arXiv:2304.06605v2 [math.GT] 1 Feb 2024

五穿孔球面编织代数的整结构

Haimiao Chen

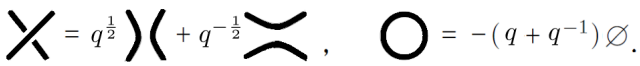
摘要

我们给出了任意交换含幺环上五穿孔球面的Kauffman括号skein代数的一个显式表示。

关键词：考夫曼括号；编织代数；表示；五穿孔球面**2020年数学主题分类：**57K16,57K31

1 引言

设 R 是一个含幺交换环，并且有一个固定的可逆元素 $q^{\frac{1}{2}}$。令 $\Sigma = \Sigma_{g,h}$ 表示亏格为 g 的 h 孔可定向曲面。Σ 上的Kauffman括号skein代数（系数取自 R），记作 $\mathcal{S}(\Sigma; R)$，定义为由嵌入在 $\Sigma \times [0,1]$ 中的带框架链环（可以为空）的同痕类生成的 R-模，并满足以下编织关系：



约定将 R 通过 $a \mapsto a\emptyset$ 视为 $R\emptyset \subset \mathcal{S}(M; R)$，并将每个带框架链环表示为一个链环，同时约定每个框架向量均竖直向上。

给定链环 L_1, L_2，乘积 $L_1 L_2$ 定义为沿 $[0,1]$ 方向将 L_1 叠放在 L_2 上。利用编织关系，$\mathcal{S}(\Sigma; R)$ 中的每个元素都可写成 Σ 上多曲线的 R-线性组合，其中多曲线视为 $\Sigma \times \{\frac{1}{2}\} \subseteq \Sigma \times [0,1]$ 中的一个链环。

$\mathcal{S}(\Sigma_{g,k}; \mathbb{Z}[q^{\pm\frac{1}{2}}])$的结构描述曾被提出为 [6] 问题1.92（J），也被提出为 [7] 问题4.5。对于 $g = 0, k \leq 4$且 $g = 1, k \leq 2$ 的 $\mathcal{S}(\Sigma_{g,k}; \mathbb{Z}[q^{\pm\frac{1}{2}}])$的结构，Bullock和Przytycki [2] 早在2000年就已知晓。Bullock [1] 于1999年给出了一组有限生成集。迄今为止，求出一般情况下 g 和 k的全部关系仍是一个难题。

作为弱解，近期 Cooke 和 Lacabanne [5] 得到了 $\mathcal{S}(\Sigma_{0,5}; \mathbb{C}(q^{\frac{1}{4}}))$ 的一个表示，而作者 [4] 则为所有 n 以及所有包含 $\alpha := q + q^{-1}$ 的 R 找到了 $\mathcal{S}(\Sigma_{0,n+1}; R)$ 的一个表示。

本文将 [3] 关于$\mathcal{S}_n$的定义关系理想由某些次数至多为 $2n+2$的关系生成这一结果应用于情形 $n = 4$。我们找到了一个生成该理想的显式关系集。标题中的“整”是因为不再假设 α 可逆。实际上，我们的方法可以很容易地推广到所有 $n \geq 5$。

令 q^{-}表示 q^{-1}。对于有限集 Y，用#Y表示其基数。

回顾一下 [3] 中引入的一些记号；更多详情请参阅该文。

如图 1 所示，显示 $\Sigma = \Sigma_{0,\ n+1}$。令 $\mathbf{p}_1$、……、$\mathbf{p}_n$ 表示这些穿孔点，并从左到右列出。令 γ_i 表示连接 $\mathbf{p}_i$ 与 $\partial\Sigma$ 上某一点的竖直线。令 $\gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i$，并令 $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i$，其中 $\Gamma_i = \gamma_i \times [0,1]$。令$\pi\colon\ \Sigma \times [0,1] \to \Sigma$ 为投影。

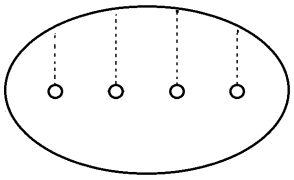


图 1： 曲面 $\Sigma_{0,\ 4+1}$；点线为 γ_j、$j = 1$、……、4。

给定一个 1-子流形 $X \subset \Sigma \times [0,1]$，定义其多重次数 为函数 $\mathrm{md}_X\colon\ \{1,\dots,n\} \to \mathbb{N}$、$v \mapsto \#(X \cap \Gamma_v)$。令 $|X| = \#(X \cap \Gamma)$，称为次数。

对于 $1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n$，令 $t_{i_1 \cdots i_r} \in \mathcal{S}_n$ 表示恰好围绕 $\mathbf{p}_{i_1}, \dots, \mathbf{p}_{i_r}$ 的简单曲线。令

$$\mathfrak{T}_n = \{t_{i_1 \cdots i_r} \colon 1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n,\ 1 \le r \le n\}.$$

将 $t_{1 \cdots n}$ 记为 t_0。注意，t_1，……，t_n 和 t_0 在 $\mathcal{S}_n$中是中心元。

$\mathcal{T}_n$ 是由 $\mathfrak{T}_n$生成的自由 R-代数。$\mathfrak{T}_n$中元素的乘积称为一个单项式，并视为 $\Sigma \times [0,1]$中的一个链环。令 $\theta_n\colon\ \mathcal{T}_n \to \mathcal{S}_n$表示典范映射。

对于 $\mathfrak{u} = \sum_i a_i \mathfrak{g}_i \in \mathcal{T}_n$，其中 $0 \ne a_i \in R$ 和 $\mathfrak{g}_i$ 是一个单项式，令

$$\mathrm{md}_{\mathfrak{u}}(v) = \max_i \mathrm{md}_{\mathfrak{g}_i}(v), \qquad |\mathfrak{u}| = \sum\nolimits_{v=1}^{n} \mathrm{md}_{\mathfrak{u}}(v).$$

令 Ξ表示 $\vec{e} = (e_1$、……、$e_n)$中满足$\sum_{v=1}^{n} e_v \le 2(\#\{i\colon\ e_i > 0\} + 1)$的集合。对于每个 $\vec{e} \in \Xi$，令

$$\mathcal{R}(\vec{e}) = \{\mathfrak{u} \in \ker\theta_n \colon \mathrm{md}_{\mathfrak{u}}(v) \le e_v,\ 1 \le v \le n\} \subset \mathcal{T}_n.$$

令 $\mathcal{I}_n$ 表示由 $\bigcup_{\vec{e} \in \Xi} \mathcal{R}(\vec{e})$ 中的元素生成的双边理想。

定理 1.1 ([3]第 5 节)。编织代数 $\mathcal{S}_n$ 由 $\mathfrak{T}_n$ 生成，其定义关系的理想为 $\mathcal{I}_n$。

2 $\mathcal{S}_4$的一个表示

设 $J \subset \Sigma$ 是一条简单曲线。从点 $\mathbf{x} \in J$出发，沿着 J 朝任意方向行走；每当从左向右（分别从右向左）经过 γ_i时，记录标签 $i^* = i$（分别为 $i^* = \bar{i}$）。如果回到 $\mathbf{x}$ 时，记录的标签依次为 i_1^*、……、i_r^*，则将 J 记为 $t_{i_1^* \cdots i_r^*}$。这取决于 $\mathbf{x}$ 和行进方向的选择，因此 J 可能有几种不同的此类记法。

2.1 有用恒等式

通过直接计算,

$$t_{12}t_{23} = qt_{123\overline{2}} + \overline{q}t_{13} + t_1t_3 + t_2t_{123}, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} t_{13}t_{24} = {} & \alpha t_0 + t_1t_{234} + t_2t_{134} + t_3t_{124} + t_4t_{123} + q^2t_{12}t_{34} + \overline{q}^2t_{14}t_{23} \\ & + qt_3t_4t_{12} + \overline{q}t_1t_4t_{23} + qt_1t_2t_{34} + \overline{q}t_2t_3t_{14} + t_1t_2t_3t_4, \end{aligned} \tag{2}$$

$$t_{14}t_{234} = t_4t_0 + \overline{q}t_{1\overline{4}234} + qt_{123} + t_1t_{23}, \tag{3}$$

$$t_{34}t_{124} = t_4t_0 + qt_{12\overline{4}34} + \overline{q}t_{123} + t_3t_{12}, \tag{4}$$

$$t_{24}t_{134} = t_4t_0 + \overline{q}t_{12\overline{4}34} + qt_{1\overline{4}234} + t_2t_{1\overline{4}34}. \tag{5}$$

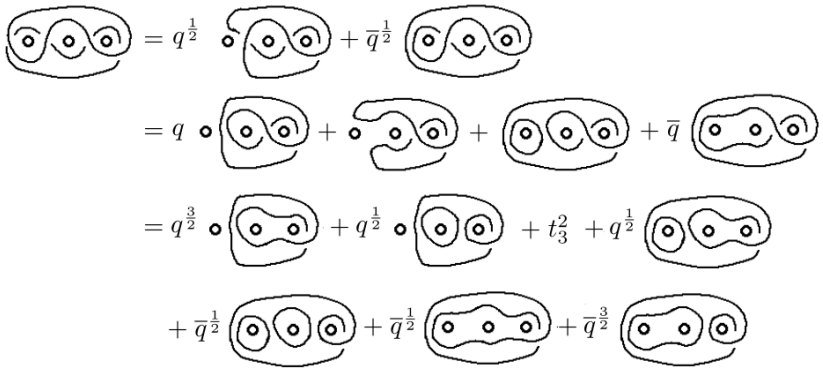


图2: 计算 $t_{1232}t_{13}$。

受图2启发,

$$\begin{aligned} t_{123\overline{2}}t_{13} = {} & t_{123}^2 + (qt_1t_{23} + \overline{q}t_3t_{12} + t_1t_2t_3)t_{123} + q^2t_{23}^2 + \overline{q}^2t_{12}^2 \\ & + qt_2t_3t_{23} + \overline{q}t_1t_2t_{12} + t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 - \alpha^2. \end{aligned} \tag{6}$$

由于 $t_{23}t_{34} = qt_{234\overline{3}} + \overline{q}t_{24} + t_2t_4 + t_3t_{234}$, 我们有

$$t_{12}t_{23}t_{34} = q^2t_{1234\overline{32}} + t_{134\overline{3}} + qt_1t_4 + qt_2t_{1234\overline{3}} + \overline{q}t_{12}t_{24} + t_2t_4t_{12} + t_3t_{12}t_{234}.$$

然后分别用 $\mathcal{T}_n$ 中的元素替换 t_{1343} 和 t_{12343}, 通过

$$\begin{aligned} t_{13}t_{34} &= qt_{134\overline{3}} + \overline{q}t_{14} + t_1t_4 + t_3t_{134}, \\ t_{34}t_{123} &= \overline{q}t_{1234\overline{3}} + qt_{124} + t_4t_{12} + t_3t_0, \end{aligned}$$

由此我们得到

$$\begin{aligned} t_{12}t_{23}t_{34} = {} & q^2t_{1234\overline{32}} + t_3t_{12}t_{234} + q^2t_2t_{34}t_{123} - q^3t_2t_{124} - \overline{q}t_3t_{134} + \overline{q}t_{12}t_{24} \\ & + \overline{q}t_{13}t_{34} + (1-q^2)t_2t_4t_{12} - \overline{q}^2t_{14} + (q-\overline{q})t_1t_4 - q^2t_2t_3t_0. \end{aligned} \tag{7}$$

2.2 关系

命题 2.1. 在 $\mathcal{S}_4$ 我们有

$$qt_{23}t_{12} - \overline{q}t_{12}t_{23} = (q^2 - \overline{q}^2)t_{13} + (q - \overline{q})(t_1t_3 + t_2t_{123}), \tag{8}$$

$$\begin{aligned} t_{24}t_{13} - t_{13}t_{24} &= (q^2 - q^2)(t_{12}t_{34} - t_{14}t_{23}) \\ &\quad + (\overline{q} - q)(t_3t_4t_{12} - t_1t_4t_{23} + t_1t_2t_{34} - t_2t_3t_{14}), \end{aligned} \tag{9}$$

$$\overline{q}t_{234}t_{14} - qt_{14}t_{234} = (\overline{q}^2 - q^2)t_{123} + (\overline{q} - q)(t_4t_0 + t_1t_{23}), \tag{10}$$

$$qt_{124}t_{34} - \overline{q}t_{34}t_{124} = (q^2 - \overline{q}^2)t_{123} + (q - \overline{q})(t_4t_0 + t_3t_{12}), \tag{11}$$

$$\begin{aligned} t_{134}t_{24} - t_{24}t_{134} &= (q - \overline{q})(\overline{q}t_{34}t_{124} - qt_{14}t_{234} + qt_1t_{23} - \overline{q}t_3t_{12}) \\ &\quad + (q - \overline{q})^2(t_4t_0 + \alpha t_{123}). \end{aligned} \tag{12}$$

证明。 恒等式 (8)–(11) 分别由 (1)–(4) 及其镜像推出。最后一个恒等式由 (5) 及其镜像，以及 (10)、(11) 推出。 □

将 (8)、(9)（分别为 (10)–(12)）以及通过置换 $(1234)^k$、$k = 1$、2、3 对指标作用所得的恒等式称为 $[2,2]$ （分别为 $[2,3]$）类型的交换关系 。它们使我们能够将 $\mathcal{S}_4$ 的任意元素写成单项式的线性组合，其中生成元按任意指定的顺序排列。

与 [4]，中类似，我们不列出 $[3,3]$ 类型的交换关系。

命题 2.2。 以下关系在 $\mathcal{S}_4$ 中成立：

$$\begin{aligned} t_{13}t_{24} &= \alpha t_0 + t_1t_{234} + t_2t_{134} + t_3t_{124} + t_4t_{123} + q^2t_{12}t_{34} + \overline{q}^2t_{14}t_{23} \\ &\quad + qt_3t_4t_{12} + \overline{q}t_1t_4t_{23} + qt_1t_2t_{34} + \overline{q}t_2t_3t_{14} + t_1t_2t_3t_4, \\ t_{24}t_{134} &= q^2t_{14}t_{234} + \overline{q}^2t_{34}t_{124} + (1 - q^2 - \overline{q}^2)t_4t_0 - (q^3 + \overline{q}^3)t_{123} - q^2t_1t_{23} \\ &\quad - \overline{q}^2t_3t_{12} + t_2(qt_{14}t_{34} - q^2t_{13} - qt_4t_{134}) - qt_1t_2t_3, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} t_{123}^2 &= \overline{q}t_{12}t_{23}t_{13} - (t_1t_2t_3 + qt_1t_{23} + \overline{q}t_2t_{13} + \overline{q}t_3t_{12})t_{123} - (t_1^2 + t_2^2 + t_3^2) \\ &\quad + \alpha^2 - (qt_2t_3t_{23} + \overline{q}t_1t_3t_{13} + \overline{q}t_1t_2t_{12}) - (q^2t_{23}^2 + \overline{q}^2t_{13}^2 + \overline{q}^2t_{12}^2), \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} t_{123}t_{234} &= (t_{23} + qt_2t_3)t_0 + \overline{q}t_{12}t_{23}t_{34} - \overline{q}t_3t_{12}t_{234} - qt_2t_{34}t_{234} + q^2t_2t_{124} \\ &\quad + \overline{q}^2t_3t_{134} - \overline{q}^2t_{12}t_{24} - \overline{q}^2t_{13}t_{34} + (q - \overline{q})t_2t_4t_{12} + \overline{q}^2(\alpha t_{14} + t_1t_4), \end{aligned} \tag{15}$$

$$t_{123}t_{134} = t_{13}t_0 + t_{12}t_{14} + t_{23}t_{34} - t_1t_{123} - t_3t_{234} - \alpha t_{24} - t_2t_4, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} t_{23}t_{34}t_{124} &= (qt_{234} + q^2t_2t_{34} + t_3t_{24} + t_4t_{23} + qt_2t_3t_4)t_0 \\ &\quad + (t_2t_4 + q\overline{t}_{24})t_{124} + q^3t_{34}t_{134} + q\overline{t}_{23}t_{123} + t_3t_{23}t_{12} + q^2t_{14}t_{34} \\ &\quad + qt_2t_{12} - q^3t_3t_{13} + qt_4t_{14} - q^2t_1t_3^2 + q\alpha t_1, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} t_{14}t_{12}t_{23}t_{34} &= q^2t_0^2 + q^2(\overline{q}t_1t_{234} + qt_4t_{123} + t_1t_4t_{23} - t_2t_3)t_0 + t_{234}^2 + q^4t_{12\ 3}^2 \\ &\quad + t_3t_{14}t_{12}t_{234} + q^2t_2t_{14}t_{34}t_{123} + qt_4t_{23}t_{234} - \overline{q}t_3t_{14}t_{134} + q^3t_1t_{23}t_{123} \\ &\quad - q^3t_2t_{14}t_{124} + \overline{q}t_{14}t_{12}t_{24} + \overline{q}t_{14}t_{13}t_{34} + (1 - q^2)t_2t_4t_{14}t_{12} \\ &\quad - \overline{q}^2t_{14}^2 + q^2t_{23}^2 + (q - \overline{q})t_1t_4t_{14} + q^2(t_1^2 + t_4^2 - \alpha^2). \end{aligned}$$

证明。第一个恒等式是（2）的重复。第三个是 [2]的结果。它可以由（1）、（6）推导得出；参见 [3] 例 4.6，其中给出了一个简洁的推导。

第二个恒等式由 (5) 与 (3)、(4) 以及

$$t_{14}t_{34} = \overline{q}t_{1\bar{4}34} + qt_{13} + t_1t_3 + t_4t_{134}. \tag{18}$$

为推导出 (15)，我们首先计算

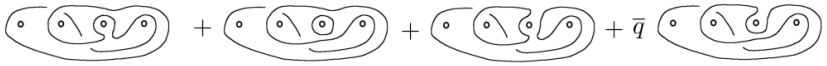
$$t_{123}t_{234} = qt_{1234\overline{32}} + \overline{q}t_{14} + t_1t_4 + t_{23}t_0,$$

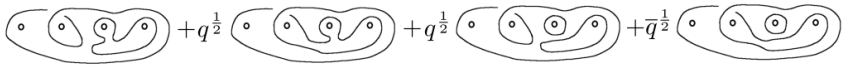
然后通过 (7) 替换$t_{1234\overline{32}}$。

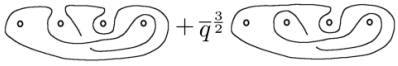
恒等式 (16) 通过组合得到

$$\begin{aligned} t_{123}t_{134} &= qt_{234\bar{3}} + \overline{q}t_{12\bar{1}4} + t_2t_4 + t_{13}t_0, \\ t_{12\bar{1}4} &= qt_{12}t_{14} - q^2t_{24} - qt_2t_4 - qt_1t_{124}, \\ t_{234\bar{3}} &= \overline{q}t_{23}t_{34} - \overline{q}^2t_{24} - \overline{q}t_2t_4 - \overline{q}t_3t_{234}. \end{aligned}$$



$= q$ 

$= q^{\frac{3}{2}}$ 

$+t_2t_{12}+\overline{q}^{\frac{1}{2}}$ 

$$= q^2t_{34}t_{134} + qt_2t_{34}t_0 + qt_1 + t_{234}t_0 + qt_3t_4t_{134} + t_2t_3t_4t_0 + t_3t_{1\bar{4}34} + \overline{q}t_3t_{24}t_0$$
$$+ t_2t_{12} + t_4t_{14} + \overline{q}t_1 + \overline{q}t_2t_4t_{124} + \overline{q}^2t_{24}t_{124}$$

图 3： 计算 $t_{23}t_{12434}$。

为推导出 (17)，我们首先计算

$$\begin{aligned} t_{23}t_{12\bar{4}34} = {} & (qt_2t_{34} + \overline{q}t_3t_{24} + t_2t_3t_4 + t_{234})t_0 + (q^2t_{34} + qt_3t_4)t_{134} \\ & + (\overline{q}t_2t_4 + \overline{q}^2t_{24})t_{124} + \alpha t_1 + t_4t_{14} + t_2t_{12} + t_3t_{1\bar{4}34}, \end{aligned}$$

如图 3 所示，并使用 (18) 将 t_3t_{1434} 替换为 $\mathcal{T}_n$ 中的元素。于是由 (4) 可得 (17)。

在（6）中分别用 23、4 替换 2、3，并取镜像，我们得到

$$\begin{aligned} t_{14}t_{1234\overline{32}} = {} & t_0^2 + (\overline{q}t_1t_{234} + qt_4t_{123} + t_1t_4t_{23})t_0 + q^2t_{123}^2 + \overline{q}^2t_{234}^2 \\ & + \overline{q}t_4t_{23}t_{234} + qt_1t_{23}t_{123} + t_{23}^2 + t_1^2 + t_4^2 - \alpha^2. \end{aligned}$$

然后应用 (7) 得到最后一个恒等式。 □

用 约化关系 来称呼这些关系，以及通过循环置换（13）–（17）中的指标得到的关系，还有（15）的镜像。

2.3 陈述与证明

定理 2.3. $\Sigma_{0,\ 5}$ 的 *Kauffman*括号*skein*代数由$t_1, t_2, t_3, t_4,\ t_0,\ t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{23}, t_{24},\ t_{34},\ t_{123}, t_{124}, t_{134}, t_{234}$生成，而定义关系的理想由 $[2,2],\ [2,3],$ 型交换关系、约化关系，以及 t_1, t_2, t_3, t_4, t_0的中心性生成。

证明. 给定单项式 $\mathfrak{g}$，若它是非中心生成元的乘积，则称其为约化的。当 $\mathrm{md}_{\mathfrak{g}}(i) = 0$ 对某个 i成立时，可以应用关于 $\mathcal{S}_3$ 的结果。因此，我们可以假设对所有 i，$\mathrm{md}_{\mathfrak{g}}(i) > 0$。

我们的策略是证明，利用已知关系，可以将任意约化单项式转化为某些特定单项式的线性组合。这些特定单项式可由其首项多曲线看出是线性无关的；（否则便会得到一个新的关系）。

考虑对称性后，只需考虑下表中的情况。

多重次数	特定单项式（首项多曲线）
(1, 1, 1, 1)	$t_{12}t_{34},\ t_{14}t_{23}$
(1, 1, 1, 2)	$t_{14}t_{234}\ (t_{2341\overline{4}}),\ t_{34}t_{124}\ (t_{12\overline{4}34})$
(1, 1, 2, 2)	$t_{12}t_{34}^2,\ t_{14}t_{23}t_{34}$
(1, 2, 1, 2)	$t_{12}t_{24}t_{34}\ (t_{12\overline{4}34\overline{2}}),\ \ t_{14}t_{23}t_{24}\ (t_{1\overline{4}23\overline{2}4})$
(1,1,1,3)	$t_{14}t_{24}t_{34}$
(1,2,2,2)	$t_{12}t_{34}t_{234}\ (t_{34}t_{1234\overline{2}}),\ t_{14}t_{23}t_{234}\ (t_{23}t_{1\overline{4}234})$
(1,1,2,3)	$t_{34}^2t_{124}\ (t_{12\overline{43}434}),\ t_{14}t_{34}t_{234}\ (t_{1\overline{43}4234})$
(1,2,1,3)	$t_{24}t_{34}t_{124}\ (t_{124\overline{2}\overline{4}34}),\ t_{14}t_{24}t_{234}\ (t_{1\overline{4}24234})$
(2,2,2,2)	$t_{12}^2t_{34}^2,\ t_{14}^2t_{23}^2$
(2,2,1,3)	$t_{14}^2t_{23}t_{24}\ (t_{14\overline{14}23\overline{2}4}),\ t_{12}t_{14}t_{24}t_{34}\ (t_{124\overline{2}1\overline{4}34})$
(1,1,3,3)	$t_{12}t_{34}^3,\ t_{14}t_{23}t_{34}^2\ (t_{23}t_{1\overline{43}234})$
(1, 3, 1, 3)	$t_{12}t_{34}t_{24}^2\ (t_{124\overline{2}}t_{2\overline{4}34}),\ \ t_{14}t_{23}t_{24}^2(t_{23\overline{2}4}t_{1\overline{4}24})$
(1, 1, 2, 4)	$t_{14}t_{24}t_{34}^2$
(1,2,1,4)	$t_{14}t_{24}^2t_{34}$
(2,2,2,3)	$t_{12}t_{34}^2t_{124}\ (t_{12}t_{12\overline{43}434}),\ t_{14}^2t_{23}t_{234}\ (t_{23}t_{14\overline{14}234})$
(1, 2, 2, 4)	$t_{24}t_{34}^2t_{124}\ (t_{2\overline{4}34}t_{12\overline{4}34}),\ t_{14}t_{24}t_{34}t_{234}\ (t_{24}t_{1\overline{4}34234})$
(1, 2, 4, 2)	$t_{23}t_{34}^2t_{123}\ (t_{2343}t_{12343}),\ \ t_{23}^2t_{34}t_{134}\ (t_{2343}t_{13234})$
(1、2、3、3)	$t_{14}t_{23}t_{34}t_{234}$
(1, 3, 2, 3)	$t_{12}t_{24}t_{34}t_{234}\ (t_{12342\overline{4}34\overline{2}}),\ \ t_{14}t_{23}t_{24}t_{234}\ (t_{1\overline{4}23\overline{2}4234})$
(1,1,3,4)	$t_{34}^3t_{124}\ (t_{12\overline{43}43434}),\ t_{14}t_{34}^2t_{234}\ (t_{34}^2t_{1\overline{4}234})$
(1,3,1,4)	$t_{14}t_{24}^2t_{234}$
(2, 2, 3, 3)	$t_{12}^2t_{34}^3,\ t_{14}^2t_{23}^2t_{34}$
(2,3,2,3)	$t_{12}^2t_{24}t_{34}^2\ (t_{12\overline{43}434\overline{2}12}),\ \ t_{14}^2t_{23}^2t_{24}\ (t_{14\overline{14}232\overline{3}\overline{2}4})$
(2, 2, 2, 4)	$t_{12}t_{14}t_{24}t_{34}^2\ (t_{12\overline{4}34}^2),\ t_{14}^2t_{23}t_{24}t_{34}\ (t_{1\overline{4}234}^2)$

作为补充，如果多重次数为 $(1, a, b, c)$ 且 $a + b + c = 9$，则每个关系都可由上述关系推出。为此，注意到如果 S 是一个多重次数为 $\mathrm{md}_S = (1, a, b, c)$ 且 $a + b + c = 9$ 的简单曲线，那么任意两个可容许表达式都可以通过一条可缩短弧同余。

现在所有可能的单项式都已检查完毕，证明也就完成了。

□

参考文献

[1] D. Bullock，Kauffman括号skein代数的有限生成集。《数学杂志》231 (1999)，91–101。Doi：10.1007/PL00004727。

[2] D. Bullock 和 J.H.Przytycki。Kauffman 括号 skein 模量子化的乘法结构。美国数学会会刊128 (2000)，第 3 期，923–931。Doi：10.1090/s0002-9939-99-05043-1。

[3] H.-M. Chen，《平面曲面上的 skein代数》。arXiv:2206.07856。

[4] H.-M.Chen，平面曲面的考夫曼括号skein代数的表示。arXiv:2401.00898。

[5] J. Cooke 和 A. Lacabanne，《高秩 Askey-Wilson 代数作为编织代数》。arXiv:2205.04414。

[6] R. Kirby，《低维拓扑中的问题》，《AMS/IP 高等数学研究丛书》，第 2.2 卷，《几何拓扑》（佐治亚州雅典，1993），第 35–473 页，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1997。

[7] T. Ohtsuki，《关于结与 3-流形不变量的问题》，J. Roberts 撰写导言。《几何拓扑专著》，第 4 卷，《结与 3-流形的不变量》（京都，2001），第 i–iv、377–572 页，几何拓扑出版社，考文垂，2002。

[8]A.S. Sikora 和 B.W. Westbury，《图的合流理论》。《代数、几何与拓扑》7（2007），439–478。DOI：10.2140/agt.2007.7.439。

Haimiao Chen（ORCID：0000-0001-8194-1264）*chenhm@math.pku.edu.cn*北京工商大学数学系，中国北京市房山区良乡高教园区。