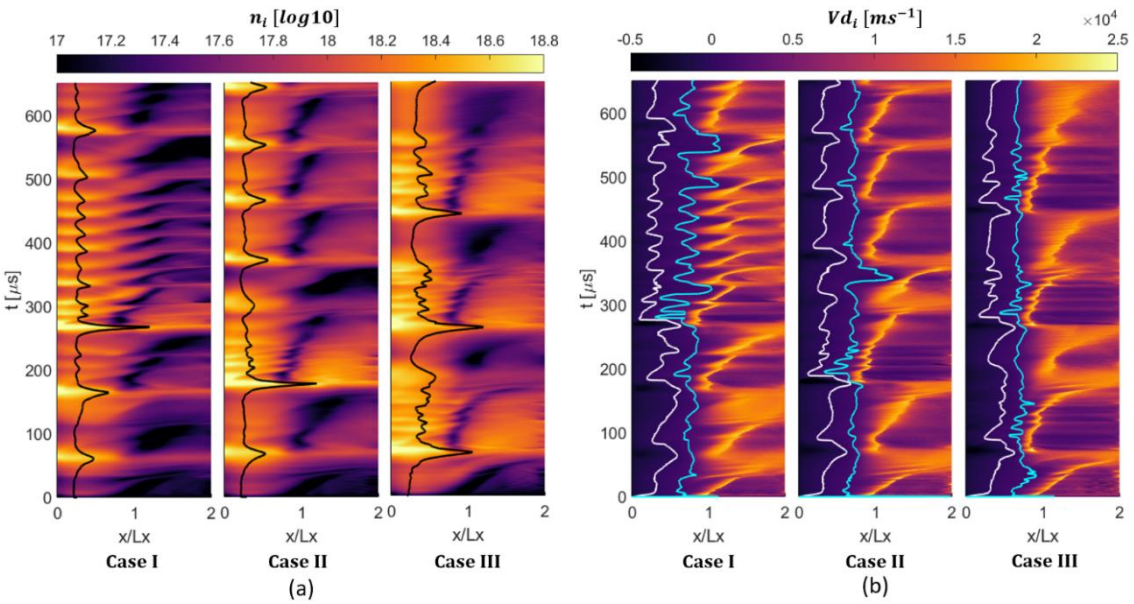

图 6：三种模拟工况下 (a) 离子数密度和 (b) 离子轴向漂移速度的时空分布图。离子密度图上叠加了归一化的放电电流信号。离子速度图中的白色和青色曲线分别描绘了离子零速度点和声速点的轴向位置。

查看每个模拟工况下 n_i 和 v_{di} 的演化图，可以观察到羽流中存在低速离子群。显然，随着阳极质量流率从工况I增加到工况III，这一慢离子群的重要性也随之增加。正如我们先前讨论性能参数时所指出的，从工况I到工况

工况III的时间平均离子排气速度下降，或者说，{v3}下降，是由于这一慢离子群的存在。之所以会出现这一离子群，是因为在较高质量流率下，通道内的电离效率降低；这是由于轴向-方位向模拟未能解析径向梯度对电离等轴向等离子体过程的重要影响。因此，随着质量流率增加，电离会在更长的尺度范围内发生，从而产生一些无法“感受到”加速区内全部等离子体电势降的离子。这些离子因此会在羽流中停留更长时间，之后才离开计算域。

图7展示了中性粒子密度（n_n）和轴向速度（V_{dn}）的时空分布图，反映了所解析的中性粒子动力学。如图 7(a)所示，可以看到，在放电电流下降结束后几乎立即，阳极位置（$x = 0$）处的中性粒子密度在所有情形下均达到峰值。这一现象可能是由于放电电流下降时，放电向阳极移动，从而导致阳极上的离子复合增加。关于中性粒子密度图，另一个值得注意的现象与中性粒子前沿向下游传播有关；这一点可以从自阳极附近延伸至羽流（[39]）的倾斜密度等值线中观察到。

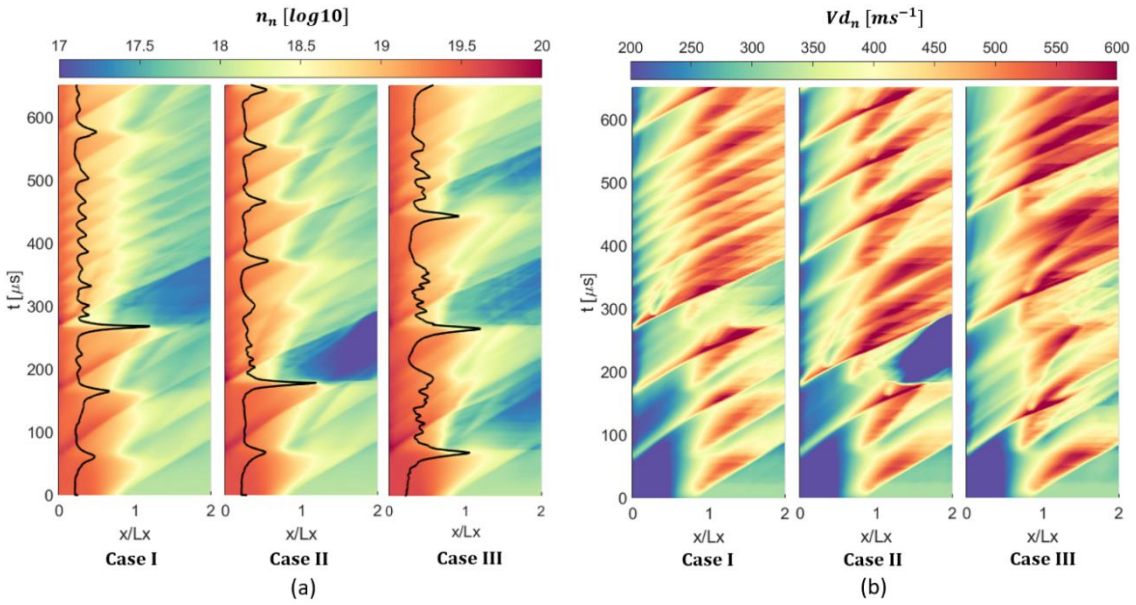

图 7：三种模拟工况的（a）中性粒子数密度和（b）中性粒子轴向漂移速度的时空分布图。中性粒子密度图上叠加了归一化放电电流信号。

观察图7(b)中的中性粒子轴向速度图可以发现，随着我们的模拟对中性粒子动量演化过程的解析，中性粒子流的轴向速度从阳极附近约200m/s 变化至羽流中的约 600 m/s。这一轴向速度的变化与文献中报道的实验观测结果一致；相关结果表明，霍尔推力器中的中性粒子在向下游传播时，其轴向速度会增加 2 至 3 倍 [40]。

图 8(a) 和 (b) 分别展示了轴向电场（E_x）和电子温度（T_e）的时空演化。在每种情形的电场图中，还叠加了相应的归一化放电电流，以及离子零速度点和声速点轴向位置的轨迹。

关于电场的演变（图 8(a)），我们看到，所有情形均捕捉到了加速区典型的前后移动，其表现为电场强度最大的区域。就此而言，正如文献所报道的那样 [20], , 随着电流增大，轴向电场峰值向出口平面下游移动（$x/L_x = 1$）；随着电流减小，峰值则退回通道内部。有趣的是，加速区的范围也会随时间变化，这在电场图中表现为最大电场区域的展宽和收窄，并伴随着峰值电场强度的变化。与加速区的移动一致，当加速区向上游移动时，离子零速度点与声速点之间的轴向距离缩短；当加速区向羽流方向移动时，该距离则增大。

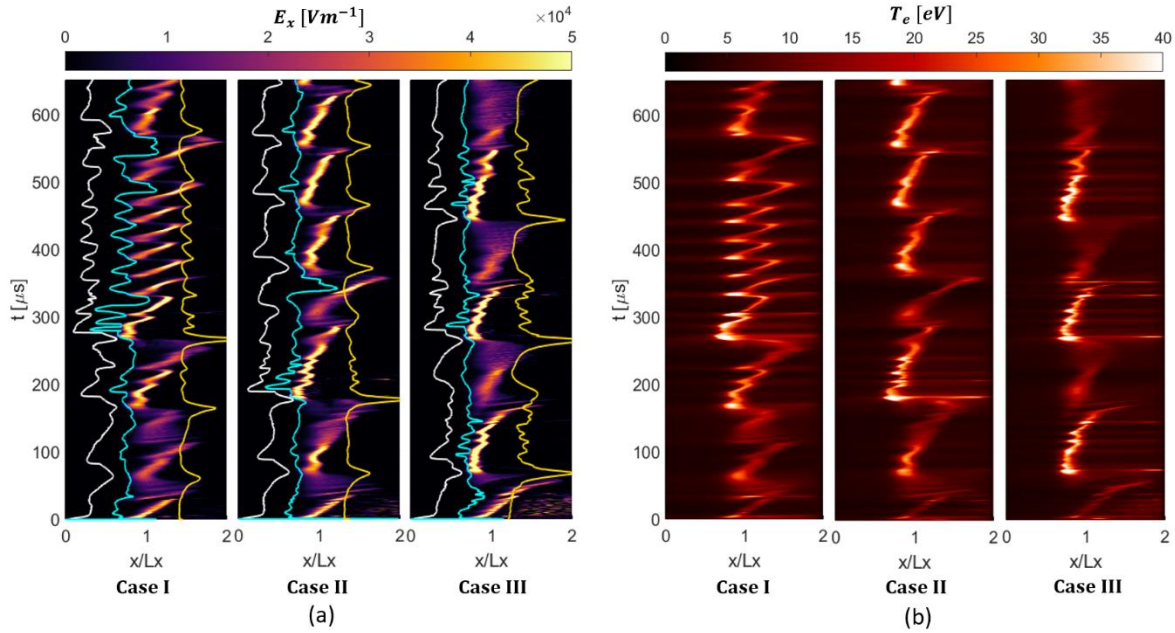

图 8：三个模拟工况的（a）轴向电场和（b）电子温度时空分布图。叠加在电场图上的黄色曲线为归一化放电电流信号。白色和青色曲线分别描绘了离子零速度点和声速点的轴向位置。

从图 8(b) 中的曲线可以看出，电子温度的演变与电场的演变完全相关。这意味着，正如预期的那样，电子温度最高的区域对应于电场最大的区域，即加速区。此外，在所有情形中，当电场强度最大的区域宽度最窄时，电子温度峰值均超过 40 eV。

图9绘出了三种模拟工况下准二维模拟所得放电特性的轴向分布，取值为 60 至 650 μs 期间的平均值。就这些时间平均分布而言，首先可以观察到，随着磁场峰值强度从工况I增加到工况III，出口平面附近等离子体电势的梯度（图9(d)，以虚线表示）也随之增大，从而使轴向电场峰值更高（图9(b)）。无论如何，工况 II 和工况III之间的电场峰值差异都很小。其次，从图(b)和(h)中的曲线可以看出，在所有情形下，离子均在电场峰值上游达到声速，即马赫数为1。用于计算声速的离子温度定义见参考文献 [24]。

第三，从工况I到工况III，阳极质量流率的增加使离子数密度升高（图9(a)），进而导致阳极附近的中性粒子密度增加（图9(e)）。这是两方面因素共同作用的结果：一方面，离子复合更加显著；另一方面，气体分配器实际注入的中性粒子速率更高。与从工况I到工况III阳极附近中性粒子数密度的升高相一致，电离率（图9(c)）也有所增加。然而，工况 II 和工况III的分布差异再次显得非常小。目前尚无对这一现象的严谨解释，仍需在未来的工作中进一步研究。不过，需要强调的是，工况 II 和工况III的结果仅在时间平均等离子体分布方面差异较小。事实上，所有模拟工况的放电时间演化都明显不同。

此外，我们可以从图9(c)中观察到，电离率剖面相当宽广。由于这一延伸的电离区，在电场峰值之外形成了一个离子群体，其较低的轴向速度意味着更长的渡越时间。因此，图9中图(a)的时间平均剖面显示，羽流中的n_i 增加；与工况I相比，情形II和III中的这一增加更为明显。

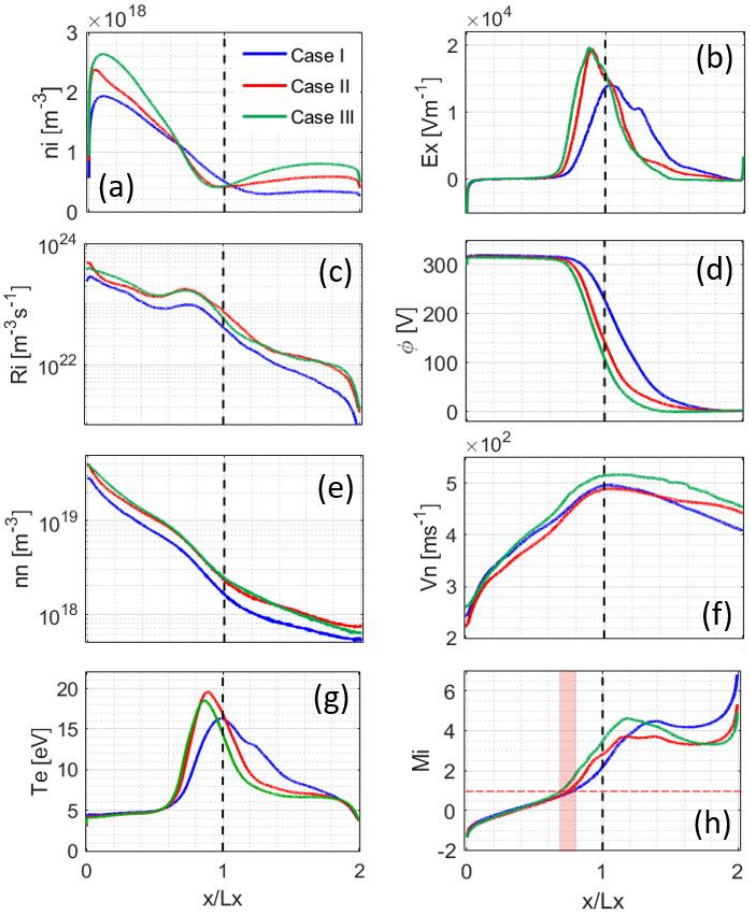

图9：时间平均放电特性的轴向分布；(a) 离子数密度，(b) 轴向电场，(c) 电离率，(d) 等离子体电势，(e) 中性粒子数密度，(f) 中性粒子轴向速度，(g) 电子温度，以及 (h) 离子马赫数。在离子马赫数图中，阴影区域表示离子声速点的位置。

第四，如图7(b)中中性粒子轴向速度的时空分布图所示，图9(f)中的中性粒子速度时间平均轴向剖面也显示，中性流从近阳极区到羽流的轴向速度逐渐增加。

最后，关于电子温度的轴向分布（图9(g)），其时间平均峰值与文献 [41][42] 报道的结果一致。在这方面，需要强调的是，所模拟的工况对应的功率相对较低，约为 8-12 kW。由于 HT20k 的设计工作功率较高（标称工况为 20 kW 和 450 V），较低的温度可能是运行效率不佳所致。尤其是工况I，模拟结果也显示其温度较低。

羽流中存在慢离子群，这一点也体现在图10所示的离子一维一速度分布函数中。图中展示了每个模拟工况下放电演化过程中四个不同时间点的分布情况。可以观察到，在对应于放电电流最小值的“电流低谷”时刻，通道出口平面$x/L_x = 1$下游存在一群轴向速度极低的离子。随着放电电流升高（如图8所示，这与最大电场强度区域向下游移动有关），慢离子群的轴向速度有所增加。因此，在“电流峰值”时刻，即加速区向外延伸至最远位置时，可以观察到离子轴向速度明显分散，模拟工况II和III中的这种现象更为显著。在“电流下降”阶段，高速离子离开计算域，加速区则向上游回退。此时，尤其是在工况II和III中，可以观察到慢离子群的轴向速度呈现明显的旋转状变化，其中工况III最为显著。我们推测，这一现象是慢离子被沿轴向传播的不稳定性波俘获所致。我们的推测得到以下事实的支持：先前针对轴向—方位向霍尔推力器构型[43]的研究表明，在放电电流下降阶段，离子渡越时间（ITT）等轴向不稳定性可能会被激发。

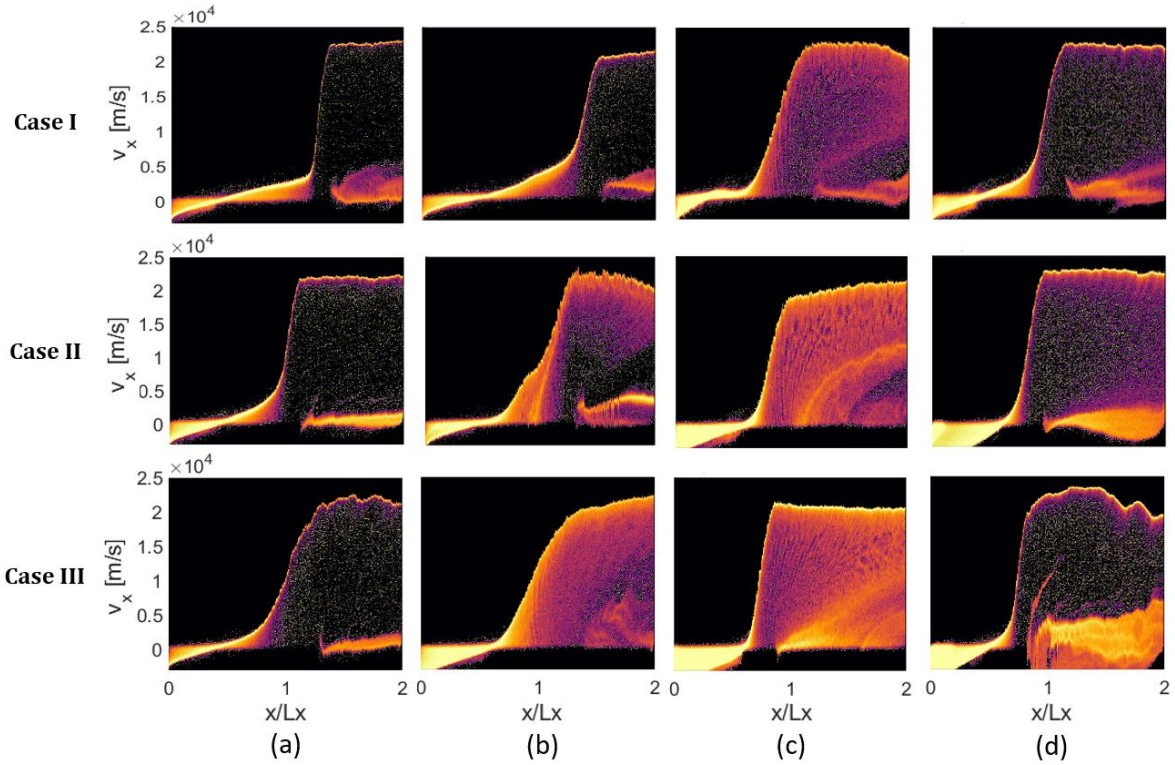

图10：三种运行条件下的准二维模拟在放电演化周期不同阶段，离子沿轴向的1D1V速度分布函数及轴向速度分量；(a) 电流低谷，(b) 电流上升，(c) 电流峰值，(d) 电流下降。

为研究沿方位角方向解析出的不稳定性的特征，我们首先查看图11中的曲线图。图中展示了准二维模拟达到准稳态后，在方位角中间位置处测得的方位向电场信号的一维快速傅里叶变换。此外，我们还在每个模拟工况的快速傅里叶变换图中标出了快速傅里叶变换峰值的频率范围。显然，在三种运行工况下，频率处于3–8 MHz范围内的波模态均占主导地位。根据现有文献，我们认为这些频率峰值与改进的离子声不稳定性有关；这种不稳定性对应于电子漂移不稳定性（EDI）非线性增长后的伪饱和态[44]。

为确认占主导地位的波模对应于离子声不稳定性，我们参考实验室参考系中离子声波的理论色散关系（方程 4 和 5）[26]。在这些方程中，ω_R 是波的实频率分量，γ 是虚频率分量，即增长率；k_x 和k_z 分别是轴向波数和方位角波数，C_s 是离子声速，λ_D 是德拜长度，m_e 是电子质量，m_i 是离子质量。

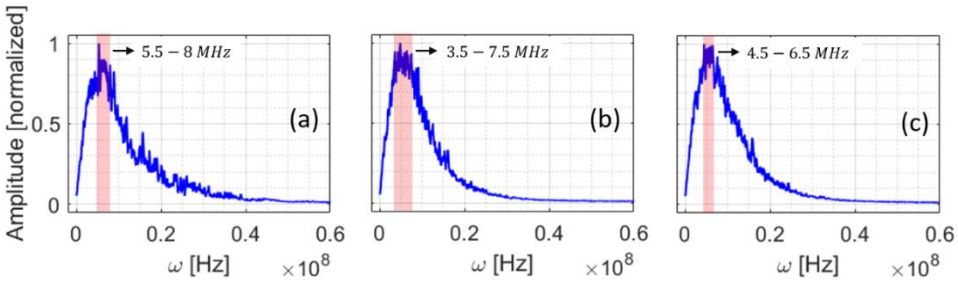

图11：来自(a)工况I、(b)案例II和(c)工况III准二维模拟的中间方位角位置处方位向电场信号的一维FFT图。阴影区域表示频率成分的峰值。

$$\omega_R \approx k_x V_{di,x} \pm \frac{k_y C_s}{\sqrt{1 + k_z^2 \lambda_D^2}}, \qquad \text{(Eq. 4)}$$

$$\gamma \approx \pm\sqrt{\pi\frac{m_e}{m_i}}\frac{k_x V_{di,x}}{(1+k_z^2\lambda_D^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad \text{(Eq. 5)}$$

按照参考文献 [44], 中采用的相同分析，增长率最大的模态的实频率和相速度（$v_{ph}=\omega/k$）由以下关系式给出

$$\omega_{R,max} \approx \frac{C_s}{\lambda_D\sqrt{3}}, \quad \text{(Eq. 6)}$$

$$v_{ph,max} \approx C_s\sqrt{\frac{2}{3}}. \quad \text{(Eq. 7)}$$

现在，根据图9中所示的放电特性时间平均轴向分布，并回顾离子声速和德拜长度的关系，即 $C_s=\sqrt{\frac{eT_e}{M_i}}$ 和 $\lambda_D=\sqrt{\frac{\epsilon_0 T_e}{en_e}}$，增长最快的离子声模的实频率和相速度分别为 $\omega_{R,\ max} \approx 10$ MHz 和 $v_{ph,\ max}$ ≈2 千米/秒。假设三个模拟工况中的等离子体密度轴向平均值（n_e）和电子温度（T_e）分别约为$1\times10^{18}\ m^{-3}$ 和 10 eV。理论估算的 10 MHz 频率值与图11中模拟所得主导模态的频率范围相当一致。

此外，参考图12所示三个模拟工况的离子时间平均方位向速度分布函数（VDF），我们观察到，在速度约为2.5至4.5千米/秒的范围内，VDF中出现了一个次峰，这与上文获得的最快增长离子声波模态的相速度理论值相近。该次峰的出现是由于速度接近波的相速度的离子与方位角波发生相互作用所致。

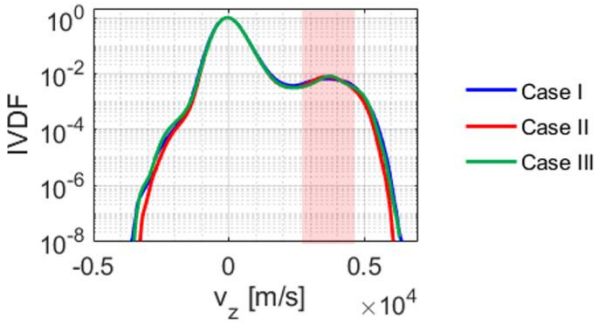

图12：三个模拟工况中，整个计算域轴向范围内离子的方位速度分布函数。达到准稳态后，对模拟过程中约 200 μs 的时间段进行平均。阴影区域表示速度分布函数中的次峰，该次峰与离子和方位角波的相互作用有关。

达到准稳态后，通过查看图13中的曲线，可以辨识模拟中方位角波特征的时间演化，以及方位角电场涨落中的数值色散特征。该图左列和中列的曲线分别表示各模拟工况的谱图（或 $\omega-t$ 图）以及方位向电场信号一维空间快速傅里叶变换的时间演化。每个工况的曲线上还叠加了归一化放电电流信号。右列曲线对应准二维模拟中方位向电场信号在 400 至 500 μs 时间窗口内的二维快速傅里叶变换。

首先关注谱图和一维空间快速傅里叶变换图，可以明显看出，在所有情形中，方位角波的频率和波数特性的时间演化与放电电流的演化完全同步。对此，随着放电电流达到峰值，波的频率谱和波数谱向更高频率、较短波长模态扩展。相应地，当放电电流达到最小值时，主导模态表现出更低的频率和更长波长。

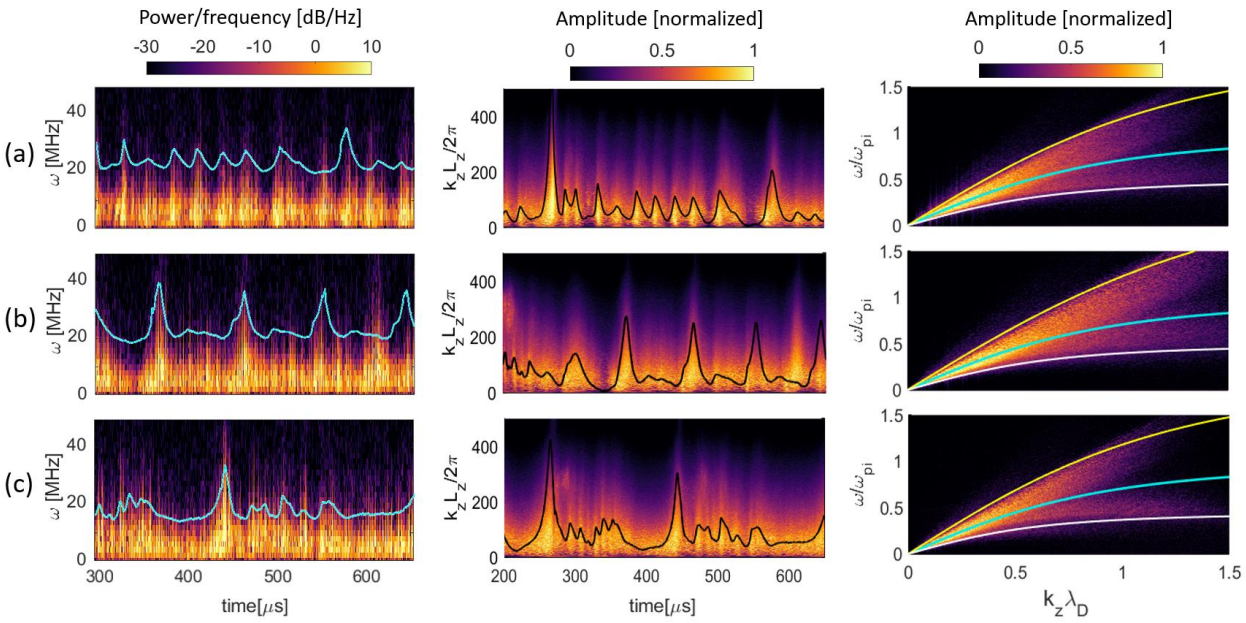

图13：(a) 工况I、(b) 案例 II 和 (c) 工况III的方位角涨落特征；（左列）300-650 μs 时间窗口内方位角中间位置处的方位向电场信号谱图，（中列）200-650 μs 时间间隔内方位角电场一维空间快速傅里叶变换的时间演化，其中方位角波数按照方位角计算域长度归一化，（右列）方位角电场的二维时空快速傅里叶变换。二维 FFT图中的 x 轴和 y 轴分别按照离子等离子体频率（ω_{pi}）和德拜长度归一化。

图13右列中方位角电场的二维快速傅里叶变换还揭示了有关方位角波特性的一些有趣信息。首先，所有三种情形下波的数值色散均呈现出相当连续的谱，覆盖一定范围的方位角波数（k_z）。此外，对于每种 k_z，可以看到各模态跨越一定的频率带宽。

其次，离子参考系中的理论离子声色散关系，即 $\omega_R \approx \frac{k_y C_s}{\sqrt{1+k_y^2\lambda_D^2}}$，其是以青色线表示，并使用每个模拟工况在400-500 μs时间段内等离子体密度和电子温度的时间平均值，即 $n_e \sim 1\times10^{18}\ m^{-3}$ 和$T_e \sim 7$ eV，可以看到，这些数值与所有模拟工况中的波的数值色散非常吻合，尤其是在$k_z\lambda_D$ 值低于约0.5时。此外，青色线勾勒出数值色散图中的一个分岔，尤其是在$k_z\lambda_D$值大于1时。

第三，图13中所有三个情形的完整二维FFT谱均被黄色和白色曲线所界定。这两条曲线分别对应于理论离子声色散关系，其计算采用了每个仿真案例在400-500 μs时间段内出现的n_e 和T_e 的最高值和最低值。在此时间段内，根据各模拟工况的不同，n_e 和T_e 会显著变化，变化幅度从数倍到一个数量级不等。尽管如此，对于所有情形，均可观察到，随着放电特性随时间演变，离子声波的数值色散特性会在两种截然不同的状态之间变化，这一点从二维FFT图中波模态谱的分岔现象可以看出。

为总结准二维轴向-方位向模拟结果的讨论，我们重点关注电子的速度分布函数和轴向迁移率。在这方面，图14展示了电子在三个轴向范围$0 < x \le 0$、$0.6L_x < x \le 1.4L_x$和$1.4L_x < x \le 2L_x$内沿轴向速度和方位速度分量的速度分布函数。关于图14(a)中的轴向电子速度分布函数，我们注意到，在所有情形中，速度分布函数偏离麦克斯韦分布最明显的是在$0.6L_x < x \le 1.4L_x$的轴向范围内，该范围主要包含加速区。偏离麦克斯韦分布表现为分布函数向更高速度方向展宽。

关于方位速度分布函数（图14(b)），三种情形以及全部三个轴向位置中的分布函数均呈现出朝向正方位速度的旁瓣，这与 E × B 漂移有关

电子的运动，其速度（E_x/B_r）在 700 至 1000 千米/秒之间。该旁瓣在 $0.6L_x < x \leq 1.4L_x$ 区域内也最为显著，此处的电场强度达到峰值。

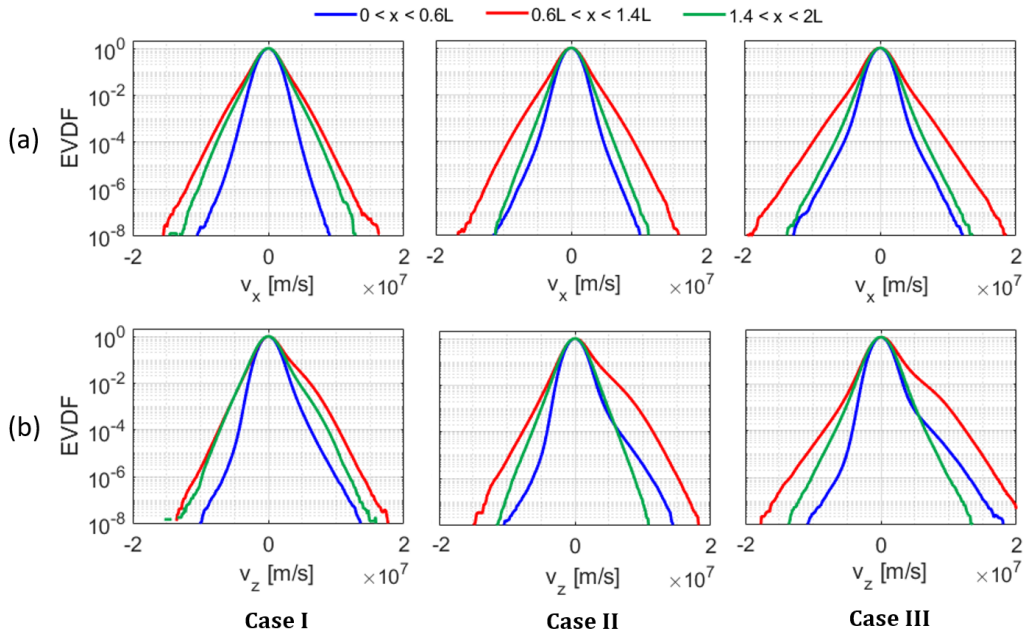

图14：三个模拟工况中，位于计算域不同轴向范围内的电子速度分布函数沿（a）轴向速度分量和（b）方位速度分量的分布。速度分布函数是在达到准稳态后，对模拟过程中约 200 μs 的时间数据取平均得到的。

图15(a)显示了总电子输运的时间平均轴向分布，以磁力项（F_B）表示。该项对应电子方位动量方程[26]的左侧，其定义如下：

$$F_B = -e\int_{-\infty}^{\infty} v_x\, B_r\, f_e(\boldsymbol{v}) d^3v \; = -en_e V_{de,x} B_r, \qquad \text{(Eq. 8)}$$

其中，e 为元电荷，v_x 为轴向速度分量，B_r 为径向磁场强度，f_e（$\boldsymbol{v}$）为电子速度分布函数，$V_{de,\ x}$ 为电子轴向漂移速度。

此外，　图15(b)根据以下关系给出了等效等离子体电阻率（R）的轴向分布：

$$R = \frac{\bar{E}_x}{\bar{J}_{ex}} = \frac{\bar{E}_x}{-e\bar{n}_e\bar{V}_{de,x}}, \qquad \text{(Eq. 9)}$$

其中，$J_{e\ \ x}$ 表示轴向电子电流，带横线的量表示在60至650 μ期间的时间平均值　　s.

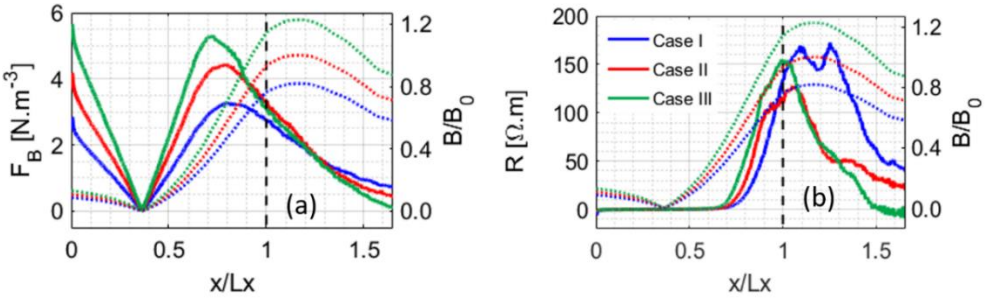

图15：在60至650 μs期间平均的(a)电子总输运和(b)等效等离子体电阻率的轴向分布。点线表示磁场的轴向分布。黑色虚线表示通道出口的位置。

从图15(a)可以看出，所有情形下电子输运的峰值均出现在通道内部、径向磁场强度峰值的上游。这与此前利用轴向-方位全二维模拟研究霍尔推力器中电子轴向迁移率分布的结果一致 [20]。此外，随着质量流率从工况I增至工况III，等离子体数密度也随之上升，

相关增强的波粒相互作用导致电子输运的峰值从工况I到III逐渐增大。此外，在磁场强度大致为零的位置，即在x/L_x = 0.5 之前，磁力项几乎变为零，随后向计算域的阳极侧升高。

参见图15(b)，我们注意到，正如预期，电子在磁场强度峰值位置附近的轴向运动所受到的电阻率最高。然而，对于情形II和III，最大电阻率出现在峰值B_r位置略微上游处，这与图9(b)中所示这两种情形的轴向电场时间平均分布一致。此外，从x/L_x 约为0.7的位置向阳极方向，电阻率几乎为零，因为该区域的电场非常小。

第3截面：准二维径向-方位角模拟

本研究对HT20k开展径向-方位角模拟的目的有两个方面：(1) 验证磁屏蔽霍尔推力器中的径向磁场梯度对等离子体性质径向分布以及电子输运等轴向过程的影响；(2) 阐明真实尺寸高功率磁屏蔽霍尔推力器各径向-方位角截面中方位向不稳定性的特征及其演化。

3.1. 模拟的设置和条件

准二维径向-方位角模拟采用对模拟域进行多区域分解的方式来开展，模拟域由笛卡尔 $y-z$ 平面表示。y轴沿径向坐标方向，z轴沿方位角方向。域在方位角坐标方向上的长度是其沿半径方向长度的一半，而径向和方位角方向上的计算单元尺寸设为相同，均为 20 μm。因此，对于与降阶准二维模拟相关的多区域分解，我们沿径向设置了 50 个垂直区域，沿方位角方向设置了 25 个水平区域，以保持两个坐标方向上每个区域的单元数量之比恒定。

我们沿轴向（x）对 HT20k 的三个径向-方位角截面进行了模拟。这三个截面以及各截面上磁场特性沿径向的分布如图16所示。从图16(e)所示的场拓扑图可以看出，第1截面对应于放电通道出口平面上游倒角区域的起始处，该区域由一条蓝色实心水平线界定。第2截面位于通道内部，此处靠近壁面的磁力线几乎沿轴向分布。第3截面位于通道内，计算域中央部分沿径向的磁通量几乎为零。

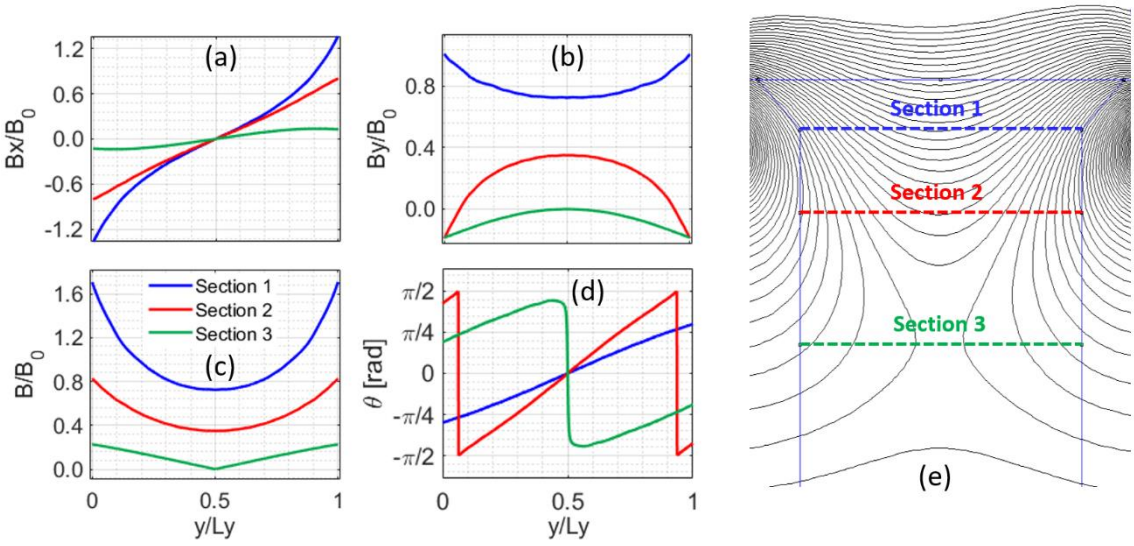

图16：所研究的三个截面处磁场特性的径向分布；(a) 归一化轴向分量，(b) 归一化径向分量，(c) 归一化磁场强度，以及 (d) 磁力线切线与 x 坐标之间的夹角。归一化因子 B_0 为轴向-方位模拟中案例 II 的峰值磁场强度。图 (e) 显示了所采用的磁场拓扑以及模拟横截面的位置。

进行径向-方位角模拟时，HT20k 的运行工况与轴向-方位向模拟中的案例 II 相同：阳极质量流率为 30 mg/s，放电电压为 300 V，轴向的峰值径向磁场强度为 B_0。因此，各模拟截面上的主体等离子体性质取自轴向-方位向模拟中工况 II 所得性质的时间平均轴向分布（图9）。此外，参照图8(a)中工况 II 的轴向电场时间演化图及图9(b)中的时间平均轴向分布，可以注意到，第1截面位于加速区内，第2截面位于电离区内，而第3截面对应于近阳极区。

假设轴向电场在径向上恒定，并沿 x 方向指向，因此指向模拟平面之外。对于本文所呈现的径向-方位角模拟，我们忽略了通道壁的二次电子发射，以便单独研究径向磁场梯度的影响。

此外，为了与具有非均匀径向 B 磁场分布的模拟结果进行比较，我们还针对每个横截面进行了准二维模拟，其中径向均匀磁场分布的强度等于通道中心线处的磁场值，即径向中间位置处的磁场值。这个具有均匀径向B磁场分布的模拟组还使我们能够区分出：仅由于对近壁等离子体鞘层及其与主体等离子体过程之间相互作用进行自洽求解而对等离子体行为产生的影响。

表 4 总结了每个径向-方位角截面准二维模拟所采用的计算参数和物理参数。

		数值		
参数	**Unit**	第1节	第2节	第3截面
计算参数				
网格尺寸（$\Delta y = \Delta z$）	μm	20		
径向区域数量（M）	-	50		
方位角方向区域数量（N）	-	25		
时间步长（ts）	s	2×10^{-12}		
径向方向上每个网格单元的平均宏粒子数 网格（$N_{ppc,y}$）	-	100		
每个网格单元中的平均宏粒子数为 方位向网格（$N_{ppc,z}$）	-	100		
总模拟时间	μs	7.5		
物理参数				
模拟截面的轴向位置（x/L_x）	-	0.88	0.68	0.36
初始等离子体密度（$n_{i,0}$）	m^{-3}	6.5×10^{17}	1.3×10^{18}	2.35×10^{18}
背景中性粒子密度（n_n）	m^{-3}	3.5×10^{17}	7×10^{18}	1.3×10^{19}
轴向电场（E_x）	Vm^{-1}	1.8×10^4	1×10^3	1×10^2
通道中心线处的归一化磁场	-	0.73	0.34	≈ 0
初始电子温度 (T_e,0)	eV	20	8	5
初始离子温度（$T_{i,0}$）	eV	0.5		
中性粒子温度 (T_n)	K	650		

Tabl图 4：准二维径向-方位角模拟所用计算参数和物理参数汇总 s

模拟通过在整个模拟域内均匀加载电子和离子进行初始化，初始数密度在第1节为 5×10^{17} m^{-3} ，在第2节为 1.3×10^{18} m^{-3} ，在第3截面为 2.35×10^{18} m^{-3} 。这些初始等离子体密度比工况 II 的轴向-方位向模拟在各模拟截面位置得到的等离子体密度高 1.2 倍。这是因为，正如接下来将要说明的，我们的径向-方位角模拟中的等离子体密度会随时间降低。因此，我们提高了初始等离子体密度，使各横截面在模拟持续时间内的等离子体平均密度接近轴向-方位向模拟中对应的数值。各截面的等离子体组分按照表 4 中报告的初始加载温度，从麦克斯韦分布中抽样。

模拟域的虚拟轴向长度为 1 cm。沿轴向不求解泊松方程，但在距模拟平面 $L_x = \pm 1$ cm 处沿 x方向穿过边界的粒子会根据其初始麦克斯韦分布重新采样，然后被重新引入模拟平面，同时保持其方位角和径向位置。考虑这种虚拟轴向范围可以限制模拟中粒子能量的增长 [45] ，这也是一种常见做法，应用于无法自洽求解粒子轴向通量的 1D 和 2D PIC 模拟 [45][46]。

关于粒子沿径向的边界条件，到达壁面的电子和离子会从模拟中移除。方位角方向上的计算域采用周期性边界，因此实施了与第2.1节中轴向-方位向模拟所述相同的周期性边界条件。

准二维模拟中的等离子体电势采用 RDPS 求解 [24]。对于电势求解器所采用的边界条件，径向壁被视为电气浮置 [47] ，并假设计算域方位角两端的节点具有周期性。

在径向-方位角模拟中，中性粒子以均匀背景的形式存在，每个模拟截面均采用表4中提供的恒定密度值。MCC算法[33] 用于解析电子与氙原子之间的碰撞。所考虑的碰撞事件类型及所使用的碰撞截面与第2.1节中提到的相同。发生任何碰撞事件的电子都会发生各向同性散射。在非弹性碰撞中，粒子会经历能量损失。对于电离碰撞，仅考虑入射电子相应的能量损失，不会生成新的等离子体粒子。

关于模拟设置的最后一点，我们采用了参考文献 [48] 中提出的方法，以补偿流失到壁面的粒子径向通量。这是必要的，因为模拟无法自洽地解析粒子的轴向流入和流出。通过在每个时间步随机向计算域中注入电子-离子对来补偿径向通量。每个时间步注入的粒子对数估算为到达壁面的电子数和离子数中的较小值[48]。值得注意的是，所采用的方法只能部分补偿流失到壁面的粒子，这意味着等离子体密度会随时间逐渐降低。为此，我们没有选择施加等离子体源来使整个模拟期间的等离子体密度保持恒定，因为与让电离碰撞自洽地产生等离子体相比，这种人为源的影响难以直接评估。因此，我们仅运行径向-方位角模拟 7.5 μs，以确保在所有模拟中，对于每个模拟截面，径向平均等离子体密度的时间平均值始终与该截面处轴向-方位向模拟中沿通道中心线的时间平均等离子体密度大致相同。

3.2. 结果与讨论

图17展示了径向-方位角模拟中空间平均离子（等离子体）密度的时间演化。点线对应磁场强度径向分布均匀的模拟，而实线对应 B-场径向分布不均匀的模拟。

显然，总体而言，所有模拟截面的离子密度均随时间降低。然而，n_i 的降低速率在不同截面之间有所不同，并且还取决于每个截面中B场的径向分布。在这方面，在第3截面，具有均匀径向B 分布的模拟工况（绿色点线）由于磁场强度非常低，几乎相当于一个静电问题，因此，n_i 降低得相当快。然而，对于第3截面中非均匀B场分布的情况，如图16(c)所示，由于现有的∇B 力引入了一定程度的等离子体约束，离子密度的降低速率有所减缓。在这方面，随着磁场强度的径向梯度以及由此产生的grad-B力从第3截面到第1截面逐渐增大，我们注意到，对于第1截面和第2截面的具有非-

均匀的 B 场分布中，密度下降速率显著降低，并且对于这些截面而言，从约 2 μs 开始进入模拟后，密度几乎趋近于渐近值。

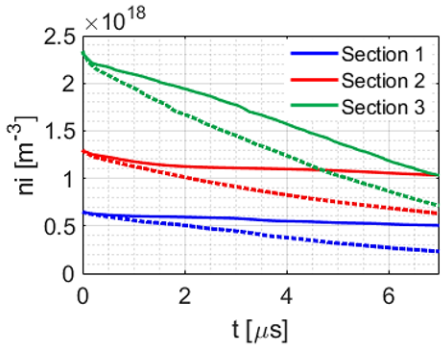

图17：三个所研究截面的准二维模拟中，非均匀（实线）和均匀（点线）径向磁场分布下离子数密度的时间演化。对于径向均匀的 B 分布模拟，归一化磁场值（B/B_0）在第1节为0.73，在第2节为0.34，在第3截面约为0。

从B场径向分布不均匀和均匀的准二维模拟中，对比第1截面和第2截面各自对应的时间平均密度剖面，也可以从图18(a)中看出这两个截面处的等离子体约束。我们观察到，由于径向磁场梯度，第1截面和第2截面的计算域中心处离子密度均大幅增加，且第2截面的约束略强。在第3截面处，我们没有观察到类似于第1截面和第2截面的计算域中心等离子体聚集现象。不过，在B场径向分布不均匀的情况下，第3截面处的等离子体密度在更大的径向范围内几乎保持恒定，这意味着与B场径向分布均匀的情况相比，此时等离子体鞘层的长度尺度更小。

观察图18(b)可知，采用均匀B 分布进行模拟时，第1节的时间平均T_e 分布（蓝色虚线）总体上高于采用非均匀B分布进行模拟时的对应分布。尽管如此，两种情况下，第1节径向中部位置附近的T_e 约为60 eV。关于第2节和第3截面，可以观察到，无论径向B 分布均匀与否，第3截面（代表阳极近区的一个横截面）上的T_e 值都明显高于第2节。造成这一现象的原因可能是：第3截面处，计算域中心的磁场强度为零；该截面处的磁场整体强度也相当低。因此，电子随之发生的去磁化可能导致其热化，从而使温度高于第2节。

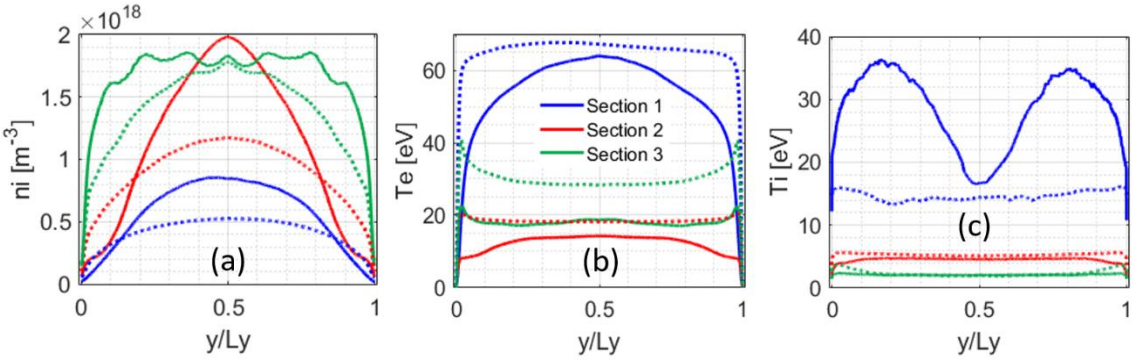

图18：三个模拟截面的等离子体性质在 7 μs 内的时间平均径向分布；(a) 离子数密度，(b) 电子温度，(c) 离子温度。点线对应径向磁场分布均匀的模拟，实线对应径向 B 分布非均匀的模拟。

参考图18(b)中的T_e 剖面，我们承认，由于忽略了……的影响，我们模拟预测的电子温度在一定程度上可能高于真实情况下的温度，也可能高于其他关于磁屏蔽推力器的二维混合模拟所预测的温度 [21][23]

来自通道壁的二次电子发射，这可能会降低电子群体的平均温度。

图18(c)显示，与具有均匀B 分布的仿真案例中的T_i 分布相比，采用非均匀径向 B场分布的模拟在第1节的时间平均离子温度分布呈现出显著更强的径向变化和更高的温度值。正如我们将在本节后文看到的，采用非均匀径向B 分布时，第1节的T_i 值升高是由于离子粒子与在该截面处形成的长波长方位波模之间的相互作用所致。无论径向B 分布如何，第2节的T_i 值始终高于第3截面的相应值。

需要强调的一点是，与根据轴向-方位向模拟结果推导出的初始值相比，三个截面处的电子和离子温度均有所升高。此外，由于径向B-场梯度，等离子体密度和各组分温度的分布表现出显著的径向梯度，尤其是在截面1和截面2处；这两个截面分别对应加速区和电离区内的横截面。因此，正如第2.2节所预期的，放电的轴向动力学以及电离等等离子体过程预计将受到这些径向梯度的显著影响。这再次强调了磁屏蔽霍尔推力器中等离子体构型高度三维的特性。

磁屏蔽拓扑结构的主要目的是减轻离子在通道壁上的功率沉积，尤其是出口平面附近的功率沉积，从而降低陶瓷通道的侵蚀率，进而延长推力器寿命 [49]。因此，我们在图19中展示了不同模拟区段的通道壁上电子和离子功率沉积的时间演化图。在图19中，第一行的图来自具有非均匀径向 B场分布的模拟，而第二行的图对应于具有均匀径向 B 分布的模拟。比较具有非均匀和均匀径向 B 分布的模拟所得的时间平均 P_i 值（图19(b)和(d)），我们注意到，与磁屏蔽拓扑结构相关的磁场径向梯度确实使第1截面和第2截面的功率沉积分别降低了约4倍和8倍。此外，由于径向磁场梯度，第3截面的时间平均 P_i 降低了1.5倍。同样，参见图19(a)和(c)，还可以观察到，由于磁屏蔽拓扑结构，平均 P_e 值也有所降低。

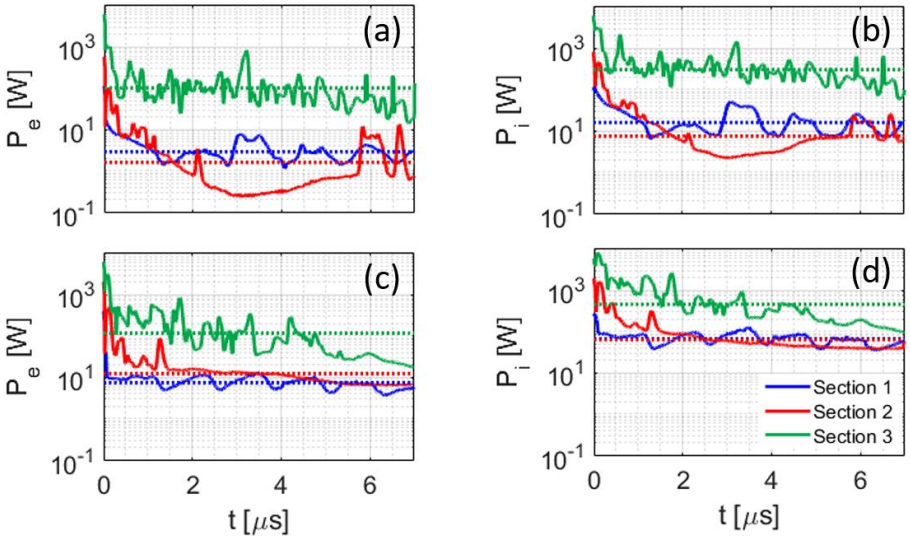

图19：三个截面准二维模拟中径向壁上平均总功率沉积的时间演化；(a)和(c)为电子功率沉积，(b)和(d)为离子功率沉积。上排图来自径向磁场分布不均匀的模拟，下排图对应径向B 磁场均匀的模拟。

P_e 和P_i 的时间演化图中的振荡，是由于粒子能量随时间变化，这是它们与方位向不稳定性相互作用所致。就此而言，对于第1节，无论径向场分布如何，P_e 和P_i 中的振荡频率都非常相似，而具有非均匀径向B 分布的情形，其振荡幅度略大。对于第2节，我们注意到，在径向B 分布非均匀和均匀的模拟工况之间，P_e 和P_i 的时间变化显著不同。

同样值得注意的是，电子和离子功率沉积随时间衰减，尤其是在径向B 分布均匀的模拟中观察到的这种衰减（图19(c)和(d)），与图17所示等离子体密度本身逐渐降低有关。

图20展示了三个模拟区段中电子轴向速度（V_x）和轴向迁移率（μ_x）的时间平均径向分布。轴向速度分布（图20(a)）通过将速度值乘以 -1 进行了反向处理。图20(b)中的轴向迁移率分布，是将每个区段的时间平均速度分布除以该区段的轴向电场值获得的。从第1节开始，采用径向B 分布不均匀的模拟案例（蓝色实线）时，电子轴向速度沿半径呈现出显著变化。此外，无论径向B 分布如何，第1节的电子总体轴向速度在三个区段中均为最高。在任何情况下，由于第1节的轴向电场也最大，该区段的平均轴向迁移率为 40 $m^2V^{-1}s^{-1}$，在三个区段中最低。

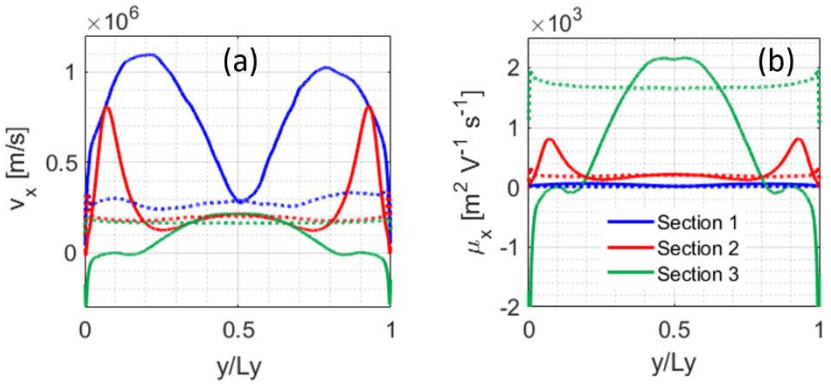

图20：三个模拟区段中（a）电子轴向速度和（b）电子轴向迁移率的时间平均（在 7 μs 上）径向分布。实线表示磁场分布不均匀的模拟，点线表示径向B 场均匀的模拟。

关于第2节，我们注意到，电子的轴向速度和轴向迁移率都朝壁面方向增加。这是因为在第2节，壁面附近的磁力线几乎沿轴向排列（图16(e)），这意味着绕这些磁力线旋转的电子会沿着与轴向电场相反的方向轴向运动，因此轴向速度和迁移率会增加。

在第3截面，可以观察到电子从计算域中央磁通量几乎为零的区域流出模拟平面（图16）。对此，在径向B 分布均匀的情况下，电子的轴向速度和迁移率在径向上几乎保持恒定；而在径向B分布不均匀的情况下，轴向速度和迁移率分布则表现出明显的径向变化。特别是，当我们接近计算域两侧的径向边缘时，可以看到电子沿轴向电场方向运动。

现在，我们深入探讨径向-方位角模拟中方位向不稳定性的特征及其演化。为此，我们分别在图21的(a)和(b)图中展示了各节准二维模拟所得方位向电场信号的一维时间快速傅里叶变换和一维空间快速傅里叶变换。我们观察到，在第1节中，存在径向磁场梯度时，方位角电场涨落的主要频率和波数成分转向频率更低、波长更长的模态（蓝色实线）。事实上，在径向B 分布均匀的情况下（蓝色点线），主要频率成分范围较宽，为4–12 MHz；而径向B 分布不均匀时，主要频率集中在1–1.5 MHz附近。同样，主要方位角波数对应的范围也发生了变化：径向B 分布均匀时为1–2 mm，而存在B场的径向梯度时则为9–18 mm。

值得注意的是，在不存在径向 B- 场梯度的情况下，主导方位模的频率范围与图11中案例 II 的轴向-方位向模拟所观察到的范围相似。

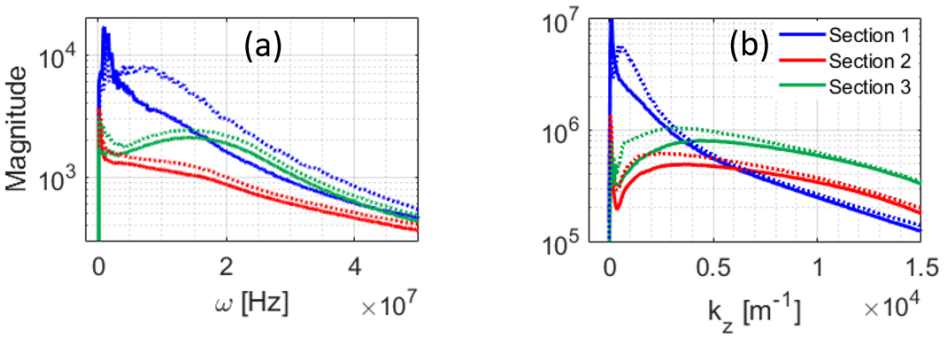

图21：（a）方位向电场信号的一维时间FFT图，以及（b）一维空间FFT图；数据为三个模拟区段所有径向位置的平均值。空间快速傅里叶变换还对模拟时间中的7 μ秒进行平均。时间快速傅里叶变换对应于方位角中间位置处的电场涨落。实线表示具有非均匀径向B 分布的模拟，点线表示具有均匀径向B 分布的模拟。

关于第2节，可以看出，径向磁场梯度对主导模态的频率和方位角波数没有显著影响。事实上，无论是否存在径向 B-场梯度，频谱都由频率极低的模态主导。第2节的波数谱在极低方位角波数处呈现明显峰值，并在较高波数区域还有一个宽峰。

第3截面方位角波模态的频率谱和波数谱与第2节的相当相似。不过，第3截面各模态的整体快速傅里叶变换幅值更高；此外，频谱还在10–25 MHz频率范围内呈现一个宽阔的次峰。

由于第1节位于加速区，我们进一步考察存在和不存在径向磁场梯度时该截面方位角模态的动力学，以阐明磁屏蔽拓扑结构对通道出口平面附近方位角波演化的影响。为此，图22展示了轴向电子电流（J_{ex}）信号一维空间快速傅里叶变换的时间演化，数据取所有径向位置的平均值。图22绘图所采用的方法与参考文献[50]中所述的方法类似。

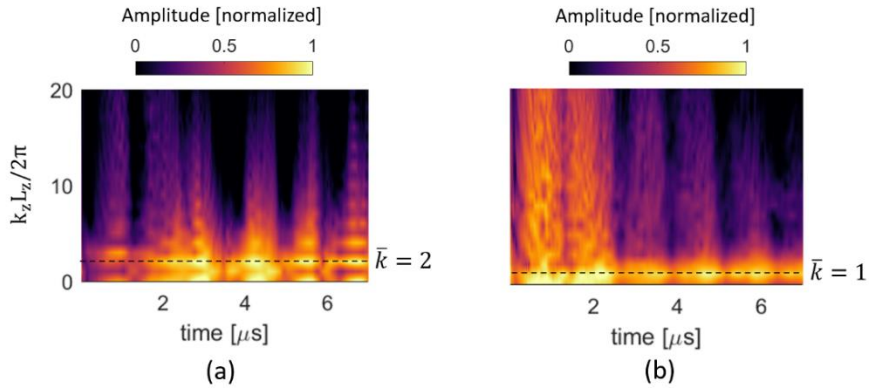

图22：第1节中模拟所得的 J_{ex} 信号的一维空间快速傅里叶变换随时间的演化，其中径向B 分布分别为(a)非均匀和(b)均匀。$\bar{k}$ 表示各情况下归一化的主要方位角波数。

值得注意的是，在径向 B 剖面不均匀的情况下，图 22(a) 中模态的演化呈现出类似逆能量级联 [50][51] 的行为，波的谱周期性地向更长波长收窄。此外，尤其是从 5 μs 开始直至模拟结束，我们观察到方位角波谐波的形成，其归一化主方位角波数 ($\bar{k}$) 为 2。

对于均匀径向B 分布（图22(b)），我们再次观察到能量向较长波长模态的逆能量级联。然而，没有观察到方位角波的明显谐波，且谱的带宽相当宽。还需要注意的是，图22(b)中模态幅值随时间 apparent 减小，是由于等离子体密度逐渐下降，如图17所示。

存在和不存在径向B场梯度时，第1节方位角波的动力学如图23所示，表现为来自准二维模拟的J_{ex} 二维快照的循环演化。

此外，图24展示了模拟中非均匀和均匀径向 B 场下各种等离子体性质的二维快照，时间对应于图23(a)和(b)中演化周期的起始时刻，即最左上方的子图。

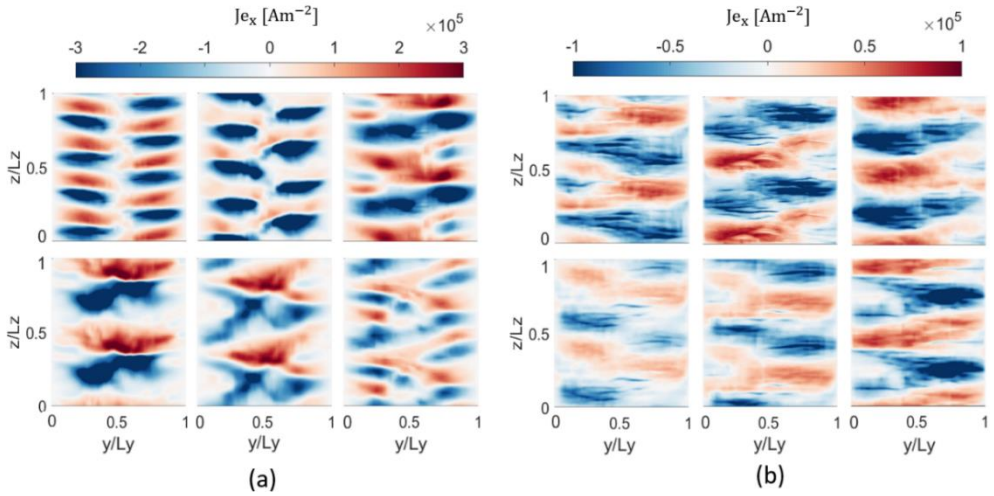

图23：第1节放电演化过程中六个不同时刻的轴向电子电流密度（J_{ey}）二维快照，其中（a）为非均匀径向B-场，（b）为均匀径向B-场。每一行中时间从左向右推进。

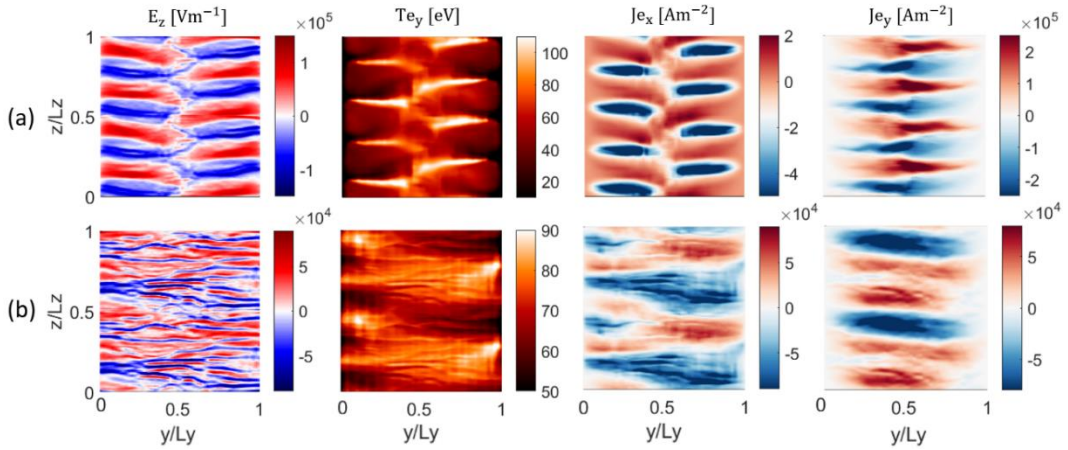

图24：第1节处等离子体性质的二维快照，其中（a）为非均匀径向B场，（b）为均匀径向B场。从左至右各列分别表示方位角电场（E_z）、径向电子温度（T_{ey}），以及轴向和径向电子电流密度（J_{ex} 和J_{ey}）。

从图24(a)中可以观察到，在存在径向 B-场梯度的情况下，方位角波最初同时具有方位角和径向波数。图24(a)中方位角电场和径向电子温度的二维快照也清楚地显示了放电演化周期开始时模态的方位角和径向波数。然而，图24(a)右侧的径向电子电流密度（J_{ey}）二维分布主要表现为方位角波数。事实上，沿半径方向，J_{ey} 更集中于计算域中心附近，并朝壁面方向逐渐变得相当分散。无论如何，随着图23(a)中的放电演化，具有方位角和径向波数分量的波逐渐合并，形成了一个仅具有方位角波数的长波长模态。随后，该模态脱离，最初的方位角波开始重新出现并占据主导地位。

相比之下，在径向 B 场均匀的情况下，从图23和图24中的图(b)可以看到，所有等离子体性质的二维快照中都存在一系列波长较长和较短的方位角模态，并且等离子体的“湍流”特性随时间持续存在。就此而言，从图23(b)可以看出，随着放电演化，某些波模态似乎周期性地减弱又增强，但在整个放电演化过程中，没有任何模态明显占据主导地位。

图25展示了各个模拟截面中电子和离子沿轴向及方位速度分量的归一化速度分布函数。对于每个截面，图中均展示了采用径向 B 场非均匀和均匀分布的模拟所得的速度分布函数。

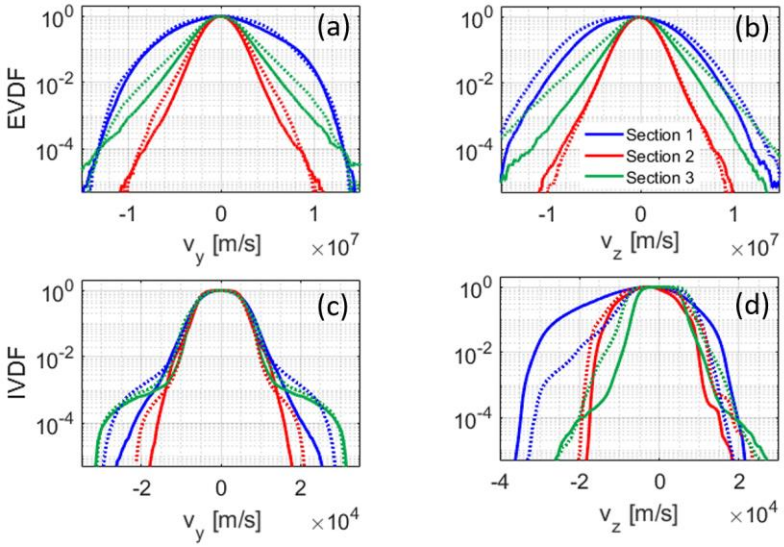

图25：在 t = 3 μs 时三个模拟截面上的归一化速度分布函数。上排：电子沿 (a) 径向和 (b) 方位速度分量的速度分布函数；下排：离子沿 (a) 径向和 (b) 方位速度分量的速度分布函数。实线表示径向 B 分布不均匀时的模拟结果，点线表示径向 B 分布均匀时的模拟结果。

参见图25中的图 (a) 和 (b)，在全部三个截面上，径向磁场梯度对电子的径向速度分布函数影响很小，甚至没有影响。然而，在截面1和截面3，径向 B 分布均匀时，方位速度分布函数有所展宽，且在截面3尤为明显。此外，与先前关于径向磁场梯度对等离子体过程 [29][52], 影响的研究结果一致，在全部三个截面上，电子的速度分布函数都相当各向同性。这种各向同性化在截面2最为明显；有趣的是，即使在径向 B 分布均匀时，该处的电子速度分布函数也呈各向同性。

图25中图(c)的离子径向速度分布函数显示，在径向B 均匀分布的情况下，截面1和2处的分布函数从略高于± 10 千米/秒的径向速度开始变宽。在截面3处，无论径向B场分布均匀还是非均匀，径向离子速度分布函数都具有明显的旁瓣。

图25中的图(d)展示了三个截面处方位角离子速度分布函数的畸变。特别是，观察到第1节存在方位角波，并且它们导致了离子群体显著加热，表现为离子速度分布函数明显展宽且不对称。在非均匀径向B 分布的情况下，离子加热更强；此时可见长波长、低频方位波模发展并占据主导地位。

第3截面处离子沿径向和方位角方向的加热，被认为是该截面处电子几乎完全去磁化所影响的波激发的结果。

第4节：结论

本文展示了HT20k霍尔推力器在轴向-方位角和径向-方位角构型下进行准二维PIC模拟所得的大量结果。本文提供的结果和分析凸显了降阶PIC方案的灵活性及适用性，表明它可作为一种可靠的预测性数值工具，不仅用于研究多维等离子体过程及其相互作用，也有望助力先进霍尔推力器的开发。本文展示的多项模拟得益于降阶PIC方案的高成本效益；该方案使得在实际尺寸的霍尔推力器中开展自洽动力学研究成为可能。

采用二维问题的单区域近似，对实际推力器的简化模型在三种运行条件下进行了轴向-方位向模拟。在这种简化的轴向-方位向表示中，模拟无法解析磁屏蔽拓扑结构固有的磁场和等离子体性质的径向梯度。因此，这些模拟的主要目的是，

用于评估单区域准二维模拟对可靠预测霍尔推力器中的等离子体动力学和整体性能参数的实用性。就此而言，我们观察到，单区域模拟所解析的轴向平均不稳定性诱导电子迁移率，使得能够在一系列运行条件下，对HT20k 中的等离子体放电行为进行自洽预测，持续时间达到前所未有的 650μs ，且无需使用任何临时性电子输运模型。

此外，考虑到所采用的简化问题描述以及轴向-方位向模拟所使用的近似阶数，在三种模拟运行工况下，预测的性能参数最大误差为 20–30%，处于合理范围内。研究指出，模拟性能与测量性能之间出现差异的主要原因，是轴向-方位向模拟未能解析径向磁场梯度的重要影响。HT20k 径向-方位角模拟的结果证实了这一解释：径向梯度会显著影响磁屏蔽霍尔推力器中的基础等离子体现象和宏观性质。

尽管如此，轴向-方位向模拟也揭示了 HT20k 中方位向不稳定性的平均特征。研究发现，这些波的特征与离子声波的理论色散关系一致。此外，不稳定性的色散图呈现连续谱，没有特别占主导地位的模态。研究还观察到，波的数值色散在两种相当不同的状态之间变化，并在方位向不稳定性的色散图中表现为分岔。

使用推力器放电通道三个横截面的高保真多区域近似，对径向-方位角准二维模拟进行了研究。对磁场均匀和径向分布不均匀的情况进行模拟后发现，在存在径向磁场梯度时，等离子体会集中在远离径向壁的计算域中心。此外，我们观察到，在与磁屏蔽拓扑结构相关的非均匀径向B 分布情况下，等离子体粒子在通道壁上的功率沉积会降低数倍，尤其是在通道内的截面处以及出口平面附近。

方位向不稳定性的演化及其特征也被发现主要受到径向 B-场梯度的影响。特别是在加速区内的某一截面处，观察到一种长波长、相对低频的波模态开始发展，并诱导出显著的电子轴向迁移率以及离子群体的明显加热。

需要注意的是，由于 HT20k 缺乏相关数据，本研究的模拟结果尚未与详细的实验测量结果（例如等离子体性质分布）进行直接比较。因此，对于前文总结的轴向-方位角模拟和径向-方位角模拟所得出的见解，应结合缺乏实验验证这一情况加以审视。

致谢：

本研究是在“面向创新空间探索实现的先进空间推进（ASPIRE）”项目框架内开展的。ASPIRE 获得了欧盟“地平线 2020”研究与创新计划的资助，资助协议编号为 101004366。本文所表达的观点绝不能被视为欧盟委员会的官方意见。

MR、FF 和 AK 衷心感谢帝国理工学院研究计算服务中心提供的计算资源与支持（http://doi.org/10.14469/hpc/2232）。

数据可用性声明：

支持本研究结论的模拟数据可向通讯作者提出合理请求后获取。本研究经许可使用的 HT20k 推力器信息和测试数据归 SITAEL SpA 所有，属于专有资料，不向公众开放。

参考文献：

[1] Mikellides IG ，Katz I，Hofer RR，Goebel DM，“ 实验室霍尔推力器的磁屏蔽。I. 理论与验证 ”，《应用物理学杂志》115, 043303 (2014)

[2] Hofer RR、Goebel DM、Mikellides IG、Katz I，“实验室霍尔推力器的磁屏蔽。II. 实验”，《应用物理学杂志》115，043304（2014）[3] Giannetti V、Piragino A、Faraji F、Reza M、Leporini A 等，“5 kW 低侵蚀霍尔效应推力器的研制”，IEPC-2017-379，载于*35th* 国际电推进会议论文集，美国佐治亚州亚特兰大（2017）[4] Piragino A、Ferrato E、Faraji F、Reza M、Giannetti V 等，“SITAEL 磁屏蔽 20 kW 霍尔推力器测试”，IEPC-2019-879，载于*36th* 国际电推进会议论文集，奥地利维也纳（2019）[5] Paissoni CA、Viola N、Mammarella M、Andreussi T 等，“以 20 kW 级霍尔推力器增强深空运输”，《宇航学报》第171卷，第83–96页（2020）[6] Diamant KD，“背景压力对 SPT-100 霍尔推力器性能的影响 ”，第 50 届美国航空航天学会 / 美国机械工程师学会 / 美国汽车工程师学会 / 美国工程教育学会联合推进会议论文集，美国俄亥俄州克利夫兰，2014年7月28–30日[7] Huang W、Kamhawi H、Lobbia RB、Brown DL，“背景压力对 HiVHAc 霍尔推力器等离子体振荡特性的影响”，AIAA 2014-3708，第50届美国航空航天学会/美国机械工程师学会/美国汽车工程师学会/美国工程教育学会联合推进会议（2014）[8] Snyder JS、Lenguito G、Frieman JD、Haag TW、Mackey JA，“背景压力对 SPT-140 霍尔推力器性能的影响”，《推进与动力学杂志》36:5，668–676（2020）Kamhawi H、Huang W、Haag TW、Yim J、Herman D 等，“美国国家航空航天局磁屏蔽霍尔效应火箭推力器的性能、设施压力影响及稳定性[9] 表征测试”，美国航空航天学会/美国机械工程师学会/美国工程教育学会联合推进会议（2016）[10] Kaganovich I.D. 等，“与等离子体推进及类似技术相关的 E × B 放电物理”，《等离子体物理》27，120601（2020）[11] Hofer RR、Anderson JR，“磁屏蔽霍尔推力器中的有限压力效应”，第50届美国航空航天学会/美国机械工程师学会/美国汽车工程师学会/美国工程教育学会联合推进会议论文集，美国俄亥俄州克利夫兰，2014年7月28–30日[12] Piragino A、Faraji F、Reza M、Ferrato F 等，“背景压力对不同构型下运行的 20 kW 磁屏蔽霍尔推力器性能的影响”，《航空航天》8(3)，69（2021）[13] Polk JE、Brophy JR，“通过分析与测试进行霍尔推力器寿命鉴定”，SP00547，太空推进会议论文集，西班牙塞维利亚，2018年5月14–18日[14] Lafleur T、Baalrud SD、Chabert P.，“霍尔效应推力器反常电子输运理论。I. 粒子网格模拟的启示”，《等离子体物理》23，053502（2016）[15] Katz I、Chaplin VH、Lopez Ortega L，“霍尔推力器加速区及近羽流区域的粒子网格模拟”，《等离子体物理》25，123504（2018）Mikellides IG、Jorns B、Katz I、Lopez Ortega A，“基于电子回旋漂移不稳定性的第一性原理电子输运模型的 Hall2De 模拟[16] ”，第52届美国航空航天学会/美国机械工程师学会/美国工程教育学会联合推进会议，美国犹他州盐湖城（2016）[17] Reza M、Faraji F、Andreussi T、Andrenucci M，“霍尔推力器中湍流诱导电子输运模型”，IEPC-2017-367，第35届国际电推进会议，美国佐治亚州亚特兰大（2017）[18] Jorns B，“霍尔效应推力器中反常电子碰撞频率的预测性数据驱动模型”，《等离子体源科学与技术》27，104007（2018）

[19] Mikellides IG 和 Lopez Ortega A，“基于反常电阻率和广义欧姆定律的霍尔效应推力器模拟中第一性原理模型的开发与验证所面临的挑战”，《等离子体源科学与技术》28，014003（2019年）

[20] Charoy T，“霍尔推力器中电子输运的数值研究”，等离子体物理学 [physics.plasm-ph], 巴黎综合理工学院。英语。NNT: 2020IPPAX046 tel-02982367（2020年）

[21] Lopez Ortega A、Mikellides IG、Chaplin VH，“用于评估12.5千瓦磁屏蔽霍尔效应火箭（HERMeS）侵蚀的数值模拟”，IEPC-2017-154，载于第35届国际电推进会议（2017年）

[22] Marks TA、Lopez Ortega、Mikellides IG、Jorns B，“在霍尔效应推力器预测模型中自洽地实现零方程输运模型”，AIAA 2021-3424，AIAA推进与能源论坛（2021年）

[23] Perales-Díaz J, Domínguez-Vázquez A, Fajardo P, Ahedo E, Faraji F, Reza M, Andreussi T, "磁屏蔽霍尔推力器的混合等离子体模拟",《应用物理学杂志》131, 103302（2022年）

[24] Reza M, Faraji F, Knoll A，《广义降阶粒子网格方案的概念及其在轴向-方位角霍尔推力器构型中的验证》，《物理学杂志D：应用物理》56，175201（2023年）

[25] Faraji F、Reza M、Knoll A，《广义降阶粒子网格方案在径向-方位角 E×B 等离子体构型中的验证》，《AIP进展》13，025315（2023年）

[26] Faraji F, Reza M, Knoll A，“增强一维粒子网格模拟，以自洽地解析霍尔推力器中由不稳定性诱发的电子输运”。《应用物理学杂志》131，193302（2022年）

[27] Reza M, Faraji F, Knoll A, “采用降阶粒子网格方案解析霍尔推力器中的多维等离子体现象”,《电推进杂志》1, 19 (2022年)

[28] Reza M, Faraji F, Knoll A, “用于霍尔推力器建模的广义降阶粒子网格方案：轴向-方位角构型中的概念与深入验证”, arXiv预印本，DOI: arXiv:2208.13106 (2022年)

[29] Reza M, Faraji F, Knoll A, “径向-方位角 E×B 等离子体构型中的方位向不稳定性与电子输运参数研究”,《应用物理学杂志》133, 123301 (2023年)

[30] Piragino A, Giannetti V, Reza M, Faraji F, Ferrato E, 等, “SITAEL 20 kW 级霍尔推力器的开发进展”, AIAA 2019-3812，美国航空航天学会推进与能源论坛，印第安纳波利斯，印第安纳州 (2019年) https://doi.org/10.2514/6.2019-3812

[31] Petronio F, Charoy T, Alvarez LagunaA, BourdonA, ChabertP，《霍尔推力器中静电不稳定性的二维效应。I. 粒子网格模拟与双点功率谱密度重构技术的见解》，《等离子体物理》30，012103（2023年）

[32] Faraji F、Reza M、Knoll A，《中性粒子动力学模型对霍尔推力器等离子体放电粒子网格模拟的影响》，arXiv预印本，DOI：arXiv:2304.00585（2023年）

[33] Vahedi V,Surendra M，《粒子网格方法的蒙特卡罗碰撞模型：应用于氩和氧放电》，《计算机物理通讯》87 179-198 (1995年)

[34] Biagi-v7.1数据库，www.lxcat.net，检索于2021年5月15日。

[35] Cusson SE、Dale ET、Jorns BA、Gallimore AD，《磁屏蔽霍尔推力器中的加速区动力学》，《等离子体物理》26，023506（2019年）

[36] Frieman JD、Liu TM、Walker MLR, 《霍尔推力器中性粒子摄入背景流模型》, 《推进与动力》33，1–15（2017年）[37] Cusson SE、Jorns BA、Gallimore AD, 《霍尔推力器中阴极耦合电压与背景压力的简单模型》, 美国航空航天学会2017-4889，第53届AIAA/SAE/ASEE联合推进会议（2017年）[38] Huang W、Kamhawi H、Haag TW, 《通过高速成像表征美国国家航空航天局HERMeS霍尔推力器的等离子体振荡》, 美国航空航天学会-2016-4829，第52届AIAA/SAE/ASEE联合推进会议（2016年）[39] Hagelaar GJM、Bareilles J、Garrigues L、Boeuf JP, 《稳态等离子体推力器的二维模型》, 《应用物理学杂志》91 5592（2002年）[40] Mazouffre S、Bourgeois G、Garrigues L、Pawelec E.《霍尔推力器交叉场放电中原子流的全面研究》。《物理学杂志D辑：应用物理》, 44(10)：105203（2011年）[41] Saravia MM、Giacobbe A、Andreussi, 《用于霍尔推力器等离子体表征的三探针朗缪尔探针测量贝叶斯分析》, 《科学仪器评论》 **90**，023502（2019年）[42] Andreussi T、Saravia MM、Andrenucci M, 《利用朗缪尔探针表征霍尔推力器中的等离子体》, 《仪器杂志》 **14** C05011（2019年）[43] Coche P、Garrigues L, 《霍尔推力器的二维（方位向-轴向）粒子网格模型》, 《等离子体物理》21，023503（2014年）[44] Boeuf JP、Garrigues L, 《E × B霍尔推力器中的电子漂移不稳定性：粒子网格模拟与理论对比》, 《等离子体物理》25，061204（2018年）[45] Lafleur T、Baalrud SD、Chabert P, 《霍尔效应推力器中的反常电子输运理论：I. 粒子网格模拟的启示》, 《等离子体物理》23，053502（2016年）[46] Villafana W、Petronio F、Denig AC、Jimenez MJ等, 《E×B放电的二维径向-方位向粒子网格基准测试》, 《等离子体源科学与技术》30 075002（2021年）[47] Verboncoeur JP、Alves MV、Vahedi V, 《有界等离子体粒子模拟代码的电势与电路同步求解》, 电气工程与计算机科学系、加州大学伯克利分校, 《备忘录》第UCB/ERL M90/67号（1990年）[48] Croes V, 《霍尔推力器中等离子体放电的二维建模》。巴黎-萨克雷大学（COmUE）。法语。tel-01652098v2（2017年）[49] Mikellides IG、Katz I、Hofer RR、Goebel DM, 《实验室霍尔推力器的磁屏蔽。I. 理论与验证》, 《应用物理学杂志》115(4)，043303（2014年）[50] Janhunen S、Smolyakov A、Sydorenko D、Jimenez M、Kaganovich I、Raitses Y, 《二维空间中电子回旋漂移不稳定性的演化》, 《等离子体物理》25，082308（2018年）[51] Petronio F、Tavant A、Charoy T、Alvarez-Laguna A、Bourdon A、Chabert P, 《E×B放电中修正双流不稳定性的出现条件与动力学》, 《等离子体物理》28，043504（2021年）[52] Marin-Cebrián A、Domínguez-Vázquez A、Fajardo P、Ahedo E, 《具有弯曲磁场的霍尔推力器径向模型中的等离子体动力学》, 《等离子体源科学与技术》31 115003（2022年）