arXiv:2304.06589v1 [math.DG] 13 Apr 2023

复空间形式中赋值的管公式

GIL SOLANES 和 JUAN ANDR´ES TRILLO

Abstract. 给定复空间形式上的一个等距不变赋值，我们计算其在正可达性集合周围充分小半径的管上的取值。这推广了 Weyl、Gray 等人关于管的体积的经典公式。我们还建立了黎曼流形上赋值管公式的一般框架。

Contents

1. 引言 2 2. 背景 4 2.1. 赋值 4 2.2. 实空间形式 5 2.3. 复空间形式 6 3. 线性空间中的管状公式 6 4. 黎曼流形中的管状公式 10 4.1. 管状算子与导数算子 10 4.2. 黎曼流形中的管 12 4.3. $\mathbb{S}^m_\lambda$和 $\mathbb{C}P^n_\lambda$ 14中的导数算子 5. 管状公式的模型空间 16 5.1. 微分方程组 16 5.2. Y_λ 18的特征值与特征向量 5.3. Y_λ 19的像 6. $\mathbb{S}^m_\lambda$和 $\mathbb{C}P^n_\lambda$ 20中的管状公式 6.1. 复空间形式中的管状公式 20 6.2. 实空间形式中的管状公式 22 6.3. 导数映射的谱分析 23 6.4. 复空间形式中的稳定赋值 24 6.5. ∂_λ的像，$\mathbb{C}$ 和∂_λ，$\mathbb{R}$ 25参考文献 27

本研究部分得到 FEDER/MICINN/AEI 项目 PGC2018-095998-B-I00、PID2021-125625NB-I00 以及 AGAUR 项目 2021-SGR-01015 的资助。第一作者获得 Serra Hunter Programme 和 MICINN/AEI Mar´ıa de Maeztu 项目 CEX2020-001084-M 的资助。1

1. Introduction

对于紧凸集 $A \subset \mathbb{R}^m$，施泰纳公式按如下方式计算集合 A_t 的体积；该集合由与 A 的距离小于 t 的点组成

$$\mathrm{vol}(A_t) = \sum_{i=0}^{m} \omega_{m-i}\mu_i(A)t^{m-i}. \tag{1}$$

这里的泛函 μ_i 称为内在体积，归一化常数 ω_k 是 k维单位球的体积。根据 Hadwiger 刻画定理，内在体积张成了在刚性运动下连续且不变的赋值空间（定义在凸体上的有限可加泛函）。

H. Weyl 著名的管公式断言，对于$A \subset \mathbb{R}^m$ 光滑紧子流形以及足够小的 $t \geq 0$, 式 (1) 成立；此外，系数 $\mu_i(A)$ 仅取决于 A诱导的黎曼结构。更一般地，Federer 将式 (1) 的适用范围扩展到了正可达紧集。后来，人们证明该公式对更广泛的集合类也成立（例如参见 [20, 23]）。至于系数 μ_i，目前的观点是将其视为 Alesker 赋值理论意义下的光滑赋值（关于流形上的赋值理论，参见 [7]）。

早在 Weyl 的原始研究中，管公式就已推广到球面和双曲空间。在这种情况下，半径 t 上的多项式被某些函数 $\sin_\lambda(t)$、$\cos_\lambda(t)$ 的多项式取代，这些函数的定义我们将在（52）中回顾。后来，Gray 和 Vanhecke 计算了秩一对称空间中子流形周围的管的体积（参见 [26]）。

所有这些经典的管公式，用流形上的赋值语言来表达是最自然的。此外，这一理论还促成了各向同性空间中运动学公式的确定（这是对管公式的深远推广）。这些空间是在等距变换群作用下的黎曼流形，并且该等距变换群在球丛上是传递的。例如，在 [15] 和 [16]中，复复空间形式（即复欧几里得空间、复射影空间和复双曲空间）的运动学公式得以获得，并且恢复了 Gray在此类空间上的管公式。

然而，除体积之外，其他赋值也存在管状公式，而这些公式并不能由运动学公式推出。例如，对施泰纳公式求导即可轻易得到

$$\mu_k(A_t) = \sum_{j=0}^{k} \binom{m-j}{m-k} \frac{\omega_{m-j}}{\omega_{m-k}} \mu_j(A)t^{k-j}, \qquad A \subset \mathbb{R}^m. \tag{2}$$

对于实空间形式（即球面和双曲空间），Santal´o 得到了适用于所有等距不变赋值的类似管状公式（见 [40]）。对于秩一对称空间，某一类赋值（积分平均曲率）的管状公式是在 [26]，中发现的，当时仍采用微分几何观点。然而，这些空间上还有许多不变赋值尚未被研究。

本文证明了黎曼流形中任意光滑估值的管状公式存在。随后，我们提出一种方法，用于确定各向同性空间中不变赋值的这些公式。借助这一方法，我们显式计算出所有

复空间形式情形下的管状公式。事实上，我们的方法也揭示了实空间形式情形中的一些有趣特点。

我们简要介绍一下我们的结果。首先，给定一个黎曼流形 M，我们在光滑赋值空间 $\mathcal{V}(M)$ 上构造一族管状算子 $\mathbf{T}_t$，其中这些光滑赋值定义在 M 上，使得对于任意 $\mu \in \mathcal{V}(M)$ 以及每个具有正可达性的紧集 $A \subset M$，都有

$$\mu(A_t) = \mathbf{T}_t \mu(A),$$

对于足够小的 $t \geq 0$ （见定义4.1和推论4.7）。对 $\mathbf{T}_t$ 在 $t = 0$ 处求导，得到算子 $\partial\colon \mathcal{V}(M) \to \mathcal{V}(M)$。如果 G 是作用在球丛 SM 上的 M 的等距变换群，且作用具有传递性，那么 $\mathcal{V}(M)^G$ 中的 G-不变赋值构成有限维空间，而确定管状算子 $\mathbf{T}_t$ 则归结为计算由 ∂ 生成的流。

一旦建立起这一通用框架，我们便聚焦于复空间形式 $\mathbb{C}P^n_\lambda$。对于 $\lambda = 0$，这指的是复欧几里得空间 $\mathbb{C}^n$ 在复等距变换群作用下的情形；对于 $\lambda \neq 0$，则指常全纯曲率为 4λ 的 n 维复射影空间或双曲空间，在完整等距变换群 G 作用下的情形。我们简记 $\mathcal{V}^n_{\lambda,\,\mathbb{C}} := \mathcal{V}(\mathbb{C}P^n_\lambda)^G$。

对于 $\lambda = 0$，借助此类赋值空间 $\mathrm{Val}^{U(n)}$ 上存在的 $\mathfrak{sl}_2$-模结构，我们可以轻易得到所有平移不变且 $U(n)$-不变的连续估值 μ 的管状公式 $\mathbf{T}_t\mu$。这一结构由 Bernig 和 Fu 在 [15], 中发现，由两个自然算子 Λ、L 诱导，其中第一个算子是 ∂ 的归一化形式。

值得注意的是，对于 $\lambda \neq 0$，导子算子 ∂ 也与平直空间中的算子 Λ、L 密切相关。事实上，在定理 4.11 中，我们发现一个同构 $\Phi_\lambda\colon \mathrm{Val}^{U(n)} \to \mathcal{V}^n_{\lambda,\mathbb{C}}$，使得

$$\partial|_{\mathcal{V}^n_{\lambda,\mathbb{C}}} = \Phi_\lambda \circ (\Lambda - \lambda L) \circ \Phi_\lambda^{-1}. \tag{3}$$

利用 $\mathrm{Val}^{U(n)}$ 分解为不可约分量这一性质，管状算子的计算归结为在某些抽象模型空间中求解一个柯西问题，从而得到我们的主要结果。

定理。存在空间 $\mathcal{V}^n_{\lambda,\mathbb{C}}$ 中的一个基 $\{\sigma^\lambda_{k,r}\}$，该空间由 $\mathbb{C}P^n_\lambda$ 的不变赋值构成，使得

$$\mathbf{T}_t \sigma^\lambda_{k,r} = \sum_{j=0}^{n} \phi^\lambda_{2n-4r,k-2r,j}(t)\, \sigma^\lambda_{j+2r,r}, \tag{4}$$

其中

$$\phi^\lambda_{m,k,j}(t) = \sum_{h\geq 0} (-\lambda)^{j-h} \binom{m-j}{k-h} \binom{j}{h} \sin^{k+j-2h}_\lambda(t) \cos^{m-k-j+2h}_\lambda(t).$$

我们用先前已知的$\tau^\lambda_{k,\,p}$来明确描述$\sigma^\lambda_{k,\,r}$ 的基。 [16]的$\tau^\lambda_{k,\,p}$管状公式可以由先前的公式轻易得到；我们也给出了这些赋值用$\sigma^\lambda_{k,\,r}$表示的表达式。

有趣的是，表达式(4) 与 Santal´o在具有常曲率 λ的实空间形式 $\mathbb{S}^m_\lambda$ 中得到的表达式极其相似。事实上，对于某个基 $\{\sigma_i\}_{i=0}^m$

空间$\mathcal{V}^m_\lambda$, $\mathbb{R}$ 等距不变估值的空间 $\mathbb{S}^m_\lambda$中有一种彩票

$$\mathbf{T}_t\sigma^\lambda_i = \sum_{j=0}^{m-1} \phi^\lambda_{m-1,i,j}(t)\sigma^\lambda_j, \quad 0 \le i \le m-1.$$

然而， $\sigma_m = \text{vol}$ 的管公式却大不相同。为了解释这些相似之处，我们在定理 4.12 中证明了存在一种与（3）相似（但并不完全相同）的现象。

本文最后详细研究了导数算子 ∂ 在$\mathcal{V}^n_{\lambda,\mathbb{C}}$ 和$\mathcal{V}^m_{\lambda,\mathbb{R}}$的谱和特征子空间。特别地，我们计算了 ∂ 在 $\mathcal{V}^n_{\lambda,\mathbb{C}}$中的核；也就是说，我们确定了 $\mathbb{C}P^n_\lambda$ 使管公式保持不变的不变赋值。我们还确定了像 $\partial(\mathcal{V}^n_{\lambda,\mathbb{C}})$ 和 $\partial(\mathcal{V}^m_{\lambda,\mathbb{R}})$，并计算了 ∂ 对属于这些子空间的任意元素的原像。

2. Background

2.1. 赋值。设 V 是一个有限维实向量空间，并令 $\mathcal{K}(V)$ 为 V 中凸紧子集组成的空间，赋予豪斯多夫度量。 V 上的一个赋值是映射 $\varphi\colon \mathcal{K}(V) \to \mathbb{C}$，使得

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B) - \varphi(A \cap B),$$

对于 A、 B、 $A \cup B \in \mathcal{K}(V)$。 V 上平移不变的连续赋值空间记为 $\text{Val}(V)$。

Alesker 将赋值的概念推广到了光滑流形上（参见 [5,6, 10, 7]）。为简单起见，我们将重点讨论黎曼流形 M^n 的情形。在此考虑 M 中具有正可达性的紧集类也很自然，我们将其记为 $\mathcal{R}(M)$。这类集合的定义及其一些基本性质将在第 4.2 小节中回顾。

设 SM 是由单位切向量组成的 M 的球丛，且令 $\pi\colon SM \to M$ 为典范投影。

定义 2.1（光滑估值）。 M 上的光滑估值是一个形如 $\varphi\colon \mathcal{R}(M) \to \mathbb{C}$ 的泛函。

$$\varphi(A) = \int_{N(A)} \omega + \int_A \eta,$$

其中， $\omega \in \Omega^{n-1}(SM)$ 和 $\eta \in \Omega^n(M)$是复值微分形式，而$N(A)$是 A 的法循环（例如参见 [20]）。在此情况下，我们将记作 $\varphi = [\![\omega, \eta]\!]$。对于任意子群 $G \le \text{Diff}(M)$，我们将用 $\mathcal{V}^G(M)$ 表示 G-不变赋值的空间；即满足 $\mu \in \mathcal{V}(M)$ 使得 $\mu(gA) = \mu(A)$ 对所有 $A \in \mathcal{R}(M)$ 和 $g \in G$ 都成立。

映射 $(\omega, \eta) \mapsto [\![\omega, \eta]\!]$ 的核由Bernig和Br¨ocker 于[13] 确定如下。给定 $\omega \in \Omega^{n-1}(SM)$，存在 $\xi \in \Omega^{n-2}(SM)$ 使得

$$D\omega := d(\omega + \alpha \wedge \xi),$$

是 α 的倍数，即 SM 上的典范接触形式。满足此条件的唯一 n-形式 $D\omega$ 被称为 ω 的 Rumin 微分。接着， $[\![\omega, \eta]\!] = 0$ 当且仅当

$$D\omega + \pi^*\eta = 0, \qquad \text{and} \qquad \int_{S_xM} \omega = 0, \quad \forall x \in M. \tag{5}$$

流形上的 Alesker 赋值理论最引人注目的方面之一，是在 $\mathcal{V}(M)$ 上存在一种自然乘积，使这个空间成为一个代数。

其中 χ 为单位元。Fu 发现该乘积与运动学公式密切相关，这为近年来积分几何在多个空间（包括复空间形式 [1, 15, 16]）中的发展打开了大门。

另一种重要的代数结构是 Bernig 和 Fu 在线性空间中发现的赋值卷积（参见 [14], , 另见 [9]）。这是定义在稠密子空间 $\mathrm{Val}^\infty(V)$ 上的乘积: $= \mathrm{Val}(V) \cap \mathcal{V}(V)$，其特征如下。给定$A \in \mathcal{K}(V)$，其边界光滑且曲率为正，则有 $\mu_A(\cdot) := \mathrm{vol}(\cdot + A) \in \mathrm{Val}^\infty(V)$。卷积由下式确定

$$\mu_A * \varphi := \varphi(\cdot + A), \qquad \varphi \in \mathrm{Val}^\infty(V), \tag{6}$$

其中 $+$ 表示闵可夫斯基和。特别地，vol 是该运算的单位元。

2.2. 实空间形式。欧几里得空间中的赋值的基本例子 $\mathbb{R}^m$ 是内在体积 μ_k。它们由施泰纳公式隐式定义

$$\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^m}(A + t\mathbb{B}^m) = \sum_{k=0}^{m} t^{m-k}\omega_{m-k}\mu_k(A), \quad A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^m), \tag{7}$$

其中 $\mathbb{B}^m$ 属于单位球， ω_i 是 i维单位球的体积。特别地， $\mu_0 = \chi$、 $\mu_{m-1} = 2$周长以及 $\mu_n = \mathrm{vol}_m$ 都是内在体积。

我们将用 $\mathbb{S}^m_\lambda$ 表示 m维的完备且单连通的常曲率黎曼流形。也就是说，当 $\lambda > 0$ 时为球面 $S^m(\sqrt{\lambda})$，当 $\lambda = 0$ 时为欧氏空间 $\mathbb{R}^n$，当 $\lambda < 0$ 时为双曲空间 $H^m(\sqrt{-\lambda})$。令 $G_{\lambda,\mathbb{R}}$ 为保持方向的 $\mathbb{S}^m_\lambda$ 等距变换群；即，当$\lambda > 0$时为 $G_{\lambda,\mathbb{R}} \cong SO(m+1)$，当 $\lambda = 0$ 时为 $G_{\lambda,\mathbb{R}} \cong SO(m) \rtimes \mathbb{R}^m$，而当 $\lambda < 0$ 时为 $G_{\lambda,\mathbb{R}} \cong PSO(m, 1)$。我们将 $\mathbb{S}^m_\lambda$ 的 $G_{\lambda,\mathbb{R}}$-不变赋值空间记为 $\mathcal{V}^m_{\lambda,\mathbb{R}}$。

令 $\kappa_0, \ldots, \kappa_{m-1} \in \Omega^{m-1}(S\mathbb{S}^m_\lambda)^{G_{\lambda,\mathbb{R}}}$ 为在 [19,§0.4.4] 中定义的微分形式。在同一篇论文中已证明， $\mathbb{R}$-代数 $G_{\lambda,\mathbb{R}}$-不变微分形式由 $\kappa_0, \ldots, \kappa_{m-1}, \alpha, d\alpha$生成。由 [16, 命题 2.6] 可知，以下赋值构成 $\mathcal{V}^m_{\lambda,\mathbb{R}}$ 的基。

$$\sigma_i^\lambda := [\![\kappa_i, 0]\!], \qquad 0 \le i \le m-1$$
$$\sigma_m^\lambda := \mathrm{vol}_{\mathbb{S}^m_\lambda}.$$

在欧几里得空间中， $\mathbb{R}^m$ 这些赋值与内在体积成正比:

$$\sigma_i^\lambda = (m-i)\omega_{m-i}\mu_i, \qquad \lambda = 0.$$

对于一般的 λ， σ_i^λ与 [11, 24]中出现的赋值 τ_i^λ成正比

$$\sigma_i^\lambda = \frac{\pi^i(m-i)\omega_{m-i}}{i!\omega_i}\tau_i^\lambda, \quad 0 \le i \le m-1, \tag{8}$$

$$\sigma_m^\lambda = \frac{\pi^m}{m!\omega_m}\tau_m^\lambda. \tag{9}$$

正如我们将看到的，对 σ_i^λ采用的归一化使得$\mathcal{V}^m_{\lambda,\mathbb{R}}$ 中的管状公式格外简单。支持这种归一化的更有力理由是定理 4.12。

2.3. 复空间形式。我们用 $\mathbb{C}P^n_\lambda$ 表示常全纯曲率为 4λ 的n维完备单连通 K¨ahler 流形；也就是说，当 $\lambda>0$ 时为复射影空间（配备经过适当归一化的富比尼-施图迪度量），当 $\mathbb{C}^n$ 为 $\lambda=0$ 时为复欧几里得空间，而当$\lambda<0$时为复双曲空间。对于 $\lambda\neq 0$，令 $G_{\lambda,\mathbb{C}}$ 为 $\mathbb{C}P^n_\lambda$的全等距变换群。对于 $\lambda=0$，令$G_{\lambda,\mathbb{C}}=U(n)\rtimes\mathbb{C}^n$。我们用 $\mathcal{V}^n_{\lambda,\mathbb{C}}$ 表示$\mathbb{C}P^n_\lambda$上$G_{\lambda,\mathbb{C}}$-不变赋值的空间。

令 $\{\beta_{k,q},\gamma_{k,q}\}\subset\Omega^{2n-1}(S\mathbb{C}P^n_\lambda)^{G_{\lambda,\mathbb{C}}}$为文献 [15]中针对 $\lambda=0$引入、并在文献 [16]中扩展到曲率情形的微分形式。另令

$$\mu^\lambda_{k,q}:=[\![\beta_{k,q},0]\!],\quad k>2q, \tag{10}$$

$$\mu^\lambda_{2q,q}:=\sum_{i=0}^{n-q-1}\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^i\frac{(q+i)!}{q!}[\![\gamma_{2q+2i,q+i},0]\!]+\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{n-q}\frac{n!}{q!}[\![0,d\mathrm{vol}]\!] \tag{11}$$

其中 $d$vol 为黎曼体积元。文献 [15, 16] 证明，这些赋值 $\mu^\lambda_{k,q}$ 且 $\max\{0,k-n\}\leq q\leq\frac{k}{2}\leq n$ 构成了 $\mathcal{V}^n_{\lambda,\mathbb{C}}$的一组基。值得强调的是，$\mu^\lambda_{k,q}$ 与文献 [17] 中针对 $M=\mathbb{C}P^n_\lambda$ 引入的厄米内在体积 $\mu^M_{k,q}$ 并不相同。

对于 $\lambda=0$，我们简写为 $\mu_{k,q}$，而不写作 $\mu^0_{k,q}$。我们还将使用所谓的田崎赋值

$$\tau_{k,q}:=\sum_{i=q}^{\lfloor k/2\rfloor}\binom{i}{q}\mu_{k,i},\qquad 0,k-n\leq q\leq\frac{k}{2}\leq n.$$

考虑以下线性同构将很有用：

$$\mathcal{F}_{\lambda,\mathbb{C}}\colon \mathrm{Val}^{U(n)}\longrightarrow\mathcal{V}^n_{\lambda,\mathbb{C}},\quad \mathcal{F}_{\lambda,\mathbb{C}}(\mu_{k,q})=\mu^\lambda_{k,q}.$$

更一般地，每当我们有一个赋值 ν in $\mathrm{Val}^{U(n)}$ 时，就记作 $\nu^\lambda:=\mathcal{F}_{\lambda,\mathbb{C}}(\nu)$。例如 $\tau^\lambda_{k,q}=\mathcal{F}_{\lambda,\mathbb{C}}(\tau_{k,q})$。

3. Tube formulas in linear spaces

设 V是一个 m 维欧几里得向量空间。给定 $t\geq 0$，定义 $\mathbf{T}_t$: Val(V) →Val(V) 为

$$(\mathbf{T}_t\mu)(A)=\mu(A+t\mathbb{B}^m)=(\mu_{t\mathbb{B}^m}*\mu)(A)\qquad A\in\mathcal{K}(V), \tag{12}$$

其中 $\mathbb{B}^m$ 是单位球。我们称 $\mathbf{T}_t$ 为管状算子。再设 ∂: Val(V) →Val(V) 是如下定义的算子

$$\partial\mu=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\mathbf{T}_t\mu. \tag{13}$$

文献中有时将此算子记作 Λ，但遵循 [15]，我们将符号 Λ 保留用于表示 ∂ 的一种特定归一化（见（18））。

闵可夫斯基和的性质确保 $\mathbf{T}_{t+s}=\mathbf{T}_t\circ\mathbf{T}_s=\mathbf{T}_s\circ\mathbf{T}_t$。对 s 求导并在零点取值，得到

$$\frac{d}{dt}\mathbf{T}_t\mu=\mathbf{T}_t\partial\mu=\partial\mathbf{T}_t\mu. \tag{14}$$

由此可得

$$\partial^i\mu = \left.\frac{d^i}{dt^i}\right|_{t=0} \mathbf{T}_t\mu. \tag{15}$$

对于每个 $\mu \in \mathrm{Val}(V)$，映射 $t \mapsto \mathrm{T}_t\mu$ 根据 (12) 和施泰纳公式 (7)（或根据 [35]）是关于 t 的次数为 m 的多项式。因此

$$\mathbf{T}_t\mu = \sum_{i=0}^{m} \frac{t^i}{i!} \left.\frac{d^i}{dt^i}\right|_{t=0} \mathbf{T}_t\mu \tag{16}$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \frac{t^i}{i!}\partial^i\mu. \tag{17}$$

还需注意，根据 (15) 和 (16)，导数算子 ∂ 是 $(m+1)$-幂零的；即 $\partial^{m+1} = 0$。

利用 (17)，我们来计算每个 $0 \le i \le m$ 对应的内在体积 μ_i 的管公式。为此，我们先计算 ∂。由于 $\mathrm{T}_{t+s} = \mathrm{T}_s \circ \mathrm{T}_t$，我们有

$$\mathbf{T}_{t+s}\,\mathrm{vol} = \sum_{j=0}^{m} \omega_{m-j} t^{m-j} \mathbf{T}_s\mu_j.$$

另一方面

$$\mathbf{T}_{t+s}\,\mathrm{vol} = \sum_{j=0}^{m} \omega_{m-j}(t+s)^{m-j}\mu_j,$$

在 $s = 0$ 处求导并比较系数，得到

$$\partial\mu_j = \frac{\omega_{m-j+1}}{\omega_{m-j}}(m-j+1)\mu_{j-1}.$$

最后，利用 (17)，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_t\mu_k &= \sum_{i=0}^{m} \frac{t^i}{i!}\partial^i\mu_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{t^i}{i!}\frac{\omega_{m-k+i}}{\omega_{m-k}}\frac{(m-k+i)!}{(m-k)!}\mu_{k-i} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{m-j}{k-j}\frac{\omega_{m-j}}{\omega_{m-k}} t^{k-j}\mu_j,\end{aligned}$$

这就是 (2)。

为了计算 $\mathbb{C}^n$ 中的不变赋值管状公式（即确定 $\mathrm{Val}^{U(n)}$ 上的 T_t），回顾 [15] 中给出的 $\mathrm{Val}^{U(n)}$ 的 $\mathfrak{sl}_2$- 模结构将会很有帮助。考虑线性映射 Λ、L、H：$\mathrm{Val}(V) \to \mathrm{Val}(V)$，定义如下

$$\Lambda\nu := \frac{\omega_{m-k}}{\omega_{m-k+1}}\partial\nu, \qquad L\nu := \frac{2\omega_k}{\omega_{k+1}}\mu_1 \cdot \nu, \qquad H\nu = (2k-m)\nu, \qquad \nu \in \mathrm{Val}_k(V), \tag{18}$$

其中 $\cdot$ 表示 Alesker 乘积。

命题3.1. 在 $\mathrm{Val}^{O(m)}$ 上，算子 Λ、L 由下式给出

$$L\mu_k = (k+1)\mu_{k+1}, \tag{19}$$

$$\Lambda\mu_k = (m-k+1)\mu_{k-1}, \tag{20}$$

而在 $\mathrm{Val}^{U(n)}$ 上有

$$L\mu_{k,p} = (k-2q+1)\mu_{k+1,q} + 2(q+1)\mu_{k+1,q+1} \tag{21}$$
$$\Lambda\mu_{k,p} = (k-2q+1)\mu_{k-1,q-1} + 2(n-k+q+1)\mu_{k-1,q}, \tag{22}$$

这意味着

$$L\tau_{k,q} = (k-2q+1)\tau_{k+1,q} \tag{23}$$
$$\Lambda\tau_{k,q} = (k-2q+1)\tau_{k-1,q-1} + (2n-2q-k+1)\tau_{k-1,q} \tag{24}$$

证明。前两个等式分别是 [11, 等式 (2.3.12) 和 (2.3.13)]。其余内容见 [15,引理 5.2]。□

命题 3.2（[11, 命题 2.3.10 (3)]）。算子 Λ、L、H 在 $\mathrm{Val}^{O(m)}$ 和 $\mathrm{Val}^{U(n)}$ 上定义了一个 $\mathfrak{sl}_2$-模结构；即 $[L,\Lambda] = H$、$[H,L] = 2L$、$[H,\Lambda] = -2\Lambda$。

不可约分量的分解如下

$$\mathrm{Val}^{O(m)} \cong V^{(m)}, \qquad \mathrm{Val}^{U(n)} \cong \bigoplus_{0\le 2r\le n} V^{(2n-4r)} \tag{25}$$

其中 $V^{(m)}$ 是一个 $(m+1)$–维不可约 $\mathfrak{sl}_2$-表示。特别地，对于 $0 \le 2r \le n$，$\mathrm{Val}^{U(n)}$ 的每个不可约分量中都存在一个唯一的本原元（即被 Λ 消灭的元素），但相差一个乘法常数。根据所谓的 Lefschetz 分解，这些本原元的 L-轨道构成 $\mathrm{Val}^{U(n)}$ 的一组基。这组基在 [15] 中被明确计算如下。

命题 3.3（[15, eq.(76)]）。以下赋值

$$\pi_{2r,r} := (-1)^r(2n-4r+1)!!\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\frac{(2r-2i-1)!!}{(2n-2r-2i+1)!!}\tau_{2r,i}, \quad 0\le 2r\le n, \tag{26}$$

是 Λ-本原的；即 $\Lambda\pi_{2r,\ r} = 0$。该族

$$\pi_{k,r} := L^{k-2r}\pi_{2r,r} \tag{27}$$
$$= (-1)^r(2n-4r+1)!!\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\frac{(k-2i)!}{(2r-2i)!}\frac{(2r-2i-1)!!}{(2n-2r-2i+1)!!}\tau_{k,i}, \quad 2r\le k\le 2n-2r \tag{28}$$

构成 $\mathrm{Val}^{U(n)}$ 的一组基。

特别地，$\mathrm{Val}^{U(n)}$ 的不可约分量是以下子空间

$$\mathcal{I}_0^{n,r} := \{\pi_{k,r} : 2r\le k\le 2n-2r\}, \quad 0\le 2r\le n. \tag{29}$$

现在，我们可以利用（17）计算复数情形下的管状公式。

定理 3.4。

$$\mathbf{T}_t\pi_{k,r} = \frac{(k-2r)!}{\omega_{2n-k}}\sum_{j=0}^{k-2r}\binom{2n-4r-j}{k-2r-j}t^{k-2r-j}\frac{\omega_{2n-2r-j}}{j!}\pi_{j+2r,r}. \tag{30}$$

证明。根据 [15, 引理 5。6],

$$\Lambda\pi_{k,r} = (k-2r)(2n-k-2r+1)\pi_{k-1,r}, \tag{31}$$

然后

$$\Lambda^i\pi_{k,r} = \frac{(k-2r)!(2n-k-2r+i)!}{(k-2r-i)!(2n-k-2r)!}\pi_{k-i,r}. \tag{32}$$

利用式（17），我们得到管公式

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_t\pi_{k,r} &= \sum_{i=0}^{2n}\frac{t^i}{i!}\frac{\omega_{2n-k+i}}{\omega_{2n-k}}\Lambda^i\pi_{k,r}\\ &= \frac{(k-2r)!}{\omega_{2n-k}}\sum_{i=0}^{k-2r}\frac{t^i}{i!}\omega_{2n-k+i}\frac{(2n-k-2r+i)!}{(k-2r-i)!(2n-k-2r)!}\pi_{k-i,r}\\ &= \frac{(k-2r)!}{\omega_{2n-k}}\sum_{j=0}^{k-2r}\binom{2n-4r-j}{k-2r-j}t^{k-2r-j}\frac{\omega_{2n-2r-j}}{j!}\pi_{j+2r,r}.\end{aligned}$$

□

这些管状公式也可以用赋值 $\tau_{k,\ q}$ 来表示。为此，我们接下来计算它们的 Lefschetz 分解。

命题 3.5。Lefschetz 分解$\tau_{k,r}$ 由下式给出

$$\tau_{k,r} = \frac{1}{(k-2r)!}\sum_{i=0}^{r}\binom{n-2i}{r-i}\frac{(2n-2i-2r)!}{(2n-4i)!}\pi_{k,i}. \tag{33}$$

证明。考虑线性映射 ψ： $\mathrm{Val}^{U(n)} \to \mathrm{Val}^{U(n)}$ 映射$\tau_{k,r}$ 到（33）的左端。我们需要证明 ψ =id。让我们检验这个自同态与 Λ 和 L都可交换。要检验与 Λ的可交换性，我们只需验证以下内容

$$\begin{aligned}(k-2r)!\psi(\Lambda(\tau_{k,r})) =& \sum_{i=0}^{r-1}\frac{(n-2i)!(2n-2i-2r+2)!}{(r-i-1)!(n-r-i+1)!(2n-4i)!}\pi_{k-1,i}\\ &+ (k-2r)(2n-k-2r+1)\sum_{i=0}^{r}\frac{(n-2i)!(2n-2i-2r)!}{(r-i)!(n-i-r)!(2n-4i)!}\pi_{k-1,i}\\ =&\sum_{i=0}^{r}\frac{(n-2i)!(2n-2i-2r)!}{(r-i)!(n-i-r)!(2n-4i)!}(k-2i)(2n-k-2i+1)\pi_{k-1,i}\\ =&(k-2r)!\Lambda\psi(\tau_{k,r}).\end{aligned}$$

逐项比较，前述恒等式归结为

$$2(r-i)(2n-2i-2r+1) + (k-2r)(2n-k-2r+1) = (k-2i)(2n-k-2i+1)$$

这显然成立。

与 L 的交换可直接利用 $L\pi_{k,i} = \pi_{k+1,i}$ 得出。

鉴于 ψ 与算子 Λ 对易，且 L 与$\mathrm{Val}^{U(n)}$ 是无重的，Schur 引理意味着，对于每个 $0 \le 2r \le n$，存在一个常数 c_r，使得$\psi|_{\mathcal{I}^{n,}{}_0{}^r} = c_r\mathrm{id}$。

令 $a_{2r,\ j}$ 和 $b_{2r,\ i}$ 分别为（33）和（26）中$\pi_{2r,\ j}$ 以及 $\tau_{2r,\ i}$ 的系数，从而 $\psi($ $\tau_{2r,\ i})=\sum_{j=0}^{i} a_{2r,\ j}\pi_{2r,\ j}$ 以及 $\pi_{2r,\ r}=\sum_{i=0}^{r} b_{2r,\ i}\tau_{2r,\ i}$。那么

$$c_r\pi_{2r,r}=\psi(\pi_{2r,r})=\sum_{i=0}^{r} b_{2r,i}\left(\sum_{j=0}^{i} a_{2r,j}\pi_{2r,j}\right)=\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=j}^{r} b_{2r,i}a_{2r,j}\pi_{2r,j}.$$

比较等式两边的 $\pi_{2r,\ r}$ 系数，我们得到 $c_r=b_{2r,\ r}a_{2r,\ r}=1$ 对每个$0\le 2r\le n$。因此 $\psi=\mathrm{id}$，这证明了（33）。□

将（28）和（33）代入（30），即可得到以 $\tau_{i,j}$ 表示的管状公式 $\mathbf{T}_t\tau_{k,p}$。

4. Tube formulas in riemannian manifolds

4.1.管状算子和导数算子。接下来，我们将上一节在线性空间上引入的管状算子$\mathbf{T}_t$ 推广到任意完备黎曼流形 M。令 T 为 SM上的Reeb向量场，它由 $i_T\alpha=1$和 $\mathcal{L}_T\alpha=0$刻画，其中 $\mathcal{L}$是李导数。Reeb流ϕ： $SM\times\mathbb{R}\to SM$定义为 T的流，是一族接触变换，并且与 SM 上的测地流重合（例如参见 [25, 定理 1.5.2]）。

定义**4.1**（管状算子与导数算子）。给定 $t\ge 0$，我们定义管状算子$\mathbf{T}_t$ 为

$$\mathbf{T}_t\colon \mathcal{V}(M)\longrightarrow\mathcal{V}(M),\quad [\![\omega,\eta]\!]\longmapsto[\![\phi_t^*\omega+(p_t)_*(\pi\circ\phi)^*\eta,\eta]\!],$$

其中 $p_t\colon\ SM\times[0,t]\to SM$是到第二个因子的投影，而 $\phi_t=\phi(\cdot,t)$。我们定义导数算子 $\partial=\partial_M$ 为

$$\partial_M\colon\mathcal{V}(M)\longrightarrow\mathcal{V}(M),\quad \mu\longmapsto\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\mathbf{T}_t\mu.$$

为了证明这些定义是一致的，设 $\mu=[\![\omega、\ \eta]\!]=0$，并让我们检验对于所有 $t\ge 0$，$\mathbf{T}_t\mu=0$，即。

$$\int_{N(A)}\phi_t^*\omega+\int_{N(A)}(p_t)_*(\pi\circ\phi)^*\eta+\int_A\eta=0,\quad\forall A\in\mathcal{R}(M).$$

根据（5），我们有 $\pi^*\eta=-D\omega=-d(\omega+\xi\wedge\alpha)$。因此

$$\begin{aligned}\int_{N(A)}(p_t)_*(\pi\circ\phi)^*\eta&=-\int_{N(A)}(p_t)_*\circ\phi^*D\omega=-\int_{N(A)\times[0,t]}\phi^*d(\omega+\xi\wedge\alpha)\\&=-\int_{N(A)\times[0,t]}d\phi^*(\omega+\xi\wedge\alpha)=-\int_{N(A)\times\{0,t\}}\phi^*\omega+\phi^*\xi\wedge\alpha\\&=\int_{N(A)}\phi_0^*\omega-\int_{N(A)}\phi_t^*\omega=\int_{N(A)}\omega-\int_{N(A)}\phi_t^*\omega,\end{aligned}$$

因为 α在 $N(A)$ 上为零。由于 $[\![\omega,\eta]\!]=0$，我们有 $\int_{N(A)}\omega=-\int_A\eta$。因此 $\mathbf{T}_t\mu=0$。

接下来我们将确立这些算子的一些基本性质。

引理**4.1**。

$$\frac{d}{dt}(p_t)_*\phi^*\rho=i_T\phi_t^*\rho,\qquad\rho\in\Omega^*(SM)$$

证明。给定一个紧致光滑子流形 $N \subset SM$，

$$\begin{aligned}\int_N (p_t)_* \phi^* \rho &= \int_{N\times[0,t]} \phi^* \rho \\ &= \int_{N\times[0,t]} i_{\frac{\partial}{\partial t}} \phi^* \rho \wedge dt \\ &= \int_0^t \left(\int_N \phi_t^* i_{\frac{\partial \phi}{\partial t}} \rho \right) dt,\end{aligned}$$

由于 i_T 和 ϕ_t^* 可交换，结论成立。 □

命题 4.2。对于 $\mu = [\![\omega、\ \eta]\!]$,

i) $\partial\mu = [\![i_T\left(d\omega + \pi^*\eta\right), 0]\!]$
ii) $\mathbf{T}_{t+s}\mu = (\mathbf{T}_t \circ \mathbf{T}_s)\mu$

证明。模去恰当形式后，我们有

$$\frac{d}{dt}\phi_t^*\omega = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \phi_{t+s}^*\omega = \mathcal{L}_T\phi_t^*\omega \equiv i_T\phi_t^* d\omega. \tag{34}$$

结合引理4.1，可得

$$\frac{d}{dt}\mathbf{T}_t\mu = [\![i_T(d\phi_t^*\omega + \phi_t^*\pi^*\eta), 0]\!] \tag{35}$$

在 $t = 0$ 处求值，得到 i）。

为了证明 ii），只需验证两边关于 s 的导数相同，因为显然它们在 $s = 0$ 处相等。由（35），我们有

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\mathbf{T}_t \circ \mathbf{T}_s(\mu) &= \mathbf{T}_t \circ \frac{d}{ds}\mathbf{T}_s(\mu) \\ &= \mathbf{T}_t[\![i_T(d\phi_s^*\omega + \phi_s^*\pi^*\eta), 0]\!] \\ &= [\![\phi_t^* i_T(d\phi_s^*\omega + \phi_s^*\pi^*\eta), 0]\!].\end{aligned}$$

由于 ϕ_t^* 和 i_T 可交换，由（35）可得 $\frac{d}{ds}\mathrm{T}_{t+s} = \frac{d}{ds}\mathrm{T}_t \circ \mathrm{T}_s$。 □

固定 $\mu \in \mathcal{V}$（M）。由命题4.2 ii）可得

$$\frac{d}{dt}\mathbf{T}_t\mu = \partial\mathbf{T}_t\mu. \tag{36}$$

若 $\mu \in \mathcal{V}$（M）^{G} 对于一个通过等距变换作用于 M 的群 G 成立，则 $\mathrm{T}_t\mu \in \mathcal{V}$（$M$）^{G} 也成立。因此，当 $\mathcal{V}^G$（M）是有限维的，计算 $\mathrm{T}_t\mu$ 归结为求解初始条件为 $\mathrm{T}_0\mu = \mu$ 的柯西问题（36）；即

$$\mathbf{T}_t\mu = \exp(t\partial)\mu = \sum_{i\geq 0} \frac{t^i}{i!}\partial^i\mu. \tag{37}$$

这就是我们将采用的方法，以求得复空间形式中不变估值的管状公式。注意，除了对于一般的 M， ∂不必是幂零的之外，(37) 与 (16) 一致。

4.2. 黎曼流形中的管。设 M 是一个完备的黎曼流形，并且 d: $M \times M \to [0,\infty)$ 是 M 上的黎曼距离。对于 $t \geq 0$，子集 $A \subset M$ 的半径为 t 的管定义为

$$A_t := \{p \in M : d_A(p) \leq t\},$$

其中

$$d_A(p) := \inf\{d(p,q) : q \in A\}.$$

接下来，我们回顾关于正可达集的管的一些基本事实（正可达集最初由 Federer 在欧氏空间中引入，由 Kleinjohann 在黎曼流形中引入）。对于这类集合 A，我们将证明，对任意 $\mu \in \mathcal{V}(M)$ 以及充分小的 t，$\mathrm{T}_t\mu(A) = \mu(A_t)$。

定义 4.2（正可达集）。M 中的正可达集是一个闭子集 $A \subset M$，存在一个开邻域 $U_A \supset A$，使得对于每个 $p \in U_A \setminus A$，都存在唯一一点 $f_A(p) \in A$，满足 $d(p, f_A(p)) = d_A(p)$，并且存在一条连接 p 与 $f_A(p)$ 的唯一最短测地线。我们用 $\mathcal{R}(M)$ 表示 M 中正可达紧集的类。

根据前面的定义，存在一个定义良好的映射

$$F_A : U_A \setminus A \longrightarrow SM, \qquad F_A(p) = (\gamma(0), \gamma'(0)) \tag{38}$$

其中，γ 是唯一的最短测地线，满足 $\gamma(0) = f_A(p)$ 且 $\gamma(d_A(p)) = p$。Kleinjohann（[31, Satz 3.3]）证明了，$N(A) := F_A(U_A \setminus A)$ 是一个带自然定向的紧致 Lipschitz 子流形，位于 SM 中。相应的流，亦记作 $N(A)$，称为 A 的法循环。由下文的命题 4.6 可知，$N(A)$ 是 Legendrian 的（即它在 α 的倍数上取值为零）。

命题 4.3（[31, 定理 3.3，推论 2.7]）。给定一个正可达集 A 于M，存在 $r = r_A > 0$ 使得 $A_r \subset U_A$ 且

i)对于 $0 < t < r$，限制 $F_A|_{\partial A_t}$ 给出了 ∂A_t 与 $N(A)$ 之间的双 Lipschitz 同胚，并保持自然定向，

ii) 距离函数 d_A 在 $A_r \setminus A$ 中属于 C^1 类，并且

$$\phi_{d_A(p)}(F_A(p)) = (p, \nabla d_A(p)), \qquad \partial A_t = d_A^{-1}(\{t\})$$

对于 $0 < t < r$。特别地，每个满足 $0 < t < r$ 的等值集 ∂A_t 都是一个 C^1-正则超曲面，其单位法向量场为 ∇d_A。

以下命题当然是众所周知的。

命题 4.4。对于 $0 < s < r = r_A$，集合 A_s 具有正可达性，并且在 $A_r \setminus A_s$ 上有

$$d_{A_s} = d_A - s, \qquad F_{A_s} = \phi_s \circ F_A. \tag{39}$$

特别地 $(A_s)_t = A_{t+s}$ 对于 $t + s < r$。

证明。令 $p \in A_r \setminus A_s$，并置 $d = d_A(p)$。令 $\gamma\colon [0,d] \to A_r$ 为唯一的最短测地线，使得 $\gamma(0) = f_A(p)$且 $\gamma(d) = p$。特别地，$|\gamma'| = 1$，从而 $\gamma(s) \in A_s$。

假设 $\gamma|_{[s,d]}$ 并未使 p与 A_s之间的距离达到最小值，即存在一条光滑曲线 $\alpha : [0,1] \to M$，满足 $q := \alpha(0) \in A_s$、$\alpha(1) = p$，且长度$\ell(\alpha) < d - s$。由此可得

$$d_A(p) \leq \ell(\alpha) + d_A(q) \leq \ell(\alpha) + s < d_A(p),$$

矛盾。因此我们得出结论：$\gamma|_{[s,d]}$ 实现了距离 $d_{A_s}(p)$。因此$d_{A_s}(p) = d_A(p) - s$，并且

$$F_{A_s}(p) = (\gamma(s), \gamma'(s)) = \phi_s(\gamma(0), \gamma'(0)) = \phi_s(F_A(p)).$$

□

命题 4.5. 对于 $0 < s < r_A$，限制映射 $\phi_s|_{N(A)}$ 是 $N(A)$ 与 $N(A_s)$ 之间的双 Lipschitz 同胚。

证明。取满足 $s < t < \min(r_A, s+r_{A_s})$ 的 t。根据命题 4.3，$F_A|_{\partial A_t}\colon \partial A_t \to N(A)$ 和 $F_{A_s}|_{\partial A_t}\colon \partial A_t \to N(A_s)$ 均为双 Lipschitz 同胚。由 (39) 可得

$$\phi_s|_{N(A)} = F_{A_s}|_{\partial A_t} \circ (F_A|_{\partial A_t})^{-1}.$$

结论成立。 □

命题 4.6. 对于 $0 < t < r_A$，复合映射 $\pi \circ \phi$ 给出 $N(A) \times (0, t]$ 与 $A_t \setminus A$ 之间的双射 Lipschitz 映射。

证明。由于 π、ϕ 是光滑的，$\pi \circ \phi$ 在 Lipschitz 流形 $N(A) \times (0, t]$ 上的限制显然是 Lipschitz 的。

给定 $(\xi, s) \in N(A) \times (0, t]$，根据前一个命题，我们知道 $\phi(\xi, s) \in N(A_s)$，因此 $\pi \circ \phi(x, s) \in \partial A_s \subset A_t \setminus A$。

为检验满射性，给定 $p \in A_t \setminus A$ 取 $\xi = F_A(p)$ $s = d_A(p)$ 并注意$\pi \circ \phi(\xi, s) = p$。

关于单射性，假设 $\pi\circ\phi(\xi_1, t_1) = \pi\circ\phi(\xi_2, t_2) =: p$ 对于某个 $(\xi_1, t_1), (\xi_2, t_2) \in N(A) \times (0, t]$。根据前一个命题，$p$同时属于 $\partial A_{t_1}, \partial A_{t_2}$，因此 $t_1 = t_2$。对于 $s \in [0, t_1]$，测地线 $\gamma_1(s) = \pi \circ \phi(\xi_1, s)$ $\gamma_2(s) = \pi \circ \phi(\xi_2, s)$ 实现了 p 与 A之间的距离。由于 $A_s \subset A_{r_A} \subset U_A$，我们有 $\gamma_1 = \gamma_2$，从而$\xi_1 = \xi_2$。 □

推论 4.7. 对于每个 $A \in \mathcal{R}(M)$ 和 $\mu \in \mathcal{V}(M)$，我们有 $\mu(A_t) = \mathbf{T}_t\mu(A)$，其中$0 \le t \le r_A$。

证明。令 $\mu = [\![\omega, \eta]\!]$。由命题 4.5 和 4.6 以及余面积公式，

$$\begin{aligned}\mu(A_t) &= \int_{N(A_t)} \omega + \int_{A_t} \eta = \\ &= \int_{\phi_t(N(A))} \omega + \int_{(\pi\circ\phi)(N(A)\times(0,t])} \eta + \int_A \eta = \mathbf{T}_t\mu(A).\end{aligned}$$

□

注。在带角紧子流形的子类 $\mathcal{P}(M) \subset \mathcal{R}(M)$ 中，法循环更自然的定义如下。对于 $A \in \mathcal{P}(M)$ 和 $p \in A$，令

$$\begin{aligned}T_pA &= \{\gamma'(0) \in T_pM : \gamma \in C^1([0,1), A), \gamma(0) = p\} \\ N'(A) &= \{(p, v) \in SM : p \in A, \langle v, w\rangle \le 0 \ \forall w \in T_pA\}.\end{aligned}$$

让我们验证 $N'(A)$ 确实等于 $N(A) = F_A(U_A)$。用局部坐标图覆盖 A（局部模型为 $\mathbb{R}^k \times [0,\infty)^l \subset \mathbb{R}^m$），并考虑 M 的余球丛中 $N'(A)$ 的副本，可见 $N'(A)$ 是一个紧拓扑流形。

此外，容易证明 $N(A) \subset N'(A)$。由区域不变性定理可知，$N(A)$ 是 $N'(A)$ 的开子集。由于 $N'(A)$ 是豪斯多夫空间，且 $N(A)$ 是紧的，因此 $N(A)$ 也是 $N'(A)$ 的闭子集。

由于 $N(A)$ $N'(A)$ 的连通分支数显然等于 A 的连通分支数，因此必有 $N(A) = N'(A)$。

4.3. $\mathbb{S}^m_\lambda$和 $\mathbb{C}P^n_\lambda$中的导数算子。给定 $\lambda \in \mathbb{R}$，令 $\partial_{\lambda,\mathbb{R}} \colon \mathcal{V}^m_{\lambda,\mathbb{R}} \to \mathcal{V}^m_{\lambda,\mathbb{R}}$为 $\partial_{\mathbb{S}^m_\lambda}$在 $\mathcal{V}^m_{\lambda,\mathbb{R}}$上的限制，并令 $\partial_{\lambda,\mathbb{C}}$ 为 $\partial_{\mathbb{C}P^m_\lambda}$在 $\mathcal{V}^n_{\lambda,\mathbb{C}}$上的限制。

命题 4.8.

$$\partial_{\lambda,\mathbb{R}}\sigma^\lambda_i = (m-i)\sigma^\lambda_{i-1} - \lambda(i+1)\sigma^\lambda_{i+1}, \qquad 0 \le i \le m-2, \tag{40}$$

$$\partial_{\lambda,\mathbb{R}}\sigma^\lambda_{m-1} = \sigma^\lambda_{m-2}, \tag{41}$$

$$\partial_{\lambda,\mathbb{R}}\sigma^\lambda_m = \sigma^\lambda_{m-1}, \tag{42}$$

这里约定 $\sigma^\lambda_{-1} = 0$。

需要强调的是，式（40）在形式上有意义，但对$i = m-1$并不成立。

证明。根据 [21, 引理 3.1], ，令 $\kappa_m = 0$，我们得到

$$d\kappa_i = \alpha \wedge \left((m-i)\kappa_{i-1} - \lambda(i+1)\kappa_{i+1}\right), \quad 0 \le i \le m-1.$$

与 T 收缩可得

$$i_T d\kappa_i = (m-i)\kappa_{i-1} - \lambda(i+1)\kappa_{i+1}, \qquad \mod(\alpha, d\alpha).$$

由命题 4.2，结论成立。 □

引理 4.9。以下等式模 α、$d\alpha$ 成立

i) 对于 $k > 2q$

$$\begin{aligned}\frac{\omega_{2n-k}}{\omega_{2n-k+1}} i_T d\beta_{k,q} \equiv\, & 2(n-k+q+1)\gamma_{k-1,q} \\ & + (k-2q+1)\beta_{k-1,q-1} \\ & - \frac{\lambda}{2\pi}(k-2q+1)(2n-k+1)\beta_{k+1,q}.\end{aligned} \tag{43}$$

ii) 对于 $n > k-q$

$$\begin{aligned}\frac{\omega_{2n-2q}}{\omega_{2n-2q+1}} i_T d\gamma_{2q,q} \equiv\, & \beta_{2q-1,q-1} \\ & - \frac{\lambda}{2\pi}\frac{(q+2)(2n-2q+1)}{n-q}\beta_{2q+1,q} \\ & - \frac{\lambda}{2\pi}\frac{(n-q-1)(2n-2q+1)}{n-q}\gamma_{2q+1,q}.\end{aligned} \tag{44}$$

证明。这是利用 [1, 引理 3.3、引理 3.6] 进行的直接计算。□

命题 4.10。对于 $k > 2q$

$$\begin{aligned}\frac{\omega_{2n-k}}{\omega_{2n-k+1}}\partial_{\lambda,\mathbb{C}}\mu^\lambda_{k,q} = {} & (k-2q+1)\mu^\lambda_{k-1,q-1} + 2(n-k+q+1)\mu^\lambda_{k-1,q} \\ & - \frac{\lambda}{2\pi}(2n-k+1)\left((k-2q+1)\mu^\lambda_{k+1,q} + 2(q+1)\mu^\lambda_{k+1,q+1}\right)\end{aligned} \tag{45}$$

and

$$\frac{\omega_{2n-2q}}{\omega_{2n-2q+1}}\partial_{\lambda,\mathbb{C}}\mu^\lambda_{2q,q} = \mu_{2q-1,q-1} - (2n-2q+1)\frac{\lambda}{2\pi}\mu_{2q+1,q}. \tag{46}$$

证明。等式 (45) 由命题 4.2 推出，使用 (43) 以及以下内容（参见[1, 命题 2.7]）

$$[\![\gamma_{k,q},0]\!]=\mu^{\lambda}_{k,q}-\lambda\frac{(2n-k)(q+1)}{2\pi(n-k+q)}\mu^{\lambda}_{k+2,q+1},\quad n-k+q>0. \tag{47}$$

现在我们来证明 (46)。首先注意，由 (44) 和 (47) 可得

$$\begin{aligned}[\![i_T d\gamma_{2j,j},0]\!]&=\frac{\omega_{2n-2j+1}}{\omega_{2n-2j}}\mu^{\lambda}_{2j-1,j-1}\\&\quad-\frac{\omega_{2n-2j+1}}{\omega_{2n-2j}}\frac{(2n-2j+1)(n+1)}{n-j}\frac{\lambda}{2\pi}\mu^{\lambda}_{2j+1,j}\\&\quad+\frac{\omega_{2n-2j+1}}{\omega_{2n-2j}}\frac{(2n-2j+1)(2n-2j-1)(j+1)}{n-j}\frac{\lambda^2}{4\pi^2}\mu^{\lambda}_{2j+3,j+1}\\&=:a_j\mu^{\lambda}_{2j-1,j-1}+b_j\frac{\lambda}{\pi}\mu^{\lambda}_{2j+1,j}+c_j\frac{\lambda^2}{\pi^2}\mu^{\lambda}_{2j+3,j+1}\end{aligned} \tag{48}$$

然后，根据命题 4.2，并注意到 $a_n=2$

$$\begin{aligned}\partial_{\lambda,\mathbb{C}}\mu^{\lambda}_{2q,q}&=\sum_{i=0}^{n-q-1}\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^i\frac{(q+i)!}{q!}[\![i_T d\gamma_{2q+2i,q+i},0]\!]+2\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{n-q}\frac{n!}{q!}\mu^{\lambda}_{2n-1,n-1}\\&=\sum_{i=0}^{n-q}\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^i\frac{(q+i)!}{q!}a_{q+i}\mu^{\lambda}_{2q+2i-1,q+i-1}\\&\quad+\sum_{i=0}^{n-q-1}\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{i+1}\frac{(q+i)!}{q!}b_{q+i}\mu^{\lambda}_{2q+2i+1,q+i}\\&\quad+\sum_{i=0}^{n-q-2}\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{i+2}\frac{(q+i)!}{q!}c_{q+i}\mu^{\lambda}_{2q+2i+3,q+i+1}\\&=a_q\mu_{2q-1,q-1}+\frac{\lambda}{\pi}((q+1)a_{q+1}+b_q)\mu^{\lambda}_{2q+1,q}\\&\quad+\sum_{j=2}^{n-q}\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^j\left(\frac{(q+j)!}{q!}a_{q+j}+\frac{(q+j-1)!}{q!}b_{q+j-1}+\frac{(q+j-2)!}{q!}c_{q+j-2}\right)\mu^{\lambda}_{2q+2j-1,q+j-1}\end{aligned}$$

利用 $k\omega_k=2\pi\omega_{k-2}$ 进行直接计算可得

$$j(j-1)a_j+(j-1)b_{j-1}+c_{j-2}=0$$

结论由此得出。 □

注意，根据 (18)，线性映射 $\Phi_0\colon \mathrm{Val}^{U(n)}\to\mathrm{Val}^{U(n)}$ 由 $\Phi_0|_{\mathrm{Val}^{U(n)}_k}=\omega_{2n-k}\mathrm{id}$ 给出，满足

$$\partial_{0,\mathbb{C}}=\Phi_0\circ\Lambda\circ\Phi_0^{-1}.$$

值得注意的是，对于所有 λ，类似的恒等式也成立，这对我们确定 $\mathbb{C}P^n_\lambda$ 中的管状公式至关重要。

定理 4.11。线性同构

$$\Phi_\lambda=\mathcal{F}_{\lambda,\mathbb{C}}\circ\Phi_0\colon\ \mathrm{Val}^{U(n)}\longrightarrow\mathcal{V}^n_{\lambda,\mathbb{C}},\qquad \mu_{k,q}\longmapsto\omega_{2n-k}\mu^{\lambda}_{k,q}.$$

满足

$$\partial_{\lambda,\mathbb{C}} = \Phi_\lambda \circ (\Lambda - \lambda L) \circ \Phi_\lambda^{-1}.$$

证明。结合命题 4.10、命题 3.1 以及事实 $\frac{\omega_n}{\omega_{n-2}} = \frac{2\pi}{n}$，不难验证：

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda \circ (\Lambda - \lambda L)(\mu_{k,q}) &= (k-2q+1)\omega_{2n-k+1}\mu^\lambda_{k-1,q-1} + 2(n-k+q+1)\omega_{2n-k+1}\mu^\lambda_{k-1,q} \\
&\quad - \lambda(k-2q+1)\omega_{2n-k-1}\mu^\lambda_{k+1,q} - 2\lambda(q+1)\omega_{2n-k-1}\mu^\lambda_{k+1,q+1} \\
&= \omega_{2n-k+1}\left((k-2q+1)\mu^\lambda_{k-1,q-1} + 2(n-k+q+1)\mu^\lambda_{k-1,q}\right. \\
&\quad \left. - \frac{\lambda}{2\pi}(2n-k+1)\left((k-2q+1)\mu^\lambda_{k+1,q} + 2(q+1)\mu^\lambda_{k+1,q+1}\right)\right. \\
&= \omega_{2n-k}\partial_{\lambda,\mathbb{C}}\mu^\lambda_{k,q} = \partial_{\lambda,\mathbb{C}} \circ \Phi_\lambda(\mu_{k,q}).
\end{aligned}$$

□

类似现象在实空间形式中也成立，但限于 $\mathcal{V}^m_{\lambda,\mathbb{R}}$ 的一个超平面。

定理 4.12。线性单射

$$\Psi_\lambda : \mathrm{Val}^{O(m)} \longrightarrow \mathcal{V}^{m+1}_{\lambda,\mathbb{R}}, \qquad \mu_k \longmapsto \sigma^\lambda_k$$

满足

$$\partial_{\lambda,\mathbb{R}} \circ \Psi_\lambda = \Psi_\lambda \circ (\Lambda - \lambda L)\,.$$

证明。根据命题 4.8 和定理 3.4

$$\begin{aligned}
\partial_{\lambda,\mathbb{R}} \circ \Psi_\lambda(\mu_k) &= \partial_{\lambda,\mathbb{R}}\sigma^\lambda_k = (m-k+1)\sigma^\lambda_{k-1} - \lambda(k+1)\sigma^\lambda_{k+1} \\
&= \Psi_\lambda((m-k+1)\mu_{k-1} - \lambda(k+1)\mu_{k+1}) \\
&= \Psi_\lambda(\Lambda\mu_k - \lambda L\mu_k).
\end{aligned}$$

□

注意 Ψ_λ 的源与目标之间的维数差异。我们将证明 $\mathrm{Val}^{O(m)}$ 和 $\mathcal{V}^m_{\lambda,\,\mathbb{R}}$ 之间不存在交织 ∂ 和 $\Lambda - \lambda L$ 的同构。这本质上是因为 (41) 和 (42) 与 (40) 不同。

5. A model space for tube formulas

接下来，我们进行一些抽象计算，通过（62）和（64）即可轻松推导出复空间形式和实空间形式中的管公式。同样的方法还能让我们确定这些空间上导数算子 ∂ 的核、像和谱。

5.1. 一个微分方程组。众所周知，算子$X = x\frac{\partial}{\partial y}$、$Y = y\frac{\partial}{\partial x}$和 $H = [X,Y]$ 在 $\mathbb{C}[x,y]$上诱导出一个 $\mathfrak{sl}_2$-结构。分解为不可约分量为 $\mathbb{C}[x,y] = \bigoplus_{m\geq 0} V^{(m)}$，其中 $V^{(m)}$ 是 m-齐次多项式的子空间：

$$V^{(m)} := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{x^k y^{m-k}\}_{k=0}^m.$$

有 $H(x^k y^{m-k}) = (m-2k)x^k y^{m-k}$。

受定理 4.11 的启发，我们考虑 $Y_\lambda = Y - \lambda X$，它是作用在$\mathbb{C}[x,y]$上的一个导子。有时，考虑单项式$\binom{m}{k}x^k y^{m-k}$会更方便。用这些术语表示

$$\binom{m}{k}Y_\lambda(x^k y^{m-k}) = (m-k+1)\binom{m}{k-1}x^{k-1}y^{m-k+1} - \lambda(k+1)\binom{m}{k+1}x^{k+1}y^{m-k-1}. \tag{49}$$

我们的目标是求解以下柯西问题：求 p_k: $\mathbb{R} \to V_{(m)}$ 使得

$$\partial_t p_k(t) = Y_\lambda p_k(t), \quad p_k(0) = \binom{m}{k}x^k y^{m-k}, \quad 0 \le k \le m, \tag{50}$$

即计算

$$p_k(t) = \binom{m}{k}\exp(tY_\lambda)(x^k y^{m-k}), \quad 0 \le k \le m. \tag{51}$$

我们将使用标准记号

$$\sin_\lambda(t) := \begin{cases} \dfrac{\sin(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}} & \lambda > 0, \\ t & \lambda = 0, \\ \dfrac{\sinh(\sqrt{|\lambda|}t)}{\sqrt{|\lambda|}} & \lambda < 0, \end{cases} \tag{52}$$

它关于 λ 和 t均为解析函数，并且 $\cos_\lambda(t) := \frac{d}{dt}\sin_\lambda(t)$。

命题 5.1. 对于任意 $\lambda, t \in \mathbb{R}$，有

$$\exp(tY_\lambda)x = x\cos_\lambda(t) + y\sin_\lambda(t) =: u, \quad \exp(tY_\lambda)y = y\cos_\lambda(t) - \lambda x\sin_\lambda(t) =: v.$$

证明。显然

$$Y_\lambda^{2k}x = (-\lambda)^k x, \quad Y_\lambda^{2k+1}x = (-\lambda)^k y,$$

我们有

$$\begin{aligned} \exp(tY_\lambda)x &= \sum_{k\ge 0}\frac{t^k}{k!}Y_\lambda^k x \\ &= \sum_{k\ge 0}\frac{t^{2k}}{(2k)!}(-\lambda)^k x + \sum_{k\ge 0}\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}(-\lambda)^k y \\ &= x\cos_\lambda(t) + y\sin_\lambda(t). \end{aligned}$$

同样地，我们可以计算 $\exp(tY_\lambda)y$。 □

以下标准且初等的事实将会用到。

引理 5.2. 设 A 为一个代数。A 上的向量场是导子，当且仅当其流ϕ_t 满足

$$\phi_t(pq) = \phi_t(p)\phi_t(q), \quad \forall p, q \in \mathbf{A}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

换言之，每个 ϕ_t 都是一个 A-态射。

定理 5.3。柯西问题 (50) 的解为

$$p_k(t) = \binom{m}{k} u^k v^{m-k} \tag{53}$$

$$= \binom{m}{k} (x\cos_\lambda(t) + y\sin_\lambda(t))^k (y\cos_\lambda(t) - \lambda x \sin_\lambda(t))^{m-k} \tag{54}$$

$$= \sum_{j=0}^{m} \phi^\lambda_{m,k,j}(t) \binom{m}{j} x^j y^{m-j}, \tag{55}$$

其中

$$\phi^\lambda_{m,k,j}(t) = \sum_{h\geq 0} (-\lambda)^{j-h} \binom{m-j}{k-h}\binom{j}{h} \sin_\lambda^{k+j-2h}(t)\cos_\lambda^{m-k-j+2h}(t). \tag{56}$$

证明。由于 Y_λ 是一个导子，根据前一个引理，$\exp(tY_\lambda)$ 是一个 $\mathbb{C}[x,y]$-态射。因此

$$\exp(tY_\lambda)x^k y^{m-k} = (\exp(tY_\lambda)x)^k (\exp(tY_\lambda)y)^{m-k} = u^k v^{m-k}.$$

与（51）比较可得（54）。

尚需证明（55）。令 $s = \sin_\lambda(t)$ $c = \cos_\lambda(t)$，则有

$$\begin{aligned}
\binom{m}{k}(xc+ys)^k(yc-\lambda xs)^{m-k} &= \binom{m}{k}\sum_{a,b}\binom{k}{a}(ys)^a(xc)^{k-a}\binom{m-k}{b}(-\lambda xs)^b(yc)^{m-k-b} \\
&= \binom{m}{k}\sum_{a,b}\binom{k}{a}\binom{m-k}{b}(-\lambda)^b s^{a+b}c^{m-a-b}x^{k-a+b}y^{m-k+a-b} \\
&= \binom{m}{k}\sum_{j,h}\binom{k}{h}\binom{m-k}{j-h}(-\lambda)^{j-h} s^{j+k-2h}c^{m-j-k+2h}x^j y^{m-j}
\end{aligned}$$

其中我们更改了 $a = k-h, b = j-h$。使用

$$\binom{m}{k}\binom{k}{h}\binom{m-k}{j-h} = \binom{m-j}{k-h}\binom{j}{h}\binom{m}{j} \tag{57}$$

得到（55）。 □

5.2. Y_λ 的特征值和特征向量。给定 $f\colon V \to V$ 一个 $\mathbb{C}$ 向量空间的自同态，我们用 spec(f) 表示 f 的特征值集合，并用 $E_\alpha(f)$ 表示与每个 $\alpha \in \text{spec}(f)$ 相关联的特征子空间。

引理 5.4。端同态 $Y_\lambda|_{V^{(m)}}$ 可对角化，且具有简单重数，并且

$$\operatorname{spec}(Y_\lambda|_{V^{(m)}}) = \left\{(2k-m)\sqrt{-\lambda} : 0 \leq k \leq m\right\},$$

$$E_{(2k-m)\sqrt{-\lambda}}(Y_\lambda|_{V^{(m)}}) = \operatorname{span}\{e_1^k e_2^{m-k}\},$$

其中 $e_1 := \sqrt{-\lambda}x + y$ 和 $e_2 := -\sqrt{-\lambda}x + y$。

证明。容易验证， $m = 1$ 因为

$$Y_\lambda(e_1) = \sqrt{-\lambda}y + \lambda x = \sqrt{-\lambda}e_1, \qquad Y_\lambda(e_2) = -\sqrt{-\lambda}y - \lambda x = -\sqrt{-\lambda}e_2.$$

由于 Y_λ 是一个导子

$$Y_\lambda e_1^k = k e_1^{k-1} Y_\lambda e_1 = k\sqrt{-\lambda} e_1^k,$$
$$Y_\lambda e_2^{m-k} = (m-k) e_2^{m-k-1} Y_\lambda e_2 = -\sqrt{-\lambda}(m-k) e_2^{m-k}.$$

因此

$$Y_\lambda(e_1^k e_2^{m-k}) = (2k-m)\sqrt{-\lambda} e_1^k e_2^{m-k},$$

如上所述。 □

注记。值得注意的是，将 Y_λ 和 $\sqrt{-\lambda}H$ 限制到各个 $V^{(m)}$ 上时，它们的谱完全相同。因此，这两个算子可由线性同构 $x^k y^{m-k} \mapsto e_1^k e_2^{m-k}$ 交织。

5.3. Y_λ的像。利用引理 5.4，我们可以得出：当且仅当 m 为奇数时，$Y_\lambda|_{V^{(m)}}$ 是双射的。如果 m 为偶数，则核是一维的。具体描述如下。

命题 5.5。如果 m 为偶数，则

$$\operatorname{im}(Y_\lambda|_{V^{(m)}}) = \ker Z_{m,\lambda}, \tag{58}$$

其中

$$Z_{m,\lambda} := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{m/2}.$$

证明。根据二项式公式

$$\begin{aligned} Z_{m,\lambda}(x^k y^{m-k}) &= \sum_{i=0}^{m/2} \lambda^{m/2-i} \binom{m/2}{i} \frac{\partial^m}{\partial x^{2i} \partial y^{m-2i}} x^k y^{m-k} \delta_{k,2i} \\ &= \lambda^{\frac{m-k}{2}} \binom{m/2}{k/2} k!(m-k)! \end{aligned} \tag{59}$$

当 k 为偶数时，以及当 k 为奇数时，$Z_{m,\lambda}(x^k y^{m-k}) = 0$。因此

$$\begin{aligned} Z_{m,\lambda} \circ Y_\lambda(x^{2l+1} y^{m-2l-1}) &= Z_{m,\lambda}((2l+1)x^{2l} y^{m-2l} - \lambda(m-2l-1)x^{2l+2} y^{m-2l-2}) \\ &= \lambda^{\frac{m}{2}-l} \binom{m/2}{l} (2l+1)!(m-2l)! \\ &\quad - \lambda^{\frac{m}{2}-l} \binom{m/2}{l+1} (2l+2)!(m-2l-1)! = 0 \end{aligned}$$

$$Z_{m,\lambda} \circ Y_\lambda(x^{2l} y^{m-2l}) = 0.$$

这表明 $\operatorname{im}(Y_\lambda)$ 是 $\ker Z_{m,\lambda}$ 的子空间。由于 $Z_{m,\lambda}$ 不为零，我们有 $\dim \ker Z_{m,\lambda} = m$，并且根据引理 5.4，我们知道 $Y_\lambda|_{V^{(m)}}$ 的像具有相同的维数。这就得到 (58) □

接下来，对于偶数的 m，以及像 $Y_\lambda|_{V^{(m)}}$ 中给定的 φ，我们计算原像 $Y_\lambda^{-1}(\{\varphi\})$。

考虑

$$P_{m,k} := \sum_{j \geq 0} \lambda^j \frac{(k+2j-1)!!(m-k-2j-1)!!}{(k-1)!!(m-k+1)!!} \binom{m}{k+2j} x^{k+2j} y^{m-k-2j} \in V^{(m)}. \tag{60}$$

利用 (49) 进行简单计算可得

$$Y_\lambda P_{m,k} = \binom{m}{k-1} x^{k-1} y^{m-k+1} - c_{m,k} x^m$$

其中 $c_{m,\ k} = 0$ 若 $m-k$ 为偶数，否则

$$c_{m,k} = \lambda^{\frac{m-k+1}{2}} \frac{m!!}{(k-1)!!(m-k+1)!!}.$$

有了这些要素，对于偶数 m，我们现在可以如下计算任意 $\operatorname{im} Y_\lambda$ 中元素的原像 Y_λ。

命题 5.6. 设 $\Pi\colon V_{(m)} \to V_{(m)}$ 由 $\binom{m}{k} x^k y^{m-k} \mapsto P_{m,\ k+1}$ 给出。若 m 为偶数，则

$$Y_\lambda \circ \Pi(\varphi) = \varphi, \qquad \forall \varphi \in \operatorname{im} Y_\lambda|_{V^{(m)}} \tag{61}$$

证明。设 $0 < k < m$。由于 $(m-k+1)c_{m,\ k} - \lambda(k+1)c_{m,\ k+2} = 0$，利用 (49) 可得

$$\begin{aligned}
Y_\lambda \circ \Pi \circ Y_\lambda \binom{m}{k} x^k y^{m-k} &= Y_\lambda \circ \Pi \left((m-k+1)\binom{m}{k-1} x^{k-1} y^{m-k+1} - \lambda(k+1)\binom{m}{k+1} x^{k+1} y^{m-k-1} \right) \\
&= (m-k+1) Y_\lambda P_{m,k} - \lambda(k+1) Y_\lambda P_{m,k+2} \\
&= (m-k+1)\binom{m}{k-1} x^{k-1} y^{m-k+1} - \lambda(k+1)\binom{m}{k+1} x^{k+1} y^{m-k-1} \\
&+ ((m-k+1)c_{m,k} - \lambda(k+1)c_{m,k+2}) x^m \\
&= Y_\lambda \binom{m}{k} x^k y^{m-k}.
\end{aligned}$$

对于 $k = 0$ 和 $k = m$,

$$Y_\lambda \circ \Pi \circ Y_\lambda(y^m) = -\lambda Y_\lambda(P_{m,2}) = -\lambda(mxy^{m-1} - c_{m,2}x^m) = Y_\lambda(y^m) + \lambda c_{m,2} x^m,$$
$$Y_\lambda \circ \Pi \circ Y_\lambda(x^m) = Y_\lambda(P_{m,m}) = m x^{m-1} y - c_{m,m} x^m = Y_\lambda(x^m) + c_{m,m} x^m.$$

由于 $c_{m,m} = 0$，且若 m 为偶数，则 $c_{m,2} = 0$，结论成立。 □

6. Tube formulas in $\mathbb{S}^m_\lambda$ and $\mathbb{C}P^n_\lambda$

这里我们将得到主要结果：$\mathbb{C}P^n_\lambda$ 的不变赋值的管公式（即作用于 $\mathcal{V}^n_{\lambda,\mathbb{C}}$ 上的管状算子 T_t）。我们还将重新得到 Santal´o 对于 $\mathcal{V}^m_{\lambda,\mathbb{R}}$ 的管公式（参见 [39]），并以此解释实空间形式与复空间形式之间的相似之处。

6.1. 复空间形式中的管状公式。回顾（25）和命题 3.3，我们得到一个同构 $I\colon W_n \to \mathsf{Val}^{U(n)}$ 的 $\mathfrak{sl}_2$-模，从

$$W_n := \bigoplus_{0 \le 2r \le n} V^{(2n-4r)}$$

到 $\mathsf{Val}^{U(n)}$，通过令 $I(y^{2n-4r}) = \pi_{2r,\ r}$（即将 Y-本原元映射到Λ-本原元）并

$$\begin{aligned}
\binom{2n-4r}{k-2r} I(x^{k-2r} y^{2n-k-2r}) &= \frac{1}{(k-2r)!} I(X^{k-2r}(y^{2n-4r})) \\
&= \frac{1}{(k-2r)!} L^{k-2r} I(y^{2n-4r}) = \frac{1}{(k-2r)!} \pi_{k,r}.
\end{aligned}$$

根据定理 4.11，映射 $J_{\lambda,\ \mathbb{C}} := \Phi_\lambda \circ I$: $W_n \to \mathcal{V}^n_{\lambda,\ \mathbb{C}}$ 满足

$$\partial_{\lambda,\mathbb{C}} \circ J_{\lambda,\mathbb{C}} = J_{\lambda,\mathbb{C}} \circ Y_\lambda. \tag{62}$$

我们定义

$$\sigma^\lambda_{k,r} := \binom{2n-4r}{k-2r} J_\lambda(x^{k-2r}y^{2n-k-2r}) = \frac{\omega_{2n-k}}{(k-2r)!}\pi^\lambda_{k,r} \tag{63}$$

并得到了主要定理。

定理 6.1. 复空间形式 $\mathcal{V}^n_{\lambda,\mathbb{C}}$ 中的管状算子 T_t in 由下式给出

$$\mathbf{T}_t(\sigma^\lambda_{k,r}) = \sum_{j=0}^{2n-4r} \phi^\lambda_{2n-4r,k-2r,j}(t)\sigma^\lambda_{j+2r,r},$$

其中

$$\phi^\lambda_{m,i,j}(t) = \sum_{h\geq 0}(-\lambda)^{j-h}\binom{m-j}{i-h}\binom{j}{h}\sin^{i+j-2h}_\lambda(t)\cos^{m-i-j+2h}_\lambda(t).$$

证明。由（37），利用（62）和（63），并令 $m = 2n-4r$，可得

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_t\sigma^\lambda_{k,q} &= \exp(t\partial_{\lambda,\mathbb{C}})(\sigma^\lambda_{k,q}) \\
&= \binom{m}{k-2r}\exp(t\partial_{\lambda,\mathbb{C}}) \circ J_{\lambda,\mathbb{C}}(x^{k-2r}y^{m-k+2r}) \\
&= \binom{m}{k-2r} J_{\lambda,\mathbb{C}} \circ \exp(tY_\lambda)(x^{k-2r}y^{m-k+2r}) \\
&= J_{\lambda,\mathbb{C}}(p_{k-2r}(t)).
\end{aligned}$$

利用（55）即可得出结果。 □

利用定理 6.1，结合（28）和（33），即可得到关于 $\tau^\lambda_{k,\ i}$ 的管状公式；将 $\pi^\lambda_{k,\ r}, \tau^\lambda_{k,\ r}$ 分别替换为 $\pi_{k,\ r}, \tau_{k,\ r}$后，（28）和（33）仍然成立。

注记。体积 $\sigma^\lambda_{2n,\ 0} = \mathrm{vol}^{\mathbb{C}P^n_\lambda}$ 的管状公式可由下列简洁表达式给出

$$\mathrm{vol}_{\mathbb{C}P^n_\lambda}(A_t) = \sum_{j=0}^{2n}\sin^{2n-j}_\lambda(t)\cos^j_\lambda(t)\sigma^\lambda_{j,0}(A),$$

这就是 [16], 的定理 4.3，因为 $\sigma^\lambda_{j,\ 0} = \omega_{2n-j}\tau^\lambda_{j,\ 0} = \Phi_\lambda(\mu_j)$。管状公式 $\mathrm{T}_t\sigma_{2n-2r,\ r}$ 同样简洁。

注记。前述管状公式的一个有趣特点是具有如下自相似性质，（62）对此作了解释。令

$$\mathbf{G}^{n,j}_\lambda \colon \mathcal{V}^n_{\lambda,\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{V}^{n+2j}_{\lambda,\mathbb{C}}, \qquad \mathbf{G}^{n,j}(\sigma^\lambda_{k,r}) = \sigma^\lambda_{k+2j,r+j}.$$

那么，$\mathrm{T}_t \circ \mathbf{G}^{n,\ j} = \mathbf{G}^{n,\ j} \circ \mathrm{T}_t$。

备注。还值得指出的是 $\mathcal{V}^n_{\lambda,\mathbb{C}} = \bigoplus_{0\leq 2r\leq n}\mathcal{I}^{n}_{,\lambda\ r}$ 其中

$$\mathcal{I}^{n,r}_\lambda := J_{\lambda,\mathbb{C}}(V^{(2n-4r)}) = \left\{\sigma^\lambda_{k,r} : 2r \leq k \leq 2n-2r\right\},$$

并且这些子空间是 $\partial_{\lambda,\ \mathbb{C}}$-不变的。特别地，给定 $\varphi \in \mathcal{I}^{n,\ r}_{\ \lambda}$，有 $\mathrm{T}_t(\varphi) \in \mathcal{I}^{n,\ r}_{\ \lambda}$。

6.2. 实空间形式中的管状公式。令 $I\colon V_{(m)} \to \mathrm{Val}^{O(m)}$ 为由 $I(y^m) = \chi$ 确定的不可约 $\mathfrak{sl}_2$-表示的同构；即。

$$\begin{aligned}\binom{m}{i} I(x^i y^{m-i}) &= \frac{1}{i!} I(X^i(y^m)) = \frac{1}{i!} L^i(I(y^m)) \\ &= \frac{1}{i!} L^i(\mu_0) = \mu_i\end{aligned}$$

这里用到了 (19)。根据定理 4.12，映射 $J_{\lambda,\ \mathbb{R}} = \Psi_\lambda \circ I$ 满足

$$\partial_{\lambda,\mathbb{R}} \circ J_{\lambda,\mathbb{R}} = J_{\lambda,\mathbb{R}} \circ Y_\lambda. \tag{64}$$

映射 $J_{\lambda,\ \mathbb{R}}$ 的显式表达式为

$$J_{\lambda,\mathbb{R}}\colon V^{(m)} \longrightarrow \mathcal{V}^{m+1}_{\lambda,\mathbb{R}}, \qquad \binom{m}{i} x^i y^{m-i} \longmapsto \sigma^\lambda_i. \tag{65}$$

$J_{\lambda,\ \mathbb{R}}$ 的像是超平面 $\mathcal{H}^{m+1}_\lambda := \operatorname{im} J_{\lambda,\ \mathbb{R}} = \operatorname{span}\{\sigma^\lambda_0, \dots, \sigma^\lambda_m\}$。

定理 6.2。在 $\mathcal{V}^{m+1}_{\lambda\ \mathbb{R}}$，上的管状算子如下给出。对于 $i = 0, \dots, m$,

$$\mathbf{T}_t \sigma^\lambda_i = \sum_{j=0}^m \phi^\lambda_{m,i,j}(t) \sigma^\lambda_j. \tag{66}$$

特别是

$$\mathbf{T}_t \sigma^\lambda_m = \sum_{j=0}^m \sin^{m-j}_\lambda(t) \cos^j_\lambda(t) \sigma^\lambda_j, \tag{67}$$

因此

$$\mathbf{T}_t \sigma^\lambda_{m+1} = \sum_{j=0}^m \left(\int_0^t \sin^{m-j}_\lambda(s) \cos^j_\lambda(s) ds \right) \sigma^\lambda_j + \sigma^\lambda_{m+1}. \tag{68}$$

这些公式最初由 Santal´o [39] 得出。

证明。由(37)、(64)和(65)，对于 $0 \le i \le m$,

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_t \sigma^\lambda_i &= \exp(t\partial_{\lambda,\mathbb{C}})(\sigma^\lambda_i) \\ &= \binom{m}{i} \exp(t\partial_{\lambda,\mathbb{C}}) \circ J_{\lambda,\mathbb{C}}(x^i y^{m-i}) \\ &= \binom{m}{i} J_{\lambda,\mathbb{C}} \circ \exp(tY_\lambda)(x^i y^{m-i}) \\ &= J_{\lambda,\mathbb{C}}(p_i(t)).\end{aligned}$$

这证明了（66），其中（67）是一个特例。对 t 积分即可得到（68）。□

备注。值得指出的是，实空间形式和复空间形式中的管状公式之间存在相似之处。更准确地说，注意到同构

$$\mathbf{F}_{n,r}\colon \mathcal{H}^{2n-4r+1}_\lambda \longrightarrow \mathcal{I}^{n,r}_\lambda, \qquad \sigma^\lambda_j \longmapsto \sigma^\lambda_{k+2j,r+j} \tag{69}$$

子空间 $\mathcal{H}^{2n-4r+1}_\lambda \subset \mathcal{V}^{2n-4r+1}_{\lambda\ \mathbb{R}}$、和 $\mathcal{I}^n_{\lambda\ ,\ \mathbb{C}}{}^r \subset \mathcal{V}^n_{\lambda,\ \mathbb{C}}$ 之间的映射与管状算子 $\mathbf{T}_t$可交换。这由（62）和（64）解释。

6.3. 导数映射的谱分析。这里我们计算 $\partial_{\lambda,\mathbb{R}}$ 和 $\partial_{\lambda,\mathbb{C}}$的特征值和特征向量。注意，这类赋值的管状公式极其简单：若 $\partial\mu = a\mu$ 满足 $a \in \mathbb{C}$，则 $\mathrm{T}_t\mu = e^{at}\mu$。

命题 6.3. 对于 $0 \le 2r \le n$，$\partial_{\lambda,\mathbb{C}}$ 在 $\mathcal{I}^n_{\lambda}{}^r$ 上的限制具有以下（简单）特征值和特征子空间：

$$\operatorname{spec}\left(\partial_{\lambda,\mathbb{C}}|_{\mathcal{I}^{n,r}_{\lambda}}\right) = \left\{0, \pm 2\sqrt{-\lambda}, \pm 4\sqrt{-\lambda}, \dots, \pm 2(n-2r)\sqrt{-\lambda}, \right\},$$
$$E_{(2k-2n+4r)\sqrt{-\lambda}} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left\{J_{\lambda,\mathbb{C}}(e_1^k e_2^{2n-4r-k})\right\}, \qquad 0 \le k \le 2n-4r.$$

因此$\partial_{\lambda,\mathbb{C}}$ 在 $\mathcal{V}^n_{\lambda,\mathbb{C}}$ 上可对角化，其特征子空间如下：

$$E_{2j\sqrt{-\lambda}}(\partial_{\lambda,\mathbb{C}}) = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left\{J_{\lambda,\mathbb{C}}(e_1^{j+n-2r}e_2^{n-2r-j}) : 0 \le 2r \le \min\{n-j, n+j\}\right\},$$

对于 $-n \le j \le n$。

证明。所有结论均由引理 5.4 和式 (62) 得出。 □

命题 6.4. i) 在 $\mathbb{S}^{2n}_{\lambda}$中，导数算子是可对角化的，具有

$$\operatorname{spec}(\partial_{\lambda,\mathbb{R}}) = \left\{0, \pm\sqrt{-\lambda}, \pm 3\sqrt{-\lambda}, \dots, \pm(2n-1)\sqrt{-\lambda}\right\}, \tag{70}$$
$$E_0(\partial_{\lambda,\mathbb{R}}) = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\chi\} \tag{71}$$
$$E_{(2k-2n+1)\sqrt{-\lambda}}(\partial_{\lambda,\mathbb{R}}) = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{J_{\lambda,\mathbb{R}}(e_1^k e_2^{2n-k-1})\}, \quad 0 \le k \le 2n-1 \tag{72}$$

ii) 在 $\mathbb{S}^{2n+1}_{\lambda}$ 中，导数算子不可对角化，因为

$$\operatorname{spec}(\partial_{\lambda,\mathbb{R}}) = \left\{0, 0, \pm 2\sqrt{-\lambda}, \pm 4\sqrt{-\lambda}, \dots, \pm 2n\sqrt{-\lambda}\right\}, \tag{73}$$
$$E_0(\partial_{\lambda,\mathbb{R}}) = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\chi\} \tag{74}$$
$$E_{(2k-2n)\sqrt{-\lambda}}(\partial_{\lambda,\mathbb{R}}) = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{J_{\lambda,\mathbb{R}}(e_1^k e_2^{2n-k})\}, \quad 0 \le k \le 2n. \tag{75}$$

证明。*i*) 根据引理 5.4和 (64)，我们有 $(2k-2n+1)\sqrt{-\lambda}$, $0 \le k \le 2n-1$,是 $\partial_{\lambda,\mathbb{R}}$ 的一个特征值，其特征空间由 (72) 给出。欧拉示性数显然是对应零特征值的特征向量。因此我们至少有 $2n+1$ 个特征值。由于这恰好是 $\mathcal{V}^{2n}_{\lambda,\mathbb{R}}$ 的维数，结论得证。

ii) 根据引理 5.4 和 (64)，我们确定 $(2k-2n)\sqrt{-\lambda}$, $0 \le k \le 2n$, 是 $\partial_{\lambda,\mathbb{R}}$ 的一个特征值，而相应的特征空间由 (75) 描述。

我们的下一个目标是证明，虽然零特征值的代数重数为二，但其几何重数仅为一。这将需要找到一个满足 $\mu\,\partial^2_{\lambda,\mathbb{R}}\mu = 0$ 的赋值，同时还要确保 $\partial_{\lambda,\mathbb{R}}\mu \neq 0$。考虑 $\sigma^{\lambda}_{2n} = J_{\lambda,\mathbb{R}}(x^{2n}) \in \mathcal{V}^{2n+1}_{\lambda\,\mathbb{R}}$,。用引理 5.4 的记号，

$$x = \frac{1}{2\sqrt{-\lambda}}(e_1 - e_2), \qquad x^{2n} = (-4\lambda)^{-n}\sum_{i=0}^{2n}(-1)^i\binom{2n}{i}e_1^i e_2^{2n-i}.$$

因此

$$\partial_{\lambda,\mathbb{R}}\sigma^{\lambda}_{2n+1} = \sigma^{\lambda}_{2n} = (-4\lambda)^{-n}\sum_{i=0}^{2n}(-1)^i\binom{2n}{i}J_{\lambda,\mathbb{R}}(e_1^i e_2^{2n-i}).$$

考虑

$$\nu := (-4\lambda)^{-n} \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq n}}^{2n} \binom{2n}{i} \frac{(-1)^i}{(2i-2n)\sqrt{-\lambda}} J_{\lambda,\mathbb{R}}(e_1^i e_2^{2n-i}),$$

并注意到，根据引理 5.4，

$$\partial_{\lambda,\mathbb{R}}\nu := (-4\lambda)^{-n} \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq n}}^{2n} \binom{2n}{i} (-1)^i J_{\lambda,\mathbb{R}}(e_1^i e_2^{2n-i}),$$

由于 $e_1^n e_2^n \in \ker Y_\lambda$。最后，我们定义 $\mu = \sigma^\lambda_{2n+1} - \nu$。于是

$$\partial_{\lambda,\mathbb{R}}\mu = (-4\lambda)^{-n}\binom{2n}{n}(-1)^n J_{\lambda,\mathbb{R}}(e_1^n e_2^n) \neq 0,$$

而

$$\begin{aligned}\partial^2_{\lambda,\mathbb{R}}\mu &= (-4\lambda)^{-n}\binom{2n}{n}(-1)^n \partial_{\lambda,\mathbb{R}} J_{\lambda,\mathbb{R}}(e_1^n e_2^n) \\ &= (-4\lambda)^{-n}\binom{2n}{n}(-1)^n J_{\lambda,\mathbb{R}}(Y_\lambda(e_1^n e_2^n)) = 0.\end{aligned}$$

由此可得 $\dim\ker \partial_{\lambda,\,\mathbb{R}} < \dim\ker \partial^2_{\lambda,\,\mathbb{R}}$。注意到 $\chi \in \ker \partial_{\lambda,\,\mathbb{R}}$，这就说明了该结论。□

注。由命题 6.4 和引理 5.4 可知，$\mathrm{Val}^{O(m)}$ 与 $\mathcal{V}^m_{\lambda,\,\mathbb{R}}$ 之间不存在 intertwining $\Lambda - \lambda L$ 和 $\partial_{\lambda,\,\mathbb{R}}$ 的同构。事实上，无论 m 的奇偶性如何，这两个算子都有不同的谱。

6.4. 复空间形式中的稳定赋值。我们称黎曼流形 M 上的赋值 $\varphi \in \mathcal{V}(M)$ 是稳定的，如果 $\partial\mu = 0$，或者等价地，如果对所有 t，$\mathrm{T}_t\mu = \mu$。由命题 6.4 和 6.3 可知，除相乘常数外，欧拉示性数是 $\mathbb{S}^m_\lambda$ 中唯一的等距不变稳定赋值。复数情形更有趣。

命题 6.5。在 $\mathcal{I}^{n,\,r}_{\lambda}$ 上的唯一（相差一个乘法常数的意义下）稳定赋值为

$$\psi_{2r} = \sum_{i=r}^{n-r} \binom{n-2r}{i-r}\binom{2n-4r}{2i-2r}^{-1} \lambda^{i-r}\sigma^\lambda_{2i,r}.$$

证明。由引理 5.4，Y_λ 在次数为 $m = 2n-4r$ 的齐次多项式空间 $V^{(m)}$ 上的核由以下元素张成。

$$\begin{aligned}e_1^{n-2r}e_2^{n-2r} &= (y+\sqrt{-\lambda}x)^{n-2r}(y-\sqrt{-\lambda}x)^{n-2r} \\ &= (y^2+\lambda x^2)^{n-2r} = \sum_{j=0}^{n-2r}\binom{n-2r}{j}\lambda^j x^{2j} y^{m-2j} \\ &= \sum_{i=r}^{n-r}\binom{n-2r}{i-r}\binom{2n-4r}{2i-2r}^{-1}\lambda^{i-r}\binom{2n-4r}{2i-2r}x^{2i-2r}y^{2n-2i-2r}\end{aligned}$$

因此，$\partial_{\lambda,\,\mathbb{C}}$ 中 $\mathcal{I}^{n,\,r}_{\lambda}$ 的核由 $\psi_{2r} = J_\lambda(e_1^{n-2r}e_2^{n-2r})$ 张成，对每个$0 \le 2r \le n$均成立。□

接下来，我们将欧拉示性数表示为稳定赋值ψ_{2r}的组合。特别要注意， χ 并不局限于任何 ∂-不变子空间 $\mathcal{I}^{n,\ \lambda^{\ r}}$。

命题 6.6。

$$\chi = \sum_{0\le 2r\le n} \left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^r \binom{2r}{r} \frac{r!}{\omega_{2n-2r}} \psi_{2r}.$$

证明。由于 χ 是稳定的，因此可表示为 $\chi = \sum_j a_j \psi_{2j}$。根据 [16, 定理 3.11]

$$\chi = \sum_{k,p\ge 0} \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{k+p} \frac{\partial^{k+p}}{\partial\xi^k \partial\eta^p} \frac{1}{\sqrt{1-\xi}\sqrt{1-\eta}}\bigg|_{(0,0)} \tau^{\lambda}_{2k+2p,p}.$$

在此展开式中，$\tau^{\lambda}_{2r,\ r}$ 的系数为

$$\begin{aligned}[\tau^{\lambda}_{2r,r}](\chi) &= \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^r \frac{\partial^r}{\partial\eta^r} \frac{1}{\sqrt{1-\eta}}\bigg|_{(0,0)} \\ &= \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^r \binom{2r}{r} r! 4^{-r}.\end{aligned}$$

根据命题 3.3，我们有

$$[\tau^{\lambda}_{2r,r}](\sigma^{\lambda}_{k,r}) = \frac{\omega_{2n-k}}{(k-2r)!}[\tau^{\lambda}_{2r,r}](\pi^{\lambda}_{k,r}) = \frac{\omega_{2n-k}}{(k-2r)!}\delta_{k,2r},$$

因此

$$\begin{aligned}[\tau^{\lambda}_{2r,r}]\left(\sum_j a_j \psi^{(j)}\right) &= a_r [\tau^{\lambda}_{2r,r}](\sigma^{\lambda}_{2r,r}) \\ &= a_r \omega_{2n-2r}.\end{aligned}$$

因此

$$a_r = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^r \binom{2r}{r} \frac{r!}{4^r \omega_{2n-2r}}$$

因此结论成立。 □

6.5. $\partial_{\lambda,\ \mathbb{C}}$ 和 $\partial_{\lambda,\ \mathbb{R}}$的像。接下来我们描述算子$\partial_{\lambda,\ \mathbb{C}}$和 $\partial_{\lambda,\ \mathbb{R}}$的像，并计算其中任意元素的原像。

命题 6.7。给定任意 $\varphi = \sum_{k,\ r} a_{k,\ r}\sigma^{\lambda}_{k,\ r} \in \mathcal{V}^n_{\lambda,\ \mathbb{C}}$，我们有 $\varphi \in \mathrm{im}\partial_{\lambda,\ \mathbb{C}}$ 当且仅当

$$\sum_{l=r}^{n-2r} a_{2l,r} \binom{n-2r}{l-r} \lambda^{n-l-r} = 0, \qquad for \quad 0 \le 2r \le n. \tag{76}$$

证明。注意， $\varphi = \sum_r \varphi_r$ 与 $\varphi_r = \sum_k a_{k,\ r}\sigma^{\lambda}_{k,\ r}$ 是对应于 $\mathcal{V}^n_{\lambda,\ \mathbb{C}} = \bigoplus_{r=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \mathcal{I}^{n,\ \lambda^{\ r}}$ 的 φ的分解。由 (62) 和命题 5.5 可得 $\varphi \in$

$\mathrm{im}\partial_{\lambda,\ \mathbb{C}}$ 当且仅当对每个 r

$$0 = Z_{2n-4r,\lambda}(\varphi_r) = \sum_{k=2r}^{2n-4r} a_{k,r}\binom{2n-4r}{k-2r} Z_{2n-4r,\lambda}(x^{k-2r}y^{2n-k-2r}) \tag{77}$$

$$= \sum_{l=r}^{n-2r} a_{2l,r}\binom{2n-4r}{2l-2r}\binom{n-2r}{l-r}\lambda^{n-l-r}(2l-2r)!(2n-2l-2r)! \tag{78}$$

$$= (2n-4r)!\sum_{l=r}^{n-2r} a_{2l,r}\binom{n-2r}{l-r}\lambda^{n-l-r} \tag{79}$$

这里用到了（59）。 □

命题 6.8。给定 $\varphi = \sum_{k,r} a_{k,r}\sigma^{\lambda}_{k,r} \in \mathcal{V}^n_{\lambda,\mathbb{C}}$ 满足（76），则有

$$\partial^{-1}_{\lambda,\mathbb{C}}(\{\varphi\}) = \sum_{k,r} a_{k,r} J_{\lambda,\mathbb{C}}(P_{2n-4r,k-2r+1}) + \mathrm{span}\{\psi_{2r}\colon 0 \le 2r \le n\}$$

其中$P_{m,l}$ 由（60）给出。

证明。将 $\varphi = \sum_r \varphi_r$ 按前一个证明中的方式分解后，立即可由命题 5.6 得出。□

命题 6.9。$\partial_{\lambda,\mathbb{R}}$ 在 $\mathcal{V}^m_{\lambda,\mathbb{R}}$ 中的像是由σ^{λ}_0、.....、 σ^{λ}_{m-1}生成的超平面 $\mathcal{H}^m_{\lambda}$。此外

$$\partial_{\lambda,\mathbb{R}}\phi^k = \frac{k!\omega_k}{\pi^k\omega_{m-k}}\sigma^{\lambda}_{k-1}, \qquad 1 \le k \le m, \tag{80}$$

其中 $\phi^k = \sum_{j\ge 0}\left(\frac{\lambda}{4}\right)^j \tau^{\lambda}_{k+2j^\circ}$ 特别地

$$\partial^{-1}_{\lambda,\mathbb{R}}(\{\sigma^{\lambda}_{k-1}\}) = \frac{\pi^k\omega_{m-k}}{k!\omega_k}\phi^k + \mathbb{C}\cdot\chi.$$

回顾 [11,式 (118)]，有 $\phi^k = \int_{G_{\lambda,\ \mathbb{C}}} \chi(\cdot\cap g\mathbb{S}^{m-k}_{\lambda})dg$，其中 dg是 $G_{\lambda,\ \mathbb{C}}$上的适当归一化 Haar 测度，而 $\mathbb{S}^{m-k}_{\lambda}$ 是 $\mathbb{S}^m_{\lambda}$中的一个 $(m-k)$ 维全测地子流形。

证明。由 (8) 和 (9)

$$\phi^k = \sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{m-k-1}{2}\right\rfloor}\left(\frac{\lambda}{4\pi^2}\right)^j \frac{(k+2j)!\omega_{k+2j}}{\pi^k(m-k-2j)\omega_{m-k-2j}}\sigma^{\lambda}_{k+2j} + \left(\left(\frac{\lambda}{4}\right)^{\frac{m-k}{2}}\frac{m!\omega_m}{\pi^m}\sigma^{\lambda}_m\right),$$

其中，括号中的项仅在 $m-k$ 为偶数时出现。利用命题 4.8，可得 (80)。其余结论随即得出。□

注：等式 (80) 也可由 [41] 中的定理 4 推得。

References

[1] Judit Abardia、Eduardo Gallego 和 Gil Solanes。复空间形式中的高斯-博内定理与 Crofton 型公式。 *Israel J. Math.*，187：287–315，2012。[2] Judit Abard´ıa。 *Integral Geometry in spaces of constant holomorphic curvature*。博士论文，巴塞罗那自治大学，2009。[3] Semyon Alesker。关于 P. McMullen 的平移不变赋值猜想。 *Adv. Math.* 155 2 239 263, 2000 ，( )：–。

[4] Semyon Alesker。赋值的硬 Lefschetz 定理、复积分几何与酉不变赋值。 *J. Differential Geom.*，63(1)：63–95，2003。[5] Semyon Alesker。流形上的赋值理论。I. 线性空间。 *Israel J. Math.*，156：311–339，2006。[6] Semyon Alesker。流形上的赋值理论。II. *Adv. Math.*，207(1)：420–454，2006。[7] Semyon Alesker。流形上的赋值理论：综述。 *Geom. Funct. Anal.*，17 4 1321 1341，2007 ( )：–。[8] Semyon Alesker。流形上的赋值理论。IV. 乘法结构的新性质。载于 *Geometric aspects of functional analysis*，第 1910 卷， *Lecture Notes in Math.*，第 1–44 页。施普林格，柏林，2007。[9] Semyon Alesker 和 Andreas Bernig。流形上的赋值卷积。 *J. Differential Geom.* 107 2 203 240, 2017 ，( )：–。

[10] Semyon Alesker 和 Joseph H. G. Fu。流形上的赋值理论。III. 一般情形下的乘法结构。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，360(4)：1951–1981，2008。[11] Semyon Alesker 和 Joseph H. G. Fu。 *Integral geometry and valuations*。数学高级课程。巴塞罗那 CRM。Birkh¨auser/施普林格，巴塞尔，2014。本文集收录了 2010 年 9 月 6–10 日在巴塞罗那数学研究中心（CRM）举行的积分几何与赋值理论高级课程讲座，由 Eduardo Gallego 和 Gil Solanes 编辑。[12] Andreas Bernig。代数积分几何。载于 *Global differential geometry*，第 17 卷，*Springer Proc. Math.*，第 107–145 页。施普林格，海德堡，2012。[13] Andreas Bernig 和 Ludwig Br¨ocker。 *J.* 流形上的赋值与 Rumin 上同调。， *Differential Geom.* 75 3 433 457, 2007 ( )：–。[14] Andreas Bernig 和 Joseph H. G. Fu。凸赋值的卷积。 *Geom. Dedicata*，123 153：–169，2006。[15] Andreas Bernig 和 Joseph H. G. Fu。厄米积分几何。 *Ann. of Math. (2)*，173 2 907 945，2011 ( )：–。[16] Andreas Bernig、Joseph H. G. Fu 和 Gil Solanes。复空间形式的积分几何。*Geom. Funct. Anal.*，24(2)：403–492，2014。[17] Andreas Bernig、Joseph H. G. Fu、Gil Solanes 和 Thomas Wannerer。K¨ahler 流形的 Weyl 管定理，2022。[18] T. Bonnesen 和 W. Fenchel。 *Theorie der konvexen Körper*。施普林格出版社，柏林—纽约，1974。订正版重印。[19] Joseph H. G. Fu。积分几何中的运动学公式。 *Indiana University mathematics journal* 39 4 1115 1154, 1990 ，( )：–。

[20] Joseph H. G. Fu。次解析集的曲率测度。 *American Journal of Mathematics*，116 4 819 880，1994 ( )：–。[21] Joseph H. G. Fu。关于 Legendrian 可求长流的一些评注。97(4)：175–187，1998。[22] Joseph H. G. Fu。酉赋值代数的结构。 *J. Differential Geom.*，72(3)：509–533，2006。[23] Joseph H. G. Fu、Du˘san Pokorn´y 和 Jan Rataj。由凸函数之差定义的集合的运动学公式。 *Adv. Math.*，311：796–832，2017。[24] Joseph H. G. Fu 和 Thomas Wannerer。黎曼曲率测度。 *Geom. Funct. Anal.* 29 2 343 381, 2019 ，( )：–。

[25] Hansj¨org Geiges。， *An introduction to contact topology* 第 109 卷，*Cambridge Studies in Advanced Mathematics* 载于 。剑桥大学出版社，剑桥，。2008 org [26] A. Gray 和 L. Vanhecke。黎曼流形中管的体积。 *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* 39 3 1 50 1983 1981 ，( )：–( )，。

[27] Alfred Gray。复射影空间中复子流形周围管的体积。*Trans. Amer. Math. Soc.*，291(2)：437–449，1985。

[28] Alfred Gray。《 *Tubes*》。Addison-Wesley 出版公司，高级图书项目，加利福尼亚州雷德伍德城，1990 年。[29] Daniel A. Klain 和 Gian-Carlo Rota。《 *Introduction to geometric probability*》。Lincei 讲义]。剑桥大学出版社，剑桥，1997 年。[30] Norbert Kleinjohann。黎曼几何中的凸性与唯一垂足性质。《*Arch. Math. (Basel)*》，35(6):574–582（1981），1980 年。[31] Norbert Kleinjohann。黎曼几何中的最近点。 *Math. Z.*，176(3):327–344，1981 年。[32] Shoshichi Kobayashi 和 Katsumi Nomizu。《 *Foundations of differential geometry. Vol I*》。Interscience 出版社（John Wiley & Sons, Inc. 的一个分部），纽约-伦敦，1963 年。[33] Shoshichi Kobayashi 和 Katsumi Nomizu。《 *Foundations of differential geometry. Vol. II*》。纯粹与应用数学 Interscience 论丛，第 15 号，第二卷。Interscience 出版社，John Wiley & Sons, Inc.，纽约-伦敦-悉尼，1969 年。[34] Peter Kohlmann。空间形式中的曲率测度与施泰纳公式。《 *Geom. Dedicata*》，40 2 191( ): –211，1991 年。[35] P. McMullen。某些凸多面体类上的赋值与欧拉型关系。《*Proc. London Math. Soc. (3)*》，35(1):113–135，1977 年。[36] Heunggi Park. *Kinematic formulas for the real subspaces of complex space forms of dimension 2 and 3* 2002 。博士论文，佐治亚大学，。[37] Jan Rataj 和 Martina Z¨ahle。《 *Curvature measures of singular sets*》。数学专著系列。施普林格，Cham，2019 年。[38] Michel Rumin。接触流形上的微分形式复形。 *C. R. Acad.* , ( ): *Sci. Paris Sér. I Math.* 310 6 401 404, 1990 –。[39] L. A. Santal{o}。椭圆与双曲 n 维空间中的平行超曲面。《 *Proc. Amer. Math. Soc.* 》，1:325–330，1950 年。[40] Luis A. Santal{o}。《 *Integral geometry and geometric probability*》。剑桥数学文库。剑桥大学出版社，剑桥，第二版，2004 年。附 Mark Kac 作序。[41] Gil Solanes。常曲率空间中的积分几何与高斯-博内定理。《*Trans.Amer.Math.Soc.*》，358(3):1105–1115，2006 年。[42] Gil Solanes 和 Thomas Wannerer。特殊球面的积分几何。《 *J. Differential* 》， *Geom.* 117 1 137 ( ): –191，2021 年。[43] Hiroyuki Tasaki。复射影空间中 K¨ahler 角与积分几何的推广。载于 *Steps in differential geometry (Debrecen, 2000)*，第 349–361 页。匈牙利德布勒森数学与信息研究所，2001 年。[44] Hiroyuki Tasaki。复射影空间中 K¨ahler 角与积分几何的推广。II。《 *Math. Nachr.*》，252:106–112，2003 年。[45] Hermann Weyl。管的体积。《 *Amer. J. Math.*》，61(2):461–472，1939 年。

Email address: gil.solanes@uab.cat
Email address: juan.trillo@uab.cat

Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, 08193 Bellaterra, Spain, and Centre de Recerca Matemàtica, Campus de Bellaterra, 08193 Bellaterra, Spain

Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, 08193 Bellaterra, Spain