arXiv:2304.06609v1 [math.AC] 13 Apr 2023

关于序贯 Cohen–Macaulay 模

GIULIO CAVIGLIA、ALESSANDRODE STEFANI、Enrico Sbarra 和 FRANCESCO STRAZZANTI

Abstract. 在这篇综述论文中，我们首先介绍序列 Cohen-Macaulay 模的主要性质，并提供一些基本例子，帮助读者快速熟悉这一主题。随后，我们讨论序列 Cohen-Macaulay 性这一概念的两种推广，它们的灵感来自 J¨urgen Herzog 和第三作者的一条定理。

Introduction

这篇综述性文章专门介绍 J¨urgen Herzog 在该主题上的工作，不可能做到面面俱到：序贯Cohen-Macaulay 模的概念自 90 年代末以来一直是文献中许多论文的核心，或许可以从 [20]说起。另一方面，在90年代末，Herzog 的研究活动异常活跃，因为他接待了许多来访者并与众多合作者开展合作。与此同时，以 PostScript 文件形式通过互联网分发预印本，加快了数学思想的传播。因此，我们必须预先致歉：我们的参考文献列表注定是不完整的。

1997年，Herzog 与后来成为其最重要合作者的 Takayuki Hibi 发表了一篇关于单纯复形的论文 [26], ，紧接着二人又与 Annetta Aramova 合作发表了一系列论文 [5, 6, 7], ，通过研究希尔伯特函数、Gr¨obner 基技术和一般初始理想，解决了关于单纯复形的数值问题，另见 [3, 4, 19]。1999年，Herzog 和 Hibi 又发表了另一篇颇具影响力的论文 [27]：他们引入并研究了一类称为逐分量线性的新的理想。逐分量线性的 Stanley-Reisner 理想 I_Δ 被刻画为满足以下条件的理想：对于每个 i，Alexander 对偶的纯 i阶骨架 Δ 都是 Cohen-Macaulay 的。得益于 [20], ，这意味着 I_Δ 是逐分量线性的，当且仅当其 Alexander 对偶是序贯 Cohen-Macaulay 的，另见 [30]。通过这种方式，作者还推广了 Eagon 和 Reiner 的一个著名结果：单纯复形的 Stanley-Reisner 理想具有线性分解，当且仅当其 Alexander 对偶是 Cohen-Macaulay 的。这些事实背后的所有思想还导出了另一个基本结果，即 [31] 的主要定理；该定理以多项式环 R 上局部上同调模的希尔伯特函数为依据，对分次序贯 Cohen–Macaulay 模给出了某种出人意料的刻画：

日期：2023年4月14日。第一作者部分获得了 Simons 基金会（41000748，G.C.）的资助。第二作者部分获得了 PRIN 2020 项目 2020355B8Y“无平方 Gr¨obner 退化、特殊簇及相关主题”的资助。第三作者部分获得了意大利大学与研究部的 PRIN 项目 2017SSNZAW004“模空间理论与双有理分类”的资助。

定理 1。设 M 是一个有限生成的分次 R-模，并设 $M \cong F/U$ 是 M的一个自由分次表示。那么，F/U是序贯 Cohen-Macaulay 的，当且仅当对于所有 $i \geqslant 0$，Hilb($H^i_{\mathfrak{m}}(F/U)$) =Hilb($H^i_{\mathfrak{m}}(F/\operatorname{Gin}(U))$)。

这里，Gin(U) 表示相对于次数反字典序的 U 泛初始模。

本文组织如下。第一节中，我们根据 Stanley [37]，引入序贯 Cohen-Macaulay 模的定义，并讨论一些基本性质和例子。第 2 节中，我们介绍序列 Cohen-Macaulay 性的一些主要刻画或等价定义，回顾 Schenzel 关于模的维数滤过的结果（参见命题 2.2、2.6 和定理 2.7），以及 Peskine 用亏格模给出的刻画（参见定理 2.13）。第 3 节中，我们回顾第三和第四作者在 [35]，中引入的部分序贯 Cohen-Macaulay 性的定义，即要求维数滤过的末端部分构成 Cohen-Macaulay 滤过，见定义 3.1；并介绍分次情形中的一些基本性质，见引理 3.4 和 3.5。接下来的两个结果——引理 3.8 和命题 3.10——旨在弥补 [35]，中一个基本引理证明里的漏洞；我们还在定理 3.11 中给出定理 1 的第一个推广。第 4 节以回顾 E-深度的定义开始，该定义由第一和第二作者在 [12], 中引入，见定义 4.1。E-深度衡量有限生成标准分次模 M 的亏格模整体具有多少深度；正如注 4.2 所述，可以通过 E-深度来判定序列 Cohen-Macaulay 性。命题 4.4 展示了 E-深度的一些有趣的同调性质，尤其是与严格滤子正则元相关的性质。在定义 4.9 中，我们引入下文另一个关键概念，即我们所谓的部分泛初始理想，并采用一种特殊的部分反字典序。最后，借助命题 4.10，我们在定理 4.11 中证明本节的主要结果，这可视为定理 1 的又一个推广。

献给J¨urgen Herzog，一位杰出的数学家和教师典范。

1. Sequentially Cohen-Macaulay modules

在全文中，令 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 表示一个带有极大理想 $\mathfrak{m}$ 和剩余域 $k = R/\mathfrak{m}$ 的诺特局部环，或一个标准分次 k-代数 $R = \bigoplus_{i\geqslant 0} R_i$，其中有 $R_0 = k$ 和 $\mathfrak{m} = \bigoplus_{i>0} R_i$。在第二种情形下，我们所考虑的每个 R-模都将是分次R-模，并且同态将是次数为零的分次同态。

使 Cohen-Macaulay 性质具有重要意义的特征之一，是可以通过局部上同调的消失与非消失来刻画：对于一个 d 维的有限生成模 M，其 $t =$深度为 M，有 $H^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ 对所有 $i < t$ 和 $i > d$ 都成立；此外，$H^t_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$，且 $H^d_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$。这些结果最初归功于 Grothendieck，参见 [10], 定理 3.5.8、推论 3.5.9、推论 3.5.11.a) 和 b)。因此，M 是 Cohen–Macaulay 模，当且仅当 $H^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ 对所有 $i \neq d$ 成立。

设 dim(R) $= n$。当 R 是 Cohen-Macaulay 且具有典范模 ω_R时，根据对偶性，可以通过局部上同调模的 Matlis 对偶来检验上述条件，即检验模 $\operatorname{Ext}^{n-i}_R(M, \omega_R)$。采用上述记号，我们有 $\operatorname{Ext}^{n-t}_R(M, \omega_R)$ 和 $\operatorname{Ext}^{n-d}_R(M, \omega_R)$ 均非零；此外，对所有 $i < n-d$和 $= 0$，

所有 $i > n-t$。此外， M是 Cohen-Macaulay 当且仅当对所有 $i \neq d$， $\mathrm{Ext}_R^{n-i}(M, \omega_R) = 0$。在文献中，模 $\mathrm{Ext}_R^{n-i}(M, \omega_R)$、 $i = 0$、……、 n通常称为 M的亏格模，因为它们也能衡量一个模偏离 Cohen-Macaulay 性质的程度。

现在我们引入序贯 Cohen-Macaulay模这一类，遵循 [37], ，回顾其主要性质，并在下一节讨论其一些等价定义。这里我们的主要参考文献是 [31] 和 [36]。

定义 1.1。有限生成的 R-模 M 称为序贯 *Cohen-Macaulay*，如果它存在一个子模滤过 $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_r = M$，使得该滤过的每个商模 M_i/M_{i-1} 都是 Cohen-Macaulay，并且对所有 i，$\dim(M_i/M_{i-1}) < \dim(M_{i+1}/M_i)$。在这种情况下，我们称上述滤过是 M的序贯 *Cohen-Macaulay* 过滤 。

例 1.2。 (1)根据定义，如果 $M \neq 0$ 是一个 Cohen–Macaulay 模，显然，

那么它就是序贯 Cohen-Macaulay。事实上 $M = M_1 \supsetneq M_0 = 0$。(2) 任意一维模 M 都是序贯 Cohen-Macaulay，因为如果 M 不是 Cohen-Macaulay 模，就可以取 $M_1 = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ 和 $M_2 = M$。(3) 整环 R 是序贯 Cohen-Macaulay，当且仅当它是 Cohen-Macaulay。事实上， R 的任意非零子模的维数都是 $d = \dim(R)$，而 R 唯一可能的序贯 Cohen-Macaulay 过滤是 $0 = M_0 \subsetneq M_1 = R$。(4) 另一方面，如果 M 有一个 Cohen-Macaulay 子模 M_1 ，使得 M/M_1 是序贯 Cohen-Macaulay 模，且有滤过 $0 = M_1/M_1 \subsetneq N_1/M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq N_s/M_1 = M/M_1$，并且 $\dim M_1 < \dim N_1/M_1$，那么 $0 \subsetneq M_1 \subsetneq N_1 \subsetneq \ldots \subsetneq N_s = M$就是 M的序贯 Cohen-Macaulay 过滤。

序贯 Cohen-Macaulay 模这一概念最早于 [37] 在分次情形下出现在文献中，与 Stanley-Reisner 环和单纯复形理论相关。后来， [36], 独立地在局部情形下引入了 Cohen-Macaulay 过滤模的概念；同一篇论文还证明了这两个概念等价。此后，序贯 Cohen-Macaulay 模得到了广泛研究，尤其是与可壳化性和图论相关的研究，参见例如 [40] [25] [2], [22], [1], ；这一概念也被推广到了其他方向，参见 [14], [33]。第 3 节和第 4 节分别介绍了两种这样的推广，分别由第三、第四位作者以及前两位作者提出。

例 1.3。 设 M 是一个带有序贯 Cohen-Macaulay 过滤 $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_r = M$的序贯 Cohen-Macaulay 模，并且对所有 i，都有 $d_i = \dim(M_i/M_{i-1})$。
(1)令 N 为另一个序贯 Cohen-Macaulay 对象；则 $M \oplus N$ 是序贯Cohen-Macaulay 的。为证明这一点，令 $0 = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \ldots \subsetneq N_s = N$为$N$ 的序贯 Cohen-Macaulay过滤，并令 $\delta_i = \dim(N_i/N_{i-1})$。为方便起见，再令 $d_0 = \delta_0 = -1$。于是，项形如 $M_i \oplus N_j$的滤过，其中或者 $d_i = \max\{d_a \mid d_a \leqslant \delta_j\}$ ，或者$\delta_j = \max\{\delta_a \mid \delta_a \leqslant d_i\}$，是 $M_r \oplus N_s = M \oplus N$的序贯Cohen-Macaulay过滤。(2) 在极大理想 $\mathfrak{m}$ 处对 M 进行完备化所得的 M 是一个序贯Cohen-Macaulay R-模。为此，令 $M'_i = M_i \otimes_R R$，由 R 的平坦性，我们有 $0 = M'_0 \subsetneq M'_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M'_r$是$M \otimes_R R \cong M$的序贯 Cohen-Macaulay 过滤。(3)一般可以证明，序贯 Cohen-Macaulay 性质在忠实平坦基变换下保持；再经过一些额外工作，可以推出 M 是序贯

Cohen-Macaulay R-模当且仅当 $M[|x|]$ 作为$R[|x|]$-模是序贯 Cohen-Macaulay，参见 [36, 定理 6。2]。

注 1.4. 在上述例子的第 (1) 部分中，逆命题也成立，参见 [16, 命题 4.5], [39, 命题3.2]或推论 2.14。

同一例子的第 (2) 部分中，反向结论一般并不成立，例如参见 [36,例 6.1]。不过，当 R 是某个 Cohen-Macaulay 环的同态像时，该结论成立，参见 [23, 推论 2.8] 和 [23, 推论 2.9], ，其中证明了在这种情况下， M 是$\widehat{\ }$序贯 Cohen-Macaulay R模，当且仅当 M 是序贯 Cohen-Macaulay$\frown$$R$模。

命题 1.5. 设 M 是一个具有序贯 Cohen-Macaulay 过滤$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_r = M$的序贯 Cohen-Macaulay R模。再设对所有 $i \in \{1, \ldots, r\}$，均有 $d_i = \dim(M_i/M_{i-1})$；则：

(1) f 对于所有 $j \in \mathbb{Z}$，我们有 $H^j_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$ 当且仅当 $j \in \{d_1, \ldots, d_r\}$，并且

$$H^{d_i}_{\mathfrak{m}}(M) \cong H^{d_i}_{\mathfrak{m}}(M_i) \cong H^{d_i}_{\mathfrak{m}}(M_i/M_{i-1});$$

(2) 对所有 $i \in \{1, \ldots, r\}$ 和 $j < i$，模 M_i 和 M_i/M_j 都是序列 Cohen-Macaulay。

证明。对于第(1) 部分，利用短正合列 $0 \to M_{i-1} \to M_i \to M_i/M_{i-1} \to 0$，可归纳得出对所有 $i \in \{1, \ldots, r\}$都有$\dim(M_i) = d_i$，因为 $d_{i-1} < d_i$。由此在局部上同调上诱导出的长正合列

$$\cdots \to H^{j-1}_{\mathfrak{m}}(M_i/M_{i-1}) \to H^j_{\mathfrak{m}}(M_{i-1}) \to H^j_{\mathfrak{m}}(M_i) \to H^j_{\mathfrak{m}}(M_i/M_{i-1}) \to H^{j+1}_{\mathfrak{m}}(M_{i-1}) \to \cdots$$

连同 M_i/M_{i-1} 是维数为 d_i的 Cohen-Macaulay 模这一事实，意味着

$H^{d_i}_{\mathfrak{m}}(M_i) \cong H^{d_i}_{\mathfrak{m}}(M_i/M_{i-1})$ $H^j_{\mathfrak{m}}(M_i) \cong H^j_{\mathfrak{m}}(M_{i-1})$ 若 $j < d_i$，且 $H^j_{\mathfrak{m}}(M_i) = 0$ 否则。特别地，对所有 $j > d_r$， $H^j_{\mathfrak{m}}(M) = 0$；且对所有 $j \leqslant d_i$， $H^j_{\mathfrak{m}}(M) = H^j_{\mathfrak{m}}(M_i)$。总之，我们已证明，

$$H^j_{\mathfrak{m}}(M) = \begin{cases} H^{d_i}_{\mathfrak{m}}(M_i) = H^{d_i}_{\mathfrak{m}}(M_i/M_{i-1}) & \text{if } j = d_i \text{ for some } i, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

第(2) 部分很清楚，只要注意到 $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_i$和 $0 = M_j/M_j \subsetneq M_{j+1}/M_j \subsetneq \ldots \subsetneq M_i/M_j$是序贯 Cohen-Macaulay 过滤即可。□

例1.6. 假设 x 是一个 M-正则元，且 M/xM 是序贯 Cohen-Macaulay；一般而言， M 是序贯 Cohen-Macaulay并不成立，正如在 [38, 命题2.2] 之后所指出的—— [36, 定理 4.7] 的表述并不正确。作为反例，可以取一个深度为1的 2维非Cohen-Macaulay 局部整环 R ，根据例1.2 (3)，它不是序贯 Cohen-Macaulay。例如，取$R = \mathbb{Q}[|a^4, a^3b, ab^3, b^4|] \cong \mathbb{Q}[|z_1, z_2, z_3, z_4|]/(z_2z_3 - z_1z_4, z_3^2 - z_2z_4^2, z_1z_3^2 - z_2^2z_4, z_2^3 - z_1^2z_3)$。相反，每个 $0 \neq x \in R$ 都是正则的， $R/(x)$是一个 1 维 R-模，因此根据例 1.2 (2)，总是序贯 Cohen-Macaulay。

在本节余下部分，设 $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ 带有标准分次。给定一个单项式理想 $I \subset S$，我们用 $G(I)$ 表示 I 的单项式极小生成元系，且 $m(I)$ =的最大值 $\{i \mid x_i$ 能整除 u，其中某个 $u \in G(I)\}$。

一类重要的序贯 Cohen-Macaulay 模由弱稳定理想定义的环给出。

定义 1.7。若单项式理想 $I \subseteq S$ 满足以下条件，则称其为弱稳定的：对于所有单项式$u \in I$ 以及所有整数 i，j，若 $1 \leqslant j < i \leqslant n$，则存在 $t \in \mathbb{N}$ 使得 $x_j^t u/x_i^\ell \in I$，其中ℓ 是满足 x_i^ℓ 整除 u的最大整数。

注意，前一定义中的条件成立，当且仅当它对所有 $u \in G(I$都成立。文献中，弱稳定理想也称为 Borel 型理想、拟稳定理想或嵌套型理想，参见 [11], [28], [8]。从定义也容易看出，稳定理想、强稳定理想以及 p-Borel 理想都是弱稳定理想。特别地，无论域的特征如何，Borel 固定理想都是弱稳定的，另见[28, 定理 4.2。10] 因此，一般初始理想总是弱稳定的。

注意，弱稳定理想 I 的饱和 I^{sat} 为 $I : \mathfrak{m}^\infty = I : x_n^\infty$，见 [28,命题 4.2.9]；因此，$I^{\mathrm{sat}}$ 仍是弱稳定的，并且 x_n 不整除任何 $u \in G(I^{\mathrm{sat}})$。

命题 1.8. 设 I是 $S = k[x_1, \ldots, x_n]$的弱稳定理想。那么，S/I是序贯 Cohen-Macaulay 的。

证明。我们对 $m(I)$ 使用归纳法证明该结论。若 $m(I) = 1$，则存在某个正整数 r 使得 $I = (x_1^r)$，且 S/I 是 Cohen-Macaulay 的。现在假设，对于每个满足 $m(J) < m(I)$ 的弱稳定理想 J，S/J 都是序贯 Cohen-Macaulay 的。

令 $S' = k[x_1, \ldots, x_{m(I)}]$和 $I' = I \cap S'$。由于 $S/I \cong S'/I' \otimes_k k[x_{m(I)+1}, \ldots, x_n]$ 且 S'/I' 的一个序贯 Cohen-Macaulay 过滤很容易扩充为 S/I的一个序贯 Cohen-Macaulay 过滤，因此只需证明S'/I' 是序贯 Cohen-Macaulay 的。因此，不失一般性，我们可以假设 $m(I) = n$，并且 S/I^{sat} 是序贯 Cohen-Macaulay 的。现在，I^{sat}/I 是一个非零 Artin 模，而 S/I^{sat} 的序贯 Cohen-Macaulay 过滤中的第一个非零模具有正维数，见命题 1.5。因此我们可以得出结论：S/I 是序贯 Cohen-Macaulay 的，参见例 1.2(4)。□

注 1.9。根据 [8, 命题 3.2], 另见 [28, 命题 4.2.9] 和 [11, 第 4]章 I)，一个单项式理想当且仅当其所有伴随素理想都由变量的初始段生成时，它才是弱稳定的；也就是说，它们具有 $(x_1, \ldots\ldots, x_i)$ 的形式，其中 i。由于序贯 Cohen-Macaulay 性与 S上的坐标变换无关，上述命题表明，只要一个单项式理想 $I \subseteq S$ 的伴随素理想按包含关系全序排列，那么 S/I 就是序贯 Cohen-Macaulay 的。

例 1.10. 设 $I = (x_1^4, x_1^2x_2^2, x_1^3x_3, x_1^2x_2x_3, x_1^2x_2x_4) \subseteq S = k[x_1, x_2, x_3, x_4]$。通过检验定义，或利用前面的注计算其伴随素理想，可以很容易验证 I 是一个弱稳定理想，但不是强稳定理想；因此，根据命题 1.8，S/I 是序贯 Cohen-Macaulay 的。我们可以按照该命题证明中的方法构造一个显式的序贯 Cohen-Macaulay 过滤。我们有 $m(I) = 4$，且 $I^{\mathrm{sat}} = I : x_4^\infty = (x_1^4, x_1^2x_2, x_1^3x_3)$。这意味着，我们的过滤中的第一个非零模将是 $(x_1^4, x_1^2x_2, x_1^3x_3)/I$。现在，我们把 $I' = (x_1^4, x_1^2x_2, x_1^3x_3)$ 看作 $k[x_1, x_2, x_3]$ 的一个理想，并计算其饱和 $I'' = I : x_3^\infty = (x_1^3, x_1^2x_2)$。因此，该过滤中的第二个非零模是 $(x_1^3, x_1^2x_2)/I$。依此类推，我们得到过滤 $0 \subseteq (x_1^4, x_1^2x_2, x_1^3x_3)/I \subseteq (x_1^3, x_1^2x_2)/I \subseteq (x_1^2)/I \subseteq (1)/I = S/I$，不难看出它是 S/I的一个序贯 Cohen-Macaulay 过滤。

例 1.11. 对于 $M = R = S/I$ 的情形，当 $I = I_\Delta$ 是单纯复形 Δ的 Stanley-Reisner 理想时，Duval 给出了序列 Cohen-Macaulay 性的一个优美刻画，见 [20, 定理 3.3]。给定一个单纯复形 Δ，令 $\Delta(i)$ 为 Δ的纯 i 阶骨架，即 Δ 的纯子复形，其极大面是 Δ 中维数为 i 的面。那么，当且仅当对所有 i， $S/I_{\Delta(i)}$ 都是 Cohen-Macaulay 的， S/I_Δ 才是序贯 Cohen-Macaulay 的。关于这一主题的另一个重要结果是， I_Δ 是逐分量线性的，当且仅当其 Alexander 对偶 Δ^* 的 Stanley-Reisner 环是序贯 Cohen-Macaulay 的，见 [27, 定理 2.1] 和 [28, 定理 8.2.20]。此外，已知如果 Δ 是（非纯）可壳化的，那么 S/I_Δ 就是序贯 Cohen-Macaulay 的，见 [28, 推论 8.2.19]。

例 1.12。漂亮干净模是另一类序贯 Cohen-Macaulay 模的例子。Herzog 和 Popescu 引入了这类模，以便刻画多复形的可壳化性 [29] 。漂亮干净模 M 是指存在漂亮干净滤过的模，即由子模 $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq .. \subsetneq M_s = M$构成的 M 的素滤过，使得每个商模 M_i/M_{i-1}都同构于 $S/\mathfrak{p}_i$，其中 $\mathfrak{p}_i$是某个素理想，并满足以下性质：若 $\mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{p}_j$ ，则 $i > j$。例如，若 $M = S/I$ 是弱稳定的 I，参见 [29, 命题 5.2]，；或者若 Ass(M) 是全序集，参见[29, 命题 5.1] 或注 1.9，则 M 是漂亮干净的。根据 [29, 定理 4.1]，漂亮干净模是序贯 Cohen-Macaulay 模，前提是漂亮干净滤过中出现的每个素理想 $\mathfrak{p}_i$ 都满足 $S/\mathfrak{p}_i$ 是 Cohen-Macaulay。

2. Characterizations of sequentially Cohen-Macaulay modules

本节旨在介绍序贯 Cohen-Macaulay 模的两种刻画，分别归功于 Schenzel（见定理 2.7 ）和 Peskine（见定理2.13）。如上一节所述，令（R， $\mathfrak{m}$， k）为诺特局部环或带有极大齐次理想 k-代数的标准分次 $\mathfrak{m}$；令 dim(R) $= n$。在第二种情况下，模将是分次的，且同态为次数 0 的齐次同态。

2.1. **Schenzel 刻画**。 这里的主要参考文献是 [36]。按照约定，零模的维数定义为 -1。设 M 是维数为 d的有限生成（分次） R-模。由于 R 是诺特的，对于所有 $i = 0$、.....、d，我们可以考虑 M 中维数为 $\leqslant i$的最大（分次）子模，并将其记为 $\delta_i(M)$。由极大性可得一个滤过 $\mathcal{M}$： $0 \subseteq \delta_0(M) \subseteq \delta_1(M) \subseteq \ldots \subseteq \delta_d(M) = M$，称为 M的维数滤过 。显然，这样的滤过是唯一的。

给定 R 的一组素理想 X，我们用 $X_i = \{\mathfrak{p} \in X$ 表示：dim $R/\mathfrak{p} = i\}$。类似地，我们定义 $X_{\leqslant i}$ 和 $X_{>i}$。

注 2.1. 注意到， M 有一个维数为 i 的非零子模，当且仅当 Ass(M)$_i \neq \emptyset$。事实上，若 $\mathfrak{p} \in$Ass(M)$_i$，则 $R/\mathfrak{p}$是 M的一个维数为i的非零子模。反过来，若 N 是 M 的一个维数为 i的非零子模，则必定存在 N的一个极小素理想 $\mathfrak{p}$，使得 dim($R/\mathfrak{p}$) $=$dim(N) $= i$。由于 $N \subseteq M$，我们还必须有 $\mathfrak{p} \in$ Ass(M)，如所需。特别地，我们有 $\delta_i(M) = 0$ ，当且仅当 Ass(M)$_{\leqslant i} = \emptyset$。

注意到， $\delta_0(M) = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$； $\mathcal{M}$ 中的其他模也可以类似地描述，借助于 0 作为 M的子模时的极小主分解。事实上，令 Ass$(M) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m\}$，并对所有 $i = 0$，……， d，考虑集合 Ass$(M)_{\leqslant i}$。我们定义

$$\mathfrak{a}_i = \begin{cases} \prod\limits_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}(M)_{\leqslant i}} \mathfrak{p} & \text{if } \mathrm{Ass}(M)_{\leqslant i} \neq \emptyset, \\ R & \text{otherwise.} \end{cases}$$

现在考虑一个不可约主分解 $0 = \bigcap_{j=1}^{m} N_j$ inside M，其中每个 M/N_j 都是一个 $\mathfrak{p}_j$-主模。

命题 2.2 ([36, 命题 2.2])。 设 M 是一个有限生成的 R-模，其维数为 d。采用上述记号，对所有 $i = 0, \ldots, d$，有

$$\delta_i(M) = H^0_{\mathfrak{a}_i}(M) = \bigcap_{\{j \mid \mathfrak{p}_j \in \mathrm{Ass}(M)_{>i}\}} N_j,$$

其中我们约定，空集上的交等于 M。

证明。 我们从第一个等式开始，并假设 $\delta_i(M) = 0$。由注 2.1 可知，Ass$(M)_{\leqslant i} = \emptyset$，在这种情况下 $\mathfrak{a}_i = R$。因此， $H^0_{\mathfrak{a}_i}(M) = H^0_R(M) = 0 = \delta_i(M)$。
现在假设 $\delta_i(M) \neq 0$，并注意到 $\delta_i(M)$ 的每个关联素理想的维数均为$\leqslant i$，因此，Ass$(\delta_i($ $M)) \subseteq$ Ass$(M)_{\leqslant i}$。于是，存在 $\mathfrak{a}_i$ 的一个幂湮灭$\delta_i(M)$，从而得到 $\delta_i(M) \subseteq H^0_{\mathfrak{a}_i}(M)$。另一方面，存在 $\mathfrak{a}_i$ 的一个幂湮灭 $H^0_{\mathfrak{a}_i}(M)$，因而 $\dim(H^0_{\mathfrak{a}_i}(M)) \leqslant \dim(R/\mathfrak{a}_i) \leqslant i$。由$\delta_i(M)$的极大性可得 $H^0_{\mathfrak{a}_i}(M) \subseteq \delta_i(M)$，证毕。

对于第二个等式，注意到对于任意 $x \notin \mathfrak{p}_j$，有 $N_j :_M \mathfrak{p}_j^{\infty} = M$ 和 $N_j :_M x^{\infty} = N_j$，其中 $j \in \{1, \ldots, m\}$，因为 M/N_j是 $\mathfrak{p}_j$-主理想。此外还要注意，

$$H^0_{\mathfrak{a}_i}(M) = 0 :_M \mathfrak{a}_i^{\infty} = \left(\bigcap_{j=1}^{m} N_j\right) :_M \mathfrak{a}_i^{\infty} = \bigcap_{j=1}^{m} (N_j :_M \mathfrak{a}_i^{\infty}).$$

现在，如果 $\mathfrak{p}_j \in$ 关联素理想集$(M)_{\leqslant i}$，那么 $M \supseteq N_j :_M \mathfrak{a}_i^{\infty} \supseteq N_j :_M \mathfrak{p}_j^{\infty} = M$，从而处处强制等式成立。接下来，假设 $\mathfrak{p}_j \notin$关联素理想集$(M)_{\leqslant i}$。那么， $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{p}_j$对于每个 $\mathfrak{p} \in$关联素理想集$(M)_{\leqslant i}$，因为否则我们将有 $\dim(R/\mathfrak{p}_j) \leqslant \dim(R/\mathfrak{p}) \leqslant i$，从而 $\mathfrak{p}_j \in$ 关联素理想集$(M)_{\leqslant i}$。在这种情况下，通过选取$x \in \mathfrak{a}_i$ 和 $x \notin \mathfrak{p}_j$，我们有 $N_j \subseteq N_j :_M \mathfrak{a}_i^{\infty} \subseteq N_j :_M x^{\infty} = N_j$，并且等式成立。综上，我们得出

$$H^0_{\mathfrak{a}_i}(M) = \bigcap_{\{j \mid \mathfrak{p}_j \notin \mathrm{Ass}(M)_{\leqslant i}\}} N_j = \bigcap_{\{j \mid \mathfrak{p}_j \in \mathrm{Ass}(M)_{>i}\}} N_j. \qquad \square$$

注意，这与我们的约定一致：空集上的交等于 M；事实上，对于 $i = d$，我们有 Ass(M) $_{\leqslant d}$ =Ass(M) 且 Ass$(M)_{>d} = \emptyset$。这与以下事实相符：$H^0_{\mathfrak{a}_d}(M) = H^0_{\sqrt{0}}(M) = M$。

命题 2.3 ([36], 推论 2.3)。 设 M 是一个维数为d的有限生成 R-模；那么，对所有 $i = 0, \ldots, d$，

(1) 关联素理想集$(\delta_i(M))$ =关联素理想集$(M)_{\leqslant i}$;
(2) 关联素理想集$(M/\delta_i(M))$ = 关联素理想集$($ $M)_{>i}$;

(3) $\operatorname{Ass}(\delta_i(M)/\delta_{i-1}(M)) = \operatorname{Ass}(M)_i$.

证明。众所周知，对于任意理想 $\mathfrak{a}$of$R$，关联素理想集(M) =关联素理想集$(H^0_{\mathfrak{a}}(M))$ ⊔关联素理想集$(M/H^0_{\mathfrak{a}}(M))$。另请注意，对于所有 $\mathfrak{a}$，关联素理想集$(H^0_{\mathfrak{a}}(M))$ =关联素理想集$(M) \cap V(\mathfrak{a})$。由于 $\delta_i(M) = H^0_{\mathfrak{a}_i}(M)$，根据命题 2.2，第一个等式由注 2.1和上述观察得出。

对于 (2)，考虑短正合列 $0 \longrightarrow \delta_i(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/\delta_i(M) \longrightarrow 0$。由命题 2.2可知，关联素理想集$(M)$ = 关联素理想集 $(\delta_i(M))$ ⊔ 关联素理想集 $(M/\delta_i(M))$，这等于关联素理想集 $(M)_{\leqslant i}$ ⊔ 关联素理想集 $(M)_{>i}$ 由 (1) 得出，第二个等式随之成立。

最后，考虑短正合列 $0 \to \delta_{i-1}(M) \to \delta_i(M) \to \delta_i(M)/\delta_{i-1}(M) \to 0$并注意到关联素理想集$(\delta_i(M)/\delta_{i-1}(M)) \subseteq$关联素理想集$(M/\delta_{i-1}(M))$。我们还有关联素理想集$(\delta_i(M)/\delta_{i-1}(M))$⊆关联素理想集$(\delta_i(M))$，因为 $\delta_{i-1}(M) = H^0_{\mathfrak{a}_{i-1}}(M) = H^0_{\mathfrak{a}_{i-1}}(\delta_i(M))$。因此，由(1)和(2)可知，必然有关联素理想集$(\delta_i(M)/\delta_{i-1}(M)) \subseteq$ 关联素理想集$(M)_i$。另一方面，由(1)可知，如果 $\mathfrak{p} \in$ 关联素理想集$(M)_i$，那么 $\mathfrak{p} \notin$ 关联素理想集(M_{i-1})，因此 $\mathfrak{p} \in$ 关联素理想集$(\delta_i(M)/\delta_{i-1}(M))$。□

作为命题 2.2 和2.3的推论，可以得到维数滤过的另一种刻画，参见 [29, 命题 1。1]。

推论 2.4。设 M 是一个 d 维 R-模。M 的子模滤过是 M 的维数滤过，当且仅当对所有 i，Ass(M_i/M_{i-1}) =Ass$(M)_i$。

以下定义在 [36, 定义 4.1] 中引入。

定义2.5。令 M 为一个 d维有限生成的 R模，且 $\mathcal{M}: 0 \subseteq \delta_0(M) \subseteq \ldots \subseteq \delta_d(M) = M$为其维数滤过。那么，$M$称为*Cohen-Macaulay*滤过，如果对于所有 $i \in \{0, \ldots, d\}$，模 $\delta_i(M)/\delta_{i-1}(M)$ 要么为零，要么是 Cohen-Macaulay。

由定义可立即得知，若 $\delta_i(M)/\delta_{i-1}(M) \neq 0$，则其维数为 i。

Cohen-Macaulay 滤过模 M 是序贯 Cohen-Macaulay。事实上，我们可以令 i_1表示满足 $\delta_{i_1}(M) \neq 0$的最小整数，并设 $M_1 = \delta_{i_1}(M)$。接着，若 i_j是满足 $\delta_{i_j-1}(M) \subsetneq \delta_{i_j}(M)$的最小整数，则令 $M_j = \delta_{i_j}(M)$。显然，所得滤过 $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_r = M$是 M的序贯 Cohen-Macaulay 过滤。

若滤过 $0 = C_{-1} \subseteq C_0 \subseteq C_1 \subseteq \ldots \subseteq C_d = M$的每个商模 C_i/C_{i-1}要么为零，要么是维数为 i 的 Cohen-Macaulay 模，则称其为 M的*CM* 滤过 。为了说明序贯 Cohen-Macaulay 模与 Cohen-Macaulay 滤过模这两个概念等价，我们需要以下结果。该结果表明，若一个模存在 CM 滤过，则此滤过唯一，且等于其维数滤过。

命题 2.6 ([36], 命题 4.3)。设 M 是一个 d 维有限生成的 R-模。若 M 有一个 CM 滤过 $0 = C_{-1} \subseteq C_0 \subseteq C_1 \subseteq \ldots \subseteq C_d = M$，则对每个 $i \in \{0, \ldots, d\}$，$C_i = \delta_i(M)$。

证明。我们对 d 使用归纳法。若 $d = 0$，则 $C_0 = M = \delta_0(M)$，此情形即告完成。以下假设 $d > 0$，于是由归纳法可知，对所有 $i < d$，都有 $C_i = \delta_i(C_{d-1})$。由于对于 $i < d$，我们有 $\delta_i(M) = \delta_i(\delta_{d-1}(M))$，因此只需证明$\delta_{d-1}(M) = C_{d-1}$。

注意到 Ass(C_0) $\subseteq$ Ass(M)$_{\leqslant 0}$，并且对于所有 $\mathfrak{p} \in$ Ass(C_i/C_{i-1})，若 $C_i \neq C_{i-1}$，则 dim $A/\mathfrak{p} = i$。由此可通过归纳法证明 dim $C_i \leqslant i$，进而对所有 i，都有$C_i \subseteq \delta_i(M)$；特别地，$C_{d-1} \subseteq \delta_{d-1}(M)$。若 Ass($M$)$_{\leqslant d-1} = \emptyset$，则由注 2.1 可得 $\delta_{d-1}(M) = 0$，所需等式显然成立。否则，我们令 $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{d-1} = \prod_{\mathfrak{p}\in \text{Ass}(M)_{\leqslant d-1}} \mathfrak{p}$

并且我们断言 $H^0_{\mathfrak{a}}(M/C_{d-1}) = 0$。当 $M/C_{d-1} = 0$ 时这显然成立。因此，设 $C_{d-1} \neq M$ 并注意到 $\mathfrak{a}$ 包含一个 M/C_{d-1} 的正则元。为说明后者，设 $\mathfrak{a} \subseteq \bigcup \mathfrak{p}$; 那么，根据素理想躲避，我们可以找到 $\mathfrak{p} \in$ 关联素理想集$(M/C_{d-1})_{\mathfrak{p}\in \text{关联素理想集}(M/C_{d-1})}$ 使得 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$，因此，$\mathfrak{p}$ 包含一个素理想 $\mathfrak{p}' \in$ 关联素理想集$(M)_{\leqslant d-1}$。这是一个矛盾，因为这将意味着 $d =$ 维数(M/C_{d-1}) $=$ 维数$(R/\mathfrak{p})$ $\leqslant$ 维数$(R/\mathfrak{p}')$ $\leqslant d-1$。最后，考虑短正合列 $0 \longrightarrow C_{d-1} \longrightarrow M \longrightarrow M/C_{d-1} \longrightarrow 0$。由命题 2.2 可知 $\delta_{d-1}(M) = H^0_{\mathfrak{a}}(M) = H^0_{\mathfrak{a}}(C_{d-1}) \subseteq C_{d-1}$。因此，$C_{d-1} = \delta_{d-1}(M)$，证毕。□

定理 2.7 (Schenzel)。设 M 是一个有限生成的 R-模；那么 M 是序贯 Cohen-Macaulay 当且仅当 M 是 Cohen-Macaulay 滤过。此外，如果 M 是序贯 Cohen-Macaulay，那么它的序贯 Cohen-Macaulay 过滤是唯一的。

证明。我们只需证明“仅当”部分。设 $\mathcal{M}$: $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_r = M$ 是 M 的任意序贯 Cohen-Macaulay 过滤，其中 $d =$dim(M)，$d_0 = -1$ 且 $d_i =$dim(M_i/M_{i-1})。对于 $j \in \{-1, 0, \ldots, d\}$，我们还令 $i(j)$ 为满足 $d_i \leqslant j$ 的最大整数 i，并令$C_j = M_{i(j)}$。如此便构造出一个滤过 $\mathcal{C}$: $0 = C_{-1} \subseteq C_0 \subseteq \ldots \subseteq C_d = M$，它是 M 的 CM 滤过。由命题 2.6 可得 $C_i = \delta_i(M)$，且 $\mathcal{C}$ 是 M 唯一的维数滤过。因此，M 是 Cohen-Macaulay 滤过。

注意到，可以从 $\mathcal{C}$ 重构出 $\mathcal{M}$；因此，模 M_i 也只依赖于 M，且 $\mathcal{M}$ 也是唯一的。□

注意，根据上述定理和命题 2.3，若 M 是具有序贯 Cohen-Macaulay 过滤 $\mathcal{M}$ 的序贯 Cohen-Macaulay 模，则关联素理想集 Ass$(M) = \sqcup_i \text{Ass}(M_i/M_{i-1})$。序贯 Cohen-Macaulay 过滤与维数滤过之间的比较还带来以下有用推论。

推论 2.8. 设 M 是一个 d 维有限生成 R 模。以下条件等价:

(1) M 是序贯 Cohen-Macaulay；(2) 对所有 $i \in \{0, \ldots, d\}$，模 $\delta_i(M)$ 和 $M/\delta_i(M)$ 都是序贯 Cohen-Macaulay；(3) 存在 $i \in \{0, \ldots, d\}$，使得 $\delta_i(M)$ 和 $M/\delta_i(M)$ 是序贯 Cohen-Macaulay。

特别地，M 是序贯 Cohen-Macaulay，当且仅当$M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)$是序贯 Cohen-Macaulay。

证明。注意，给定任意 $i \in \{0, \ldots, d\}$，对每个$j \leqslant i$，都有 $\delta_j(M) = \delta_j(\delta_i(M))$；并且对每个 $j \geqslant i$，都有 $\delta_j(M/\delta_i(M)) = \delta_j(M)/\delta_i(M)$。因此，$0 \subseteq \delta_0(M) \subseteq \ldots \subseteq \delta_i(M)$和 $0 = \delta_i(M)/\delta_i(M) \subseteq \delta_{i+1}(M)/\delta_i(M) \subseteq \ldots \subseteq \delta_d(M)/\delta_i(M)$分别是 $\delta_i(M)$和 $M/\delta_i(M)$的维数滤过。由此可立即得到所有结论。□

现在回忆一下，有限生成的 R-模 M 称为无混合，如果对于所有 $\mathfrak{p} \in$ Ass(M)，dim$(R/\mathfrak{p}) =$ dim(M)。

推论 2.9。设 M 是一个有限生成的无混合 R-模。那么，M 是序贯 Cohen-Macaulay 的，当且仅当 M 是 Cohen-Macaulay 的。

证明。一个方向显然成立。令 $d = \dim(M)$；鉴于注 2.1，M 无混合这一事实保证了 $\delta_i(M) = 0$ 对所有 $i < d$都成立。由定理 2.7，M 是 Cohen-Macaulay 滤过的，因此 $\delta_d(M)/\delta_{d-1}(M) = M$ 是 Cohen-Macaulay。□

2.2. **Peskine 刻画**。我们始终假设 R 有一个典范模ω_R。在我们的设定中，这一假设并不过于苛刻：当 R 是标准分次时，该假设总是成立；例如，当 R 是完备局部时，该假设也成立，参见注 1.4。

命题 2.10. 令 R 为一个 n维 Cohen-Macaulay 环，具有典范模ω_R，且 M为序贯 Cohen-Macaulay 模，其序贯 Cohen-Macaulay 过滤为 $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_r = M$；再令 $d_i = \dim M_i/M_{i-1}$，其中 $i = 1, \ldots, r$。那么

(1) 对所有 $i = 1, \ldots, r$，都有 $\operatorname{Ext}_R^{n-d_i}(M, \omega_R) \simeq \operatorname{Ext}_R^{n-d_i}(M_i/M_{i-1}, \omega_R)$ 是 Cohen-Macaulay 的，且维数为 d_i；(2) $\operatorname{Ext}_R^{n-j}(M, \omega_R) = 0$ 当 $j \notin \{d_1, \ldots, d_r\}$ 时；(3) 对 $i = 1, \ldots, r$，$\operatorname{Ext}_R^{n-d_i}(\operatorname{Ext}_R^{n-d_i}(M, \omega_R)\ \omega_R) \simeq M_i/M_{i-1}$。

证明。在分次情形下，(1) 和 (2) 由命题 1.5、分次局部对偶 [10, 定理 3.6.19] 以及 [10, 定理 3.3.10 (c) (i)] 立即推出。在局部情形下，局部对偶$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$给出完备化 M 上的 M（作为 R-模），见例 1.3 (2)，从而得到 (1) 和 (2)。由于$\omega_{\widehat{R}} \cong \widehat{\omega_R} \cong \omega_R \otimes_R \widehat{R}$且对任意有限生成的$R$-模 N，都有 $\operatorname{Ext}_{\widehat{R}}^i(\widehat{N}, \omega_{\widehat{R}}) \cong \operatorname{Ext}_R^i(N, \omega_R) \otimes_R \widehat{R}$，由 R 的忠实平坦性可得，(1) 和 (2) 在局部情形下也成立。

最后，由 [10, 定理 3.3.10 (c) (iii)] 可知，对于任意一个维数为 N 的 Cohen–Macaulay 模，均有 $N \cong \operatorname{Ext}_R^{n-d}(\operatorname{Ext}_R^{n-d}(N, \omega_R)\ \omega_R)$ d，因此，最后一个结论可由 (1) 立即得出。□

注 2.11. 设 M 如上面的命题所述。

(1) 由前一个命题的第 (2) 和第 (3) 部分可知，我们有一个同构

$$M_1 \cong \operatorname{Ext}_R^{n-t}(\operatorname{Ext}_R^{n-t}(M, \omega_R), \omega_R),$$

其中 $t =$ 深度 M 且 M_1 为 t-维且为 Cohen-Macaulay。我们将在引理 2.12中证明这一事实的推广。

(2) 注意，如果 M 是深度为 $= 0$ 的序贯 Cohen-Macaulay，则特别有$M_1 = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$。事实上，利用 [10, 定理 3.3.10 (c) (iii)] 和短正合列$0 \longrightarrow H^0_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/H^0_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow 0$，我们得到

$$M_1 \cong \operatorname{Ext}_R^n(\operatorname{Ext}_R^n(M, \omega_R), \omega_R) \cong \operatorname{Ext}_R^n(\operatorname{Ext}_R^n(H^0_{\mathfrak{m}}(M), \omega_R), \omega_R) \cong H^0_{\mathfrak{m}}(M).$$

现在我们回顾以下关键引理，见 [31, 引理 1.5]。

引理 2.12。设 R 是一个具有典范模 ω_R 的 Cohen-Macaulay n 维环，且 M 是一个有限生成的 R 模。

另设深度$(M) = t$，并假设 $\operatorname{Ext}_R^{n-t}(M, \omega_R)$ 是维数为t的 Cohen-Macaulay 模。则存在一个自然单态射 α：$\operatorname{Ext}_R^{n-t}(\operatorname{Ext}_R^{n-t}(M, \omega_R)\ \omega_R) \longrightarrow M$，使得

$$\operatorname{Ext}^{n-t}(\alpha) : \operatorname{Ext}_R^{n-t}(M, \omega_R) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^{n-t}(\operatorname{Ext}_R^{n-t}(\operatorname{Ext}_R^{n-t}(M, \omega_R), \omega_R)\omega_R)$$

是一个同构。

证明。我们只给出分次情形下的证明；局部情形的证明类似。不失一般性，我们可以假设 R 是一个多项式环，下面将说明这一点。记$R = S/I$，其中 S 是域 k上的维数为 m 的标准分次多项式环，且 $I \subseteq S$ 是齐次的。令 $\mathfrak{m}$ 和 $\mathfrak{n}$ 分别表示 R 和 S的分次极大理想。由分次局部对偶 [10, 定理 3.6.19] ，我们有 $\mathrm{Ext}_S^{m-i}(M,\omega_S) \cong \mathrm{Hom}_S(H^i_{\mathfrak{n}}(M), E_S(k))$，以及 $\mathrm{Ext}_R^{n-i}(M,\omega_R) \cong \mathrm{Hom}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M), E_R(k))$。由基底无关性 $H^i_{\mathfrak{n}}(M) \cong H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ 对所有 i 均成立。因此，由 Hom $-\otimes$伴随性和 [10,引理 3.1.6]，我们得到

$$\mathrm{Hom}_S(H^i_{\mathfrak{n}}(M), E_S(k)) \cong \mathrm{Hom}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M), \mathrm{Hom}_S(R, E_S(k))) \cong \mathrm{Hom}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M), E_R(k)).$$

特别地，我们已经证明 $\mathrm{Ext}_R^{n-t}(M,\ \omega_R) \cong \mathrm{Ext}_S^{m-t}(M,\ \omega_S)$，并且可以假设 R 是一个多项式环。

现在令 $F_\bullet$: $0 \longrightarrow F_{n-t} \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow 0$ 为 M的极小分次自由分解；应用函子 $\mathrm{Hom}_R(-,\ \omega_R)$，我们得到对偶复形

$$F^*_\bullet: \quad 0 \longrightarrow F^*_{n-t} \longrightarrow \ldots \longrightarrow F^*_1 \longrightarrow F^*_0 \longrightarrow 0,$$

其中 $H_0(F^*) = \mathrm{Ext}_R^{n-t}(M,\ \omega_R)$。注意，$F^*_\bullet$是自由模复形，因为 $\omega_R \cong R(-n)$。如果再令 $G_\bullet$ 表示 $\mathrm{Ext}_R^{n-t}(M,\ \omega_R)$ 的极小分次自由分解，那么存在一个复形映射 $\phi_\bullet$: $F^*_\bullet \longrightarrow G_\bullet$，它提升了 $\mathrm{Ext}_R^{n-t}(M,\ \omega_R)$上的恒等映射。由于后者是维数为 t的 Cohen-Macaulay 模，$G_\bullet$ 的长度与$F^*_\bullet$相同，即 $n-t$。将函子 $\mathrm{Hom}_R(-,\ \omega_R)$应用于 $\phi_\bullet$，我们得到一个复形映射$\phi^*_\bullet$: $G^*_\bullet \longrightarrow F^{**}_\bullet$，进而在零次上同调上诱导出一个映射:

$$\alpha = H_0(\phi^*_\bullet) : \mathrm{Ext}_R^{n-t}(\mathrm{Ext}_R^{n-t}(M,\omega_R),\omega_R) = H_0(G^*_\bullet) \to H_0(F^{**}_\bullet) \cong H_0(F_\bullet) = M.$$

再次应用函子 $\mathrm{Hom}_R(-,\omega_R)$，这次作用于 $\phi^*_\bullet$，我们得到一个复形映射$\phi^{**}_\bullet$: $F^{***}_\bullet \to G^{**}_\bullet$，因而得到一个映射

$$H_0(\phi^{**}_\bullet) : H_0(F^{***}_\bullet) \cong H^0(F^*_\bullet) \cong \mathrm{Ext}_R^{n-t}(M,\omega_R) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n-t}(\mathrm{Ext}_R^{n-t}(\mathrm{Ext}_R^{n-t}(M,\omega_R),\omega_R),\omega_R) = H_0(G^{**}_\bullet),$$

它与映射 $\mathrm{Ext}^{n-t}(\alpha)$ 一致。典范同构 ψ: $G^{**}_\bullet \longrightarrow G_\bullet$，以及 $\mathrm{Ext}_R^{n-t}(M,\omega_R)$ 是维数为 t 的 Cohen-Macaulay 模这一事实，给出了一个同构$H_0(\psi)$: $\mathrm{Ext}_R^{n-t}(\mathrm{Ext}_R^{n-t}(\mathrm{Ext}_R^{n-t}(M,\omega_R)\ \omega_R)\ \omega_R) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n-t}(M,\omega_R)$，并且可以验证

$$H_0(\psi) \circ H_0(\phi^{**}_\bullet) = H_0(\phi_\bullet) = \mathrm{id}_{\mathrm{Ext}_R^{n-t}(M,\omega_R)}.$$

注意，$H_0(\psi)$ 是 [10, 定理 3.3.10 (c) (iii)]，中同构的逆映射，这意味着 $H_0(\phi^{**}_\bullet) =\mathrm{Ext}^{n-t}(\alpha)$ 是同一定理中的自然同构。

为了完成证明 , 尚需证明 α 是一个单态射

。令 $N = \mathrm{Ext}_R^{n-t}(\mathrm{Ext}_R^{n-t}(M,\omega_R)\ \omega_R)$。我们证明，在每个 N 的关联素理想处局部化后，α 是单射，这样便完成了证明，因为若 $\ker(\alpha) \neq 0$，其关联素理想将包含于 N 的关联素理想之中。

设 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(N)$; 由于 N 是维数为 t 的 Cohen-Macaulay，我们有 $\dim(R/\mathfrak{p}) = t$ 且 $\dim(R_\mathfrak{p}) = n-t$。将 R 替换为 $R_\mathfrak{p}$、将 M 替换为 $M_\mathfrak{p}$，并将 ω_R 替换为 $(\omega_R)_\mathfrak{p} \cong \omega_{R_\mathfrak{p}}$ 后，只需证明在 $t=0$ 的情况下 α 是单射，证明即可完成。为此，注意到，

如注 2.11 所述，短正合列 $0 \to H^0_{\mathfrak{m}}(M) \to M \to M/H^0_{\mathfrak{m}}(M) \to 0$ 以及 [10,定理 3.3.10 (c) (iii)] 给出

$$\operatorname{Ext}^n_R(\operatorname{Ext}^n_R(M,\omega_R),\omega_R) \cong \operatorname{Ext}^n_R(\operatorname{Ext}^n_R(H^0_{\mathfrak{m}}(M),\omega_R),\omega_R) \cong H^0_{\mathfrak{m}}(M),$$

并且与此同构复合后，就恰好变成 $H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ 到 M 中的包含关系。 □

下一个定理中前两个条件之间的等价性已在[37] 中宣布，但未给出证明，而是引用了 Peskine 提出的谱序列论证。这里我们给出这一事实的另一种证明；另请参见 [36, 定理 5.5]，其中证明了它与第三个条件的等价性。

定理 2.13 (Peskine)。 设 R 是一个维数为 n 且具有典范模 ω_R的 Cohen-Macaulay 环，M 是一个有限生成的 d-维 R-模。那么，下列条件等价：

(1) M 是序贯 Cohen-Macaulay；(2) 对所有 $i \in \{0,\dots,d\}$，$\operatorname{Ext}^{n-i}_R(M,\ \omega_R)$ 或为 0，或为维数为 i 的 Cohen-Macaulay 模；(3) 对所有 $i \in \{1,\dots,d-1\}$，$\operatorname{Ext}^{n-i}_R(M,\ \omega_R)$ 或为 0，或为维数为 i 的 Cohen-Macaulay 模 .

证明。 蕴含关系 (1) $\Rightarrow$ (2) 可由命题2.10立即得出，显然 (2) 蕴含 (3)。

现在假设 (3) 成立；我们对 $d-t$ 作归纳，其中 $t = \operatorname{depth}(M)$。若 $t = d$，则 M是 Cohen-Macaulay，因此是序贯 Cohen-Macaulay。假设 $t < d$。若 $t = 0$，则 $0 \neq \operatorname{Ext}^n_R(M,\omega_R)$ 有限长度，因此它是 Cohen-Macaulay。无论哪种情况，根据我们的假设，$0 \neq \operatorname{Ext}^{n-t}_R(M,\omega_R)$ 都是 t 维的 Cohen-Macaulay 模。由引理 2.12，存在一个单射同态 $\alpha\colon \operatorname{Ext}^{n-t}_R(\operatorname{Ext}^{n-t}_R(M,\omega_R)\ \omega_R) \longrightarrow M$。由于第一个模由 [10, Theorem 3.3.10 (c)], 可知是 t 维的 Cohen-Macaulay 模，因此它的像也是如此，记作 M_1；它是 M 的一个子模。由此可得 $\operatorname{depth}(M_1) = \dim(M_1) = t = \operatorname{depth}(M) < d = \dim(M)$。

考虑短正合列 $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M/M_1 \longrightarrow 0$ 以及通过应用函子 $\operatorname{Hom}_R(-,\ \omega_R)$ 得到的上同调中的诱导序列。于是，对于所有 $j \neq n-t,\ n-t+1$，都有同构 $\operatorname{Ext}^j_R(M/M_1,\ \omega_R) \cong \operatorname{Ext}^j_R(M,\ \omega_R)$，并且有正合列

$$0 \to \operatorname{Ext}^{n-t}_R(M/M_1,\omega_R) \to \operatorname{Ext}^{n-t}_R(M,\omega_R) \xrightarrow{\beta} \operatorname{Ext}^{n-t}_R(M_1,\omega_R) \to \operatorname{Ext}^{n-t+1}_R(M/M_1,\omega_R) \to 0.$$

由引理 2.12 可知，映射 $\operatorname{Ext}^{n-t}(\alpha)$ 是一个同构，因此 β 也是一个同构。由此可得，对于每个 $j \neq n-t$，$\operatorname{Ext}^j_R(M,\ \omega_R) \cong \operatorname{Ext}^j_R(M/M_1,\ \omega_R$，而 $\operatorname{Ext}^{n-t}_R(M/M_1,\ \omega_R) = 0$。

这尤其说明，$\operatorname{depth}(M/M_1) > t$；由于 $\dim(M/M_1) = d$，我们可以应用归纳法，得出 M/M_1 是序贯 Cohen-Macaulay。令 $0 = M_1/M_1 \subsetneq M_2/M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_r/M_1 = M/M_1$为一个序贯 Cohen-Macaulay 过滤。由于 M_1是维数为 t 的 Cohen-Macaulay 模，且 $\operatorname{depth}(M_2/M_1) = \operatorname{depth}(M/M_1) > t$ 根据例 1.2 (4)，我们推得$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \dots \subsetneq M_r = M$是一个序贯 Cohen-Macaulay 过滤，因此 M是序贯 Cohen-Macaulay。 □

推论 2.14。 设 R 是具有典范模 ω_R的 Cohen-Macaulay 模，且 M、 N 是有限生成的 R-模。那么， M 和 N 是序贯 Cohen-Macaulay，当且仅当 $M\oplus N$是序贯 Cohen-Macaulay。

证明。设 n = 维数 R。我们已在例 1.3 (1) 中证明，若 M 和 N是序贯 Cohen-Macaulay 的，则 $M \oplus N$也是如此。这也可由定理 2.13 立即推出，因为若 $\mathrm{Ext}_R^{n-i}(M,\omega_R)$ 和 $\mathrm{Ext}_R^{n-i}(N,\omega_R)$ 或为零，或为维数 i 的 Cohen-Macaulay 模，那么 $\mathrm{Ext}_R^{n-i}(M,\omega_R) \oplus \mathrm{Ext}_R^{n-i}(N,\omega_R) \cong \mathrm{Ext}_R^{n-i}(M\oplus N,\omega_R)$ 也如此。反过来，只需注意到，若两个模的直和为零，或是给定维数的 Cohen-Macaulay 模，那么其中每个直和项也如此。□

注 2.15. 我们指出，序列 Cohen-Macaulay 性在局部化下表现良好；例如参见 [16, 命题 4.7] 或 [15, 命题 2.6]。对于任意序贯 Cohen-Macaulay R-模 M 及 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$，都有 $M_\mathfrak{p}$ 是一个序贯 Cohen-Macaulay $R_\mathfrak{p}$-模；事实上，可以由其维数滤过恢复它的维数滤过。令 $s = \dim(R/\mathfrak{p})$，并考虑 M的维数滤过的商模 $\delta_i(M)/\delta_{i-1}(M)$。若它们非零，则它们是 i 维 Cohen-Macaulay 模，且其局部化要么为零，要么是维数为 $i-s$ 的 Cohen-Macaulay 模。现在令 $N_i = (\delta_{i+s}(M))_\mathfrak{p}$，对所有满足 $i+s \leqslant d = \dim(M)$ 的 $i \geqslant 0$，即对 $i = 0$、……、$d-s$，并注意到 $0 \subseteq N_0 \subseteq \ldots \subseteq N_{d-s} = M_\mathfrak{p}$是 $M_\mathfrak{p}$的 CM 滤过，其商模为 $N_i/N_{i-1} \simeq (\delta_{i+s}(M)/\delta_{i+s-1}(M))_\mathfrak{p}$。若 R是 Cohen-Macaulay 模，则对于所有 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$， $M_\mathfrak{p}$ 都是序贯 Cohen-Macaulay 模，这一事实也可由定理 2.13 得出。关于局部化和序贯 Cohen-Macaulay 模的其他结果，参见 [39] 。

现在我们回顾一些定义，以便陈述下一个结果；这些定义也将在接下来的章节中频繁使用。给定一个 R-模 N，记 $\mathrm{Ass}^\circ(N) = \mathrm{Ass}(N) \setminus \{\mathfrak{m}\}$。

定义 2.16. 设 $M \neq 0$ 是一个有限生成分次 R-模。
(1) 若齐次元素 $0 \neq y \in \mathfrak{m}$ 满足 $y \notin \bigcup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}^\circ(M)} \mathfrak{p}$，则称其为 M 的滤子正则元。若齐次元素序列 $y_1, \ldots, y_t \in \mathfrak{m}$ 满足：对于所有 $i \in \{0, \ldots, t-1\}$，y_{i+1} 都是 $M/(y_1, \ldots, y_i)M$ 的滤子正则元，则称其为 M 的滤子正则序列。(2) 若齐次元素 $0 \neq y \in \mathfrak{m}$ 满足 $y \notin \bigcup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}^\circ(X(M))} \mathfrak{p}$，则称其为 M 的严格滤子正则元，其中 $X(M) = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Ext}_R^i(M,R)$。若齐次元素序列 $y_1, \ldots, y_t \in \mathfrak{m}$ 满足：对于所有 $i \in \{0, \ldots, t-1\}$， y_{i+1} 都是 $M/(y_1, \ldots, y_i)$ M 的严格滤子正则元，则称其为 M 的严格滤子正则序列。

注 2.17. 正则序列显然是滤子正则序列。此外，根据 [9, 推论 11.3.3] 的分次版本，严格滤子正则序列是滤子正则的。当域 k 是无限域时，根据素理想躲避，任意一般形式序列都是严格滤子正则的。

我们以以下结果结束本节。该结果阐明了序贯 Cohen-Macaulay 性质在商模下的表现，参见例1.6；它在后文中也将派上用场。

命题 2.18。 设 R 是维数为 n 且具有典范模ω_R的 Cohen-Macaulay 环；设 M 是一个 d 维有限生成的 R-模，且 $x \in R$ 是 M 的严格滤正规元素。那么，

(1)如果 M 是序贯 Cohen-Macaulay，则 M/xM 是序贯 Cohen-Macaulay。(2) 逆命题成立，如果 x 对于所有非零 $\operatorname{Ext}_R^{n-i}(M,\omega_R)$ 都是正则，且 $i>0$。

证明。假设 M 是序贯 Cohen-Macaulay。由于 x 是严格滤子正则，根据注 2.17，$L=0:_M x$ 具有有限长度，且 $\operatorname{Ext}_R^{n-i}(M,\omega_R)\cong\operatorname{Ext}_R^{n-i}(M,\omega_R)$ 对所有 $i>0$成立，其中 $M=M/L$。于是，将函子 $\operatorname{Hom}_R(-,\omega_R)$ 应用于短正合列 $0\longrightarrow M\xrightarrow{\cdot x} M\longrightarrow M/xM\longrightarrow 0$ 可得到一个长正合列

$$\begin{aligned}&\dots\xrightarrow{\cdot x}\operatorname{Ext}_R^{n-i}(M,\omega_R)\longrightarrow\operatorname{Ext}_R^{n-(i-1)}(M/xM,\omega_R)\longrightarrow\operatorname{Ext}_R^{n-(i-1)}(M,\omega_R)\to\dots\\&\dots\xrightarrow{\cdot x}\operatorname{Ext}_R^{n-1}(M,\omega_R)\longrightarrow\operatorname{Ext}_R^{n}(M/xM,\omega_R)\longrightarrow\operatorname{Ext}_R^{n}(M,\omega_R)\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

由定理 2.13 可知，每个非零的 $\operatorname{Ext}_R^{n-i}(M,\omega_R)$ 都是维数为i的 Cohen-Macaulay 模；在这种情况下，当 x 时，$\operatorname{Ext}_R^{n-i}(M,\omega_R)$ 是正则的。对于 $i>1$，我们于是有短正合列

$$0\longrightarrow\operatorname{Ext}_R^{n-i}(M,\omega_R)\xrightarrow{\cdot x}\operatorname{Ext}_R^{n-i}(M,\omega_R)\longrightarrow\operatorname{Ext}_R^{n-(i-1)}(M/xM,\omega_R)\longrightarrow 0,$$

并且可得 $\operatorname{Ext}_R^{n-(i-1)}(M/xM,\omega_R)\cong\operatorname{Ext}_R^{n-i}(M,\omega_R)\otimes_R R/(x)$ 是维数为 $i-1$ 对所有 $i>1$。我们利用定理2.13 的推论 (3) $\Rightarrow$ (1) 得出 M/xM 是序贯 Cohen-Macaulay 模。

反过来，对于所有非零的 $\operatorname{Ext}_R^{n-i}(M,\omega_R)$，$x$ 是正则的这一事实，其中 $i>0$，表明上述 Ext 模长正合列可分解为短正合列

$$0\longrightarrow\operatorname{Ext}_R^{n-i}(M,\omega_R)\xrightarrow{\cdot x}\operatorname{Ext}_R^{n-i}(M,\omega_R)\longrightarrow\operatorname{Ext}_R^{n-(i-1)}(M/xM,\omega_R)\longrightarrow 0.$$

对所有 $i>1$。由定理 2.13 可知，$\operatorname{Ext}_R^{n-(i-1)}(M/xM,\omega_R)$ 要么为零，要么是维数为 $i-1$ 的 Cohen-Macaulay，因此对所有 $i>1$，$\operatorname{Ext}_R^{n-i}(M,\omega_R)$ 要么为零，要么是维数为 i 的 Cohen-Macaulay。由于假设 x 在 $\operatorname{Ext}_R^{n-1}(M,\omega_R)$ 上是正则的，且 $\dim(\operatorname{Ext}_R^{n-1}(M,\omega_R))\leqslant 1$，可知 $\operatorname{Ext}_R^{n-1}(M,\omega_R)$ 要么为零，要么是维数为 1 的 Cohen-Macaulay。再次由定理 2.13 的推论 (3) $\Rightarrow$ (1)，可得 M 是序贯 Cohen-Macaulay 模。□

注 2.19. 关于序贯 Cohen-Macaulay 模及其刻画，还有许多其他有趣的结果，本文未能一一论述。例如，在[14, 定理 5.1] 中证明了，一个模是序贯 Cohen-Macaulay 模，当且仅当其维数滤过中的每个模都是伪 Cohen–Macaulay。在 [18, 定理 1.1],中，则通过 M 存在一个具有参数分解性质的良参数系这一条件，刻画了其序列 Cohen-Macaulay 性；另见 [14] 中的定理 3.9 和 4.2，其中给出了其他涉及良参数系和 dd-序列的刻画。

此外，[15] 还探讨了序贯 Cohen-Macaulay 性质在取关联分次环和 Rees 代数时的表现，关于此类结果还可参见 [38]。

3. Partially sequentially Cohen-Macaulay modules

接下来我们将研究部分序贯 Cohen-Macaulay 模的概念，该概念由 [35], 引入，它自然地推广了序贯 Cohen-Macaulay 模的概念。根据Schenzel 定理 2.7，可以用该模的维数滤过来给出定义。在本节中，设 $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ 是无限域 k 上的标准分次多项式环，其齐次极大理想为$\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$。回顾一下，在这种情况下， R 具有一个分次典范模 $\omega_R \cong R(-n)$。我们考虑有限生成的分次 R-模 M；当 $M = 0$时，按通常记号，记深度$(M) = +\infty$和维数$(M) = -1$。记 $d =$维数(M)。

定义 3.1. 设 $i \in \{0, \ldots, d\}$，并且 $\{\delta_j(M)\}_j$ 是 M 的维数滤过；如果对所有 $i \leqslant j \leqslant d$， M 中的 $\delta_j(M)/\delta_{j-1}(M)$ 均为零或 Cohen-Macaulay 模，则称 M 为 -部分序贯 ***Cohen-Macaulay***，简称 i-sCM。

根据定义和推论2.8，模 M 是 0-sCM，当且仅当 M 是序贯 Cohen-Macaulay，当且仅当 M 是 1-序列Cohen–Macaulay。

例 3.2. (1) 设 M 是一个序贯 Cohen-Macaulay 模。构造一个 i-sCM 但非序贯 Cohen-Macaulay 模的最简单方法，或许是取一个维数严格小于i 的非序列科恩-麦考利模，并考虑它们的直和 $M \oplus N$，参见例 1.3 (1)。

(2) 令 $M = R/I$，其中 $I = (x_1) \cap (x_2, x_3) \cap (x_1^2, x_4, x_5) \subset R = k[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$。借助命题 2.2，我们可以构造 M 的维数滤过 $0 = \delta_{-1} = \delta_0 = \delta_1 \subseteq \delta_2 = ((x_1) \cap (x_2, x_3))/I \subseteq \delta_3 = (x_1)/I \subseteq \delta_4 = R/I$。于是，$\delta_4/\delta_3$ 和 δ_3/δ_2 分别是维数为 4 和 3 的 Cohen-Macaulay 模，但 $0 \neq \delta_2/\delta_1$ 不是 Cohen-Macaulay 模。因此， M 是一个 3-序列Cohen–Macaulay 模，但不是 2-序列Cohen–Macaulay 模。

注 3.3. 注意到， M 是 i-sCM，当且仅当 $M/\delta_{i-1}(M)$ 是序列 Cohen-Macaulay 的。这一点可由以下事实立即推出： $M/\delta_{i-1}(M)$ 的维数滤过 $\{\gamma_j\}_j$ 满足，对于 $j \geqslant i$ 有 $\gamma_j = \delta_j(M)/\delta_{i-1}(M)$，而对于其他情况则不满足。注意，由于对所有 $j \leqslant i-1$ 都有 $\gamma_j = 0$，若 M 是 i-sCM，则根据命题 1.5，对所有 $j \leqslant i-1$ 都有 $H^j_{\mathfrak{m}}(M/\delta_{i-1}(M)) = 0$。

给定 $M \cong F/U$ 的分次自由表示，我们用 $\{e_1, \ldots, e_r\}$ 表示 F 的一个分次基。我们考虑 R 与纯逆字典序 $>$，使得 $x_1 > \ldots > x_n$；回顾一下， $>$ 在 R 上不是单项式序，但根据定义，它在次数相同的单项式上与由其细化的逆字典序一致。

We e按以下方式将 $>$ 扩展到 F：给定 F 的单项式 ue_i 和 ve_j，令

$$ue_i > ve_j \text{ if } \big(\deg(ue_i) > \deg(ve_j)\big), \text{ or } \big(\deg(ue_i) = \deg(ve_j) \text{ and } u > v\big)$$
$$\text{or } \big(\deg(ue_i) = \deg(ve_j),\ u = v \text{ and } i < j\big).$$

我们将在本节余下部分沿用这一序，并将 U 相对于 $>$的泛初始模记为 Gin(U)。由于 GL$_n(k)$ 在 R 上作为坐标变换的作用可以显然地扩展到 F，因此 Gin(U) 就是 g 为一般坐标变换时 $_>(gU)$ 中的初始子模。

接下来我们证明一些后文需要的预备事实。给定一个分次子模 $V \subseteq F$，其中 $\dim(F/V) = d$，对于所有 $j \in \{-1, \dots, d\}$，我们将 $V^{\langle j \rangle}$ 记为 R-模，满足 $V^{\langle j \rangle}/V = \delta_j(F/V$。接下来两个引理中的若干结果可见于[22], ，其中这些结果是在理想的情形下证明的。

引理 3.4。沿用上述记号，
(1) $\operatorname{Gin}(U^{\langle j \rangle}) \subseteq \operatorname{Gin}(U)^{\langle j \rangle}$；(2) $U^{\langle j \rangle} = (U^{\langle j \rangle})^{\langle j \rangle}$；(3) 若 V 是 F 的分次子模，使得 $U \subseteq V$，则 $U^{\langle j \rangle} \subseteq V^{\langle j \rangle}$；(4) $\operatorname{Gin}(U^{\langle j \rangle})^{\langle j \rangle} = \operatorname{Gin}(U)^{\langle j \rangle}$。

证明。(1) 注意到 $\operatorname{Gin}(U^{\langle j \rangle})/\operatorname{Gin}(U)$ 与 $U^{\langle j \rangle}/U$ 有相同的希尔伯特级数，因此维数相同，且小于或等于 j。由于 $\operatorname{Gin}(U)^{\langle j \rangle}/\operatorname{Gin}(U) = \delta_j(F/\operatorname{Gin}(U))$，我们得到了所需的包含关系。

(2) 因此 $U \subseteq U^{\langle j \rangle}$，一个包含关系显然成立。现在考虑短正合列

$$0 \longrightarrow U^{\langle j \rangle}/U \longrightarrow (U^{\langle j \rangle})^{\langle j \rangle}/U \longrightarrow (U^{\langle j \rangle})^{\langle j \rangle}/U^{\langle j \rangle} \longrightarrow 0.$$

由于 $U^{\langle j \rangle}/U$ 和 $(U^{\langle j \rangle})^{\langle j \rangle}/U^{\langle j \rangle}$ 的维数小于或等于 j，因此 $\dim((U^{\langle j \rangle})^{\langle j \rangle}/U) \leqslant j$ 也成立，进而 $(U^{\langle j \rangle})^{\langle j \rangle} \subseteq U^{\langle j \rangle}$。
(3) 由于 $U \subseteq U^{\langle j \rangle} \cap V$，我们有 $\dim((U^{\langle j \rangle} + V)/V) \leqslant \dim(U^{\langle j \rangle}/U) \leqslant j$，这意味着 $U^{\langle j \rangle} \subseteq U^{\langle j \rangle} + V \subseteq V^{\langle j \rangle}$。
(4) 由于 $U \subseteq U^{\langle j \rangle}$，由 (1) 可立即推出 $\operatorname{Gin}(U) \subseteq \operatorname{Gin}(U^{\langle j \rangle}) \subseteq \operatorname{Gin}(U)^{\langle j \rangle}$，相应地，$\operatorname{Gin}(U)^{\langle j \rangle} \subseteq \operatorname{Gin}(U^{\langle j \rangle})^{\langle j \rangle}$。另一方面，根据第 (1) 和 (2) 部分，后者包含于 $(\operatorname{Gin}(U)^{\langle j \rangle})^{\langle j \rangle} = \operatorname{Gin}(U)^{\langle j \rangle}$。□

我们将分次 R-模 N 的希尔伯特级数记为 $\operatorname{Hilb}(N) = \operatorname{Hilb}(N, z)$。我们还令 $h^j(N) = \operatorname{Hilb}(H^j_{\mathfrak{m}}(N))$。

引理 3.5. 设 $M \cong F/U$，其维数滤过为 $\{\delta_j\}_j$；则有以下结论：
(1) M 是 i-sCM，当且仅当 $M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ 是 i-sCM。(2) 若 M 是 i-sCM，则对所有 $j \geqslant i$，$H^j_{\mathfrak{m}}(M) \cong H^j_{\mathfrak{m}}(\delta_j) \cong H^j_{\mathfrak{m}}(\delta_j/\delta_{j-1})$。(3) 若 M 是 i-sCM，则对所有 $j \geqslant i$，$(z-1)^j h^j(M) = (1-z)^j \operatorname{Hilb}(\delta_j/\delta_{j-1})$。(4) 令 $\{\gamma_j\}_j$ 为 $F/\operatorname{Gin}(U)$ 的维数滤过；若 M 是 i-sCM，则对所有 $j \geqslant i$，$\operatorname{Hilb}(\delta_j/\delta_{j-1}) = \operatorname{Hilb}(\gamma_j/\gamma_{j-1})$。

证明。由于 $H^0_{\mathfrak{m}}(R) = \delta_0$，$M/H^0_{\mathfrak{m}}(R)$ 的维数滤过为 $\{\delta_j/\delta_0\}_j$，这证明了第一部分。由 $0 \to \delta_{j-1} \to \delta_j \to \delta_j/\delta_{j-1} \to 0$ 诱导的上同调长正合列以及对所有 $j \geqslant i$，δ_j/δ_{j-1} 的 Cohen-Macaulay 性，容易推出 (2)。
令 $j \geqslant i$，并证明 (3)。若 $j = 0$，则该断言显然成立；因此我们可以假设 $j > 0$，并根据第 (2) 部分，δ_j/δ_{j-1} 是 j 维 Cohen-Macaulay。令 x 为一个次数为一的（δ_j/δ_{j-1}）正则元；于是，由乘以 x 所给出的短正合列在上同调中诱导出一个短正合列

$$0 \longrightarrow H^{j-1}_{\mathfrak{m}}\left(\frac{\delta_j/\delta_{j-1}}{x(\delta_j/\delta_{j-1})}\right) \longrightarrow H^j_{\mathfrak{m}}(\delta_j/\delta_{j-1})(-1) \longrightarrow H^j_{\mathfrak{m}}(\delta_j/\delta_{j-1}) \longrightarrow 0$$

与 (2) 一起可推出 $h^{j-1}((\delta_j/\delta_{j-1})/(x(\delta_j/\delta_{j-1})) = (z-1)\,h^j(\delta_j/\delta_{j-1}) = (z-1)\,h^j(M)$。

因此，可以很容易地证明 $h^0((\delta_j/\delta_{j-1})/(\mathbf{x}(\delta_j/\delta_{j-1}))) = (z-1)^j\,h^j(M)$，其中 $\mathbf{x}$ 是一个 (δ_j/δ_{j-1})- 极大正则序列。由于 $\dim((\delta_j/\delta_{j-1})/(\mathbf{x}\delta_j/\delta_{j-1})) = 0$，我们还有 $h^0((\delta_j/\delta_{j-1})/(\mathbf{x}\,\delta_j/\delta_{j-1})) = \mathrm{Hilb}((\delta_j/\delta_{j-1})/(\mathbf{x}\delta_j/\delta_{j-1})) = (1-z)^j\mathrm{Hilb}(\delta_j/\delta_{j-1})$，故 (3) 的证明完成。

最后，为了证明 (4)，我们证明对所有 $j \geqslant i$，$\mathrm{Hilb}(U^{\langle j\rangle}/U^{\langle j-1\rangle}) = \mathrm{Hilb}(\mathrm{Gin}(U)^{\langle j\rangle}/(\mathrm{Gin}(U)^{\langle j-1\rangle}))$ 成立。事实上，我们证明一个更强的结论，即对所有 $j \geqslant i$，$\mathrm{Hilb}(U^{\langle j\rangle}) = \mathrm{Hilb}(\mathrm{Gin}(U)^{\langle j\rangle})$ 成立；由于对所有 j，根据引理 3.4 (1)，$\mathrm{Gin}(U^{\langle j\rangle}) \subseteq \mathrm{Gin}(U)^{\langle j\rangle}$，最后一个等式等价于证明对所有 $j \geqslant i$，$\mathrm{Gin}(U^{\langle j\rangle}) = \mathrm{Gin}(U)^{\langle j\rangle}$，这正是我们要做的。

现在对所有 j 考虑短正合列 $0 \to U^{\langle j\rangle}/U^{\langle j-1\rangle} \to F/U^{\langle j-1\rangle} \to F/U^{\langle j\rangle} \to 0$；我们归纳可知，对于所有 $j \geqslant i$，$\mathrm{depth}(F/U^{\langle j\rangle}) \geqslant j+1$。对于 $j = d$，若 $U^{\langle j\rangle}/U^{\langle j-1\rangle} = 0$，则结论显然；否则，由于 M 是 i-sCM，$U^{\langle j\rangle}/U^{\langle j-1\rangle}$ 对所有 $j \geqslant i$ 都是 j 维 Cohen-Macaulay，并且根据 [10, 命题 1.2.9]，我们得到 $\mathrm{depth}\ F/U^{\langle j-1\rangle} \geqslant \min\{j, j+1\} = j$。

对于所有分次子模 $V \subseteq F$，众所周知，$\mathrm{depth}(F/\mathrm{Gin}(V)) = \mathrm{depth}(F/V)$，且 $F/\mathrm{Gin}(V)$ 是序贯 Cohen-Macaulay。因此，根据我们上文证明的结果，$j+1 \leqslant \mathrm{depth}(F/\mathrm{Gin}(U^{\langle j\rangle}))$；命题 1.5 与定理 2.7 一起推出，后者也等于满足 $\mathrm{Gin}(U^{\langle j\rangle}) \subsetneq \mathrm{Gin}(U^{\langle j\rangle})^{\langle t\rangle}$ 的最小整数 t。因此，我们证明了对于所有 $j \geqslant i$，$\mathrm{Gin}(U^{\langle j\rangle}) = \mathrm{Gin}(U^{\langle j\rangle})^{\langle j\rangle}$。现在由引理 3.4 (4) 可得结论。□

定义 3.6。设 M 是一个有限生成的分次 R-模。若 $M = 0$，则记 $\delta(M) = 0$；否则，记 $\delta(M)$ 为 M 的维数至多为 $\dim(M) - 1$ 的最大分次 R-子模。给定 $j \geqslant 0$，我们还通过令下式成立，归纳地定义模 $\delta^j(M)$:

$$\delta^0(M) = M,\ \ \delta^1(M) = \delta(M),\ \ \text{and}\ \ \delta^j(M) = \delta(\delta^{j-1}(M)).$$

由于 $\delta_i(M)$ 是 M 中维数至多为 i 的最大子模，因此容易看出，对于所有 $i \in \{0, \ldots, d\}$，存在 $j = j(i) \geqslant 0$，使得 $\delta_i(M) = \delta^j(M)$。特别地，$\delta_{d-1}(M) = \delta(M) = \delta^1(M)$。

在下面的注中，我们汇总两个已知事实，这些事实将在后文中发挥作用。

注 3.7。回顾一下，在我们的设定中 $R \cong \omega_R(n)$。众所周知，对于一个 d 维的分次 R-模 M，有 $\mathrm{dim}\mathrm{Ext}_R^{n-i}(M, \omega_R) \leqslant i$ 对所有 i 均成立。

(1) 给定一个分次子模 $N \subseteq M$，满足 $\dim(N) < \dim(M) = d$，则 $N = \delta(M)$ 当且仅当 M/N是维数为 d 的无混合模，即 $\dim(R/\mathfrak{p}) = \dim(M/N) = d$对所有 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M/N$ 都成立。这是命题 2.2 的直接应用。

(2) 一个 d维有限生成分次 R模 M 是无混合的，当且仅当对所有 $j \in \{0, \ldots, d-1\}$，$\dim(\mathrm{Ext}_R^{n-j}(M, R)) < j$。事实上，若 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ 是某个高度为 $n-j$ 的素理想，其中 $j < d$，则有 $\mathrm{Ext}_R^{n-j}(M, R)_{\mathfrak{p}} \cong \mathrm{Ext}_{R_{\mathfrak{p}}}^{n-j}(M_{\mathfrak{p}}, R_{\mathfrak{p}}) \neq 0$，因为后者在相差一个移位的意义下是 $H^0_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$ 的 Matlis 对偶，而它非零，这是因为根据 [10, 命题 1.2.13]，$\mathrm{depth}(M_{\mathfrak{p}}) = 0$。由此可得 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(\mathrm{Ext}_R^{n-j}(M, R))$，因此 $\dim(\mathrm{Ext}_R^{n-j}(M, R)) \geqslant j$，矛盾。反向证明类似，只需注意到

如果 $\operatorname{Ext}_R^{n-j}(M, R)$ 的维数至少为 j，因此必然等于 j，那么它的支撑中必定有一个高度为 $n-j$ 的素理想。

下面的引理可视为 [17, 命题 416]的增强分次版本。

引理 3.8。设 M 是一个有限生成分次 R-模。对于充分一般的齐次元素 $x \in \mathfrak{m}$，对所有 $j \geqslant 0$，存在短正合列 $0 \to \delta^j(\delta(M)/x\delta(M)) \to \delta^{j+1}(M/xM) \to L_j \to 0$，其中 L_j 是一个有限长度的模。

证明。设 $d = \dim(M)$。情形 $d \leqslant 1$ 是平凡的，因此我们假设 $d \geqslant 2$，并对 $j \geqslant 0$ 使用归纳法。

首先假设 $j = 0$；令 $M = M/\delta(M)$，并注意到 M 是一个具有正深度且维数为 d的无混合模。特别地，$\operatorname{Ext}_R^n(M, R) = 0$，并且根据注3.7，对所有$\operatorname{Ext}_R^{n-\ell}(M, R)$，有 $\dim(\operatorname{Ext} < \ell$对于所有 $0 < \ell < d$。

对于 x充分一般的情形，我们有 x是 M-正则的，因此，$\delta(M) \cap xM = x(\delta(M) :_M x) = x\delta(M)$；此外，或者 $\dim(\delta(M)/x\delta(M)) \leqslant 0$，或者 $\dim(\delta(M)/x\delta(M)) = \dim(\delta(M)) - 1 < d - 1 = \dim(M/xM) = \dim(M/xM)$。若令 $T = \delta(M) + xM$，则 $\delta(M)/x\delta(M) \cong T/xM \subseteq \delta(M/xM)$，因此我们有一个正合列 $0 \to \delta(M)/x\delta(M) \xrightarrow{\varphi} \delta(M/xM)$。此外，我们有 $\text{余核}(\varphi) \cong \delta((M/xM)/(T/xM)) \cong \delta(M/T)$。由于 $M/T \cong M/xM$，于是我们有一个短正合列

$$0 \longrightarrow \delta(M)/x\delta(M) \xrightarrow{\varphi} \delta(M/xM) \longrightarrow \delta(\overline{M}/x\overline{M}) \longrightarrow 0.$$

由于 x 是充分一般的，根据注 2.17，我们可以假设 x 对 M 也是严格滤子正则的。于是，对所有 $0 < \ell < d$，要么 $\dim(\operatorname{Ext}_R^{n-\ell}(M, R) \otimes_R R/(x)) = \dim(\operatorname{Ext}_R^{n-\ell}(M, R)) \leqslant 0$，要么 $\dim(\operatorname{Ext}_R^{n-\ell}(M, R) \otimes_R R/(x)) = \dim(\operatorname{Ext}_R^{n-\ell}(M, R)) - 1 < \ell - 1$。由于 x 对 M 是严格滤子正则的，由这些短正合列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^{n-\ell}(\overline{M}, R) \otimes_R R/(x) \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^{n-(\ell-1)}(\overline{M}/x\overline{M}, R) \longrightarrow 0 :_{\operatorname{Ext}_R^{n-(\ell-1)}(\overline{M},R)} x \longrightarrow 0$$

还可推出，对所有 $0 \leqslant \ell - 1 < d - 1$，$\dim(\operatorname{Ext}_R^{n-(\ell-1)}(M/xM, R)) = \dim(\operatorname{Ext}_R^{n-\ell}(M, R) \otimes_R R/(x)) < \ell - 1$。因此，根据注 3.7，$M/xM$ 是维数为 $d-1$ 的无混合模，并且 $L_0 = \delta(M/xM)$ 必然是 $\delta_0(M/xM) = H^0_{\mathfrak{m}}(M/xM)$，其长度有限。

现在假设引理的结论已对 $j-1$ 得证，因此我们有一个短正合列 $0 \to \delta^{j-1}(\delta(M)/x\delta(M)) \to \delta^j(M/xM) \to L_{j-1} \to 0$，其中 L_{j-1}的长度有限。

根据 δ 的定义可知，存在一个正合序列 $0 \longrightarrow \delta^j(\delta(M)/x\delta(M)) \xrightarrow{\varphi_j} U \longrightarrow L_j \longrightarrow 0$，其中令 $U = \delta^{j+1}(M/xM)$，且 $L_j =$ 为余核(φ_j)。若 U 具有有限长度，则结论成立，因此假设 $\dim(U) > 0$。在此情形下，必有 $h = \dim(\delta^j(M/xM)) > 0$；又因为 L_{j-1} 具有有限长度，我们可得 $\dim(\delta(M)/x\delta(M)) = h$。同样，由于 L_{j-1} 具有有限长度，我们可以找到 $p \gg 0$，使得 $\mathfrak{m}^p U \subseteq \delta^{j-1}(\delta(M)/x\delta(M))$。此外，$\dim(\mathfrak{m}^p U) \leqslant \dim(U) < h$，因此 $\mathfrak{m}^p U$包含于 $\delta^j(\delta(M)/x\delta(M))$。这表明 $\mathfrak{m}^p L_j = 0$，从而 L_j具有有限长度。□

在 [35] 中声称，若 $x \in R$ 是 M-正则的，则可以沿用证明 M 是 i-sCM 当且仅当 M/xM 是 $(i-1)$-sCM 的相同思路，证明 [36, 定理 4。7],但正如我们在例1.6中已经指出的，这一说法并不完全正确。事实上，该说法是错误的：若 x 是 M-正则的，且 M/xM 是 $(i-1)$-sCM，那么 M 不一定是 i-sCM，下面的例子将说明这一点。

例 3.9. 设 R 是一个 2 维整环，但不是 Cohen-Macaulay，参见例1.6。对所有 $0 \neq x \in R$，我们有 $R/(x)$ 是 0-序列Cohen-Macaulay，但 R 甚至不是 2-序列Cohen-Macaulay。

在下面的命题中，我们将证明，在附加某些假设的情况下，所声称的结果成立。

命题 3.10. 设 i 为正整数， M 为一个有限生成的分次 R-模，且其深度为 >0（M）。还假设，对所有 $\ell \geqslant i-1$，均有 $\operatorname{depth}(\operatorname{Ext}_R^{n-\ell}(M,R)) > 0$。对于充分一般的 $x \in R$，若 M/xM 是 $(i-1)$-序列 Cohen-Macaulay，则 M 是 i-序列Cohen-Macaulay。

证明。 由于一个模是 0-sCM 当且仅当它是 1-序列Cohen–Macaulay，参见定义 3.1 和推论2.8，当 $i = 1$,2 时，结论由命题 2.18立即得出；因此我们可以令 $3 \leqslant i \leqslant d = \dim(M)$。令 j为满足 $\delta_{i-1}(M) = \delta^j(M)$ 的最小整数，并令 $N = M/\delta^j(M)$。由命题 2.3可知，$\operatorname{depth}(N) > 0$。根据注 3.3，只需证明 N 是序贯 Cohen-Macaulay，这正是我们要做的。

注意，由于 $\dim(\delta^j(M)) \leqslant i-1$，我们有 $\operatorname{Ext}_R^{n-\ell}(M,R) \cong \operatorname{Ext}_R^{n-\ell}(N,R)$ 对所有 $\ell \geqslant i$ 都成立，并且存在一个单射 $0 \to \operatorname{Ext}_R^{n-(i-1)}(N,R) \to \operatorname{Ext}_R^{n-(i-1)}(M,R)$。特别地，根据我们的假设可得，

$$\operatorname{depth}(\operatorname{Ext}_R^{n-\ell}(N,R)) > 0 \quad \text{for all} \quad \ell \geqslant i-1.$$

通过反复应用引理 3.8 ，存在一个短正合列

$$0 \longrightarrow \delta^j(M)/x\delta^j(M) \xrightarrow{\varphi} \delta^j(M/xM) \longrightarrow L \longrightarrow 0,$$

其中 L是一个有限长度的模。现在，要么 $\dim(\delta^j(M/xM)) = \dim(\delta^j(M)/x\delta^j(M)) = \dim(\delta^j(M)) - 1$，要么 $\dim(\delta^j(M/xM)) \leqslant 0$，而在这两种情况下，我们都有 $\dim(\delta^j(M/xM)) \leqslant i-2$。由 j的极小性可知，$\dim(\delta^{j-1}(M)) > i-1$；并像上面那样迭代应用引理 3.8，我们还得到 $\dim(\delta^{j-1}(M/xM)) = \dim(\delta^{j-1}(M)) - 1 > i-2$；因此，我们可以得出

$$\delta^j(M/xM) = \delta_{i-2}(M/xM).$$

由于 $L = \operatorname{coker}(\varphi)$，且 x对于 $N = M/\delta^j(M)$是正则的，我们有 $(M/xM)/(\delta^j(M)/x\delta^j(M)) \cong M/(\delta^j(M) + xM) \cong N/xN$，由此得到一个短正合列 $0 \to L \to N/xN \to (M/xM)/\delta_{i-2}(M/xM) \to 0$.

由于 L 长度有限，相应的 Ext 模长正合列推出

$$\operatorname{Ext}_R^{n-\ell}(N/xN,R) \cong \operatorname{Ext}_R^{n-\ell}((M/xM)/\delta_{i-2}(M/xM),R) \text{ for all } \ell \neq 0.$$

特别地，根据假设，作为 M/xM一个（$i-1$）-sCM 模，注3.3 和 Peskine 定理2.13 表明，$\operatorname{Ext}_R^{n-\ell}(N/xN, R)$ 要么为零，要么是维数为ℓ 的 Cohen-Macaulay 模，对所有 $\ell \neq 0$均成立。注3.3 结合局部对偶还表明:

$$\operatorname{Ext}_R^{n-(\ell-1)}(N/xN,R) = 0 \text{ for all } 1 \leqslant \ell - 1 \leqslant i-2.$$

我们可以假设 x（它是 N-正则的）对所有 $\ell \geqslant i-1$ 也是 $\operatorname{Ext}_R^{n-\ell}(N,\ R)$-正则的，因为我们已在上文证明，所有这些模都有正深度。因此，对于 $\ell \geqslant i$ ，我们有短正合列 $0 \to \operatorname{Ext}_R^{n-\ell}(N,\ R) \xrightarrow{\cdot x} \operatorname{Ext}_R^{n-\ell}(N,\ R) \to \operatorname{Ext}_R^{n-(\ell-1)}(N/xN,\ R) \to 0$，由此可知，对于所有 $\ell \geqslant i$，$\operatorname{Ext}_R^{n-\ell}(N,\ R)$ 要么为零，要么是维数为 ℓ 的 Cohen-Macaulay 模。由上可知，对于所有 $2 \leqslant \ell \leqslant i-1$，映射 $\operatorname{Ext}_R^{n-\ell}(N,\ R) \xrightarrow{x} \operatorname{Ext}_R^{n-\ell}(N,R)$ 是同构，并且由分次 Nakayama 引理可知，对所有 $2 \leqslant \ell \leqslant i-1$，$\operatorname{Ext}_R^{n-\ell}(N,R) = 0$。最后，我们还有一个单射 $0 \to \operatorname{Ext}_R^{n-1}(N,R) \xrightarrow{\cdot x} \operatorname{Ext}_R^{n-1}(N,R)$，由注 3.7 可知，这意味着 $\operatorname{Ext}_R^{n-1}(N,R)$ 是维数为一的 Cohen-Macaulay 模。

应用 Peskine 定理 2.9，我们由此证明了 N 是序贯 Cohen-Macaulay 的，即， M 是 i-sCM。

□

下一个定理给出了部分序贯 Cohen-Macaulay 模的刻画。该结果首次在 [35, 定理 3。5] 中针对理想情形得到了证明。这里，我们将结果推广到有限生成模，并借助命题 3.10修正原证明中的缺漏。令 $R_{[n-1]} = k[x_1,\dots,x_{n-1}] \cong R/x_nR$，并将 $N_{[n-1]}$记为 $R_{[n-1]}$-模 $N/x_nN \simeq N \otimes_R R/x_nR$，其中标量通过限制得到。令 $x \in R$为一般线性形式，不失一般性，我们可以将其写作 $l = a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} - x_n$，并考虑映射 $g_n\colon\ R \to R_{[n-1]}$，定义为 $x_i \mapsto x_i$对 $i = 1,\ \dots\dots,\ n-1$ 以及 $x_n \mapsto a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1}$。于是，满同态 $F/U \to F_{[n-1]}/g_n(U)$的核为 $(U+xF)/U$，并诱导出同构

$$\frac{F}{U+xF} \cong \frac{F_{[n-1]}}{g_n(U)}. \tag{3.1}$$

此外，通过映射 $x_n \mapsto 0$，$\operatorname{Gin}(U)$ 在 $F_{[n-1]}$ 中的像是 $\operatorname{Gin}(U)_{[n-1]}$。采用这一记号， [24, 推论 2.15] 的模版本表述如下：

$$\operatorname{Gin}(g_n(U)) = \operatorname{Gin}(U)_{[n-1]}. \tag{3.2}$$

定理 3.11。 设 M 是一个维数为 d 的有限生成分次 R-模，且 $M \cong F/U$ 是 M 的一个自由分次表示。以下条件等价：
(1) F/U 是 i-sCM；(2) 对所有 $i \leqslant j \leqslant d$， h^j
$(F/U) = h^j(F/\operatorname{Gin}(U))$。

证明。 (1) $\Rightarrow$ (2) 直接由引理 3.5 (3) 和 (4) 得出，因为 $F/\operatorname{Gin}(U)$ 也是i-sCM。

我们通过对 d 进行归纳法来证明逆命题。如果 $d = 0$、 F/U 是 Cohen-Macaulay且序贯Cohen-Macaulay的。因此，不妨设F/U和 $F/\operatorname{Gin}(U)$ 具有正维数，并且根据引理 3.5 (1)，还具有正深度。由于 $F/\operatorname{Gin}(U)$是序贯 Cohen-Macaulay 的，Peskine 的定理 2.13 表明，存在一个线性形式 $l \in R$，它对 $F/\operatorname{Gin}(U)$ 是正则的，并且对所有满足 $j > 0$ 的非零 $\operatorname{Ext}_R^{n-j}(F/\operatorname{Gin}(U)\ \omega_R)$ 也是正则的。从精确序列 $0 \to F/\operatorname{Gin}(U)(-1) \xrightarrow{\cdot l} F/\operatorname{Gin}(U) \to F/(\operatorname{Gin}(U) + lF) \to 0$ 出发，根据上述结果和局部对偶，我们得到短

正合列

$$0 \longrightarrow H^{j-1}_{\mathfrak{m}}(F/(\mathrm{Gin}(U)+lF)) \longrightarrow H^j_{\mathfrak{m}}(F/\mathrm{Gin}(U))(-1) \xrightarrow{\cdot l} H^j_{\mathfrak{m}}(F/\mathrm{Gin}(U)) \longrightarrow 0$$

由此可得，对于所有 j， $h^{j-1}(F/(\mathrm{Gin}(U)+lF)) = (z-1)h^j(F/\mathrm{Gin}(U))$。

现在考虑一个充分一般的线性形式 $x \in R$。对于所有 j，存在正合列

$$0 \longrightarrow B^{(j)} \longrightarrow H^{j-1}_{\mathfrak{m}}(F/(U+xF)) \longrightarrow H^j_{\mathfrak{m}}(F/U)(-1) \longrightarrow H^j_{\mathfrak{m}}(F/U) \longrightarrow C^{(j)} \longrightarrow 0$$

对于某些 R-模 $B^{(j)}$ 以及 $C^{(j)}$，由此可得 $h^{j-1}(F/(U+xF)) = (z-1)h^j(F/U) + \mathrm{Hilb}(B^{(j)}) + \mathrm{Hilb}(C^{(j)})$，对于所有 j。由 (3.1) 和 (3.2)，我们得到

$$\begin{aligned}(z-1)h^j(F/U) &\leqslant (z-1)h^j(F/U) + \mathrm{Hilb}(B^{(j)}) + \mathrm{Hilb}(C^{(j)}) \\ &= h^{j-1}(F/(U+xF)) = h^{j-1}(F_{[n-1]}/g_n(U)) \\ &\leqslant h^{j-1}(F_{[n-1]}/\mathrm{Gin}(g_n(U))) = h^{j-1}(F_{[n-1]}/\mathrm{Gin}(U)_{[n-1]}) \\ &= h^{j-1}(F/(\mathrm{Gin}(U)+lF)) = (z-1)h^j(F/\mathrm{Gin}(U)).\end{aligned}$$

因此，根据我们的假设，对于所有 $j \geqslant i$，上述不等式均为等式，也就是说 $\mathrm{Hilb}(B^{(j)}) = \mathrm{Hilb}(C^{(j)}) = 0$，即对于 $j \geqslant i$， $B^{(j)} = C^{(j)} = 0$。此外，由于$C^{(i-1)} = B^{(i)} = 0$，可得对于所有非零的 $\mathrm{Ext}^{n-j}_R(F/U, \omega_R)$， x都是正则的，其中 $j \geqslant i-1$，因此它们具有正深度。

由上述等式还可得，对所有$j \geqslant i-1$， $h^j(F_{[n-1]}/g_n(U)) = h^j(F_{[n-1]}/\mathrm{Gin}(g_n(U)))$；由归纳法可知， $F/(U+xF) \cong F_{[n-1]}/g_n(U)$ 是（$i-1$）-序贯 Cohen-Macaulay。

结论　现在只需直接应用命题3.10即可得出。 □

作为推论，我们立即得到定理1。

定理 3.12。设 M 是一个有限生成的分次 R-模，且 $M \cong F/U$ 是 M的一个自由分次表示。那么， F/U 是序贯 Cohen-Macaulay，当且仅当对所有 $j \geqslant 0$， $h^i(F/U) = h^i(F/\mathrm{Gin}(U))$。

有人可能会想，等式 $h^i(F/U) = h^i(F/\mathrm{Gin}(U))$是否足以推出$F/U$ 是 i-序贯 Cohen-Macaulay；然而事实并非如此。

例 3.13。（1）考虑一个维数为 i 的分次 Cohen-Macaulay $k[x_1,\dots,x_n]$-模 M_1，以及一个分次非序列科恩-麦考利 $k[x_{i+2},\dots,x_n]$-模 N。令 $M_2 = N \otimes_k k[x_1,\dots,x_{i+1}]$，并取 $M = M_1 \oplus M_2$。则 x_1，……，x_{i+1} 是关于 M_2 的严格滤正则序列，由命题 2.18（1）可知， M_2 不是序贯 Cohen-Macaulay 的。由推论 2.14， M 也不是序贯 Cohen-Macaulay 的。另一方面，由于 $\mathrm{depth}(M_2) > i$，我们有 $H^i_{\mathfrak{m}}(M) \cong H^i_{\mathfrak{m}}(M_1)$。若记 $M_1 \cong F_1/U_1$ 和 $M_2 \cong F_2/U_2$，其中 F_1 和 F_2 是分次自由 R-模，而 U_1、U_2 是分次子模，那么 $M_1 \oplus M_2 \cong F/U$，其中 $F = F_1 \oplus F_2$ 和 $U = U_1 \oplus U_2$，从而有 $\mathrm{Gin}(U) = \mathrm{Gin}(U_1) \oplus \mathrm{Gin}(U_2)$。由于 M_1 是 Cohen-Macaulay 的，因而是序贯 Cohen-Macaulay 的，并且 $\mathrm{depth}(F_2/\mathrm{Gin}(U_2)) = \mathrm{depth}(M_2) > i$，因此由定理 3.12 可得 $h^i(F/U) = h^i(F_1/U_1) = h^i(F_1/\mathrm{Gin}(U_1)) = h^i(F/\mathrm{Gin}(U))$。

(2)以下是在理想情形下此类实例的另一个显式例子。考虑多项式环 $R = k[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7]$ 且单项式理想 $I = (x_1^3, x_1^2x_2x_4, x_1x_5, x_1x_6, x_2x_5, x_2x_6, x_2^2x_7^2, x_3x_5, x_3x_6, x_3x_7, x_4x_5, x_4x_6, x_4x_7, x_7^3)$。那么，一个

可以验证，深度$(R/I) = 0$ 和维数$(R/I) = 3$；此外，对于 $j = 0$、3和 $h^j(R/I) \neq h^j(R/\operatorname{Gin}(I))$， $h^j(R/I) = h^j(R/\operatorname{Gin}(I))$；根据定理 3.11，这意味着 R/I 是 3-序列Cohen–Macaulay，但不是 2-序列Cohen–Macaulay，进而也不是 1-序列Cohen–Macaulay。

另一方面，如果 I^{lex} 是与 I相关联的字典序理想，那么等式$h^i(R/I) = h^i(R/I^{\mathrm{lex}})$确保了 i-部分序贯 Cohen-Macaulay 性的 R/I。不过请注意，这是一个更强的条件，因为 $h^i(R/I) \leqslant h^i(R/\operatorname{Gin}(I)) \leqslant h^i(R/I^{\mathrm{lex}})$，按系数比较，参见 [34, 定理 2.4 和5.4]。实际上，在 [35, 定理 4.4]中证明了以下结果。

定理 3.14。设 i 为正整数， I 为 R 的齐次理想；那么，以下条件等价：

(1) $h^i(R/I) = h^i(R/I^{\mathrm{lex}})$; (2) $h^i(R/\operatorname{Gin}(I))$
$= h^i(R/I^{\mathrm{lex}})$; (3) 对所有 $j \geqslant i$， $h^j(R/I)$
$= h^j(R/I^{\mathrm{lex}})$】【。
如果上述条件中任一条件成立，则 I 是 i-sCM。

我们通过观察到，如果将Gin(I)替换为Gin$_0(I)$（ I 在[13]中引入的零一般初始理想），前一个定理中的条件仍然等价，从而结束本节。我们还指出，如果将局部上同调模的希尔伯特级数替换为分次Betti数，则条件 (2)和 (3) 之间的等价性不成立，参见 [32,定理 3.1]。

4. E-depth

与上一节一样， k 表示一个无限域， $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ 表示一个标准分次多项式环，而 $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$表示其齐次极大理想。与之前一样，当 $M = 0$时，我们令 $\dim(M) = -1$ 且 $\operatorname{depth}(M) = \infty$。我们从本节的主要定义开始。

定义 4.1。给定一个非零有限生成分次 $\mathbb{Z}$-模 M 以及一个非负整数 r，若 M 满足条件 (E_r)，即对于所有 $i \in \mathbb{Z}$，都有深度$(\operatorname{Ext}^i_R(M, R)) \geqslant \min\{r, n - i\}$。我们记作

$$\operatorname{E-depth}(M) = \min\{n, \sup\{r \in \mathbb{N} \mid M \text{ satisfies } (E_r)\}\}.$$

注 4.2。注意，非零模 M 是序贯 Cohen-Macaulay 模，当且仅当它对所有 E_r都满足条件（ $r \geqslant 0$），参见定理 2.13。因此显然，序贯 Cohen-Macaulay R-模的 E-深度等于 n。反过来也成立，因为若 E-深度$(M) = n$，则深度$(\operatorname{Ext}^i_R(M, R)) \geqslant n - i$；由于 $\dim(\operatorname{Ext}^i_R(M, R)) \leqslant n - i$始终成立，参见注 3.7，故可得所述结论。

引理 4.3。设 $M \neq 0$ 是一个有限生成的 $\mathbb{Z}$-分次 R-模，具有正深度和 E-深度，并设 ℓ 是对于 M 严格滤子正则的线性形式；则，分次短正合列 $0 \longrightarrow M(-1) \xrightarrow{\cdot \ell} M \longrightarrow M/\ell M \longrightarrow 0$ 诱导出分次短正合列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}^i_R(M, R) \xrightarrow{\cdot \ell} \operatorname{Ext}^i_R(M, R)(1) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{i+1}_R(M/\ell M, R) \longrightarrow 0, \quad \text{for all } i < n,$$

and

$$0 \longrightarrow H^{i-1}_{\mathfrak{m}}(M/\ell M) \longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(M)(-1) \xrightarrow{\cdot \ell} H^i_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow 0, \quad \text{for all } i > 0.$$

证明。 考虑由 Ext 模诱导的长正合列。

$$\ldots \longrightarrow \operatorname{Ext}^i_R(M,R) \xrightarrow{\cdot \ell} \operatorname{Ext}^i_R(M(-1),R) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{i+1}_R(M/\ell M,R) \longrightarrow \ldots ,$$

并注意到$\operatorname{Ext}^i_R(M(-1)\ R) \cong \operatorname{Ext}^i_R(M,R)(1)$。我们关于 E-深度$(M) > 0$的假设保证，对于所有 $i < n$，深度$(\operatorname{Ext}^i_R(M,R)) > 0$。由于 ℓ 对于 M是严格滤子正则的，乘以 ℓ 在所有 $i < n$上的 $\operatorname{Ext}^i_R(M,R)$上都是单射，长正合列因此分解为短正合列，正如所述；而局部上同调模的分次短正合列则由分次局部对偶得到。□

命题 4.4。令 $M \neq 0$ 为有限生成的 $\mathbb{Z}$-分次 R-模。
(1) E-深度$(M) =$E-深度$(M/H^0_{\mathfrak{m}}(M))$。(2) 假设 E-深度$(M) > 0$，且 ℓ 是关于 M 的齐次严格滤子正则元；那么，或者 E-深度$(M/(H^0_{\mathfrak{m}}(M) + \ell M)) =$E-深度$(M) = n$，或者 E-深度$(M/(H^0_{\mathfrak{m}}(M) + \ell M)) =$E-深度$(M) - 1$。

证明。 我们先证明 (1)；显然，可以假设 $H^0_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$。将函子 $\operatorname{Hom}_R(-,\ R)$ 应用于短正合列 $0 \longrightarrow H^0_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/H^0_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow 0$，得到一个 Ext 模的长正合列，由此可得，对于所有 $i \neq 0$，都有 $\operatorname{Ext}^{n-i}_R(M,\ R) \cong \operatorname{Ext}^{n-i}_R(M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)\ R)$，因为 $H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ 的长度有限；第一个结论现已显然，因为 $\operatorname{depth}(\operatorname{Ext}^n_R(H^0_{\mathfrak{m}}(M)\ R)) = 0$。

证明 (2) 时，设 $N = M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)$；由 (1)，$M$ 和 N 的 E-深度相同，并且对所有 $i \neq n$，$\operatorname{Ext}^i_R(M,R) \cong \operatorname{Ext}^i_R(N,R)$。首先假设 M 是序贯 Cohen-Macaulay，即 E-深度$(M) = n$。那么，由注 4.2 或推论 2.8 可知，N 是序贯 Cohen-Macaulay；又由于根据注 2.17，ℓ 对 M 是滤子正则的，因此 ℓ 是 N-正则的。由命题 2.18 可得，$M/(H^0_{\mathfrak{m}}(M) + \ell M)$ 是序贯 Cohen-Macaulay，因此其 E-深度等于 n。
现在假设 $0 <$E-深度$(N) =$E-深度$(M) = r < n$；由应用引理4.3，我们得到短正合列 $0 \to \operatorname{Ext}^i_R(N,R) \xrightarrow{\cdot \ell} \operatorname{Ext}^i_R(N,R)(1) \to \operatorname{Ext}^{i+1}_R(N/\ell N,R) \to 0$因此，对于所有 $i < n$，$\operatorname{Ext}^{i+1}_R(N/\ell N,R) \cong \operatorname{Ext}^i_R(M,R)(1)/\ell\operatorname{Ext}^i_R(M,R)$。由此可得，对于所有 $i < n$，深度$(\operatorname{Ext}^{i+1}_R(N/\ell N,R)) =$深度$(\operatorname{Ext}^i_R(M,R)) - 1$，这显然意味着 E-深度$(N/\ell N) =$E-深度$(M) - 1$，证毕。□

现在，我们在多项式环上引入一种特殊分次，它细化标准分次，并且还能进一步细化为单项式 $\mathbb{Z}^n$-分次。

定义 4.5. 令 r 为正整数，A 为 $\mathbb{Z}$-分次环，$S = A[y_1,\ldots,y_r]$ 为 A 上的多项式环。对于 $i \in \{0,\ldots,r\}$，令 $\eta_i \in \mathbb{Z}^{r+1}$ 为一个向量，其第 $(i+1)$ 个分量为 1，其余分量均为 0。我们将 S 视为一个 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^r$-分次环，令

$$\deg_S(a) = \deg_A(a) \cdot \eta_0, \text{ for all } a \in A \quad \text{and} \quad \deg_S(y_i) = \eta_i, \quad \text{for } i \in \{1,\ldots,r\}.$$

根据前面的定义，对任意 $0 \leqslant r \leqslant n-1$，令 $\deg_R(x_i) = \eta_0$（对所有 $1 \leqslant i \leqslant n-r$）且令 $\deg_R(x_i) = \eta_i$，便可将 $R = k[x_1,\ldots,x_n]$ 视为一个 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^r$-分次环

对所有 $n-r+1 \leqslant i \leqslant n$。注意，元素 $f \in R$ 关于这种分次是分次的，当且仅当 f 可写成 $f = f \cdot u$，其中 $f \in k[x_1, \dots, x_{n-r}]$ 关于标准分次是齐次的，且 u 是 $k[x_{n-r+1}, \dots, x_n]$ 中的一个单项式。特别地，当 $r = 0$ 时，这就是 R 上的标准分次；而当 $r = n-1$ 时，它与单项式 $\mathbb{Z}^n$-分次一致。

注 4.6。我们可以通过为给定基中的元素赋予次数，以一种自然的方式将这种分次推广到带有基的自由 R-模 F。相应地，任意 R-模 M 是 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^r$-分次的，当且仅当 $M \cong F/U$，其中 F 是一个自由的 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^r$-分次 R-模，而 U 是 F 的一个 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^r$-分次子模。

接下来我们看到，刚引入的分次对于估计模的 E-深度这一目的非常重要；以下结果可视为命题的一个强化1.8。

命题 4.7。设 $R = k[x_1, \dots, x_n]$，且 M 是一个有限生成的 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^r$-分次 R-模，使得 $x_n, \dots, x_{n-r+1}$ 是 M 的滤子正则序列。那么，$x_n, \dots, x_{n-r+1}$ 是 M 的严格滤子正则序列，并且 E-深度$(M) \geqslant r$。

证明。将 M 写为 $M = F/U$，其中 F 是有限生成的 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^r$ 分次自由 R 模，而 U 是 F 的 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^r$ 分次子模。由于 U 是 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^r$ 分次的，x_n 是 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^r$ 齐次且滤子正则的，因此 $U^{\text{饱和}} = U :_F x_n^{\infty}$ 也为 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^r$ 分次的，相应地，$M/H^0_{\mathfrak{m}}(M) \cong F/U^{\text{饱和}}$ 也如此。若 $F/U^{\text{sat}} = 0$，则 M 的维数为零，因此是序贯 Cohen-Macaulay；于是 E-深度$(M) = n \geqslant t$，且$(x_1, \dots\dots, x_n)$的任意非零元素序列都是 M的严格滤子正则序列。特别地，$x_n, \dots\dots, x_{n-r+1}$ 是 M的严格滤子正则序列。

现在假设 $F/U^{\text{饱和}} \neq 0$。根据假设，x_n 对 M是滤子正则的，因此对 $F/U^{\text{饱和}}$ 也是正则的。由于后者是 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^r$-分次的，因此我们有 $F/U^{\text{饱和}} \cong F/U \otimes_k k[x_n]$，其中 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{r-1}$-分次 $R = k[x_1, \dots, x_{n-1}]$-模为 F，且 F 的某个 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{r-1}$-分次子模为 U，使得 F/U 可视为超平面截面 $F/U^{\text{饱和}} \otimes_R R/(x_n)$。因此，对于 $i < n$，我们有

$$\operatorname{Ext}^i_R(M, R) \cong \operatorname{Ext}^i_R(M/H^0_{\mathfrak{m}}(M), R) \cong \operatorname{Ext}^i_R(F/U^{\text{sat}}, R) \cong \operatorname{Ext}^i_{\overline{R}}(\overline{F}/\overline{U}, \overline{R}) \otimes_k k[x_n].$$

这意味着，对于所有 $i < n$，x_n 是 $\operatorname{Ext}^i_R(M, R)$ 上的非零因子，因此 E-深度$(M) > 0$。由于 $\operatorname{Ext}^n_R(F/U, R)$ 具有有限长度，同样可推出 x_n 是 M 的严格滤子正则元。现在我们可以考虑 F/U，而对这一论证进行迭代将得到所需的结论。□

现在我们在 R 上引入一种权序。给定整数 $0 \leqslant r \leqslant n$，考虑以下矩阵 $r \times n$

$$\Omega_{r,n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

并令 ω_i 为其第 i 行；那么，这通过规定：单项式 $x^a = x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}$ 大于单项式 $x^b = x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n}$，当且仅当存在 $1 \leqslant j \leqslant r$，使得对于所有 $i \leqslant j$，都有 $\omega_i \cdot a = \omega_i \cdot b$，且 $\omega_{j+1} \cdot a > \omega_{j+1} \cdot b$，从而在 R 上诱导出一种“部分”反字典序 rev_r。

注记 4.8。注意 观察到 rev_n 与 $R = k[x_1, \ldots, x_n]$上的通常反字典序一致 .

给定一个以 $\{e_1, \ldots, e_s\}$为基的分次自由 R-模 F，我们可以将任意 $f \in F$唯一地写成有限和 $f = \sum u_j e_{i_j}$，其中 u_j是单项式，并且我们假设该和具有极小支撑。对于如上所写的 f，我们将其初始形式 $\mathrm{in}_{\mathrm{rev}_r}(f)$定义为所有满足 u_j 关于上文引入的序 rev_r 取最大值的$u_j e_{i_j}$之和。

定义 4.9。设 F 是一个有限生成的分次自由 R-模，U 是一个分次子模；另设 $M = F/U$。若存在一个非空的扎里斯基开集 $\mathcal{L}$，它由 r元线性形式组成，并且对于任意 $\ell = (\ell_{n-r+1}, \ldots\ldots, \ell_n) \in \mathcal{L}$，$F/\mathrm{in}_{\mathrm{rev}_r}(g_\ell(U))$满足 $\mathcal{P}$，则称该 r的部分一般初始子模 U满足给定性质 $\mathcal{P}$，其中 g_ℓ 是 F 上的自同构，由 R 的坐标变换诱导，该坐标变换将 $\ell_i \mapsto x_i$ 映至.....并固定其他变量。

略微滥用记号，我们将满足 $\mathcal{P}$ 的 r 的 U 中的任意部分初始子模记为 $\mathrm{gin}_r(U)$。

命题 4.10。设 F 是有限生成的分次自由 R-模，且 $U \subseteq F$ 是一个分次子模。对于每个 $0 \leqslant r \leqslant n$，我们有 E-深度$(F/\mathrm{Gin}_r(U)) \geqslant r$。

证明。对于足够一般的坐标变换，我们有 $x_n, \ldots, x_{n-r+1}$ 是 $F/(g_\ell(U))$ 的滤子正则序列。由于 $\mathrm{in}_{\mathrm{rev}_r}(U) :_F x_n = \mathrm{in}_{\mathrm{rev}_r}(U :_F x_n)$，见 [21, 15.7]，我们有 $x_n, \ldots, x_{n-r+1}$ 也是 $F/\mathrm{in}_{\mathrm{rev}_r}(g_\ell(U))$ 的滤子正则序列，因此也是 $F/\mathrm{gin}_r(U)$ 的滤子正则序列。根据构造，模 $F/\mathrm{gin}_r(U)$ 是 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^r$-分次的，现在由命题 4.7 即得所述结论。□

定理 4.11. 设 F 是有限生成的分次自由 R-模，且 $U \subseteq F$ 是一个分次子模。对于每个 $0 \leqslant r \leqslant n$，都有 E-深度$(F/U) \geqslant r$ 当且仅当$h^i(F/U) = h^i(F/\mathrm{gin}_r(U))$ 对所有 $i \in \mathbb{N}$成立。

证明。经过充分一般的坐标变换后，我们可以假设$V = \mathrm{in}_{\mathrm{rev}_r}(U)$与 $\mathrm{gin}_{\mathrm{rev}_r}(U)$具有相同的性质，并且 $x_n, \ldots, x_{n-r+1}$构成 F/U的严格滤子正则序列。再次利用 $\mathrm{in}_{\mathrm{rev}_r}(U :_F x_n) = \mathrm{in}_{\mathrm{rev}_r}(U) :_F x_n$，并且由于严格滤子正则序列是滤子正则序列（见注 2.17），可知$x_n, \ldots, x_{n-r+1}$构成 F/V的滤子正则序列。由于 V是 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^r$-分次的，由命题 4.7 可知，$x_n, \ldots, x_{n-r+1}$是 F/V的严格滤子正则序列。由 [21,15.7]，我们还有

$$V^{\mathrm{sat}} = \mathrm{in}_{\mathrm{rev}_r}(U) :_F x_n^\infty = \mathrm{in}_{\mathrm{rev}_r}(U :_F x_n^\infty) = \mathrm{in}_{\mathrm{rev}_r}(U^{\mathrm{sat}}),$$

and

$$V^{\mathrm{sat}} + x_n F = \mathrm{in}_{\mathrm{rev}_r}(U^{\mathrm{sat}}) + x_n F = \mathrm{in}_{\mathrm{rev}_r}(U^{\mathrm{sat}} + x_n F).$$

将 $F/(U^{\mathrm{sat}} + x_n F)$ 视为自由 $S = k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$-模 F 对分次子模 U 的商模，我们看到 $V^{\mathrm{sat}} + x_n F$ 可以识别为子模 $V \subseteq F$，其中 $V =$ 属于 $\mathrm{rev}_{r-1}(U)$，且 V 与 $\mathrm{gin}_{\mathrm{rev}_{t-1}}(U)$ 具有相同的性质。更多细节请参见 [12, 引理 3.4] 以及 [12, 定理 3.6] 的证明。

首先假设 E-深度$(F/U) \geqslant r$，我们通过对 $r \geqslant 0$ 使用归纳法，证明对于所有 $i \in \mathbb{N}$，$H^i_{\mathfrak{m}}(F/U)$ 和 $H^i_{\mathfrak{m}}(F/V)$ 的希尔伯特级数满足等式。基础情形显然，因为在 $\mathrm{rev}_0(U)$ 中，$= U$。由命题 4.4 可知 E- 深度 $(F/U^{\mathrm{sat}}) \geqslant r > 0$，因此 E- 深度 $(F/(U^{\mathrm{sat}} + x_n F)) \geqslant r - 1$。由归纳假设可得 $H^i_{\mathfrak{m}}(F/(U^{\mathrm{sat}} + x_n F)) = H^i_{\mathfrak{m}}(F/(V^{\mathrm{sat}} + x_n F))$。由于 x_n 对 F/U^{sat} 和 F/V^{sat} 都是严格滤子正则的，且它们的 E-深度均为正，由引理 4.3 可知，对所有 $i > 0$，存在如下分次短正合列：

$$0 \longrightarrow H^{i-1}_{\mathfrak{m}}(F/(U^{\mathrm{sat}} + x_n F)) \longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(F/U^{\mathrm{sat}})(-1) \xrightarrow{\cdot x_n} H^i_{\mathfrak{m}}(F/U^{\mathrm{sat}}) \longrightarrow 0, \tag{4.1}$$

and

$$0 \longrightarrow H^{i-1}_{\mathfrak{m}}(F/(V^{\mathrm{sat}} + x_n F)) \longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(F/V^{\mathrm{sat}})(-1) \xrightarrow{\cdot x_n} H^i_{\mathfrak{m}}(F/V^{\mathrm{sat}}) \longrightarrow 0. \tag{4.2}$$

由于两个序列中的首个模具有相同的希尔伯特级数，直接计算可得 $h^i(F/U^{\text{饱和}}) = h^i(F/V^{\text{饱和}})$。由于对所有 $i > 0$，$H^i_{\mathfrak{m}}(F/U^{\text{饱和}}) \cong H^i_{\mathfrak{m}}(F/U)$ 且 $H^i_{\mathfrak{m}}(F/V^{\text{饱和}}) \cong H^i_{\mathfrak{m}}(F/V)$，因此证明了 $i > 0$ 的希尔伯特级数相等。最后，由于 Hilb(F/U) =Hilb(F/V) 且 Hilb$(F/U^{\text{饱和}})$ =Hilb$(F/V^{\text{饱和}})$，我们有

$$h^0(F/U) = \mathrm{Hilb}(U^{\mathrm{sat}}/U) = \mathrm{Hilb}(V^{\mathrm{sat}}/V) = h^0(F/V).$$

反之，假设 F/U 和 F/V 的局部上同调模具有相同的希尔伯特级数。若 $r = 0$，则无须证明；否则，只需证明 E-深度$(F/U^{\mathrm{sat}}) \geqslant r$。

由于 x_n 是 F/V的滤子正则元，而后者是 F/V，故它是严格滤子正则的；由于后者是 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^r$-分次的，因此它对于 $F/V^{\text{饱和}}$也是滤子正则的。因此，序列 (4.2) 对 $i > 0$是正合的。另一方面，反设对于某个 $i \in \mathbb{Z}$，序列 (4.1) 不正合，并令 i 为满足此条件的最小整数，因此我们仍有正合序列

$$0 \longrightarrow H^{i-1}_{\mathfrak{m}}(F/(U^{\mathrm{sat}} + x_n F)) \longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(F/U^{\mathrm{sat}})(-1) \xrightarrow{\cdot x_n} H^i_{\mathfrak{m}}(F/U^{\mathrm{sat}}).$$

计算该序列中的维数，并将它们与从 (4.2) 得到的维数进行比较，我们得到 $h^{i-1}(F/(U_{\mathrm{sat}} + x_n F))_j > h^{i-1}(F/(V_{\mathrm{sat}} + x_n F))_j$。然而，根据上半连续性，我们知道反向不等式总是成立，这就产生了矛盾。因此，序列 (4.1) 对所有 $i \in \mathbb{N}$ 都是正合的。由归纳法可知，E-深度$(F/(U_{\mathrm{sat}} + x_n F)) \geqslant r - 1$。若 E- 深度 $(F/(U_{\mathrm{sat}} + x_n F)) = n$，由命题 4.4 可知 E- 深度 $(F/U) = n \geqslant r$，即得所需结论。否则，再由命题 4.4 可得 E-深度$(F/U) =$E-深度$(F/(U_{\mathrm{sat}} + x_n F)) + 1 \geqslant r$。□

回顾 Remar k 4.8，定理 4.11可被视为定理 1 .

References

[1]Karim A. Adiprasito、Anders Bj¨orner 和 Afshin Goodarzi。序贯 Cohen-Macaulay 复形的面数与逐分量线性理想的贝蒂数。《欧洲数学会杂志》（*JEMS*），19(12):3851–3865，2017年。3[2]Josep ` Alvarez Montaner。序贯 Cohen-Macaulay 环的 Lyubeznik 表。*Comm. Algebra*，43(9):3695–3704，2015年。3

[3] Annetta Aramova、Emanuela De Negri 和 J¨urgen Herzog。具有线性分解的字典序片段理想。《伊利诺伊数学杂志》，42(3):509–523，1998年。1[4] Annetta Aramova 和 J¨urgen Herzog。 p-borel 主理想。《伊利诺伊数学杂志》，41(1):103–121，1997年。1[5] Annetta Aramova、J¨urgen Herzog 和 Takayuki Hibi。外代数与组合学中的戈茨曼定理。《代数杂志》，191(1):174–211，1997年。1[6] Annetta Aramova、J¨urgen Herzog 和 Takayuki Hibi。弱稳定理想。《大阪数学杂志》，34(4):745–755，1997年。1[7] Annetta Aramova、J¨urgen Herzog 和 Takayuki Hibi。无平方字典序片段理想。《数学杂志》，228(2):353–378，1998年。1[8] Isabel Bermejo 和 Philippe Gimenez。饱和与卡斯特努沃-芒福德正则度。《代数杂志》，303(2):592–617，2006年。5[9] M. P. Brodmann 和 R. Y. Sharp。《局部上同调》，剑桥高级数学研究丛书第136卷。剑桥大学出版社，剑桥，第二版，2013年。一本兼具几何应用的代数导论。13[10] Winfried Bruns andJ¨urgenHerzog。《Cohen-Macaulay 环》，剑桥高级数学研究丛书第39卷。剑桥大学出版社，剑桥，1993年。2, 10, 11, 12, 17[11] Giulio Caviglia。科祖尔代数、卡斯特努沃-芒福德正则度与一般初始理想。ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，2004年。博士论文——堪萨斯大学。5[12] Giulio Caviglia 和 Alessandro De Stefani。E-深度较大的模的局部上同调表的分解。《纯粹与应用代数杂志》，225(6):论文编号106635，共23页，2021年。2, 25[13] Giulio Caviglia 和 Enrico Sbarra。零一般初始理想。Manuscripta Math.，148(3-4):507–520，2015年。22[14] Nguyen Tu Cuong 和 Doan Trung Cuong。关于序贯 Cohen-Macaulay 模。《古代数学杂志》，30:409–428，2007年。3, 14[15] Nguyen Tu Cuong、Shiro Goto 和 Hoang Le Truong。序贯科恩-麦考利环中的等式。《代数杂志》，379:50–79，2013年。13, 14[16]Nguyen Tu Cuong 和 Le Thanh Nhan。伪 Cohen–Macaulay 模与伪广义 Cohen-Macaulay 模。《代数杂志》，267(1):156–177，2003年。4, 13[17] Nguyen Tu Cuong 和 Hung Pham Quy。科恩-麦考利局部环的商环上有限生成模的结构。参见 https://arxiv.org/abs/1612.07638，2017年。18[18] Nguyen Tu Cuong 和 Hoang Le Truong。参数理想幂的参数分解与序贯 Cohen-Macaulay 模。《美国数学会会刊》，137(1):19–26，2009年。14[19] Emanuela De Negri 和 J¨urgen Herzog。完全字典序片段理想。《美国数学会会刊》，126(12):3467–3473，1998年。1[20] Art M. Duval。代数移位与序贯科恩-麦考利单纯复形。《电子组合学杂志》，3(1):研究论文21，约14页，1996年。1, 6[21] David Eisenbud。《交换代数》，数学研究生教材第150卷。施普林格出版社，纽约，1995年。以代数几何为视角。25[22] Afshin Goodarzi。分次代数的维数滤过、序列 Cohen-Macaulay 性与一种新的多项式不变量。《代数杂志》，456:250–265，2016 年。3, 16[23] Shiro Goto、Yosuke Horiuchi 和 Hideto Sakurai。序贯科恩-麦考利性与参数理想幂的参数分解。《J. Commut. Algebra》，2(1):37–54，2010年。4[24] Mark L. Green。一般初始理想。载于《交换代数六讲》（贝拉特拉，1996年），《数学进展》第166卷，第119–186页。Birkh¨auser，巴塞尔，1998年。20[25] Hassan Haghighi、Naoki Terai、Siamak Yassemi 和 Rahim Zaare-Nahandi。序贯 S_r 单纯复形与序贯 S_2 图。《美国数学会会刊》，139(6):1993–2005，2011年。3[26] J¨urgen Herzog 和 Takayuki Hibi。单纯复形面数的上界。《美国数学会会刊》，125(6):1579–1583，1997年。1[27] J¨urgen Herzog 和 Takayuki Hibi。逐分量线性理想。《名古屋数学杂志》，153:141–153，1999年。1, 6

[28] J¨urgen Herzog 和 Takayuki Hibi。《单项式理想》，数学研究生教材第 260 卷。Springer-Verlag London, Ltd.，伦敦，2011年。5, 6[29]J¨urgen Herzog 和 Dorin Popescu。模的有限滤过与可剥壳多重复形。Manuscripta Math., 121(3):385–410，2006年。6, 8[30] J¨urgen Herzog、Victor Reiner 和 Volkmar Welker。分次分量线性理想与 Golod 环。Michigan Mathematical Journal, 46(2):211–223, 1999年。1[31] J¨urgen Herzog 和 Enrico Sbarra。序贯 Cohen-Macaulay 模与局部上同调。载于《代数、算术与几何》第一、二部分（孟买，2000年），Tata 基础研究所数学研究丛书第 16 卷，第 327–340 页。Tata 基础研究所，孟买，2002年。1, 3, 10[32] Satoshi Murai 和 Takayuki Hibi。某些单项式理想的 Gin 与 lex。Math. Scand., 99(1):76–86，2006年。22[33]Ahad Rahimi。双分次模的序贯 Cohen-Macaulay 性。Rocky Mountain J. Math., 47(2):621–635，2017年。3[34] EnricoSbarra。具有给定希尔伯特函数的环的局部上同调上界。Comm. Algebra, 29(12):5383–5409，2001年。22[35] Enrico Sbarra 和 Francesco Strazzanti。局部上同调模的刚性性质。Proc. Amer. Math. Soc., 145(10):4099–4110，2017年。2, 15, 19, 20, 22[36] Peter Schenzel。维数滤过与 Cohen-Macaulay 滤过模。载于《交换代数与代数几何》（费拉拉），纯粹与应用数学讲义第 206 卷，第 245–264 页。Dekker，纽约，1999年。3, 4, 6, 7, 8, 12, 19[37] Richard P. Stanley。《组合学与交换代数》，数学进展第 41 卷。Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，第二版，1996年。2, 3, 12[38] Naoki Taniguchi、Tran Thi Phuong、Nguyen Thi Dung 和 Tran Nguyen An。序贯 Cohen-Macaulay Rees 代数。J. Math. Soc. Japan, 69(1):293–309，2017年。4, 14[39] Naoki Taniguchi、Tran Thi Phuong、Nguyen Thi Dung 和 Tran Nguyen An。《序列 Cohen-Macaulay 模专题》。J. Commut. Algebra, 10(2):295–304，2018年。4, 13[40] Adam Van Tuyl 和 Rafael H. Villarreal。可剥壳图与序列 Cohen-Macaulay 二分图。J. Combin. Theory Ser. A, 115(5):799–814，2008年。3

Giulio Caviglia - Department of Mathematics - Purdue University - 150 N. University Street, West Lafayette - IN 47907-2067 - USA电子邮箱：gcavigli@math.purdue.edu
Alessandro De Stefani - Dipartimento di Matematica - Università di Genova - Via Dodecaneso 35 - 16146 Genova - Italy电子邮箱：destefani@dima.unige.it
Enrico Sbarra - Dipartimento di Matematica - Università degli Studi di Pisa - Largo Bruno Pontecorvo 5 - 56127 Pisa - Italy电子邮箱：enrico.sbarra@unipi.it
Francesco Strazzanti - Dipartimento di Matematica “Giuseppe Peano” - Università degli Studi di Torino - Via Carlo Alberto 10 - 10123 Torino - Italy电子邮箱：
francesco.strazzanti@gmail.com