arXiv:2304.06620v1 [math.CO] 13 Apr 2023

通过一个可精确求解的松弛模型改进皇后支配的下界

Archit Karandikar* AkashnilDutta†
architkarandikar@gmail.com akashnil07@gmail.com

提交：2023年4月12日；接受：待定；发表：待定 © 作者。根据 CC BY-ND 许可（国际 4.0）发布。

摘要

研究了160 多年的皇后支配问题提出了以下问题：在一个 $m \times n$棋盘上，至少可以摆放多少个皇后，使它们能够攻击或占据每个单元格?

我们提出了皇后支配问题的一种新型松弛，并证明它在方形和矩形棋盘上都可以精确求解。因此，在 $\approx 12.5\%$的非平凡情形下，我们改进了矩形棋盘的已知最佳下界。作为另一项推论，我们利用基于凸包的优雅思想，简化并推广了关于 $n \equiv \{0, 1, 2\} \bmod 4$ 的方形 $n \times n$棋盘上皇后支配已知最佳下界的证明。

最后，我们给出一些结果，并提出一些猜想，以期简化关于当 $n \equiv 3 \bmod 4$（以及 $n > 11$）时方形棋盘最佳已知下界的冗长复杂证明。这些表述简洁的猜想也可能具有独立的研究价值。

数学主题分类： 05C69,05B99

1 引言

皇后图 $Q_{m\times n}$ 以一个 $m\times n$ 棋盘上的方格作为其顶点集 $V(Q_{m\times n})$；若两个顶点位于同一行、同一列或同一条对角线上，则它们之间以一条边相连。若顶点集的一个子集 $\mathcal{D}$ 包含每个顶点，或与每个顶点都相邻的某个元素，则称该子集支配 $Q_{m\times n}$ $\mathcal{D}$。求 $Q_{m\times n}$ 的最小支配集（其大小记为 $\gamma(Q_{m\times n})$）的问题，称为皇后支配问题。

我们用坐标（x, y）标识棋盘上的 mn 个方格，其中$x \in \{0, ..., m-1\}$ 表示列号（从左向右递增）， $y \in \{0, ..., n-1\}$表示行号（从下向上递增）。向上延伸时向左倾斜的对角线

*任职于 Waymo LLC。
†任职于 LinkedIn Inc。

称为和对角线，因为其上的 $x+y$ 值固定。向上延伸时向右倾斜的对角线称为差对角线，其上的 $x-y$ 值固定。

皇后支配问题是集合覆盖问题的一个特例，而集合覆盖问题本身是一种离散约束优化问题。它可以表述如下：

定义1.1（皇后支配问题）。

$$\begin{aligned}\gamma(Q_{m\times n}) = \text{minimize } & p \\ \text{such that } & \exists \text{ rows } R_i,\ 0 \leqslant i \leqslant p-1 \\ & \exists \text{ columns } C_i,\ 0 \leqslant i \leqslant p-1 \\ & \exists \text{ sum diagonals } S_i,\ 0 \leqslant i \leqslant p-1 \\ & \exists \text{ difference diagonals } D_i,\ 0 \leqslant i \leqslant p-1 \\ \text{subject to } & V(Q_{m\times n}) = (\bigcup_{i=0}^{p-1} R_i) \cup (\bigcup_{i=0}^{p-1} C_i) \cup (\bigcup_{i=0}^{p-1} S_i) \cup (\bigcup_{i=0}^{p-1} D_i) \\ & \text{and } R_i \cap C_i \cap S_i \cap D_i \neq \phi,\ 0 \leqslant i \leqslant p-1\end{aligned}$$

行 R_i、列 C_i 和对角线 S_i, D_i 是皇后 i^{th} 占据的位置。上述表述中的最后一个约束要求 i^{th} 行、列、和对角线和差对角线都在棋盘上的同一个格子相交，它对应于皇后放置，似乎有些难以处理。基于这一点，我们放宽此约束，并将由此得到的问题称为松弛皇后支配问题。该松弛问题的解记为 $\beta(Q_{m\times n})$，它要求求出最小的数 p，使得 p 行、p 列、p 条和对角线和 p 条差对角线足以覆盖一个 $m\times n$ 棋盘。

定义1.2（松弛皇后支配问题）。

$$\begin{aligned}\beta(Q_{m\times n}) = \text{minimize } & p \\ \text{such that } & \exists \text{ rows } R_i,\ 0 \leqslant i \leqslant p-1 \\ & \exists \text{ columns } C_i,\ 0 \leqslant i \leqslant p-1 \\ & \exists \text{ sum diagonals } S_i,\ 0 \leqslant i \leqslant p-1 \\ & \exists \text{ difference diagonals } D_i,\ 0 \leqslant i \leqslant p-1 \\ \text{subject to } & V(Q_{m\times n}) = (\bigcup_{i=0}^{p-1} R_i) \cup (\bigcup_{i=0}^{p-1} C_i) \cup (\bigcup_{i=0}^{p-1} S_i) \cup (\bigcup_{i=0}^{p-1} D_i) \qquad (1)\end{aligned}$$

注意，由于我们放宽了一项约束，因此我们知道，宽松皇后支配是皇后支配的下界，即 $\beta(Q_{m\times n}) \leqslant \gamma(Q_{m\times n})$。这一放宽是我们工作的核心。值得注意的是，这种放宽既（1）足够简单，可以通过简单的构造和不可行性证明精确求解；又（2）足够复杂，能够在少数情况下改进已知最佳下界，并在大多数情况下与之持平。我们将对方形棋盘和矩形棋盘分别精确求解这一宽松问题，从而简化前者下界的证明，并在此过程中改进后者的下界。因此，在本文中，我们将始终讨论选择被皇后占据的行、列和对角线，而不是放置皇后。

2 相关工作

皇后支配问题在方形棋盘上的情形被列为 1994 年《数论》未解问题集中的问题（问题 C18） [9] 。de Jaenisch 于 1862 年首次研究了这一问题 [10] ，当时他给出了 $Q_{n\times n}$ 的最小支配集，适用于 $n \leqslant 8$。Ball[3] 研究了皇后支配问题的若干新问题。Ahrens [1]和 von Szily[14, 15] 给出了 $Q_{n\times n}$ 的最小支配集，适用于 $9 \leqslant n \leqslant 13$ 和 $n = 17$。近期有关下界的研究证明，其中许多集合确为最小支配集。这些研究还尝试列出每个 n 的所有最小支配集，并按对称性取模列出。Ahrens [2] 在其 1910 年出版的著作中总结了这些结果。

方形棋盘的首个非平凡下界由 Raghavan 和 Venkatesan 于 1987 [13] 得出，他们证明了 $\gamma(Q_{n\times n}) \geqslant (n-1)/2$。Spencer 于 1990 年给出了该下界的另一种证明（如 [6, 17, 5] 中引用并陈述）。Weakley [17] 改进了 $n \equiv 1 \mod 4$ 情形下的下界，证明在此情形下 $\gamma(Q_{n\times n}) \geqslant (n+1)/2$ 。Watkins [16] 在其关于数学¨棋盘问题的综合论著中汇集了这些结果。Osterg˚ard 和 Weakley [12] 通过改编 Knuth [11] 最初为精确覆盖问题开发的算法，证明这些已知下界对于 $n \leqslant 120$ 都非常精确（要么恰好成立，要么仅差 1）。Weakley 和 Finozhenok[18, 8, 17] 改进了 $n \equiv 3 \mod 4$ 情形（当 $n > 11$ 时）的下界，得到 $(n+1)/2$；其证明冗长而复杂，横跨 3 篇论文、超过 35 页。对于偶数阶方形棋盘，尚未直接改进最初的 $(n-1)/2$ 下界，但 Weakley [20] 给出了一些结果，并提出了一些相关猜想，尤其针对 $n \equiv 0 \mod 4$ 情形。

多年来，方形棋盘已知最佳下界的演进情况如表 1 所示。在这项工作中，我们简化了所有这些下界的证明，但不包括针对 $n \equiv 3 \mod 4$（当 $n > 11$ 时）的最后一个下界；该下界已有的证明正如前文所述，既冗长又复杂。特别是，我们简化了 $n \equiv \{0, 1, 2\} \mod 4$ 情形下已知最佳下界的证明。为了简化这个最后的下界，我们提出了一些猜想，这些猜想本身或许也有独立的研究价值。

Case	**Raghavan 等人 [13], Spencer [6]**	**Weakley [17]**	Weakley 等 [18, 8, 17]	我们的结果
n=4k	$\boldsymbol{\gamma(Q_n) \geqslant 2k}$	$\boldsymbol{\gamma(Q_n) \geqslant 2k}$	$\boldsymbol{\gamma(Q_n) \geqslant 2k}$	$\beta(Q_n) = 2k$
n=4k+1	$\boldsymbol{\gamma(Q_n) \geqslant 2k}$	$\boldsymbol{\gamma(Q_n) \geqslant 2k+1}$	$\boldsymbol{\gamma(Q_n) \geqslant 2k+1}$	$\beta(Q_n) = 2k+1$
n=4k+2	$\boldsymbol{\gamma(Q_n) \geqslant 2k+1}$	$\boldsymbol{\gamma(Q_n) \geqslant 2k+1}$	$\boldsymbol{\gamma(Q_n) \geqslant 2k+1}$	$\beta(Q_n) = 2k+1$
n=4k+3	$\boldsymbol{\gamma(Q_n) \geqslant 2k+1}$	$\boldsymbol{\gamma(Q_n) \geqslant 2k+1}$	$\gamma(Q_n) \geqslant 2k+2$ 对于 $n > 11$	$\beta(Q_n) = 2k+1$
Year	1987	1995	2007	2023

表 1：多年来方形棋盘下界的演进。请注意，在此表中， Q_n 用作 $Q_{n\times n}$的简写。以粗体突出显示的单元格，其对应结果的证明将在本文中得到简化。由于 $\beta(Q_n) \leqslant \gamma(Q_n)$，我们的工作不仅简化了这些突出显示单元格中的结果，还对其进行了推广。

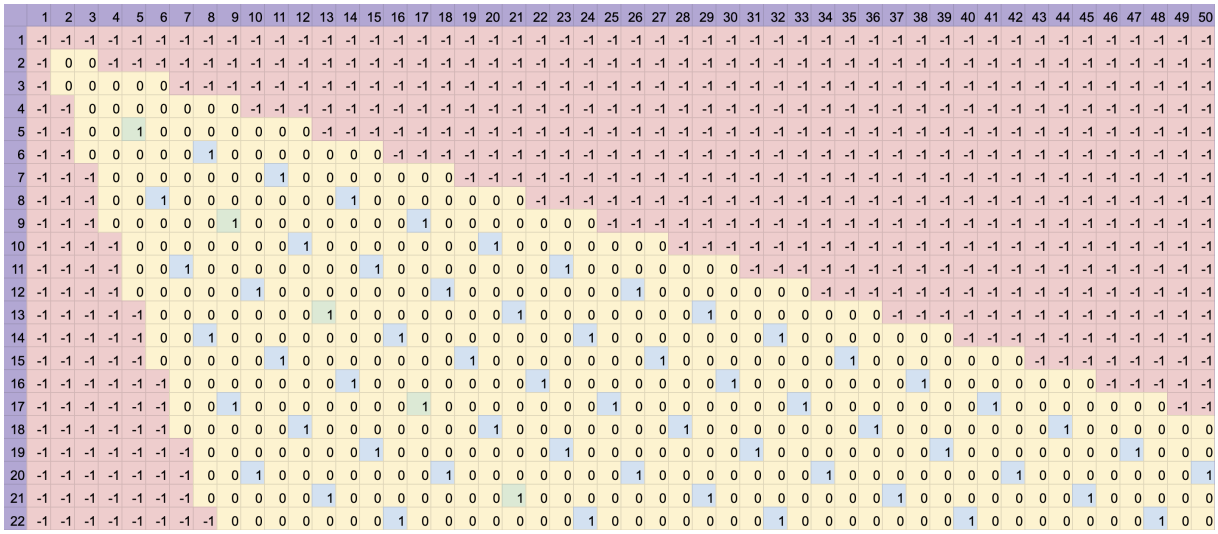


图 1：我们对 $\gamma(Q_{m\times n})$ 下界的改进总结。行索引和列索引分别表示 m 和 n 的值。-1（红色）的值表示 $\gamma(Q_{m\times n})$ 按照 $\min\{m,n\}$ 可平凡地确定的棋盘。值为 1（蓝色）表示我们将 $(m+n-2)/4$ 下界提高了 1 的棋盘。方形棋盘（绿色）上的改进此前已由 Weakley [17] 得出。蓝色单元格占非平凡情况的 $\sim 12.5\%$，因为每行/列的每 8 个非平凡情况中，就有 1 个未被标为黄色。值为 0（黄色）表示我们与现有的 $(m+n-2)/4$ 下界相匹配的棋盘。请注意，对于某些特定的小值 (m,n)，已知存在一个优于普遍适用的 $(m+n-2)/4$ 下界的计算下界。本图未反映这些通过计算得知的下界。

矩形棋盘一般情形的第一个下界由 Raghavan 和 Venkatesan 在 1987 [13] 中给出，他们证明了 $\gamma(Q_{m\times n}) \geqslant \min\{m-1, n-1, (m+n-2)/4\}$。我们将 $\max\{m,n\} \geqslant 3\min\{m,n\}-2$ 的棋盘称为平凡棋盘。Bozoki 等人 [4] 将平凡情形的下界略微提高至 $\min\{m,n\}$，并将非平凡情形的下界提高至 $(m+n-2)/4$。他们提出了能否进一步改进这一界的问题，我们对此给出了肯定的回答。在他们的研究中，还计算了 $\gamma(Q_{m\times n})$ 在 $1 \leqslant m, n \leqslant 18$ 时的精确值，并给出了一些其他结果。

在这项工作中，我们改进了 $\approx 12.5\%$的非平凡棋盘的已知最佳下界，如图1所示。这项工作的核心内容见定义1.2、引理 4.3 和定理 4.4。在定理4.6中，我们证明了

$$\gamma(Q_{m\times n}) \geqslant \beta(Q_{m\times n}) = \begin{cases} \min\{m,n\} & \text{if } \max\{m,n\} \geqslant 3\min\{m,n\}-2 \\ (m+n-2)/4+1 & \text{else if } m,n \text{ are even and } m+n \equiv 6 \mod 8 \\ (m+n-2)/4+1 & \text{else if } m,n \text{ are odd and } m+n \equiv 2 \mod 8 \\ \lceil (m+n-2)/4 \rceil & \text{otherwise} \end{cases}$$

3 方形棋盘上的皇后支配松弛问题

在本章节中，我们将彻底解决方形棋盘上的松弛皇后支配问题（定理 3.6）。我们已经指出，这将为皇后支配问题提供一个下界，因为 $\gamma(Q_{n\times n}) \geqslant \beta(Q_{n\times n})$。因此，我们将同时推广关于 $n \equiv \{0,1,2\}$ mod4的 $\gamma(Q_{n\times n})$ 的已知最佳下界，并简化其在定理3.1和3.2中的证明。通过这一过程，我们还将在引理 3.5 中彻底解决方形棋盘上的放宽的象支配问题（定义 3.3）。

定理 3.1. 对于所有自然数 n,

$$\gamma(Q_{n\times n}) \geqslant \beta(Q_{n\times n}) \geqslant (n-1)/2$$

证明。 若对某个 $p < (n-1)/2$，存在一组 p 行、 p 列、p 条和对角线以及 p 条差对角线，满足方程 1 并覆盖 $V(Q_{n\times n})$，则由此可推出 $p \geqslant 1$，因此我们必有 $n \geqslant 4$ 和 $n-p > 2$。

在所选行和列未覆盖的 U 个（$n-p$） $\times$ $(n-p)$ 单元格中，考虑其中最外围的子集 K ——也就是与 U凸包边界相接的那些单元格。 K 中有 $4(n-p)$ 个 -4 点（因为 $n-p \geqslant 2$），而每条 $2p$ 对角线至多能覆盖其中 2 个点。这意味着

$$\begin{aligned} 2 \times 2p &\geqslant 4(n-p) - 4 \\ p &\geqslant (n-1)/2 \end{aligned} \tag{2}$$

□

定理 3.1 的这一证明（见图 2）既推广了 Raghavan 和 Venkatesan 的证明，也简化了他们的证明；Spencer 于 1990 年[6, 17, 5]得到的证明也同样如此。虽然此前已知的这些证明并不复杂，但这一证明最为简洁，因为上文定义的单元格集合 K （基于 U的凸包）恰好刻画了选择对角线来覆盖所选行和列未覆盖的单元格 U 这一问题的难点。我们所知的唯一一项专门研究该集合 K 的工作是 [20]。下一章节中的定理 4.1 将这一结果进一步推广到矩形棋盘。

定理 3.2。 对于所有形如 $4k+1$ 的自然数 n，其中 k 为整数,

$$\gamma(Q_{n\times n}) \geqslant \beta(Q_{n\times n}) \geqslant (n+1)/2$$

证明。 考虑形如 $4k+1$ 的 n。基于定理 3.1 的结果，我们只需证明 $\beta(Q_{n\times n})$ 不可能等于 $(n-1)/2 = 2k$。假设可能存在 $\beta(Q_{n\times n}) = 2k = p$，使得有 p 行、 p 列、 p 条和对角线和 p 条差对角线满足方程 1，从而覆盖 $V(Q_{n\times n})$。这只有在方程 2 取等号时才可能发生；每条 $2p$ 对角线恰好覆盖 K 中的两个单元格，并且这些 $2p$ 对单元格划分了 K。

再次考虑由选定的行和列未覆盖的 $n-p$ 个 $\times$ （$n-p$）单元格集合 U 中的最外层单元格子集 K。令 l、 r 分别表示最左侧和最右侧的未选行， b、 t 分别表示最底端和最顶端的未选列。

情形 $\boldsymbol{1}$，$\boldsymbol{r-l=t-b}$：单元格（r，b）和（l，t）必须由一条和对角线连接S^*，否则覆盖它们的两条差对角线各自在K中只覆盖一个单元格，这不可能。我们将 K个单元格 $K_Y=\{(x,\ y)\in K\ |x+y>r+b\}$ 上方的涂成黄色，将 $K_P=\{(x,\ y)\in K\ |x+y<r+b\}$ 下方的 S^* 涂成紫色。

注意，$|K_Y|=|K_P|=4k-1$。每条 $p=2k$ 选定的差对角线都覆盖一个黄色单元格和一个紫色单元格。除S^* 之外，每条 $2k-1$ 选定的和对角线要么覆盖两个黄色单元格（若位于 S^*上方），要么覆盖两个紫色单元格（若位于 S^*下方）。由于每个K-单元格都恰好被覆盖一次，S^* 上方和 S^* 下方的和对角线数量必须相等；但这不可能，因为 $2k-1$ 是奇数。

情形 $\boldsymbol{2}$，$\boldsymbol{r-l\neq t-b}$：**</style>**不失一般性，。我们将**(**，y**)** $\in K|y\in\{b,t\}$，$l<x<r\}$ 最上方和最下方的 K行（角除外）涂成黄色，并将 $K_P=\{$**(**x，y**)** $\in K|x\in\{l,r\}$，$b<y<t\}$ 最左侧和最右侧的 K列（角除外）涂成紫色。

注意，$|K_Y|=|K_P|=4k-2$。覆盖四个角的四条对角线还必须各自覆盖一个额外的紫色单元格，因为 $r-l<t-b$。剩下要用其余 $4k-4$条对角线覆盖的黄色单元格比紫色单元格多四个（$4k-2$与$4k-6$）。因此，至少有一条对角线必须覆盖两个黄色单元格，这与 $r-l<t-b$矛盾。

□

与之前一样，这个定理 3.2 的证明（见图 2）既推广了 Weakley 的证明，也使其更加简洁，Weakley 的证明出自 1995 [17]。这个证明更简洁的原因也与之前相同：集合 U 中未被选定的行和列覆盖的最外层单元格的子集 K，恰好抓住了使用选定对角线覆盖这些单元格的难点。

现在，我们将在定理 3.6 中彻底解决宽松皇后支配问题，证明这些下界同时也是上界。为此，我们先定义并彻底解决宽松象支配问题。 $B_{m\times n}$ 是一个图，其顶点集 V（$B_{m\times n}$）由 $m\times n$ 棋盘的方格构成；若两个顶点位于同一条对角线上，则它们之间有一条边。求 $B_{m\times n}$ 的最小支配集这一问题称为象支配问题。这是一个已解决的问题 [7, 16]，我们感兴趣的只是它的松弛形式，其定义如下：

定义 3.3（宽松象支配问题）。

$$\begin{aligned}\alpha(B_{m\times n})=&\ \text{minimize } p\\ &\text{such that } \exists \text{ sum diagonals } S_i, 1\leqslant i\leqslant p\\ &\qquad\exists \text{ difference diagonals } D_i, 1\leqslant i\leqslant p\\ &\text{subject to } V(B_{m\times n})=(\bigcup_{i=1}^{p}S_i)\cup(\bigcup_{i=1}^{p}D_i)\end{aligned}\tag{3}$$

一个有用的简单观察是，宽松皇后支配问题和象支配问题显然具有单调性。单调性不适用于皇后支配问题，因为 $\lambda(Q_{8\times11})=6>5=\lambda(Q_{9\times11})=\lambda(Q_{10\times11})=\lambda(Q_{11\times11})$，如 [19]所示。

观察 ation 3.4. 若 $m\leqslant m'$，$n\leqslant n'$ 则 $\alpha(B_{m\times n})\leqslant\alpha(B_{m'\times n'})$，$\beta(B_{m\times n})\leqslant\beta(B_{m'\times n'})$.

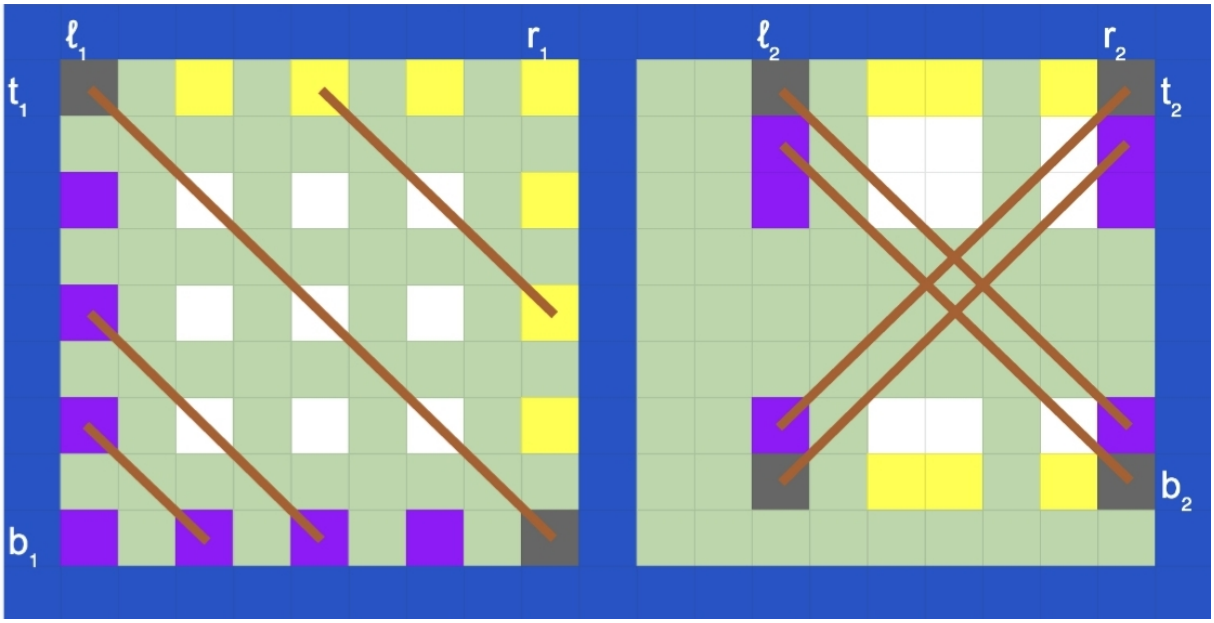


图 2：定理 3.1 和定理 3.2 的证明示意图。两个棋盘中，我们都有$n = 4k + 1 = 9$、$k = 2$ 和 $p = 2k = 4$。蓝色边界不属于任何一个棋盘。选定的行 $(R_i)_{i=1}^{p}$ 和列 $(C_i)_{i=1}^{p}$ 以绿色标示。未标为绿色的单元格构成集合 U。标为灰色、黄色（K_Y）和紫色（K_P）的单元格构成 U的最外层单元格集合K 。左侧和右侧的棋盘分别示意定理 3.2 证明中的情形 1 和 2。

引理 3.5。 对于所有自然数 n

$$\alpha(B_{n\times n}) = \begin{cases} 2k-1 & \text{if } n = 2k \\ 2k+1 & \text{if } n = 2k+1 \end{cases}$$

证明。该陈述等价于 $\alpha(B_{n\times n}) = 2k-1$，若 $n \in \{2k-1, 2k\}$。由 3.4 可知，只需证明 $\alpha(B_{(2k-1)\times(2k-1)}) \geqslant 2k-1$ 和 $\alpha(B_{2k\times 2k}) \leqslant 2k-1$。

如果可能，令 $\alpha(B_{(2k-1)\times(2k-1)}) < 2k-1$。在 $V(B_{(2k-1)\times(2k-1)})$ 的右侧添加 $2k-2$ 行，并在顶部添加 $2k-2$ 列，然后在这个更大的 $V(Q_{(4k-3)\times(4k-3)})$ 棋盘的宽松皇后支配解中选取这些行列。未被所选行列覆盖的单元格构成我们最初的左下角 $V(B_{(2k-1)\times(2k-1)})$ 子棋盘；由于 $\alpha(B_{(2k-1)\times(2k-1)}) < 2k-1$，最多可以用 $2k-2$ 条和差对角线覆盖它。因此，$\beta(Q_{(4k-3)\times(4k-3)}) \leqslant 2k-2$，这与定理 3.2 矛盾。由此，我们证明了 $\alpha(B_{(2k-1)\times(2k-1)}) \geqslant 2k-1$。

现在考虑 $V(B_{2k\times 2k})$ 棋盘。可能的和的集合 $\mathcal{S} = \{x+y | (x,y) \in V(B_{2k\times 2k})\} = \{0, \ldots, 4k-2\}$ 以及可能的差的集合 $\mathcal{D} = \{x+y | (x,y) \in V(B_{2k\times 2k})\} = \{-(2k-1) \ldots, 2k-1\}$。我们选取奇数和对角线 $\{s \in \mathcal{S} | s \text{ 为奇数}\}$ 和偶数差对角线 $\{d \in \mathcal{S} | d \text{ 为偶数}\}$，二者的大小均为 $2k-1$。它们合起来覆盖 $V(B_{2k\times 2k})$，因为对于每个 (x, y)，$x+y$ 的奇偶性与 $x-y$的奇偶性相同。因此 $\alpha(B_{2k\times 2k}) \leqslant 2k-1$。 □

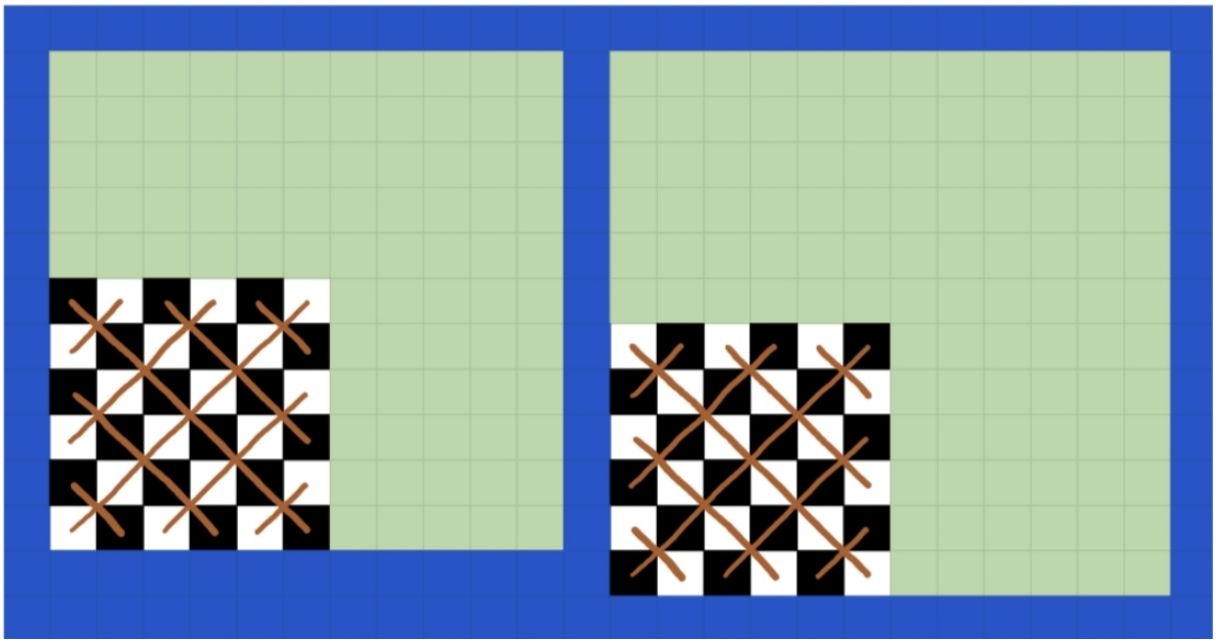


图 3：定理 3.6 证明示意图。蓝色单元格不属于任一棋盘。左侧第一个棋盘中有 $n_1 = 4k_1 + 3 = 11$，$f(n_1) = 5$，第二个棋盘中有 $n_2 = 4k_2 = 12$，$f(n_2) = 6$。选定的行 $(R_i)_{i=1}^{p}$ 和列 $(C_i)_{i=1}^{p}$ 以绿色着色，选定的对角线以棕色显示。右侧图中剩余的一条额外和对角线及差对角线未显示，可任意选取。两个棋盘的黑白部分也展示了引理 3.5 中针对 $n_3 = 2k_3 = 6$ 的选定对角线。

定理 3.6。 对于所有自然数 n

$$\beta(Q_{n\times n}) = \begin{cases} 2k & \text{if } n = 4k \\ 2k+1 & \text{if } n = 4k+1 \\ 2k+1 & \text{if } n = 4k+2 \\ 2k+1 & \text{if } n = 4k+3 \end{cases}$$

证明。考虑 $n \in \{4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3\}$，并定义当 $n = 4k$ 时 $f(n) = 2k$，否则为 $f(n) = 2k+1$。定理 3.1 和定理 3.2 已经证明 $\beta(Q_{n\times n}) \geqslant f(n)$。

我们选择 $f(n)$行中最右侧的行，以及 $f(n)$列中最上方的列，均取自 $V(Q_{n\times n})$。令U 表示未被所选行和列覆盖的单元格。如果 $n = 4k$，则 $U = V(B_{2k\times 2k})$；根据引理 3.5，我们知道它们可以用 $2k - 1 < f(n)$条和对角线与差对角线覆盖，这意味着 $\beta(Q_{n\times n}) \leqslant f(n)$。如果 $n = 4k+3$，则 $U = V(B_{(2k+2)\times(2k+2)})$；根据引理 3.5，我们知道它们可以用 $2k+1 = f(n)$条和对角线与差对角线覆盖。观察 3.4 意味着 $\beta(Q_{n\times n}) \leqslant f(n) = 2k+1$对于 $n \in \{4k+1, 4k+2, 4k+3\}$。 □

这个定理 3.6 的证明（见图 3）完成了我们对方形棋盘上的松弛皇后支配问题的求解。

4 矩形棋盘上的宽松皇后支配 s

本章节将彻底解决矩形棋盘上的松弛皇后支配问题（定理4.6），从而如图 1 所示，将 $\approx 12.5\%$ 的非平凡矩形棋盘上的皇后支配问题的下界提高。此外，我们将推广并简化目前已知的矩形棋盘皇后支配下界证明（定理 4.1）。定理 4.4 将定理 3.2 以及 Weakley 对 $\gamma(Q_{(4k+1)\times(4k+1)})$ 下界的改进 [17] 推广到矩形棋盘上。该定理使用了引理 4.3，其中包含了本研究的核心思想。我们还将在引理 4.5 中彻底解决矩形棋盘上的放宽的象支配问题。本章节将前一章节推广到矩形棋盘上。

定理 4.1. 对于所有自然数 m, n,

$$\gamma(Q_{m\times n}) \geqslant \beta(Q_{m\times n}) \geqslant \begin{cases} \min\{m,n\} & if\ \max\{m,n\} \geqslant 3\min\{m,n\}-2 \\ (m+n-2)/4 & otherwise \end{cases}$$

证明。不失一般性，令 $m \geqslant n$。令 $\beta(Q_{m\times n}) = p$，使得存在一组 p 行、 p 列、p 和对角线和 p 差对角线的选取，满足方程 1，从而覆盖 $V(Q_{m\times n})$。

在平凡情形下，若 $m \geqslant 3n-2$，则尽可能令 $p < n$。考虑一行未被选中的 m 个单元格。其余 $3p \leqslant 3(n-1)$条选定直线（列和对角线）各至多覆盖其中一个单元格。因此 $m \leqslant 3(n-1) < 3n-2 \leqslant m$，矛盾。

对于非平凡情形，注意到 $m < 3n-2 \Leftrightarrow (m+n-2)/4 < n-1$。若可能，令$p < (m+n-2)/4 < n-1$。在未被选定的行和列覆盖的 U 个$(m-p)$单元格 $\times$ $(n-p)$组成的集合中，再考虑其中 K 个最外侧单元格——即与 U的凸包边界相接的单元格。 K 中有 $2(m-p) + 2(n-p) - 4$个点（因为 $m-p \geqslant n-p > 1$），而每条 $2p$ 对角线至多覆盖其中 2 个点。这意味着

$$\begin{aligned} 2 \times 2p &\geqslant 2(m-p) + 2(n-p) - 4 \\ p &\geqslant (m+n-2)/4 \end{aligned}$$

□

这一对定理 4.1 的证明（如图 4 所示）既推广又简化了 Raghavan 和 Venkatesan [13] 以及 Bozoki 等人 [4]的证明。它还将定理 3.1 推广到了矩形棋盘。随后给出的定理 4.4 推广了定理 3.2，并改进了矩形棋盘上皇后支配问题的已知最佳下界。为此，我们现在正式定义一直在使用的“未覆盖单元格集合”（U）结构。在定义 4.2 中，最好将 $\{C'_i\}_{i=0}^{m'-1}$ 和 $\{R'_i\}_{i=0}^{n'-1}$ 理解为 $m' = m-p$ 未选列和 $n' = n-p$ 未选行。

定义 4.2（间隔网格）。给定一组 m' 列 $\{C'_i\}_{i=0}^{m'-1}$ 和一组 n' 行 $\{R'_i\}_{i=0}^{n'-1}$，我们将由这些行和列构成的间隔网格定义为

$$G(\{C'_i\}_{i=0}^{m'-1}, \{R'_i\}_{i=0}^{n'-1}) = (\bigcup_{i=0}^{m'-1} C'_i) \cap (\bigcup_{i=0}^{n'-1} R'_i)$$

.

引理 4.3。给定自然数 m', n'、一组 m' 列 $\{C'_i\}_{i=0}^{m'-1}$ 和一组 n' 行 $\{R'_i\}_{i=0}^{n'-1}$，设 p 为满足以下条件的最小数：p 条和对角线 $\{S'_i\}_{i=0}^{p-1}$ 和 p 条差对角线 $\{D'_i\}_{i=0}^{p-1}$ 足以覆盖间隔网格 G（$\{C'_i\}_{i=0}^{m'-1}$，$\{R'_i\}_{i=0}^{n'-1}$）。

$$p \geqslant \begin{cases} (m'+n'-2)/2+1 & if\ m', n'\ are\ odd \\ (m'+n'-2)/2 & otherwise \end{cases}$$

证明。若 $\min\{m', n'\} = 1$，结论显然成立。否则，我们再次考虑间隔网格的凸包边界上的单元格集合 K。再次注意到，$|K| = (2m' + 2n' - 4)$，且每条选定的 $2p$ 对角线最多可覆盖 C 中的 2 个单元格。

$$\begin{aligned} 2 \times 2p &\geqslant 2m' + 2n' - 4 \\ p &\geqslant (m' + n' - 2)/2 \end{aligned} \tag{4}$$

由于当 m', n' 为奇数时 $(m' + n' - 2)/2$ 是整数，因此只需证明在这种情况下等号不成立。反设 $p = (m' + n' - 2)/2$，则每条 $2p$ 条选定的对角线在 K 中恰好覆盖 2 个单元格。假设列和行分别按从左到右、从下到上的顺序编号。令 $l = C'_0$, $r = C'_{m'-1}$ 表示最左侧和最右侧的列，$b = R'_0$, $t = R'_{n-1}$ 表示最底部和最顶部的行。

构造矩形 $\mathcal{T}$，其四个顶点分别位于单元格的中心：(b, l)、(b, r)、(t, l) 和 (t, r)。对于每条选定的和对角线 S'_i，我们构造一条对应的紫色线段，连接其上的单元格中心，并限制在线段 $\mathcal{T}$ 内（两个端点均位于 $\mathcal{T}$ 上）。类似地，对于每条选定的差对角线 D'_i，我们构造一条按类似方式定义的黄色线段。图 4 展示了这些构造。

考虑一条与 $\mathcal{T}$ 相交且不经过任何单元格中心的垂直横截面 v。令 $q(v)$ 表示它相交的紫色线段数量与黄色线段数量之差。注意，当我们将 v 从左向右移动时，$q(v)$ 保持不变。只有当 v 越过任一列的中心时，它才会开始或停止与某条线段相交。在这种变化中，它开始或停止相交的线段最多有两条，如图 4 底部所示的四种情况。所有情况下，$q(v)$ 都不会改变。同样，注意当我们将一条与 $\mathcal{T}$ 相交的水平截面从下向上移动时，$q(h)$ 保持不变。

我们关注紫色线段总长度 l_P 与黄色线段总长度 l_Y 之间的差值。由于 $q(v)$（分别为 $q(h)$）是不变量，每个宽度为 (δx) 的垂直（分别为水平）截面都会对该量贡献 $\sqrt{2}q(v)(\delta x)$（分别为 $\sqrt{2}q(h)(\delta x)$），因此

$$l_P - l_Y = \sqrt{2}q(v)(r-l) = \sqrt{2}q(h)(t-b) \tag{5}$$

由于 m', n'（它们也等于与 $\mathcal{T}$ 的水平边和垂直边相交的线段数）都是奇数，因此 $q(v)$ 和 $q(h)$ 均非零。因此，$q(v)$ 与 $q(h)$ 要么都为正，要么都为负。但是，$2q(v) + 2q(h)$ 应为零，因为每条p 和对角线（紫色线段）和 p 差对角线（黄色线段）都恰好相交 $\mathcal{T}$ 两次，且两个角分别由紫色线段和黄色线段覆盖。这就产生了矛盾，说明如果 m', n' 为奇数，则 $p \geqslant (m' + n' - 2)/2 + 1$。 □

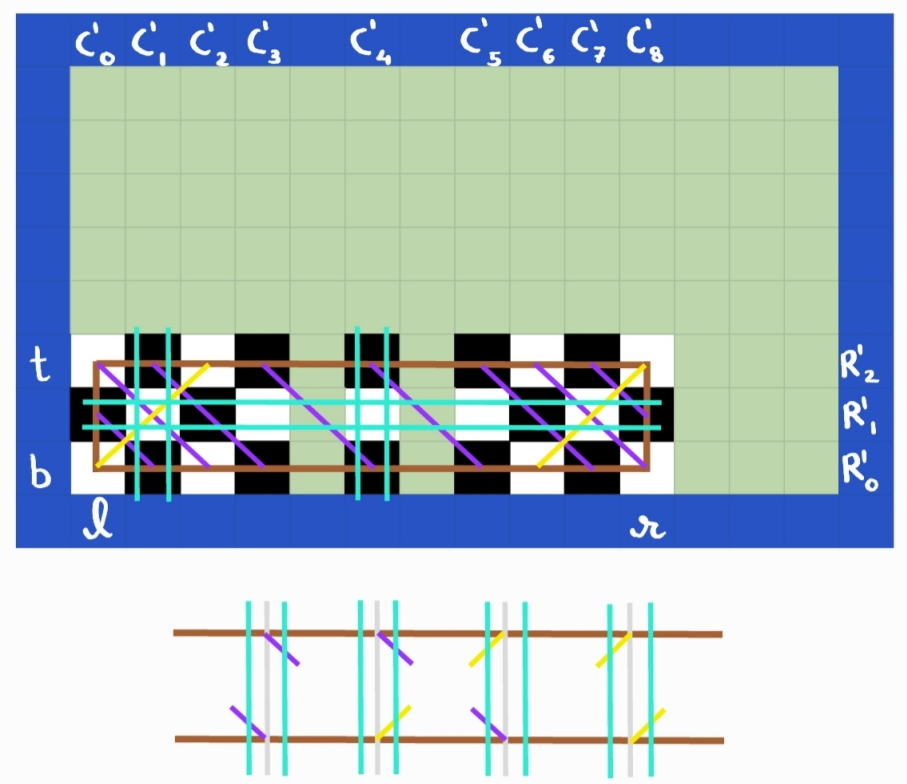


图 4：引理 4.3（$m'=9$，$n'=3$）和定理 4.4（m =14，$n=8$）证明示意图。黑白单元格构成间隔网格 G。绿色单元格是由所选行和列覆盖的单元格。矩形 $\mathcal{T}$ 以棕色显示。紫色和黄色线段分别对应所选的和对角线与差对角线。垂直（v）和水平（h）横截面以青色显示。我们看到，$q(v)=1$和 $q(h)=5$是不变量。根据方程 5，$q(v)(r-l)=q(h)(t-b)=10$，且紫色与黄色线段的总长度之差为 $l_P-l_Y=10\sqrt{2}$。底部展示了垂直横截面转换的 4 种情况。

定理 4.4。 对于所有自然数 m, n,

$$\gamma(Q_{m\times n}) \geqslant \beta(Q_{m\times n}) \geqslant \begin{cases} \min\{m,n\} & \text{if } \max\{m,n\} \geqslant 3\min\{m,n\}-2 \\ (m+n-2)/4+1 & \text{else if } m,n \text{ are even and } m+n\equiv 6 \mod 8 \\ (m+n-2)/4+1 & \text{else if } m,n \text{ are odd and } m+n\equiv 2 \mod 8 \\ (m+n-2)/4 & \text{otherwise} \end{cases}$$

证明。 我们需要在以下情况下，将定理 4.1 给出的下界提高 1：(a) 当 m，n 为偶数且 $m+n\equiv 6$ 模 8 时；(b) 当 m，n 为奇数且 $m+n\equiv 2$ 模 8 时。考虑这样一种情形，并在可能的情况下令 $\beta(Q_{m\times n})=p=(m+n-2)/4$，使得存在一组 p 行、p 列、p 条和对角线和 p 条差对角线，满足方程 1，从而覆盖 $V(Q_{m\times n})$。在情形 (a) 中，p 为奇数；在情形 (b) 中，p 为偶数。在这两种情形下，未覆盖列的数量 $m'=m-p$ 和未覆盖行的数量 $n'=n-p$ 均为奇数。

考虑由未覆盖单元格构成的 $m' \times n'$ 间隔网格 U。所选的 p 条和对角线和 p 条差对角线覆盖了 U。由于 m', n' 为奇数，引理 4.3 推出

$$\begin{aligned} p &\geqslant (m'+n'-2)/2+1 \\ &= (m-p+n-p-2)/2+1 \\ &= (4p-2p)/2+1 \\ &= p+1 \end{aligned}$$

这个矛盾完成了证明。 □

引理 4.5。 对于所有自然数 m, n

$$\alpha(B_{m\times n}) = \begin{cases} (m+n-2)/2+1 & \textit{if } m,n \textit{ are odd} \\ \lceil (m+n-2)/2 \rceil & \textit{otherwise} \end{cases}$$

证明。 $V(B_{m\times n})$ 棋盘是行和列连续的间隔网格的一个特例。引理 4.3 意味着 $\alpha(B_{m\times n}) \geqslant f(m, n)$，其中 $f(m, n) = (m+n-2)/2+1$ 若 m, n 为奇数，否则为 $\lceil (m+n-2)/2 \rceil$。

现在我们将证明 $\alpha(B_{m\times n}) \leqslant f(m,n)$。观察 3.4 表明，只需证明 m, n 均为偶数的情况，因为通过增加 m 或 n 或同时增加二者，而不增加 $f(m,n)$，所有其他情况都可以化归到这种情况。可能的和的集合 $\mathcal{S} = \{x+y | (x,y) \text{ 为 } \in V(B_{m\times n})\} = \{0, \ldots, m+n-2\}$，可能的差的集合 $\mathcal{D} = \{x-y | (x,y) \text{ 为 } \in V(B_{m\times n})\} = \{-(n-1) \ldots, m-1\}$。我们选择奇数和对角线的集合 $\{s \in \mathcal{S} | s \text{ 为奇数}\}$ 以及偶数差对角线的集合 $\{d \in \mathcal{D} | d \text{ 为偶数}\}$。由于 m, n 均为偶数，这两者的大小均为 $(m+n-2)/2$。它们合起来覆盖 $V(B_{m\times n})$，因为对于每个 (x,y)，$x+y$ 的奇偶性与 $x-y$ 相同。因此 $\alpha(B_{m\times n}) \leqslant (m+n-2)/2 = f(m,n)$。

□

定理4.6. 对于所有自然数 m, n

$$\beta(Q_{m\times n}) = \begin{cases} \min\{m,n\} & \textit{if } \max\{m,n\} \geqslant 3\min\{m,n\}-2 \\ (m+n-2)/4+1 & \textit{else if } m,n \textit{ are even and } m+n \equiv 6 \mod 8 \\ (m+n-2)/4+1 & \textit{else if } m,n \textit{ are odd and } m+n \equiv 2 \mod 8 \\ \lceil (m+n-2)/4 \rceil & \textit{otherwise} \end{cases}$$

证明。定理 4.4 表明 $\beta(Q_{m\times n}) \geqslant f(m,n)$，其中 $f(m,n)$ 是命题中所需的右端项。现在我们将证明，在所有情况下，$\beta(Q_{m\times n}) \leqslant f(m,n)$。

设 $m \geqslant n$ WLG。在 $m \geqslant 3n-2$ 的平凡情形下，显然仅凭 n 行就足以覆盖 $m \times n$ 棋盘。下文我们考虑非平凡情形。

我们将 $m+n \equiv 2$ 模 4 的情形称为临界情形。其中，m, n 为偶数且 $m+n \equiv 6$ 模 8，或者 m, n 为奇数且 $m+n \equiv 2$ 模 8 时，属于困难临界情形。属于临界情形但不属于困难临界情形的棋盘构成简单临界情形。所有非临界棋盘都可以通过某种方式化归为简单临界棋盘

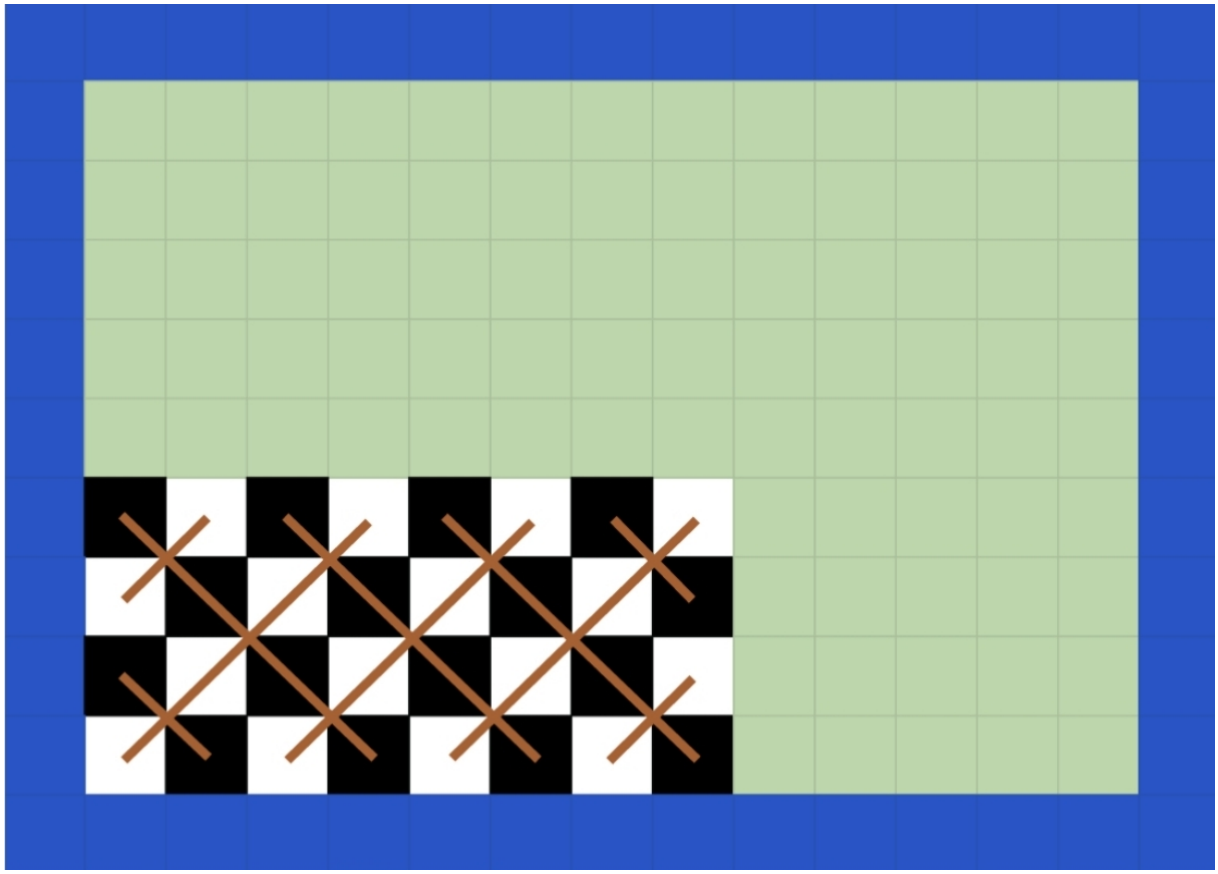


图 5：易临界棋盘（$m = 13$ 和$n = 9$）中定理4.6证明的示意图。蓝色单元格不属于棋盘。在此情形下，$f(m, n) = (m + n - 2)/2 = 5$。选取的 5 行和 5 列中的单元格以绿色标示。选取的 5 条和对角线和 5 条差对角线以棕色标示。

根据观察 3.4，通过增大 m 或 n，或同时增大二者，且不增大 $f(m, n)$，即可实现这一点。事实上，困难临界情形也可以通过将 m 和 n 同时增大 2 化归为简单临界情形。只需证明在简单临界情形下，$\beta(Q_{m\times n}) \leqslant f(m, n)$。

现在考虑易临界情形。我们知道 $(m + n - 2)/4 < n - 1$，因为这等价于 $m < 3n - 2$。令 $p = f(m, n) = (m + n - 2)/4$，并选取最右侧的 p 列和最上方的 p 行。此时，未覆盖单元格构成一个 $m' \times n'$ 棋盘 $V(B_{m'\times n'})$，其中 $m' = m - p$ 和 $n' = n - p$ 均为偶数。引理 4.5 表明，p' 条和对角线和 p' 条差对角线可以覆盖 $V(B_{m'\times n'})$，其中

$$\begin{aligned} p' &= (m' + n' - 2)/2 \\ &= (m - p + n - p - 2)/2 \\ &= (4p - 2p)/2 = p \end{aligned}$$

这意味着 $\beta(Q_{m\times n}) \leqslant p = f(m, n)$。 □

我们已完全解决矩形棋盘上的宽松皇后支配问题。

5 $(4k+3) \times (4k+3)$棋盘的皇后支配

在本章节中，我们将展示一些结果，并提出一些猜想，力求简化 Weakley 等人给出的冗长复杂证明 $[17, 18, 8]$，该证明表明 $\gamma(Q_{n\times n}) \geqslant (n+1)/2$，其中 $n \equiv 3$ 模 4 且 $n > 11$。这是方形棋盘中唯一一个我们尚未简化其最佳已知下界证明的情形，如表 1 所示。为此，我们将继续选择行、列和对角线，而不是放置皇后。因此，在完全求解方形（以及矩形）棋盘上的宽松皇后支配问题后，我们现在来研究其最优解的性质。

定理 3.1 意味着 $\gamma\left(Q_{n\times n}\right) \geqslant (n-1)/2$，剩下的工作是证明等号不可能成立，从而将下界提高 1。上述跨越 3 篇论文、超过 35 页的证明通过证明一系列结果做到了这一点，这些结果列于下文。陈述这些结果时，我们假设 $n = 4k+3$ 是一个正整数，使得 $\gamma\left(Q_{n\times n}\right) = (n-1)/2 = 2k+1$，并且 $\mathcal{D}$ 表示相应的皇后支配集。我们还考虑子棋盘 U，它由最左和最右的未覆盖列以及最底和最顶的未覆盖行围成。

结果 5.1。 $U, \mathcal{D}$ 具有以下性质：

(a) $\mathcal{D}$ 是独立的。*(b)* U 是一个边长为 $j \times j$ 的正方形子棋盘，其中 j 为奇数，且 $3(n+1)/4 \leqslant j \leqslant n$。*(c)* U 的每个边缘方格都恰好受到一次攻击。*(d)* 对于 $\mathcal{D}$ 中的每个皇后，经过它的行或列都与 U 相交。此外，经过它的两条对角线各自与 U 的边缘单元格相交于两个单元格。*(e)* 连接 U 左上角和右下角的和对角线恰好覆盖 $\mathcal{D}$ 中的一个皇后。在其余 $2k$ 个皇后中，一半位于该对角线上方，一半位于下方。连接 U 另外两个角的差对角线也有类似结论。

我们使用结果 5.1，将 U 的中心定义为我们坐标系的新原点，与 $[18]$ 类似。结果 5.2、5.3 和定理 5.12 使用这个新原点，这与之前章节使用左下角方格作为原点不同。列号和行号仍分别从左向右、从下向上递增。因此，方格 U 由编号为 $-(j-1)/2$ 和 $(j-1)/2$ 的行和列围成。

结果 5.2. $U = V(Q_{n\times n})$。 $\mathcal{D}$ 中的每个皇后的两个坐标都是偶数。

结果 5.3。 存在某个整数 e, $0 \leqslant e \leqslant k$，使得被占据的和对角线编号与差对角线编号均为

$$0, \pm 2, \pm 4, \ldots \pm 2e, \pm(2e+4), \pm(2e+8), \ldots \pm(4k-2e)$$

.

结果 5.4. $n \in \{3, 11\}$

结果 5.1 已在 [17] 中证明，在 [18] 中则等价地表述为定理 2。正如我们将看到的，定理 3.1 和定理 3.2 的证明思路足以推广并简化其中大部分内容的证明。结果 5.2 是证明中最困难的部分，长达 19 页 [18]，并用到了 8 个引理。我们提出了一些开放问题，并作出猜想，以期简化这一证明。结果 5.3 是四个结果中最简单的。我们对其进行推广，并给出一种更容易直观理解的替代证明。结果 5.4 的证明基于佩尔方程 [8, 18]。仅通过选择被占据的行、列和对角线无法简化这一证明，因为结果 5.3 中的每个解对于所有 $n \equiv 3 \mod 4$ 的松弛皇后支配问题都成立。

在本章节余下部分中，设 $n = 4k + 3$ 为一个正整数。设 $p = \beta(Q_{n\times n}) = (n - 1)/2 = 2k + 1$，并设行 $(R_i)_{i=0}^{p-1}$、列 $(C_i)_{i=0}^{p-1}$、和对角线 $(S_i)_{i=0}^{p-1}$ 以及差对角线 $(D_i)_{i=0}^{p-1}$——统称为选定直线——构成一个 $n \times n$ 棋盘的松弛皇后支配问题的解。以下定理 5.5 的 (a) 至 (e) 部分分别推广了结果 5.1 的 (a) 至 (e) 部分。

定理 5.5. 考虑由最左侧 (l) 和最右侧 (r) 未选列，以及最底部 (b) 和最顶部 (t) 未选行所界定的子棋盘 U。那么

(a) 行 $(R_i)_{i=0}^{p-1}$ 各不相同。同样，列 $(C_i)_{i=0}^{p-1}$、和对角线 $(S_i)_{i=0}^{p-1}$ 和差对角线 $(D_i)_{i=0}^{p-1}$ 也都各不相同。

(b) U 是一个方形子棋盘。

(c) U 的每个边缘方格恰好由一条选定直线覆盖。*(d)* 每条选定对角线分别与 U 的边缘单元格相交于两个点。*(e)* 连接 U 左上角和右下角的和对角线已被选定。在其余 $2k$ 条选定的和对角线中，一半位于其上方，另一半位于其下方。对差对角线也有类似的结果。

证明。我们将重新采用定理 3.1和定理 3.2的证明中的思想。注意，$p = \beta(Q_{n\times n}) = 2k + 1$ 意味着定理 3.1 的方程 2 中等号成立。

(a) 要使方程 2 中的等号成立：(i) 行和列必须分别两两不同，才能使 $|K|$ 等于 $4(n - p) - 4 = 8k + 4$ (ii) $2k + 1$ 和对角线与差对角线必须分别两两不同，才能覆盖 $|K|$ 中的 $8k + 4$ 单元格。(b) 如定理 3.2 的情形 2 中通过染色论证所示，当 $r - l \neq t - b$ 时，方程 2 中的等号不可能成立。注意，原本针对形如 $4k + 1$ 的整数给出的论证，同样适用于形如 $4k + 3$ 的整数。(c) 令 U_e 表示 U 的边缘单元格，因此 $K \subseteq U_e$。K 中的 $8k + 4$ 单元格均恰好被覆盖一次，且每条 $4k+2$ 选定对角线各覆盖两个单元格。不失一般性，考虑顶行 t 中的 $U_e \setminus K$ 单元格。它由 l 和 r 之间的某一条选定的列覆盖。此外，由于与 U_e 的对角线交点已全部由 K 计入，且根据定义，t 未被选定，因此它不受任何其他选定的线覆盖。

(d) 已在 (c) 部分的证明中确立。

(e) 该结果已在定理 3.2 的情形 1 中证明。请注意，原本针对形式为 $4k+1$ 的整数所陈述的论证，同样适用于形式为 $4k+3$ 的整数。在这种情况下，这并不会导致矛盾。事实上，$\beta(Q_{n\times n})$ 等于 $(n-1)/2$。

□

结果 5.1 的大部分子结果 (a) 至 (e) 都可分别由定理 5.5 的子结果 (a) 至 (e) 直接推出。后者将前者推广到了宽松皇后支配情形。定理 5.1 (b) 是唯一仅得到部分推广的结果。具体而言，未得到推广的部分是关于 j（正方形 U 的边长）的两个性质：(i) j 为奇数；(ii) $3(n+1)/4 \leqslant j \leqslant n$。请注意，在宽松皇后支配情形中，这两个性质都不成立。事实上，对于每个模 4 的 $n \equiv 3$，都可以找到这两个性质各自的反例，类似于图 3 中所示的 $n = 11$ 的反例。

在推广结果 5.1 之后，我们现在提出一些开放问题和猜想，以简化结果 5.2。其中，问题 5.9 尤其容易表述，而且独立于皇后支配问题，也可能具有独立的研究价值。我们要问的是，行的集合 $(R_i)_{i=0}^{p-1}$ 和列的集合 $(C_i)_{i=0}^{p-1}$ 可以取哪些值。这是我们的第一个开放问题，后续的开放问题则是对此问题的一些延伸。

为了陈述第一个开放问题，我们关注的不是选定的行和列集合，而是未选的行和列。令 $(R'_i)_{i=0}^{p}$ 表示未选行，令 $(C'_i)_{i=0}^{p}$ 表示未选列。不失一般性，设这两者均按顺序排列，因此 $0 \leqslant R'_0 < \ldots < R'_p < n = 4k+3$且 $0 \leqslant C'_0 < \ldots < C'_p < n = 4k+3$。未选单元格的集合等于间隔网格 $G(\{C'_i\}_{i=0}^{p},\ \{R'_i\}_{i=0}^{p})$ - 简称 G - 如定义 4.2 中所定义。定理 4.4 (b) 意味着 $C'_p - C'_0$ 等于 $R'_p - R'_0$。不失一般性，我们平移行和列，使得$0 = R'_0 < \ldots < R'_p = e$ 且 $0 = C'_0 < \ldots < C'_p = e$。回顾一下，$p = 2k+1$，并且 p条和对角线（S_i）$_{i=0}^{p-1}$ 和 p 条差对角线（D_i）$_{i=0}^{p-1}$ 完全覆盖了 $(p+1)\times(p+1)$ 间隔网格 G。引理 4.3 意味着，p 实际上是足以满足要求的最小此类数值。现在让我们陈述第一个开放问题，它推广了 $e < 4k+3$ 约束：哪些行数与列数相等的间隔网格可以被“完美覆盖”?

问题 5.6。设 $p = 2k+1$ 和 $e \geqslant p$。哪些值 $0 = R'_0 < \ldots < R'_p = e$ 和 $0 = C'_0 < \ldots < C'_p = e$ 能使 G（$\{C'_i\}_{i=0}^{p},\ \{R'_i\}_{i=0}^{p}$）可以用 p 条和对角线和 p 条差对角线完全覆盖?

$2p$ 每条选定的对角线都必须覆盖 K 中的 2 个点；K 是 G 中接触其凸包边界的最外层点集合。这是因为引理 4.3 中的等号成立意味着方程 4 中的等号也成立。到目前为止，我们只考虑了 $K \subseteq G$ 中的单元格，但现在将考虑 G 中的所有单元格。我们用 R' 表示 $\{R'_0, \ldots R'_p\}$，用 C' 表示 $\{C'_0, \ldots C'_p\}$。G 中的每个单元格（C'_i，R'_j）都必须由一条和对角线或差对角线覆盖，而该对角线还要覆盖 K 中的两个单元格。这意味着以下条件之一成立：(i) $C'_i + R'_j \bmod e \in R' \cap C'$；或 (ii) $C'_i - R'_j \bmod e \in C'$ 且 $R'_j - C'_i \bmod e \in R'$。如果这两个条件都不成立，那么单元格（$C'_i$，$R'_j$）显然无法覆盖。这引出了我们的第二个开放问题：哪些行数与列数相等的间隔网格不存在显然无法覆盖的单元格?

问题 5.7。 设 $e \geqslant p \geqslant 2$。对于每个 $(i,\ j)$，哪些值 $0 = C'_0 < \ldots < C'_p = e$ 和 $0 = R'_0 < \ldots < R'_p = e$ 能使以下条件之一成立： $0 \leqslant i,\ j \leqslant p$

(i) $C'_i + R'_j$ 模 $e \in C' \cap R'$

(ii) $C'_i - R'_j$ 模 $e \in C'$ 和 $R'_j - C'_i$ 模 $e \in R'$

对于 $(4k+3) \times (4k+3)$ 棋盘的皇后支配问题，我们只关注奇数 p。我们编写了一个脚本[1] 来研究小型 p 和 e 的这个问题，并发现所有这类间隔网格在奇数 p时都关于两条对角线对称。在偶数 p时，至少有一种这样的对称性成立。这引出了猜想 5.8，其中给出了问题 5.7 的一些必要但不充分的性质。该猜想的第一部分如下：行数和列数相等且均为奇数，并且没有明显无法覆盖的格子的间隔网格关于两条对角线对称。

猜想 5.8. 对于奇数 p ，问题 5.7 的所有解均满足：

(i) $C'_i = R'_i$ for all $0 \leqslant i \leqslant p$

(ii) $C'_i + R'_{p-i} = e$ for all $0 \leqslant i \leqslant p$

对于偶数 p，**(i)** 或 **(ii)** 至少有一个成立。

猜想5.8 表明，奇数 p 的问题 5.7 的解关于两条对角线均对称。这引出了一个更简单的问题：一种对称性是否意味着另一种对称性？我们已经知道，对于偶数 p，答案是否定的。不失一般性，我们假设关于和对角线对称，因此 $C'_i = R'_i$。问题 5.7 的两个条件现在进一步简化为：对于所有 $C'_i, C'_j \in C'$，以下两者之一应成立：**(i)** $C'_i + C'_j \bmod e \in C'$**(ii)** $C'_i - C'_j \bmod e \in C'$。现在的问题变成了：哪些子集 C' 具有这样的性质？由于我们已经进行了平移，使得 $C'_0 = 0$，所以我们只关注满足 $0 \in C'$ 的 C' 。对于$(4k+3) \times (4k+3)$ 棋盘，我们关注大小为奇数的子集。不过，我们将这两个约束都进行推广，使问题变得更加自然。由此得到的问题 5.9如此简单，以至于它本身作为一个问题也可能具有独立的研究价值。尽管它的表述独立于皇后支配问题，但它本质上是在问：哪些间隔网格具有相等数量的行和列，并且关于一条对角线对称，同时没有明显的无法覆盖的格子？

问题 5.9。 哪些 S的 $\{0, 1, \ldots, e-1\}$ 子集满足：对于所有 $x, y \in S$， $x+y$ 模 e 或 $x-y$ 模 e 中至少有一个属于 S?

我们还编写了一个脚本[2] ，以研究 e取较小值时的这一问题。对于奇数大小的子集，我们发现了猜想 5.8 所预期的对称性。对于偶数大小的子集，这些性质并不成立。这引出了猜想 5.10，其中陈述了问题 5.9 的必要但不充分条件：作为问题 *5.9* 的解的奇数大小子集始终包含 0 ，并且关于 $e/2$ 对称，但 0除外。

[1] https://github.com/architkarandikar/queens-domination/tree/main/qstn_5p7_cjtr_5p8[2] https://github.com/architkarandikar/queens-domination/tree/main/qstn_5p9_cjtr_5p10

```
   C':0 1 2 5 6  R':0 1 2 5 6C':0 1 2 5 6  R':0 1 4 5 6
C':0 1 3 4 6  R':0 1 3 4 6C':0 1 3 4 6  R':0 2 3 5 6
C':0 1 4 5 6  R':0 1 2 5 6C':0 1 4 5 6  R':0 1 4 5 6
C':0 1 2 6 7 8  R':0 1 2 6 7 8  C':0 2 3 5 6  R':0 1 3 4 6
C':0 2 3 5 6 8  R':0 2 3 5 6 8  C':0 2 3 5 6  R':0 2 3 5 6
```

(a) $p = 5$ 时问题 *5.7* 的解，$e = 8$。(b) $p = 4$ 时问题 *5.7* 的解，$e = 6$。

```
S u {e}: 0 6S u {e}: 0 2 4 6S u {e}: 0 1 5 6
S u {e}: 0 1 2 4 5 6
```

```
S u {e}: 6
S u {e}: 0 1 6
S u {e}: 0 2 6
S u {e}: 0 3 6
S u {e}: 0 4 6
S u {e}: 2 4 6
S u {e}: 0 1 3 4 6
S u {e}: 0 5 6
S u {e}: 0 1 2 5 6
S u {e}: 0 2 3 5 6
S u {e}: 0 1 4 5 6
S u {e}: 1 2 4 5 6
S u {e}: 0 1 2 3 4 5 6
```

(c) 奇数大小的解- 针对 $e = 6$ 的问题 5.9 的定大小解 S。(d) 针对 $e =$ 问题 5.9 的偶数大小的解 S 6.

图 6：问题 5.7、5.9 和猜想 5.8、5.10 的示例说明。

猜想 5.10。 问题 5.9 的所有奇数大小的解 S 均满足

(i) $0 \in S$

(ii) $S \cup \{e\}$ 关于 $e/2$ 对称

在本章节的最后一部分，我们通过刻画行数和列数相等的均匀间隔网格的所有完美对角线覆盖，推广结果 5.3。

定义 5.11（间隔网格的完美对角线覆盖）。 对于具有 m' 行和 n' 列的间隔网格，完美对角线覆盖是由恰好 $(m' + n' - 2)/2$ 条和对角线和 $(m' + n' - 2)/2$ 条差对角线组成的集合，覆盖其中的每个单元格。

引理 4.3 意味着，只有当 m'，n' 都为偶数时，才可能存在完美对角线覆盖。定理 5.12 刻画了在 $p = 2k+2$ 为偶数时，具有 p 行和 p 列的均匀间隔网格的所有完美对角线覆盖。我们将 p 参数化为 $2k+2$，因为在选取了 $(n-1)/2$ 行和列后，剩余的、由 $n = 4k + 3$ 的未覆盖单元格构成的间隔网格有 $2k + 2$ 行和列未选。对于 $m' = n' = p = 2k + 2$，完美对角线覆盖中每种对角线各有 $(m' + n' - 2)/2 = 2k + 1$ 条。

定理 5.12。考虑一个均匀间隔网格 $G(\{C'_i\}_{i=0}^{p-1}, \{R'_i\}_{i=0}^{p-1})$，其中有 $p = 2k+2$ 列 $\{C'_i\}_{i=0}^{p-1}$、 p 行 $\{R'_i\}_{i=0}^{p-1}$，相邻行和列之间的间距为 d。我们分别用其 x 坐标和 y 坐标标记列和行。不失一般性，将列和行平移，使其关于两个坐标轴对称，因此 $C'_i = (i-k-1/2)d$ 且$R'_i = (i-k-1/2)d$。由 $2k+1$ 条和对角线 $S = \{S_i\}_{i=0}^{2k}$ 和 $2k+1$ 条差对角线 $D = \{D_i\}_{i=0}^{2k}$ 构成的集合 —— 分别由其单元格坐标之和与差这一不变量标识——是完美覆盖，当且仅当

$$S = D = Q_e \text{ for some } e \text{ such that } 0 \leqslant e \leqslant k \text{ where}$$
$$Q_e = \{0, \underbrace{\pm d, \pm 2d, \ldots, \pm ed}_{\text{count: } 2e}, \underbrace{\pm(e+2)d, \pm(e+4)d, \ldots, \pm(2k-e)d}_{\text{count: } 2(k-e)}\}$$

证明。 不失一般性，我们证明 $d = 2$ 的情形。注意，对于 $d = 2$，所有 R_i 和 C_i 的值都是奇整数，而所有 S_i 和 D_i 的值都是偶整数。我们的证明基于以下中心观察：所有 G差对角线 $2f$ 上的单元格被覆盖，当且仅当选中了该差对角线 $2f$，或者选中了和对角线 $H_f = \{2f-4k-2, 2f-4k+2$、.....、$4k+2-2f\}$ 中的全部对角线。 这是因为差对角线 $2f$ 上的 G 个单元格为 $\{(2f-(2k+1)$ $-(2k+1))$、$(2f-(2k-1)$ $-(2k-1))$..... 、$(2k+1$、$($ $2k+1)$ $-2f)\}$。对于所有 $f \in [1, 2k+1]$，差对角线和和对角线 $\pm 2f$ 也有类似结论。

令 (S, D) 为 G 的完美覆盖，并考虑满足$\{0, \pm 2, \pm 4 \ldots, \pm 2e\} \subseteq S \cap D$的最大整数 $e \geqslant 0$ 。如果 $e = k$，则该断言显然成立，因为 $|S| = |D| = 2k+1$ 种对角线均已由 $S \cap D$计入。否则， $\pm 2(e+1)$ 中有一个既不属于 S，也不属于 D。不失一般性，令 $2($ $e+1)$ $\notin D$。中心观察现在推出 $H_{e+1} = \{2e-4k, 2e-4k+4, \ldots, 4k-2e\} \subseteq S$。因此 $\{\pm 2(e+2)$ $\pm 2(e+4)$ $\ldots, \pm 2(2k-e)\} \subseteq S$，这意味着 $S = Q_e$，因为 S 的所有 $2k+1$ 元素都已计入。因此 $2(e+1) \notin S$，类似地可推出 $D = Q_e$。

反之，令 $S = D = Q_e$，其中 e 为某个整数，且满足 $0 \leqslant e \leqslant k$。我们将证明，$S \cup D$ 覆盖 G 中的所有单元格，这显然意味着 (S, D) 是 G 的完美覆盖。 G 中的每个单元格 a 都属于某条差对角线 $2f$，其中 $-2k+1 \leqslant f \leqslant 2k+1$。 Q_e 中的差对角线显然都已被覆盖，因为它们已被选中。不在 Q_e 中的差对角线为 $A_e \cup B_e$，其中 $A_e = \{\pm 2(e+1)$ $\pm 2(e+3) \ldots, \pm 2(2k-e-1)\}$ 以及 $B_e = \{\pm 2(2k-e+1)$ $\pm 2(2k-e+2) \ldots, \pm 2(2k+1)\}$。由中心观察可知，差对角线 $\pm 2(e+1)$ 中的所有单元格都已被覆盖，因为 $H_{e+1} = \{2e-4k, 2e-4k+4, \ldots, 4k-2e\} \subseteq S$。中心观察进一步意味着， A_e 中每条差对角线内的所有单元格都已被覆盖，因为 $H_{2k-e-1} \subset \ldots \subset H_{e+3} \subset H_{e+1}$；而 B_e 中每条差对角线内的所有单元格都已被覆盖，因为 $H_i \subseteq \{0, \pm 2, \pm 4 \ldots, \pm 2e\} \subseteq S$，对于满足 $2k-e+1 \leqslant i \leqslant 2k+1$ 的所有整数 i 均如此。因此，G 中的所有单元格都由 $S \cup D$ 覆盖。 □

图7 中阐释的定理 5.12 的这一证明刻画了均匀间隔网格的所有完美覆盖。现在，我们通过只选择被占用的行、列和对角线，而不是放置皇后，推广了结果 5.1和结果 5.2，并提出了旨在简化结果 5.3 的猜想。我们注意到，在这种设定下结果5.4无法简化，因为根据定理5.12，选择所有偶数列、所有偶数行和对角线的解对于松弛皇后支配问题都是有效的。至此，本工作的最后一个章节结束。

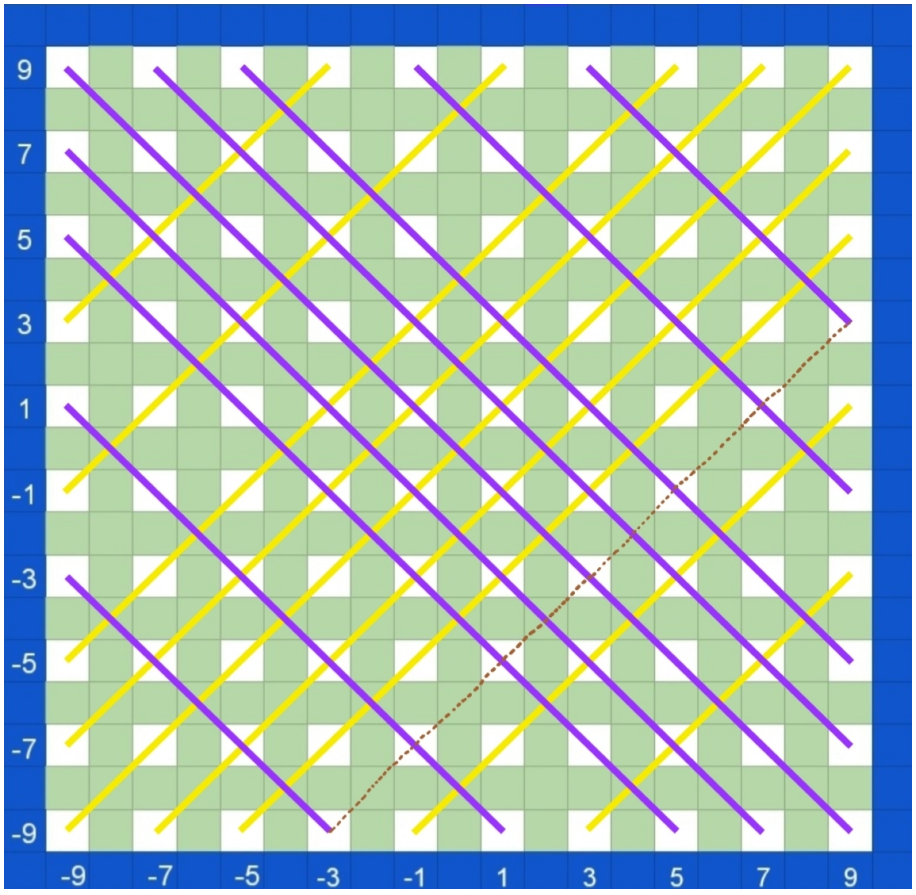


图 7：一个包含 10 行和 10 列的均匀间隔网格的完美覆盖，展示了定理 5.12 对于 $p = 10$, $k = 4$, $d = 2$, $e = 2$ 和 $S = D = Q_e = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 12\}$ 的证明。选取的和对角线和差对角线分别以紫色和黄色显示。棕色虚线差对角线 $2f = 6$ 对于 $f = 3$ 展示了中心观察。由于它未被选取，因此必须选取和对角线 $\{-12, -8, -4, 0, 4, 8, 12\}$，以覆盖其中的所有单元格。

结论

我们通过提出并彻底解决宽松皇后支配问题，改进了矩形棋盘上皇后支配问题的下界。通过这样做，我们肯定地回答了 [4] 中提出的一个开放问题。在此过程中，我们简化了方形棋盘下界的证明，并将 Weakley改进的下界 [17] 从（$4k + 1$）方形棋盘推广到了矩形棋盘。最后，我们提出了与该问题相关的开放问题和猜想。

致谢

感谢我们的好朋友 Varun Dwarkanathan 将这个问题介绍给我们。

参考文献

[1] W. Ahrens。《数学娱乐与游戏》。B.G. Teubner，1901年。[2] W. Ahrens。《数学娱乐与游戏》。B.G. Teubner，1910年。[3] W.W.R. Ball。《数学娱乐与论文》。Read Books，1892年。[4] S´andor Boz´oki、P´eter G´al、Istv´an Marosi 和 William D. Weakley。矩形皇后图的支配。2019年。[5] A.P Burger。《皇后支配问题》。博士论文，南非大学，1998年。[6] E.J. Cockayne。棋盘支配问题。《离散数学》，86(1)：13–20，1990年。[7] E.J Cockayne、B Gamble 和 B Shepherd。象图的支配参数。《离散数学》，58(3)：221–227，1986年。[8] Dmitry Finozhenok 和 William Weakley。皇后图支配数的改进下界。《数学科学学院出版物》，37，2007年1月。[9] Richard K. Guy。《数论未解问题》。《数学问题集》。施普林格出版社，纽约，第二版，1994年。《直观数学中的未解问题》，I。[10] C.F. Jaenisch。《将数学分析应用于国际象棋的论述》´（法文书名中的重音符号缺失）´，面向或不熟悉国际象棋、或不太精通分析的读者，前附导论 ´（原文重音符号缺失）´（原文重音符号缺失）´（原文重音符号缺失）´（原文重音符号缺失）`（原文重音符号缺失）´（原文重音符号缺失） ´（原文重音符号缺失）´。康奈尔大学图书馆历史数学专著，第1卷。Dufour et cie，1862年。[11] Donald E. Knuth。舞动链表。2000年。.[12] Patric R. J. Osterg˚ard 和 William D. Weakley。皇后图支配数的取值。《电子组合学杂志》，8，2001年。[13] Vijay Raghavan 和 Shankar M. Venkatesan。关于棋盘覆盖问题的界。《信息处理快报》，25(5)：281–284，1987年。[14]K. von Szily。《皇后最小问题》，第326–328页。《德国国际象棋杂志》，57，1902年。[15] K. von Szily。《皇后最小问题》，第65–68页。《德国国际象棋杂志》，58，1903年。[16]John J. Watkins。《纵横棋盘：棋盘问题的数学》。普林斯顿大学出版社，2004年。[17] W.D. Weakley。皇后图中的支配。载于 Y. Alavi 和 A.J.n Schwenk 编，《图论、组合学与算法》，第2卷，第1223–1232页。Wiley，牛津，1995年。[18] W.D. Weakley。皇后图支配数的一个下界。载于《JCMCC：组合数学与组合计算杂志》，第43卷，第231–254页。2002年。

[19] William D. Weakley. 二十五年间的全球皇后，第 43–54 页。Springer International Publishing，Cham，2018 年。[20] William D. Weakley. 偶数阶方形棋盘的皇后支配。电子组合学杂志，29(2)，2022 年。