Jack 错排

Nathan Lindzey
计算机科学系 以色列理工学院
lindzeyn@gmail.com

arXiv:2304.06629v1 [math.CO] 13 Apr 2023

摘要

对于每个整数分拆 $\lambda \vdash n$，我们给出一个简单的组合表达式，来计算在没有单件部分的 n 的整数分拆上，Jack 特征标 θ_α^λ 的和。对于 $\alpha = 1$，2，这给出了置换错排图和完美匹配错排图的特征值的闭式，从而解决了代数图论中的一个未解问题。后者的一个附带结果是，得到了矩阵 $J - I$ 的不变量的简单组合公式，其中 J 是全 1 矩阵，这一结果或许本身也有研究价值。我们的证明围绕一个与经典不变量理论中的 Cayley Ω 过程相关的钩积的 Jack 类比结果展开，我们称之为主下钩积。

1 引言

设 $x := x_1, x_2, \cdots$ 为无穷多个不定元组成的集合，$\alpha \in \mathbb{R}$ 为实参数。（积分形式）Jack 多项式 $J_\lambda := J_\lambda(x; \alpha)$ 是对称函数环的一组唯一基 $\{J_\lambda\}$，满足以下性质。

- 正交性：$\langle J_\lambda, J_\mu \rangle_\alpha = 0$ 若 $\lambda \neq \mu$，其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ 是定义在幂和基 $\{p_\lambda\}$ 上的变形 Hall 内积，满足 $\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_\alpha := \delta_{\lambda,\ \mu} \alpha^{\ell\ (\lambda)}\ z_\lambda$。
- 三角性：$J_\lambda = \sum_{\mu \trianglelefteq \lambda} c_{\lambda\mu} m_\mu$，其中 $\{m_\mu\}$ 是单项式基，$\trianglelefteq$ 表示整数分拆 $\lambda \vdash n$ 上的支配序。
- 归一化：$[m_{1^n}] J_\lambda = n!$。

关于这些多项式的详细论述，请参阅 [32, 第 IV 章第 §10] 节和 [46]。本文将注意力限制在 Jack 多项式的幂和展开上

$$J_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} \theta_\alpha^\lambda(\mu) p_\mu \quad \text{for all } \lambda \vdash n.$$

θ_α^λ 被称为 Jack 特征标，因为它们是对称群 S_n 的不可约特征 χ^λ 的一种归一化变形。特别地，取 $\alpha = 1$ 为 1 和 2 时，Jack 多项式分别还原为 Schur 多项式和 Zonal 多项式的积分形式。由于这些特化与 S_n 以及完全图 K_{2n} 的完美匹配集合 $\mathcal{M}_{2n}$ 有关联，因此它们在代数组合学中得到了广泛研究；但对于任意 $\alpha \in \mathbb{R}$，仍有许多未解问题 [2, 46, 32]。鉴于此，人们开始研究 Jack 特征标，因为它们提供了关于 Jack 多项式的对偶信息，或许能为这些未解问题带来启发；然而，通过对偶途径理解 Jack 多项式也面临着自身的猜想 [18, 25, 27]。我们通过考察 $\theta_\alpha^\lambda(\mu)$ 的和，而非单个 $\theta_\alpha^\lambda(\mu)$，在这一方向上取得了一些进展。

令 fp(μ) 表示 μ 中单件部分的数量。定义 λ-Jack 错排和

$$\eta_\alpha^\lambda := \sum_{\substack{\mu\vdash n \\ \mathrm{fp}(\mu)=0}} \theta_\alpha^\lambda(\mu)$$

等于错排上的 Jack 特征标 θ_α^λ 之和，即没有单件部分的分拆 $\mu \vdash n$ 。为说明这一性质的动机，回顾一下：若 $\lambda \vdash n$ 是置换 $\pi \in S_n$的循环类型，那么 π 是错排，当且仅当 fp(λ) $= 0$。令 $D_n \subseteq S_n$ 为 S_n的错排集合。可以证明， η_1^λ 是 D_n上的缩放特征标和，即

$$\eta_1^\lambda = \sum_{\substack{\mu\vdash n \\ \mathrm{fp}(\mu)=0}} \theta_1^\lambda(\mu) = \sum_{\substack{\mu\vdash n \\ \mathrm{fp}(\mu)=0}} \frac{|C_\mu|}{\chi^\lambda(1)}\chi^\lambda(\mu) = \frac{1}{\chi^\lambda(1)} \sum_{\pi\in D_n} \chi^\lambda(\pi)$$

其中 $C_\mu \subseteq S_n$ 是对应于 $\mu \vdash n$的共轭类。对于 $\alpha = 2$，类似的结果也适用于所谓的 $\mathcal{M}_{2n}$ 的完美匹配错排（例如参见 [28], ）。我们并不知道关于 $\alpha \neq 1$,2 的任何组合模型，但自然可以将 η_α^λ 视为特征标在错排上的和的α类比；这正是本文的主要研究焦点。

尽管人们对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$的 Jack 错排和知之甚少，但 $\alpha = 1$,2情形在代数图论中受到了特别关注，因为它们实际上就是所谓错排图的特征值。

- 集合 $\{\eta_1^\lambda\}_{\lambda\vdash n}$ 是置换错排图的谱

  $$\Gamma_{n,1} = (S_n, E) \text{ where } \pi\sigma \in E \Leftrightarrow \sigma\pi^{-1} \in D_n,$$

  即， S_n 的正规Cayley 图，由 D_n生成。有关置换错排图的更多细节，请参见 [13, 第 14] 章或 [41] 。
- 集合 $\{\eta_2^\lambda\}_{\lambda\vdash n}$ 是完美匹配错排图的谱

  $$\Gamma_{n,2} = (\mathcal{M}_{2n}, E) \text{ where } mm' \in E \Leftrightarrow m \cap m' = \emptyset.$$

  有关完美匹配错排图的更多详情，请参见 [13, 第 15]章或 [28] 。

这些图首次出现在 Erd ˝os–Ko–Rado 组合学中，这是极值组合学的一个分支，研究在任意两个成员都相交这一限制下，组合对象的族可以有多大。按照定义，$\Gamma_{n,\alpha}$ 的独立集（两两不相邻的顶点集合）与所谓的置换相交族以及 $\alpha = 1$、2 的完美匹配相交族一一对应；这些图的谱已被用于给出 S_n 和 $\mathcal{M}_{2n}$ 的最大相交族的紧上界，并对其进行刻画。关于 Erd ˝os–Ko–Rado 组合学中的代数技巧，读者可参阅 [13] ，其中有全面的介绍。

错排图本身就很有趣，因为它们是著名的克纳泽图的自然类比[1], ，而克纳泽图是代数图论的基石 [15, 第 7] 章。由于排列和完美匹配的代数组合学比子集的代数组合学更为繁复，错排图的特征值也因此更难理解。以下简要概述这一领域的研究成果。

置换错排图特征值的第一个非平凡递推关系由 Renteln [41] 通过移位舒尔函数的行列式公式 [37],推导得出

[1]回顾一下，克纳泽图是定义在 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的 k-元子集上的图，其中两个 k-元子集相邻当且仅当它们不相交。

他利用该递推关系计算了置换错排图的最小特征值。后来，Ellis [9] 运用不同的方法计算了置换错排图的最小特征值。Deng 和 Zhang [7] 确定了第二大特征值。在 [22], , Ku 和 Wales 研究了置换错排图特征值的一些有趣性质。具体而言，他们证明了交错符号定理，即对于所有 λ，$\operatorname{sgn}\ \eta_1^\lambda = (-1)^{|\lambda|-\lambda_1}$。他们还提出了一个关于特征值大小的猜想，称为 Ku–Wales 猜想。在 [23], , Ku 和 Wong 通过利用移位舒尔函数推导出另一个递推公式，证明了这一猜想；该公式也带来了一个更简洁的交错符号定理证明。

人们很快注意到，完美匹配错排图的代数性质与置换错排图的代数性质相似。Godsil 和 Meagher [14] 计算出了完美匹配错排图的最小特征值，[29, 30]随后 Lindzey [29, 30]也进行了计算。[28, 13]有人猜想存在一个与交错符号定理类似的定理，这一猜想最近由 Renteln [42] 和 Koh 等人 [21]分别证明。在更早的一项证明这一猜想的工作中，Ku 和 Wong [24] 给出了 η_2^λ 的递归公式，以及适用于若干特定形状的闭式公式。[44], Srinivasan 给出了计算效率更高的完美匹配错排图特征值公式。Godsil 和 Meagher 提出，Ku–Wales 猜想的类似命题是否也适用于完美匹配错排图？[13, pg. 316]。后一个问题至今悬而未决，因为完美匹配错排图的特征值一直难以找到类似于置换错排图那样简洁的递归表达式。这是因为，前述移位舒尔函数的行列式公式并不适用于移位 Zonal 多项式或移位 Jack 多项式。

已知错排图特征值公式的主要缺点是无法高效求值，也就是说，它们缺少“良好公式”。事实上，求出这些特征值的闭式曾被视为一个困难的未解问题 [13, 第 316], 页。或许这是因为，对称群的不可约特征的求值在形式上十分困难 [39, 19, 38]。我们的结果表明，这些特征值确实存在良好公式。

为了陈述我们的主要结果，我们需要先给出几个定义。令 $h_*^\lambda(i,j) := \alpha a_\lambda(i,j) + l_\lambda(i,j) + 1$表示单元格 (i,j) 的下钩长，其中 $a_\lambda(i,j)$ 和 $l_\lambda(i,j)$ 分别表示臂长和腿长（定义见第 3 节）。我们定义

$$H_*^1(\lambda) := h_*^\lambda(1,1)h_*^\lambda(1,2)\cdots h_*^\lambda(1,\lambda_1)$$

称为整数分拆 λ 的主下钩积。对于 $\alpha = 1$，下钩长就是通常意义上的钩长，在这种情况下，我们将 $H_*^1(\lambda)$ 称为主钩积。注意，$\lambda = (n)$ 的主钩积就是 $n!$。

事实证明，任意 λ 的主钩积会自然地出现在经典不变理论中，具体而言，出现在一种称为 Cayley Ω–过程的微分算子的求值中（见 [3]）。独立地，Filmus 和 Lindzey [11] 在研究完美匹配上的调和多项式时观察到了类似现象：他们证明，主下钩积会出现在一族作用于与完美匹配相关的多项式空间的微分算子的求值中。根据 [11], 的结果，我们将在第 4 节证明，主钩积 $H_*^1(\lambda)$ 计数一类有趣的带色排列 $\mathcal{S}_\lambda$，其定义如下。

对于每个 $i \in [n] := \{1, 2, \ldots, n\}$，我们赋予颜色列表 $L(i) \subseteq [m]$，其中某个 $m \in \mathbb{N}$。我们将带色排列 (c, σ) 定义为颜色 $c = c_1, c_2, \ldots, c_n$ 的一种赋值，使得 $c_i \in L(i)$，并且是一个置换 $\sigma \in \mathrm{Sym}([n])$，满足 $\sigma(i) = j \Rightarrow c_i = c_j$，也就是说，该置换的每个循环都是单色的。任意分拆 λ 都通过设定 $L(i) := [\lambda_i']$，在符号集 $[\lambda_1]$ 的每个元素i 上定义一个颜色列表，其中 λ' 表示 λ 的转置分拆或共轭分拆。我们将 $\mathcal{S}_\lambda$ 定义为所有此类带色排列构成的集合，形式化地说，

$$\mathcal{S}_\lambda := \{(c \in [\lambda_1'] \times \cdots \times [\lambda_{\lambda_1}'], \sigma \in S_{\lambda_1}) : \sigma(i) = j \Rightarrow c_i = c_j \text{ for all } i \in [\lambda_1]\}.$$

我们称带色排列 $(c,\sigma) \in \mathcal{S}_\lambda$ 是一个错排，如果对于所有$1 \leqslant i \leqslant \lambda_1$，都有 $\sigma(i) = i \Rightarrow c_i \neq 1$。换句话说，这些带色排列与 $(1,\dots,1,())\in \mathcal{S}_\lambda$ 没有任何带色循环重合。令 $\mathcal{D}^\lambda$ 为 $\mathcal{S}_\lambda$ 的错排集合，并令 $\mathcal{D}_k^\lambda$ 为 $\mathcal{S}_\lambda$ 中恰有 k 个不相交循环的错排集合。我们定义 $D^\lambda := |\mathcal{D}^\lambda|$ 和 $d_k^\lambda := |\mathcal{D}_k^\lambda|$，使得

$$D^\lambda = d_1^\lambda + d_2^\lambda + \cdots + d_{\lambda_1}^\lambda.$$

对于 $\lambda = (n)$，d_k^λ 恢复了相应的（无符号）关联第一类斯特林数，即恰有 k 个互不相交循环的 S_n 个元素的错排数（见 [5, 第 256] 页）。有色完美匹配 $\mathcal{M}_\lambda$ 及其错排 $\mathcal{D}'_\lambda$ 可以用类似但稍复杂的方式定义，具体推迟到第 4 节讨论。

对于任意 $\alpha \in \mathbb{R}$，我们定义

$$D_\alpha^\lambda := \sum_{k=1}^{\lambda_1} d_k^\lambda \alpha^{\lambda_1 - k}$$

为 λ-Jack 错排数。

我们的第一个主要结果是，Jack 错排和等于 Jack 错排数（相差一个符号）。

定理 1. 对于任意形状 λ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$，我们有

$$\eta_\alpha^\lambda = (-1)^{|\lambda|-\lambda_1} D_\alpha^\lambda$$

定理 1 为下文列出的所有上述错排图结果给出了更简单、统一且更一般的证明。

推论 2（交错符号定理）。对于任意形状 λ 和 $\alpha \geqslant 0$，我们有

$$\operatorname{sgn}\ \eta_\alpha^\lambda = (-1)^{|\lambda|-\lambda_1}.$$

推论 3（Ku–Wales 定理）。对于所有满足 $\mu_1 = \lambda_1$ 和 $\alpha \geqslant 0$的 μ、$\lambda \vdash n$，我们有

$$\mu \trianglelefteq \lambda \Rightarrow |\eta_\alpha^\mu| \leqslant |\eta_\alpha^\lambda|.$$

在推论 3 中令 $\alpha = 2$，即可回答 Godsil 和 Meagher 关于完美匹配错排图 [13, pg. 316]的 Ku–Wales 猜想的问题。

推论 4。对于所有 $\alpha \geqslant 1$ 和 $n \geqslant 6$，我们有

$$(n) = \arg\max_{\lambda\vdash n}\ \eta_\alpha^\lambda, \quad (n-1,1) = \arg\min_{\lambda\vdash n}\ \eta_\alpha^\lambda, \quad \textit{and} \quad (n-1,1) = \arg\max_{\substack{\lambda\vdash n\\ \lambda\neq(n)}}\ |\eta_\alpha^\lambda|.$$

最后，我们指出，有色排列此前已出现在对称群的特征理论研究中。在 [45] Stanley猜想了一个关于 $\theta_1^\lambda(\mu)$ 的公式，该公式后来由 F´eray [12] 证明，并由 F´eray和 Sniady [10]重新表述。他们重新表述中涉及的组合学使该表达式更适合进行渐近分析，从而对 S_n [10] 的渐近特征理论得出了更精确的结果。此外，Lasselle [26] 猜想，Stanley–F´eray公式的一个类似公式也适用于Jack特征。尽管这些工作都涉及有色排列，但主要结果集中于它们的分解和渐近性质，而我们不考虑这些内容。我们也不清楚如何利用 Stanley–F´eray–Sniady公式来恢复我们关于 $\alpha = 1$的主要结果。无论如何，这些工作与本文都表明，有色排列在对称群的特征理论中扮演着一个未被充分重视的角色，似乎值得未来进一步研究。

结构安排

本文组织如下。在第 2节中，我们概述对称函数理论中的基本术语和定义。我们在第 3节中引入移位 Jack多项式，并证明Jack 错排和可以写成移位 Jack多项式的交错和（定理 6）。我们得到的表达式难以处理，因此在第 4节中，我们介绍 $[1, 11]$ 的一些组合学结果，这些结果导出了该表达式一种更简单的组合学表述（推论 7）。我们利用这一组合表达式在第4节中证明了 $\alpha = 0$ 的主要结果，但它仍不够明确，无法得到 $\alpha \neq 0$的闭式表达式。在第5 节中，我们证明了几个关于所谓主下钩积的子式的技术性引理，这使我们能够用有限差分的语言，对Alexandersson和 F´eray $[1,$ 定理5.12$]$ 的一个结果给出更明确的表述。借助这些引理，我们在第 6 节中证明了我们的第一个主要结果（定理 1）。

其余部分将重点讨论 α 和 λ的各种推论及特例。第 7 节中，我们简要证明推论 2、推论 3 和推论 4。第 8 节和第 9 节中，我们将进一步考察 $\alpha = 1$、2 的情形，并证明第二个主要结果，即错排图特征值的封闭表格理论表达式（定理 18 和定理 26）。对于 $\alpha = 1$，这将 Okazaki $[35,$ 推论 1.3$]$ 和 Stanley $[48,$ 例 7.63b$]$关于钩的结果推广到任意形状；该结果也可改写为关于矩阵 $J - I$ 的不变量的结果（见第 8 节）。对于 $\alpha = 1$，我们将所得封闭形式与 Renteln 的行列式公式 $[41,$ 定理 4.2$]$联系起来，该公式给出了置换错排图的特征值。最后，我们提出一些尚未解决的问题，并展望未来的研究方向。

2 预备知识

熟悉对称函数理论的读者可以跳过本节，因为我们的记号完全遵循标准杨表，采用 Macdonald $[32]$ 和Stanley $[46]$的记法。

形状是一组单元格 (i, j)，满足 $i, j \in \mathbb{N}_+$。我们令 λ 为一个整数分拆，当采用其杨表解释时，将其称为形状。令 λ/μ表示删除与分拆μ相对应的 λ 的单元格后得到的斜形。令 $|\lambda|$ 表示 λ的大小，即 λ的单元格数。令 $\ell(\lambda)$表示λ的长度，即 λ的部分数。形状为 λ 的杨表 t 是一个单元格标有整数 $[|\lambda|]$的杨表。对于任意杨表 t，令 $t_{i,j}$ 表示 t中 (i, j) 单元格的条目。单元格中的条目沿行和列严格递增的杨表称为标准杨表。令 $z_\lambda :$ $= 1^{m_1} 2^{m_2} \cdots m_1! m_2! \cdots$，其中 m_i 是 λ 中等于 i的部分数。

初等对称函数的定义如下：

$$e_\lambda := e_{\lambda_1} \cdots e_{\lambda_{\ell(\lambda)}} \quad \text{where} \quad e_k(x_1, x_2, \cdots) = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} x_{i_1} \cdots x_{i_k}.$$

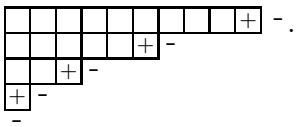
幂和对称函数定义为

$$p_\lambda := p_{\lambda_1} \cdots p_{\lambda_{\ell(\lambda)}} \quad \text{where} \quad p_k(x_1, x_2, \cdots) = \sum_{i=1} x_i^k.$$

关于这些多项式的更详细讨论，请参阅 $[32,$第 I 章$]$。

现在我们回顾一种著名的、基于杨表的分拆支配序定义。单元格 $\square \in \lambda$ 是外角，当移除 $\square$ 后得到的图形是 $|\lambda| - 1$ 的一个分拆。非单元格 (i, j) 是内角，当将单元格 $\square := (i, j)$ 添加到 λ 后得到的图形是 $|\lambda| + 1$ 的一个分拆。例如，在下图中，外角

标记为“+”，内角标记为“-”：



我们记作 $\mu \nearrow \nu$，如果 ν 可由 μ 移除一个外角 $\square \in \mu$，并将其放置在 μ 中位于 $\square$ 上方某一行的一个内角处得到。以下命题众所周知。

命题5. 对任意分拆 μ、$\lambda \vdash n$，我们有 $\mu \trianglelefteq \lambda$ 当且仅当存在一列分拆 ν^1、ν^2、.....、ν^k，使得

$$\mu = \nu^1 \nearrow \nu^2 \nearrow \cdots \nearrow \nu^k = \lambda.$$

3 移位 Jack 多项式

我们简要回顾引言中定义的 Jack 多项式相关的一些标准术语。对于任意单元格 $(i,j) \in \lambda$，(i,j) 的腿长 $l_\lambda(i,j)$ 是指 λ 中同一列里位于 (i,j) 下方的单元格数；而 (i,j) 的臂长 $a_\lambda(i,j)$ 是指 λ 中同一行里位于 (i,j) 右侧的单元格数，即，

$$a_\lambda(i,j) = |\{(i,k) \in \lambda : k > j\}| \quad \text{and} \quad l_\lambda(i,j) = |\{(k,j) \in \lambda : k > i\}|.$$

请注意，即使将 λ 替换为不构成整数分拆的单元格集合，臂长和腿长仍然有明确的定义。让

$$h^\lambda_*(i,j) := \alpha a_\lambda(i,j) + l_\lambda(i,j) + 1 \quad \text{and} \quad h^*_\lambda(i,j) := \alpha(a_\lambda(i,j)+1) + l_\lambda(i,j)$$

分别为 $(i,j) \in \lambda$ 的下钩长和上钩长。设

$$H^\lambda_* = \prod_{(i,j)\in\lambda} h^\lambda_*(i,j) \quad \text{and} \quad H^*_\lambda = \prod_{(i,j)\in\lambda} h^*_\lambda(i,j)$$

分别为 λ的下钩积和上钩积。注意，即使将 λ 替换为不构成整数分拆的单元格集合，下钩积和上钩积仍然有定义。

反半标准杨表是由 n 个单元格组成的杨表，其元素属于 $[n]$，沿行弱递减，沿列严格递减。令RSSYT(μ) 表示所有形状为 μ 的反半标准杨表的集合。对于任意形状为 μ 的反半标准杨表 t，定义

$$\psi_t(\alpha) := \prod_{i=1}^{|\mu|} \psi_{\rho^i/\rho^{i-1}}(\alpha); \quad \psi_{\lambda/\mu}(\alpha) := \prod_{(i,j)\in R_{\lambda/\mu}\setminus C_{\lambda/\mu}} \frac{h^\mu_*(i,j)h^*_\lambda(i,j)}{h^*_\mu(i,j)h^\lambda_*(i,j)}$$

其中，ρ^i/ρ^{i-1} 定义了由标记为 i 的单元格诱导的 t 中的斜形，而 $R_{\lambda/\mu}$ ($C_{\lambda/\mu}$) 表示与形状 λ/μ 相交的一行（一列）中的方格集合。

众所周知，（整数形式的）移位 Jack多项式是移位对称函数环的一个基，即在变量 $x_i - i/\alpha$中关于变量对称的多项式环，并定义如下：

$$J^\star_\lambda(x;\alpha) := H^\lambda_* P^\star_\lambda(x;\alpha); \quad P^\star_\mu(x;\alpha) := \sum_{t\in \mathrm{RSSYT}(\mu)} \psi_t(\alpha) \prod_{(i,j)\in\mu} (x_{t_{i,j}} - \bar{a}_\mu(i,j) + \bar{l}_\mu(i,j)/\alpha)$$

¯其中 $\bar{a}_\mu(i,j)=|\{(i,k)\in\lambda:\ k<j\}|$ 和 $l_\mu(i,j)=|\{(k,j)\in\lambda:\ k<i\}|$ 分别表示 $(i,j)\in\mu$的共臂长和共腿长。多项式 $P^\star_\lambda$有时称为归一化移位 Jack 多项式。

定理 6 给出了一个简单却不透明的表达式，用移位 Jack 多项式表示 η^λ_α。关于 η^λ_1 和 η^λ_2，已有利用移位 Schur 多项式的行列式公式 [41] 得到的表达式；最近也得到了关于移位 Zonal 多项式 [42] 的相应表达式。定理 6 只是这些结果的 Jack 类比结果。今后，我们令 $J^\star_k:=J^\star_{(k)}$。

定理 6. 对所有 λ 和 $\alpha\in\mathbb{R}$，有

$$\eta^\lambda_\alpha=\sum_{k=0}^{|\lambda|}\frac{(-1)^{|\lambda|-k}}{k!}J^\star_k(\lambda).$$

证明. 我们从 Jack 多项式的柯西公式 [46] 及其展开式开始:

$$\sum_\lambda\frac{J_\lambda(x;\alpha)J_\lambda(y;\alpha)}{H^*_\lambda H^\lambda_*}=\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{1/\alpha}=\prod_{i\geqslant1}\exp\left(\frac{p_i(x)p_i(y)}{\alpha i}\right).$$

由于 $\eta^\lambda_\alpha=J_\lambda|_{p_1=0,p_2=p_3=\cdots=1}$，令 $p_1(x)=0$，并令其余的 $p_i(x)=1$，得到

$$\sum_\lambda\frac{\eta^\lambda_\alpha J_\lambda(y;\alpha)}{H^*_\lambda H^\lambda_*}=\prod_{i\geqslant2}\exp\left(\frac{p_i(y)}{\alpha i}\right).$$

回忆一下基本事实：齐次完全对称多项式 h_i 的生成函数 $H(t)$ 可写为如下形式:

$$H(t)=\sum_{i=0}h_it^i=\prod_i\frac{1}{1-x_it}=\prod_{i\geqslant1}\exp\left(\frac{p_i}{i}t^i\right).$$

这意味着

$$\sum_\lambda\frac{\eta^\lambda_\alpha J_\lambda}{H^*_\lambda H^\lambda_*}=\prod_{i\geqslant2}\exp\left(\frac{p_i}{\alpha i}\right)=e^{-h_1/\alpha}\prod_i(1-x_i)^{-1/\alpha}.$$

根据 Stanley [46], 我们有 $\sum_k J_k/(\alpha^k k!)=\prod_i(1-x_i)^{-1/\alpha}$。再结合 $h_1=J_1$ 这一事实，我们得到

$$\sum_\lambda\frac{\eta^\lambda_\alpha J_\lambda}{H^*_\lambda H^\lambda_*}=e^{-J_1/\alpha}\sum_k\frac{J_k}{\alpha^k k!}=\sum_{j,k}\frac{(-1)^j}{\alpha^j j!\alpha^k k!}J_1^jJ_k.$$

Jack 多项式的 Pieri 规则 [46] 表明

$$J_1^jJ_k=\sum_{\lambda=(k)+j}d^{\lambda/k}\left(\frac{H^{(k)}_*}{H^\lambda_*}\right)J_\lambda.$$

其中求和遍及所有通过依次向（k）添加 j 个内角而得到的形状 λ。比较系数并重新编号后，得到

$$\frac{\eta^\lambda_\alpha}{H^*_\lambda H^\lambda_*}=\sum_{\lambda=(k)+j}\frac{(-1)^j}{\alpha^j j!\alpha^k k!}\left(\frac{H^{(k)}_*}{H^\lambda_*}\right)d^{\lambda/k}=\sum_{k=0}^{|\lambda|}\frac{(-1)^{|\lambda|-k}}{\alpha^{|\lambda|-k}(|\lambda|-k)!\alpha^k k!}\left(\frac{H^{(k)}_*}{H^\lambda_*}\right)d^{\lambda/k}.$$

令 $d^\lambda = |\lambda|!/H^*_\lambda$。根据 [36, 命题5，2], 我们有

$$d^{\lambda/\mu} = \frac{d^\lambda P^\star_\mu(\lambda)}{|\lambda|(|\lambda|-1)\cdots(|\lambda|-|\mu|+1)}.$$

将两边同乘 $H^*_\lambda H^\lambda_*$，并应用 [36, 命题5，2] 可得

$$\begin{aligned}\eta^\lambda_\alpha &= \sum_{k=0}^{|\lambda|} \frac{(-1)^{|\lambda|-k} H^*_\lambda H^{(k)}_*}{\alpha^{|\lambda|-k}(|\lambda|-k)!\alpha^k k!}\left(\frac{d^\lambda P^\star_k(\lambda)}{|\lambda|(|\lambda|-1)\cdots(|\lambda|-k+1)}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{|\lambda|} \frac{(-1)^{|\lambda|-k}\alpha^{|\lambda|}|\lambda|! H^{(k)}_*}{\alpha^{|\lambda|-k}(|\lambda|-k)!\alpha^k k!}\left(\frac{P^\star_k(\lambda)}{|\lambda|(|\lambda|-1)\cdots(|\lambda|-k+1)}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{|\lambda|} \frac{(-1)^{|\lambda|-k}}{k!} H^{(k)}_* P^\star_k(\lambda).\end{aligned}$$

根据定义，我们有 $H^{(k)}_* P^\star_k(\lambda) = J^\star_k(\lambda)$，由此证明得证。 □

4 杨表横截集与主钩积

现在，我们利用 [1, 11] 的一些组合学结果，为定理 6 给出一种更易处理的组合表述，并用它证明 $\alpha = 0$、1、2 的定理 1。

k-横截集 T 是 λ 的一个单元格集合 k，其中单元格属于 T，并构成 λ各列的一个部分横截集；也就是说，T 中任意两个单元格都不在 λ的同一列中。定义 k-横截集 T 的 α-权重为 T的下钩积，即 $w_\alpha(T) = H^T_*$；约定 $w_\alpha(\emptyset) = 1$ （示例见图 1）。令 $\mathcal{T}^k_\lambda$为 λ的 k-横截集所构成的集合。

在 [1, 定理 5.12],Alexandersson 和 F´eray 证明了

$$\frac{J^\star_k(\lambda)}{k!} = \sum_{T\in\mathcal{T}^k_\lambda} w_\alpha(T). \tag{1}$$

In与此同时，Filmus 和 Lindzey [11]证明了以下组合恒等式 y

$$\frac{J^\star_{\lambda_1}(\lambda)}{\lambda_1!} = \sum_{T\in\mathcal{T}^{\lambda_1}_\lambda} w_\alpha(T) = H^1_*(\lambda). \tag{2}$$

对于 $\alpha = 1$，我们注意到，公式 (2) 也可以从适用于标准斜杨表 [33] 的 Naruse 钩长公式中得到。我们记作 $\mu \preceq_k \lambda$，如果 μ 是通过从 λ中移除 k 列而得到的子形状 λ。这样的子形状共有 $\binom{\lambda_1}{k}$ 个，我们用求和符号 $\sum_{\mu\preceq_k\lambda}$ 表示对所有通过移除 k 列而从 λ 中得到的子形状 μ 求和，其中 $\binom{\lambda_1}{k}$。

定理 7. 对于任意形状 λ 和 $\alpha\in\mathbb{R}$，我们有

$$\eta^\lambda_\alpha = (-1)^{|\lambda|-\lambda_1}\sum_{k=0}^{\lambda_1}(-1)^k \sum_{\mu\preceq_k\lambda} H^1_*(\mu).$$

证明。我们断言

$$\frac{J^\star_k(\lambda)}{k!} = \sum_{T\in\mathcal{T}^k_\lambda} w_\alpha(T) = \sum_{\mu\preceq_{\lambda_1-k}\lambda} H^1_*(\mu).$$

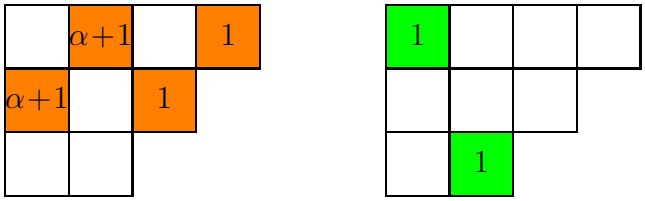


图 1：令 $\mu = (4, 3, 2) \vdash 9$。左侧的着色单元格 $S = \{(2, 1)、(1, 2)、(2, 3)、(1, 4)\}$ 是 μ的一个 4-横截集，其 α-权重为 $w_\alpha(S) = (\alpha+1)^2$。右侧的着色单元格 $S' = \{(1, 1)、(3, 2)\}$是 μ 的一个 2-横截集，其 α-权重为 $w_\alpha(S') = 1$。每个着色单元格都标注了相对于 S 和 S'的下钩长。

第一个等式由方程（1）得出，第二个等式则是将公式 (2)应用于从 λ中移除 $\lambda_1 - k$ 列所得到的每个 μ 形状，从而得到 $\mu_1 = k$。注意，对于所有 $\ell > \lambda_1$ ，不存在满足 $\mu \preceq_\ell \lambda$ 的 μ 。重新编排定理 6 并应用上述恒等式可得

$$\eta_\alpha^\lambda = \sum_{k=0}^{|\lambda|} \frac{(-1)^{|\lambda|-k}}{k!} J_k^\star(\lambda) = \sum_{k=0}^{\lambda_1} \frac{(-1)^{|\lambda|-k}}{k!} J_k^\star(\lambda) = (-1)^{|\lambda|-\lambda_1} \sum_{k=0}^{\lambda_1} (-1)^k \sum_{\mu \preceq_k \lambda} H_*^1(\mu),$$

正如所要求的。 □

现在，我们准备使用容斥原理，为 $\alpha = 1$,2 给出定理 1 的一个初等组合证明。这是因为 λ-带色排列$\mathcal{S}_\lambda$ （定义见第 1 节）和 λ-有色完美匹配 $\mathcal{M}_\lambda$ （定义见下文）都是真正的组合对象，而它们的基数由主下钩积计数。

定理8。 [11] 对于任意形状 λ，我们有

$$|\mathcal{S}_\lambda|, |\mathcal{M}_\lambda| = H_*^1(\lambda)$$

分别对应 $\alpha = 1$和2。

对于每个 $i \in [2n] := \{1, 2, \ldots, n\}$，我们指定一个颜色列表 $L(i)$，使得对于所有奇数 i，都有 $L(i) = L(i+1)$。有色完美匹配(c, m)是指对颜色 $c = c_1, c_2, \ldots, c_n$的一种指派，使得 $c_i \in L(i)$，并且存在一个完美匹配 $m \in \mathcal{M}_{2n}$ ，满足 $m(i) = j \Rightarrow c_i = c_j$，其中$m(i)$表示完美匹配 m中 i 的配对元素。任意分拆 λ 都在符号集 $[2\lambda_1]$ 的每个元素 i 上定义一个颜色列表，方法是令 $L(i) = L(i + 1) = [\lambda'_i]$。令 $\mathcal{M}_\lambda$ 为所有此类有色完美匹配的集合，形式化地说，

$$\mathcal{M}_\lambda := \{(c \in [\lambda'_1] \times \cdots \times [\lambda'_{\lambda_1}], m \in \mathcal{M}_{2\lambda_1}) : m(i) = j \Rightarrow c_i = c_j \text{ for all } i \in [2\lambda_1]\}.$$

我们称有色完美匹配 $(c, m) \in \mathcal{M}_\lambda$ 是错排，当 $m(i) = i + 1 \Rightarrow c_i \neq 1$ 对所有奇数 $1 \leqslant i < 2\lambda_1$均成立时。这些有色完美匹配与 $(1, \ldots, 1, \{\{1, 2\}, \ldots, \{2\lambda_1 - 1, 2\lambda_1\}\})$ $\in \mathcal{M}_\lambda$没有公共边。令 $\mathcal{D}'_\lambda$为 $\mathcal{M}_\lambda$的错排集合。

对于 $\alpha = 1$、2 的定理1证明。令 $\alpha = 1$。带色排列的一个不动点是一个符号 i，使得 $c(i) = 1$ 且 $\sigma(i) = i$。考虑求和 $\sum_{\mu \preceq_k \lambda} H_*^1(\mu)$，其遍历通过从 λ中移除 k 列而得到的每个形状 μ 。对于此求和中的每个 μ ，从 λ 中移除的 k 列的指标 $I \subseteq [\lambda_1]$ 对应于一个 λ-带色排列的 k 个不动点，而剩余列上的有色排列数量由 $H_*^1(\mu)$ 计数。因此，它计算 λ-带色

每个都有 $i \in I$ 作为不动点的排列。这样会重复计数 λ 颜色排列的数量，其中 I 恰好是不动点的集合，因此我们必须排除那些 λ 颜色排列，其中 I 是其不动点集合的真子集。因此，根据容斥原理，定理 7 中针对 $\alpha = 1$ 的交错和计算的是恰好有 0 个不动点的 λ 颜色排列，正如所需。

$\alpha = 2$ 的证明经过相应调整后完全相同，并得出 $\eta_2^\lambda = (-1)^{|\lambda|-\lambda_1}|\mathcal{D}'_\lambda| = (-1)^{|\lambda|-\lambda_1} D_2^\lambda$；最后一个等式是留给读者的组合练习。 □

在第 6 节中，我们将上述证明推广到所有 $\alpha \in \mathbb{R}$；与此同时，我们还汇集了若干关于主下钩积的结果，这些结果或许也有独立价值，并使我们能够给出定理 1 的闭式表达式。此外，将其特化为 $\alpha = 1, 2$ 后，可以得到错排图特征值的优美表达式。对这类闭式表达式不感兴趣的读者，可以直接跳到第 6 节。

出于教学上的考虑，我们以 $\alpha = 0$ 的第一个主要结果的证明作为本节的结尾，因为证明很简单，也能帮助读者理解一般的 $\alpha \in \mathbb{R}$ 情形。

定理 9. 对所有 λ，我们有

$$\eta_0^\lambda = (-1)^{|\lambda|-\lambda_1} \prod_{i=1}^{\ell(\lambda')} (\lambda'_i - 1).$$

证明。设 $x = x_1, \ldots, x_n$ 是多项式 $p(z)$ 的根。回顾一下韦达公式

$$p(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - x_i) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k e_k(x_1, \cdots, x_n) z^{n-k}.$$

由定理 6，得

$$\eta_0^\lambda = \sum_{k=0}^{|\lambda|} (-1)^{|\lambda|-k} J_k^\star(\lambda)/k!.$$

对于 $\alpha = 0$，定理 7 蕴含 $J_k^\star(\lambda)/k! = |\mathcal{T}_\lambda^k|$，由此得到

$$\eta_0^\lambda = \sum_{k=0}^{|\lambda|} (-1)^{|\lambda|-k} J_k^\star(\lambda)/k! = (-1)^{|\lambda|} \sum_{k=0}^{|\lambda|} (-1)^k |\mathcal{T}_\lambda^k| = (-1)^{|\lambda|} \sum_{k=0}^{|\lambda|} (-1)^k e_k(\lambda').$$

将 $z = 1$ 和 $x = \lambda'$ 代入韦达公式，得

$$\eta_0^\lambda = (-1)^{|\lambda|} \prod_{i=1}^{\lambda_1} (1 - \lambda'_i) = (-1)^{|\lambda|-\lambda_1} \prod_{i=1}^{\ell(\lambda')} (\lambda'_i - 1),$$

正如所需。 □

要看出这证明了 $\alpha = 0$ 的定理 1，首先注意到，设定 $\alpha = 0$ 的效果是忽略 $T \in \mathcal{T}_\lambda^k$ 中单元格的臂长，因此我们将恒等置换 () 与每个 T 相关联。令

$$\mathcal{D}_0^\lambda = \{(c \in [\lambda'_1] \times \cdots \times [\lambda'_m], ()) : c(i) \neq 1 \text{ for all } i\} \subseteq \mathcal{D}^\lambda$$

是指不移动 $[\lambda_1]$ 中任何符号的错排。显然，$|\mathcal{D}_0^\lambda| = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda')} (\lambda'_i - 1)$，正如所需。显然，我们可以将 $\alpha = 0$ 处的 Jack 错排定义为避开符号1 的 $[\lambda'_1] \times \cdots \times [\lambda'_m]$ 的单词。对于 $\alpha \neq 0$，我们必须考虑单元格的臂长，这需要更详细地考察主下钩积。

5 主钩积的子式

在本节中，我们将证明一些有关主钩积的技术性引理，这些引理是定理 1 的闭式表达式所必需的。令 λ^{-i} 为从 λ 中移除第 i 列后得到的形状。令 $\lambda^{-i_1-i_2-\cdots-i_k}$ 为从 λ 中移除（互不相同的）列 $i_1, i_2, \ldots, i_k$ 后得到的形状。可以将 $H^1_*(\lambda^{-i})$ 视为 λ 的一阶子式，将 $H^1_*(\lambda^{-i_1-\cdots-i_k})$ 视为 λ 的 k 阶子式。i_j 的排列顺序无关紧要，即，

$$\lambda^{-i_1-i_2-\cdots-i_k} = \lambda^{-i_{\sigma(1)}-i_{\sigma(2)}-\cdots-i_{\sigma(k)}} \quad \text{for all } \sigma \in S_k.$$

令 $\lambda^{\underline{k}}$ 为从 λ中移除最后 k 列后得到的形状。此后我们采用简写$h_j := h^{\lambda}_*(1, j)$。引理 10 给出了一个类似拉普拉斯展开的公式，将主下钩积与其第一子式联系起来。

引理 10（拉普拉斯展开）。对于所有 λ，有

$$\sum_{i=1}^{\lambda_1} H^1_*(\lambda^{-i}) = \frac{1}{\alpha}\left(H^1_*(\lambda) + (\alpha - h_{\lambda_1})H^1_*(\lambda^{\underline{1}})\right), \ \textit{equivalently,}$$

$$H^1_*(\lambda) = \sum_{i=1}^{\lambda_1-1} \alpha H^1_*(\lambda^{-i}) + h_{\lambda_1} H^1_*(\lambda^{-\lambda_1}).$$

证明。令 $h'_j := h_j - \alpha$。我们可以用 λ的钩积表示 λ 的任意第一子式：

$$H^1_*(\lambda^{-i}) = \prod_{j<i} h'_j \prod_{j>i} h_j,$$

这意味着

$$\sum_{i=1}^{\lambda_1} \frac{H^1_*(\lambda^{-i})}{H^1_*(\lambda)} = \sum_{i=1}^{\lambda_1} \frac{1}{h_i} \prod_{j<i} \frac{h'_j}{h_j} = \frac{1}{h_1} + \cdots + \left[\prod_{j=1}^{\lambda_1-2} \frac{h'_j}{h_j}\right] \frac{1}{h_{\lambda_1-1}} + \left[\prod_{j=1}^{\lambda_1-2} \frac{h'_j}{h_j}\right] \frac{h'_{\lambda_1-1}}{h_{\lambda_1-1}} \frac{1}{h_{\lambda_1}}.$$

注意，当且仅当 $\alpha = 1$ 和 $h_{\lambda_1} = 1$时，这个和会望远镜式相消为 1。一般而言，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\lambda_1} \frac{H^1_*(\lambda^{-i})}{H^1_*(\lambda)} &= \frac{1}{h_1} + \cdots + \left[\prod_{j=1}^{\lambda_1-2} \frac{h'_j}{h_j}\right] \frac{1}{h_{\lambda_1-1}} + \left[\prod_{j=1}^{\lambda_1-1} \frac{h'_j}{h_j}\right] \frac{1}{h_{\lambda_1}} \\ &= 1 - \frac{(h_{\lambda_1}-1)}{h_{\lambda_1}} \prod_{j=1}^{\lambda_1-1} \frac{h'_j}{h_j} - (\alpha-1) \sum_{i=1}^{\lambda_1-1} \frac{h'_1}{h_1} \cdots \frac{h'_{\lambda_1-i-1}}{h_{\lambda_1-i-1}} \cdot \frac{1}{h_{\lambda_1-i}}.\end{aligned}$$

两边同时乘以 $H^1_*(\lambda)$，得到

$$\sum_{i=1}^{\lambda_1} H^1_*(\lambda^{-i}) = H^1_*(\lambda) - (h_{\lambda_1}-1)H^1_*(\lambda^{-\lambda_1}) - (\alpha-1)\sum_{i=1}^{\lambda_1-1} H^1_*(\lambda^{-i}). \tag{3}$$

重新排列各项，并注意到 $\lambda^{-\lambda_1} = \lambda^{\underline{1}}$，我们得到

$$\sum_{i=1}^{\lambda_1} H^1_*(\lambda^{-i}) = \frac{1}{\alpha}(H^1_*(\lambda) + (\alpha - h_{\lambda_1})H^1_*(\lambda^{\underline{1}})),$$

如所需。再次重新排列即可完成证明。 □

对于 $\alpha \geqslant 1$，现在我们可以简短地证明交错符号定理，并给出 Jack 错排和绝对值的一个实用上界。

Propo 位置 11。对于所有 $\alpha \geqslant 1$，我们有 sgn $\eta_\alpha^\lambda = (-1)^{|\lambda|-\lambda_1}$。此外，$|\eta_\alpha^\lambda| \leqslant H_*^1(\lambda)$.

证明。由于 $\alpha, h_{\lambda_1} \geqslant 1$，反复应用方程 (3) 可得

$$\sum_{\mu \preceq_{\lambda_1} \lambda} H_1^*(\mu) \leqslant \cdots \leqslant \sum_{\mu \preceq_1 \lambda} H_1^*(\mu) \leqslant H_1^*(\lambda). \tag{4}$$

如果 $|\lambda| - \lambda_1$ 是偶数，那么根据推论 7，我们有

$$0 \leqslant H_1^*(\lambda) - \sum_{\mu \preceq_1 \lambda} H_1^*(\mu) \leqslant \eta_\alpha^\lambda; \quad \text{otherwise}, \quad 0 \geqslant -H_1^*(\lambda) + \sum_{\mu \preceq_1 \lambda} H_1^*(\mu) \geqslant \eta_\alpha^\lambda,$$

即，sgn $\eta_\alpha^\lambda = (-1)^{|\lambda|-\lambda_1}$。该 $|\eta_\alpha^\lambda| \leqslant H_*^1(\lambda)$可由方程 (4) 和定理 7 推得。 □

对于任意 λ 和整数 $0 \leqslant j \leqslant \lambda_1 - 1$，令

$$f_\lambda^*(j) := \prod_{i=0}^{j} ((j+1)\alpha - h_{\lambda_1 - i}),$$

并定义 $f_\lambda^*(j) := 1$，对所有负整数 j均成立。为证明下一个引理，定义以下相关量将很有用：

$$f_\lambda^*(j,i) := \prod_{l=0}^{j-i} ((j+1)\alpha - h_{\lambda_1 - l}) \prod_{l=j-i+1}^{j} ((j+2)\alpha - h_{\lambda_1 - l - 1}).$$

换言之，$f_\lambda^*(j,i)$ 是通过将最后 i 个因子 $f_\lambda^*(j)$ 中的 α 系数加 1，同时将钩指标减 1 而得到的函数。引理 12 是引理 10 的推广，并将导出定理 5.12] 的一个更明确版本。

引理 12. 对所有形状 λ 和 $0 \leqslant j \leqslant \lambda_1 - 1$，有

$$\sum_{i=1}^{\lambda_1} f_{\lambda^{-i}}^*(j-1)\ H_*^1((\lambda^{-i})\underline{j}) = \frac{1}{\alpha}\left(f_\lambda^*(j-1)\ H_*^1(\lambda\underline{j}) + f_\lambda^*(j)\ H_*^1(\lambda\underline{\underline{j+1}})\right).$$

证明. 我们先列出几个容易验证的组合事实。

1. 对所有 j，有 $h_{(\lambda^{-i})_1 - j} = h_{\lambda_1 - j}$，若 $i \leqslant \lambda_1 - j$；否则，$h_{(\lambda^{-i})_1 - j} = h_{\lambda_1 - 1 - j} - \alpha$。
2. 对所有 $i \leqslant \lambda_1 - j$，有 $(\lambda^{-i})\underline{j} = (\lambda\underline{j})^{-i}$。 3. 对所有 $i > \lambda_1 - j$，有 $(\lambda^{-i})\underline{j} = \lambda\underline{\underline{j+1}}$。
4. 对所有 j，有 $h_{(\lambda\underline{j})_1} = h_{\lambda_1 - j} - j\alpha$。

前三个事实使我们能够将求和拆分如下：

$$\sum_{i=1}^{\lambda_1} f_{\lambda^{-i}}^*(j-1)\ H_*^1((\lambda^{-i})\underline{j}) = f_\lambda^*(j-1) \sum_{i=1}^{\lambda_1 - j} H_*^1((\lambda\underline{j})^{-i}) + \sum_{i=1}^{j} f_\lambda^*(j-1, i)\ H_*^1(\lambda\underline{\underline{j+1}}).$$

由引理 10 和最后一个事实可得

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\alpha}\left(f^*_\lambda(j-1)\left(H^1_*(\lambda^{\underline{j}}) + (\alpha - h_{\lambda^{\underline{j}}_1})H^1_*(\lambda^{\underline{j+1}})\right) + \alpha\sum_{i=1}^{j} f^*_\lambda(j-1,i)H^1_*(\lambda^{\underline{j+1}})\right)\\
&= \frac{1}{\alpha}\left(f^*_\lambda(j-1)\left(H^1_*(\lambda^{\underline{j}}) + ((j+1)\alpha - h_{\lambda_1-j})H^1_*(\lambda^{\underline{j+1}})\right) + \alpha\sum_{i=1}^{j} f^*_\lambda(j-1,i)H^1_*(\lambda^{\underline{j+1}})\right)\\
&= \frac{1}{\alpha}\left(f^*_\lambda(j-1)H^1_*(\lambda^{\underline{j}}) + \left[((j+1)\alpha - h_{\lambda_1-j})f^*_\lambda(j-1,0) + \alpha\sum_{i=1}^{j} f^*_\lambda(j-1,i)\right]H^1_*(\lambda^{\underline{j+1}})\right).
\end{aligned}
$$

只需证明括号中的因子等于 $f^*_\lambda(j)$。我们可以将求和写成

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{j} f^*_\lambda(j-1,i) = (j\alpha - h_{\lambda_1})\cdots(j\alpha - h_{\lambda_1-j+2}) \;\cdot\; ((j+1)\alpha - h_{\lambda_1-j}) +\\
\vdots\\
(j\alpha - h_{\lambda_1})(j\alpha - h_{\lambda_1-1}) \;\cdot\; ((j+1)\alpha - h_{\lambda_1-3}) \;\cdots\; ((j+1)\alpha - h_{\lambda_1-j}) +\\
(j\alpha - h_{\lambda_1}) \;\cdot\; ((j+1)\alpha - h_{\lambda_1-2}) \;\cdots\; ((j+1)\alpha - h_{\lambda_1-j}) +\\
((j+1)\alpha - h_{\lambda_1-1}) \;\cdots\; ((j+1)\alpha - h_{\lambda_1-j}).
\end{aligned}
$$

我们可以将其写成

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{j} f^*_\lambda(j-1,i) = ((j+1)\alpha - h_{\lambda_1-j})\;[\;(j\alpha - h_{\lambda_1})\cdots(j\alpha - h_{\lambda_1-j+2})\\
+ ((j+1)\alpha - h_{\lambda_1-(j-1)})\;[\;(j\alpha - h_{\lambda_1})\cdots(j\alpha - h_{\lambda_1-j+3})\\
+ ((j+1)\alpha - h_{\lambda_1-(j-2)})\;[\;(j\alpha - h_{\lambda_1})\cdots(j\alpha - h_{\lambda_1-j+4})\\
\vdots\\
+ ((j+1)\alpha - h_{\lambda_1-1})\;]\cdots].
\end{aligned}
$$

我们可以提取 $((j+1)\alpha - h_{\lambda_1-j})$，剩下

$$
\begin{aligned}
(j\alpha - h_{\lambda_1})\cdots(j\alpha - h_{\lambda_1-j+2}) + ((j+1)\alpha - h_{\lambda_1-j+1})\;[\;(j\alpha - h_{\lambda_1})\cdots(j\alpha - h_{\lambda_1-j+3})\\
+ ((j+1)\alpha - h_{\lambda_1-j+2})\;[\;(j\alpha - h_{\lambda_1})\cdots(j\alpha - h_{\lambda_1-j+4})\\
\vdots\\
+ ((j+1)\alpha - h_{\lambda_1-1})\;]\cdots].
\end{aligned}
$$

我们有

$$\alpha(j\alpha - h_{\lambda_1})\cdots(j\alpha - h_{\lambda_1-j+2}) + f^*_\lambda(j-1,0) = (j\alpha - h_{\lambda_1})\cdots(j\alpha - h_{\lambda_1-j+2})((j+1)\alpha - h_{\lambda_1-j+1}),$$

因此我们可以提取 $((j+1)\alpha - h_{\lambda_1-j+1})$。以此类推，可得

$$= \frac{1}{\alpha}\left(f^*_\lambda(j-1)H^1_*(\lambda^{\underline{j}}) + f^*_\lambda(j)H^1_*(\lambda^{\underline{j+1}})\right),$$

如所需。 □

定理13 是 [1, 定理 5.12], 的一个更明确形式，或许具有独立意义。

定理 13. 对于所有 λ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$，我们有

$$\frac{J^\star_{\lambda_1-k}(\lambda)}{(\lambda_1-k)!} = \sum_{\mu \preceq_k \lambda} H^1_*(\mu) = \frac{1}{\alpha^k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \frac{\prod_{i=1}^{\lambda_1}(h_i - j\alpha)}{(k-j)!j!}, \ \textit{equivalently,}$$

$$\frac{H^*_k}{(\lambda_1-k)!}J^\star_{\lambda_1-k}(\lambda) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j \binom{k}{j}\prod_{i=1}^{\lambda_1}(h_i - j\alpha).$$

证明。首先，注意到

$$k!\sum_{\mu \preceq_k \lambda} H^1_*(\mu) = \sum_{\substack{\text{distinct } i_1,\cdots,i_k \\ i_j \in [\lambda_1]}} H^1_*(\lambda^{-i_1-\cdots-i_k}) = \sum_{\mu \preceq_1 \lambda}\ \sum_{\nu^1 \preceq_1 \mu}\cdots\sum_{\nu^{k-1} \preceq_1 \nu^{k-2}} H^1_*(\nu^{k-1}),$$

因此只需证明

$$\sum_{\mu \preceq_1 \lambda}\ \sum_{\nu^1 \preceq_1 \mu}\cdots\sum_{\nu^{k-1} \preceq_1 \nu^{k-2}} H^1_*(\nu^{k-1}) = \frac{1}{\alpha^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} f^*_\lambda(j-1)H^1_*(\lambda^{\underline{j}}).$$

我们对 k进行归纳法。将归纳假设应用于每个 $\lambda^{-i} \preceq_1 \lambda$，得到

$$k!\sum_{\mu \preceq_k \lambda} H^1_*(\mu) = \frac{1}{\alpha^{k-1}}\sum_{i=1}^{\lambda_1}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}\ f^*_{\lambda^{-i}}(j-1)\ H^1_*((\lambda^{-i})^{\underline{j}}).$$

交换求和次序，然后对每个内层和应用引理 12，可得

$$k!\sum_{\mu \preceq_k \lambda} H^1_*(\mu) = \frac{1}{\alpha^k}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}\left[f^*_\lambda(j-1)H^1_*(\lambda^{\underline{j}}) + f^*_\lambda(j)H^1_*(\lambda^{\underline{j+1}})\right].$$

帕斯卡公式意味着

$$k!\sum_{\mu \preceq_k \lambda} H^1_*(\mu) = \frac{1}{\alpha^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\ f^*_\lambda(j-1)H^1_*(\lambda^{\underline{j}}).$$

最后，我们有

$$f^*_\lambda(j-1)H^1_*(\lambda^{\underline{j}}) = \prod_{i=0}^{j-1}(j\alpha - h_{\lambda_1-i})\prod_{i=1}^{\lambda_1-j}(h_i - j\alpha) = (-1)^j\prod_{i=1}^{\lambda_1}(h_i - j\alpha),$$

由此完成证明。 □

熟悉影子演算或有限差分演算的人，可能会将定理13 中第二个等式的右端识别为单变量 λ_1 次多项式的本质上为 k 阶前向差分 Δ^k

$$\mathbf{H}^1_*(\lambda, x) := \prod_{i=1}^{\lambda_1}(h_i - x\alpha)$$

在原点处的 x，即，

$$\frac{H^*_{(k)}}{(\lambda_1-k)!}J^\star_{\lambda_1-k}(\lambda) = (-1)^k\Delta^k[\mathbf{H}^1_*(\lambda, x)](0) \tag{5}$$

其中，对于任意函数 $f(x)$，$\Delta^k[f](x) := \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}f(x+i)$。这类前向差分与下降阶乘基中的多项式插值有关

$$x^{\underline{k}} := x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1),$$

特别是，点集 $S = \{(x_i, p(x_i))\}_{i=0}^{d}$ 的牛顿（插值）多项式 $N(x)$：

$$N(x) := [p(x_0)]x^{\underline{0}} + [p(x_0), p(x_1)]x^{\underline{1}} + \cdots + [p(x_0), p(x_1), \ldots, p(x_d)]x^{\underline{d}}$$

其中，$[p(x_0)\ldots, p(x_j)]$ 是所谓的第 j 阶差商的记号。注意，如果$p(x)$ 是次数为 d 的多项式且 $|S| > d+1$，那么对于所有 $j > d$，都有 $[p(x_0)\ldots, p(x_j)] = 0$。

最后，我们回顾一个众所周知的事实：如果对于所有 $0 \leqslant i \leqslant d$ 都有 $x_i = i$，那么

$$[p(x_0), p(x_1), \ldots, p(x_j)] = \frac{\Delta^j[p](0)}{j!},$$

而牛顿插值多项式的形式为

$$N(x) = \frac{p(0)}{0!}x^{\underline{0}} + \frac{\Delta^1[p](0)}{1!}x^{\underline{1}} + \cdots + \frac{\Delta^d[p](0)}{d!}x^{\underline{d}}. \tag{6}$$

关于有限差分演算及其与组合学的联系，更深入的讨论请参阅 Stanley [47, 第 1 章。9]

在下一节中，我们将证明，每个 Jack 错排数都是一个牛顿多项式的系数之和。

6 定理 1 的证明

基于前几节的结果，本节给出定理 1 的证明。对于所有 $j > 0$，定义

$$H_*^1(\lambda, j) := \prod_{i=1}^{\lambda_1}(h_i - j\alpha)$$

为 j-平移主下钩积。将平移主下钩积视为关于 x 的一元多项式会很方便，即

$$\mathbf{H}_*^1(\lambda, x) := \prod_{i=1}^{\lambda_1}(h_i - x\alpha).$$

我们用 $d_{n\,k}^{(\alpha)}$，表示错位排列数的 α-推广，即

$$d_{n,k}^{(\alpha)} := \frac{\alpha^n n!}{\alpha^k k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{\alpha^i i!}.$$

对于 $\alpha = 1$，错位排列数 $d_{n,\,k} := d_{n\,k}^{(1)}$，统计了 S_n 的置换中恰有 k 个不动点的个数。

定理 14. 对所有 λ、$\alpha \in \mathbb{R}$ 和 $n \geqslant \lambda_1$，我们有

$$\eta_\alpha^\lambda = (-1)^{|\lambda|-\lambda_1}\frac{1}{\alpha^n n!}\sum_{j=0}^{n} d_{n,j}^{(\alpha)}H_*^1(\lambda, j).$$

证明。根据定理 7，我们有

$$\eta_\alpha^\lambda = (-1)^{|\lambda|-\lambda_1}\sum_{k=0}^{\lambda_1}(-1)^k\sum_{\mu\preceq_k\lambda}H_*^1(\mu).$$

根据定理 13，我们有

$$= (-1)^{|\lambda|-\lambda_1}\sum_{k=0}^{\lambda_1}\frac{(-1)^k}{\alpha^k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\frac{H_*^1(\lambda,j)}{(k-j)!j!}.$$

交换求和次序可得

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{|\lambda|-\lambda_1}\sum_{j=0}^{\lambda_1}\sum_{k=j}^{\lambda_1}\frac{(-1)^{k-j}}{\alpha^k}\frac{H_*^1(\lambda,j)}{(k-j)!j!}\\
&= (-1)^{|\lambda|-\lambda_1}\sum_{j=0}^{\lambda_1}\frac{H_*^1(\lambda,j)}{\alpha^j j!}\sum_{k=j}^{\lambda_1}\frac{(-1)^{k-j}}{\alpha^{k-j}(k-j)!}\\
&= (-1)^{|\lambda|-\lambda_1}\frac{1}{\alpha^{\lambda_1}\lambda_1!}\sum_{j=0}^{\lambda_1}d_{\lambda_1,j}^{(\alpha)}H_*^1(\lambda,j),
\end{aligned}$$

这就证明了 $n=\lambda_1$ 的情形。由于 $\mathbf{H}_*^1(\lambda,x)$ 的次数为 λ_1，因此，对于所有 $n>\lambda_1$，$\mathbf{H}_*^1(\lambda,x)$ 在原点处的 n 阶前向差分 Δ^n 都为零。因此，我们有

$$\sum_{k=0}^{\lambda_1}\frac{1}{\alpha^k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\frac{H_*^1(\lambda,j)}{(k-j)!j!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\alpha^k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\frac{H_*^1(\lambda,j)}{(k-j)!j!}$$

对于所有 $n\geqslant\lambda_1$，因此

$$\eta_\alpha^\lambda = (-1)^{|\lambda|-\lambda_1}\frac{1}{\alpha^n n!}\sum_{j=0}^{n}d_{n,j}^{(\alpha)}H_*^1(\lambda,j),$$

正如所需。 □

定理 14 使我们能够将 Jack 错排和与泊松分布联系起来。对于所有 $\alpha\in\mathbb{R}$，通过简单的归纳法可得 $\sum_{j=0}^{n}d_n^{(\alpha)}{}_{,\,j}/\alpha^n n!=1$，此外还有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d_{n,k}^{(\alpha)}}{\alpha^n n!} = \frac{e^{-1/\alpha}}{\alpha^k k!}.$$

对于 $\alpha>0$，极限分布是期望值为 $1/\alpha$ 的泊松分布。取极限后，对于所有 $\alpha\in\mathbb{R}$，我们有

$$\eta_\alpha^\lambda = (-1)^{|\lambda|-\lambda_1}e^{-1/\alpha}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{H_*^1(\lambda,x)}{\alpha^x x!}. \tag{7}$$

对于 $\alpha>0$，我们可以将 Jack 错排和解释为泊松分布的某种“广义阶乘矩”（差一个符号），即，

$$\eta_\alpha^\lambda = (-1)^{|\lambda|-\lambda_1}\mathbb{E}[\mathbf{H}_*^1(\lambda,x)].$$

这些矩的组合解释将作为定理 1 的推论得出。众所周知，泊松分布的阶乘矩有着非常简单的形式。对于所有 $\alpha \in \mathbb{R}$，我们有

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\underline{k}_\alpha}}{\alpha^x x!} = e^{1/\alpha} \tag{8}$$

其中 $x^{\underline{k}_\alpha} := \alpha^k x^{\underline{k}}$。根据公式 (7)，上述内容表明，我们应将多项式 $\mathbf{H}^1_*(\lambda, x)$ 表示在 α-下降阶乘基 $\{x^{\underline{k}_\alpha}\}$ 中；下文将针对满足 $\lambda_1 = 1$、2、3 的 λ 确定该基。

若 $\lambda_1 = 1$，则有 $\mathbf{H}^1_*(\lambda, x) = -x^{\underline{1}_\alpha} + \lambda'_1 x^{\underline{0}_\alpha}$。若 $\lambda_1 = 2$，则有

$$\mathbf{H}^1_*(\lambda, x) = x^{\underline{2}_\alpha} - (\lambda'_2 + \lambda'_1)x^{\underline{1}_\alpha} + \lambda'_2(\alpha + \lambda'_1)x^{\underline{0}_\alpha}.$$

若 $\lambda_1 = 3$，则可将 $\mathbf{H}^1_*(\lambda, x)$ 写为

$$-x^{\underline{3}_\alpha} + (\lambda'_3 + \lambda'_2 + \lambda'_1)x^{\underline{2}_\alpha} - ((\alpha + \lambda'_1)\lambda'_3 + (\alpha + \lambda'_1)\lambda'_2 + (\alpha + \lambda'_2)\lambda'_3)x^{\underline{1}_\alpha} + \lambda'_3(\alpha + \lambda'_2)(2\alpha + \lambda'_1).$$

事实上，下面的命题表明，将 $\mathbf{H}^1_*(\lambda, x)$ 表示在α-下降阶乘基中时，其每个系数都是多项式 $c^\lambda_k(\alpha)$，并且具有组合解释。

ˆ 命题 15. 设 λ 是从 λ 中去掉第一列后得到的分拆，并设 $\#\mathrm{cyc}(\sigma)$ 表示置换 σ 的循环数。对于所有 $\alpha \in \mathbb{R}$，有

$$\mathbf{H}^1_*(\lambda, x) = \sum_{k=0}^{\lambda_1} c^\lambda_k(\alpha) x^{\underline{k}_\alpha}$$

ˆ ˆ其中 $c^\lambda_k(\alpha) = (\alpha(\lambda_1 - 1 - k) + \lambda'_1)c^\lambda_k(\alpha) - c^\lambda_{k-1}(\alpha)$，$c^\lambda_k(\alpha) := 0$ 若 $k > \lambda_1$，$c^\lambda_{-1}(\alpha) := 0$。此外，我们有

$$(-1)^k[\alpha^{\lambda_1 - k - j}]c^\lambda_k(\alpha) = \sum_{\substack{I\subseteq[\lambda_1]\\ |I|=k}} |\{(c,\sigma) \in \mathcal{S}_\lambda : \#\mathrm{cyc}(\sigma) = k + j \text{ and } c_i = 1, \sigma(i) = i\ \forall i \in I\}|.$$

证明。根据归纳法，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}^1_*(\lambda, x) &= (\alpha((\lambda_1 - 1) - x) + \lambda'_1) \sum_{k=0}^{\lambda_1 - 1} c^{\hat{\lambda}}_k(\alpha) x^{\underline{k}_\alpha} \\
&= \alpha(\lambda_1 - 1 - x) \sum_{k=0}^{\lambda_1 - 1} c^{\hat{\lambda}}_k(\alpha) x^{\underline{k}_\alpha} + \lambda'_1 \sum_{k=0}^{\lambda_1 - 1} c^{\hat{\lambda}}_k(\alpha) x^{\underline{k}_\alpha} \\
&= \sum_{k=0}^{\lambda_1 - 1} (\alpha(\lambda_1 - 1 - k) - \alpha(x - k))c^{\hat{\lambda}}_k(\alpha) x^{\underline{k}_\alpha} + \lambda'_1 \sum_{k=0}^{\lambda_1 - 1} c^{\hat{\lambda}}_k(\alpha) x^{\underline{k}_\alpha} \\
&= \sum_{k=0}^{\lambda_1 - 1} (\alpha(\lambda_1 - 1 - k)c^{\hat{\lambda}}_k(\alpha) x^{\underline{k}_\alpha} - c^{\hat{\lambda}}_k(\alpha) x^{\underline{k+1}_\alpha}) + \lambda'_1 \sum_{k=0}^{\lambda_1 - 1} c^{\hat{\lambda}}_k(\alpha) x^{\underline{k}_\alpha} \\
&= \sum_{k=0}^{\lambda_1 - 1} (\alpha(\lambda_1 - 1 - k) + \lambda'_1)c^{\hat{\lambda}}_k(\alpha) x^{\underline{k}_\alpha} - c^{\hat{\lambda}}_k(\alpha) x^{\underline{k+1}_\alpha}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} [(\alpha(\lambda_1 - 1 - k) + \lambda'_1)c^{\hat{\lambda}}_k(\alpha) - c^{\hat{\lambda}}_{k-1}(\alpha)] x^{\underline{k}_\alpha} \\
&= \sum_{k=0}^{\lambda_1} c^\lambda_k(\alpha) x^{\underline{k}_\alpha},
\end{aligned}$$

这证明了第一个结论。为证明第二个结论，注意递推关系表明 $\operatorname{sgn} c_k^\lambda(\alpha) = (-1)^k$。参数 α 记录了将一个由 λ种颜色标记的循环（它不是 k个单元素循环之一）接入的 $\lambda_1 - 1 - k$ 种方式。共有 $\hat{}\lambda_1'$ 种不接入带 λ颜色的置换的方式。在这些方式中，选择 $(1,1) \in \lambda$ 会产生一个不动点 $1 \in I$，剩下的 $I \subseteq [\lambda_1] \setminus \{1\}$个元素有 $k-1$ 种选择。˙因此，我们加上 $|c_{k-1}^\lambda(\alpha)|$，从而完成证明。 □

定理 1 的证明。由公式 (7)，只需证明

$$e^{-1/\alpha} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{H_*^1(\lambda, x)}{\alpha^x x!} = \sum_{j=0}^{\lambda_1} d_j^\lambda \alpha^{\lambda_1 - j} = D_\alpha^\lambda.$$

回顾一下，$c_k^\lambda(\alpha) = [x^{\underline{k}_\alpha}] H_*^1(\lambda, x)$ 是将 $H_*^1(\lambda, x)$ 表示为 α-下降阶乘基时的 $x^{\underline{k}_\alpha}$-系数。由命题 15 和公式 (8)，我们有

$$\begin{aligned} e^{-1/\alpha} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{H_*^1(\lambda, x)}{\alpha^x x!} &= e^{-1/\alpha} \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lambda_1} \frac{c_k^\lambda(\alpha) x^{\underline{k}_\alpha}}{\alpha^x x!} \\ &= e^{-1/\alpha} \sum_{k=0}^{\lambda_1} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{c_k^\lambda(\alpha) x^{\underline{k}_\alpha}}{\alpha^x x!}. \\ &= \sum_{k=0}^{\lambda_1} c_k^\lambda(\alpha). \end{aligned}$$

由容斥原理，我们有

$$= \sum_{j=0}^{\lambda_1} d_j^\lambda \alpha^{\lambda_1 - j} = D_\alpha^\lambda,$$

这就完成了我们的第一个主要结果的证明。 □

7 推论 2、3 和 4 的证明

借助定理 掌握定理 1 后，我们现在简要证明第 1 节中陈述的推论。 .

推论 2 的证明。显然，对所有 $\alpha \geqslant 0$，$D_\alpha^\lambda \geqslant 0$，因此结论由定理 1 得证。 □

推论 3 的证明。根据命题5和归纳法，只需对满足 $\mu \nearrow \lambda$ 的 μ、λ 证明该结论（关于支配序的回顾见第 2 节 $\trianglelefteq$）。令 i 为外角所在的列，j 为内角所在的列。注意到 $i < j$。

根据定理 1，对所有 ν，我们有 $|\eta_\alpha^\nu| = \sum_{k=1}^{\nu_1} d_k^\nu \alpha^{\nu_1 - k}$，因此只需证明对所有 k，$d_k^\mu \leqslant d_k^\lambda$，也就是说，带颜色错排 (c, σ) 中恰有 k 个不相交循环的数量不会因符号 i 失去颜色 $b := \mu_i'$、符号 j 获得颜色 $a := \lambda_j' = \mu_j' + 1$ 而减少。为此，我们如下给出一个单射映射 ϕ_k：对所有 k，$\mathcal{D}_k^\mu \to \mathcal{D}_k^\lambda$。

首先，由于 $i < j$，我们有 $b > a$。如果 $c_i \neq b$，那么 $\phi_k(c, \sigma) = (c, \sigma) \in \mathcal{D}_k^\lambda$。如果 $c_i = b$，那么 $\phi_k(c, \sigma) = (c', (i\ j)\sigma(i\ j))$，其中着色 c' 的定义见下文（注意，ϕ_k 确实是良定义的，因为我们有 $\mu_1 = \lambda_1$，即 μ-有色排列和 λ-有色排列定义在同一符号集 $[\lambda_1] = [\mu_1]$ 上）。

由于 $c_i = b$，符号 i 和 j 不属于 σ的同一个循环，因此 $c_i \neq c_j$。另外，回想一下，$(i\ j)\sigma(i\ j)$会重新标记 σ 的符号，使得 i 变为 j，反之亦然。令 I 为包含 i的 σ所在循环的符号集合。定义 $c_{i'}' := a$，对所有 $i' \in (I \cup \{j\}) \setminus \{i\}$

使 $(i\ j)\sigma(i\ j)$ 中 j 的循环里的所有符号都具有相同的颜色。定义 $c'_i := c_j$，使得 $(i\ j)\sigma(i\ j)$ 中 i 的循环里的所有符号都具有相同的颜色。最后，对于所有剩余符号 $l \notin I \cup \{j\}$，令 $c'_l := c_l$。显然，$(i\ j)\sigma(i\ j)$ 与 σ 具有相同的循环类型，因此可得 $\phi_k(c,\sigma) \in \mathcal{D}_k^\lambda$。同样显然的是，$\phi_k$ 的像中的每个 (c',σ') 都有唯一的原像；因此，对所有 k，ϕ_k 都是单射，证毕。 □

在证明推论 4（它刻画了 $\alpha \geqslant 1$ 的 Jack 错排的极值）之前，我们需要一个命题。该命题本质上是一个广为人知事实的 Jack 推广：从 S_n 中均匀随机抽取一个错排，其概率对于 $n \geqslant 4$ 大于 $1/3$。

命题 16. 对所有 $\alpha \geqslant 1$ 和 $n \geqslant 4$，我们有 $D_\alpha^{(n)} > H_*^{(n)}/3$。

证明. 根据我们的主要结果，我们有

$$\begin{aligned} D_\alpha^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} H_*^{(n-k)} \\ &= H_*^{(n)} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(\alpha(n-1)+1)(\alpha(n-2)+1)\cdots(\alpha(n-k)+1)} \end{aligned}$$

对于 $\alpha \geqslant 1$ 和 $k > 0$，我们有

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!(\alpha(n-1)+1)\cdots(\alpha(n-k)+1)} - \frac{n(n-1)\cdots(n-(k+1)+1)}{(k+1)!(\alpha(n-1)+1)\cdots(\alpha(n-(k+1))+1)} > 0.$$

对求和中的 $k \geqslant 4$ 项反复应用这一事实，得到

$$\begin{aligned} &> H_*^{(n)}[1 - \frac{n}{\alpha(n-1)+1} + \frac{n(n-1)}{2(\alpha(n-1)+1)(\alpha(n-2)+1)} \\ &\qquad - \frac{n(n-1)(n-2)}{6(\alpha(n-1)+1)(\alpha(n-2)+1)(\alpha(n-3)+1)}] \\ &\geqslant H_*^{(n)}/3, \end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由 $\alpha \geqslant 1$ 这一事实得出。 □

证明　推论 4。令 $\mu := (n-1, 1)$。由定理 1 和命题 16，我们有

$$\eta_\alpha^{(n)} = D_\alpha^{(n)}, \quad \text{and} \quad |\eta_\alpha^\mu| = D_\alpha^{(n)}/(\alpha(n-1)) > H_*^{(n)}/3(\alpha(n-1)).$$

由于 $\alpha \geqslant 1$，由命题 11 可得 $|\eta_\alpha^\lambda| \leqslant H_*^1(\lambda)$；因此，只需证明

$$H_*^1(\mu)/3 \geqslant H_*^1(\lambda) \quad \text{for all } \lambda \neq (n), \mu.$$

Re称 $h_\lambda(i,j) = a_\lambda(i,j) + l_\lambda(i,j) + 1$ 是 $(i,j) \in \lambda$ 的钩长。定义

$$A := \{h_*^\lambda(1,j)\}_{j=1}^{\lambda_1} \quad \text{and} \quad B := \{h_*^\mu(1,j)\}_{j=1}^{n-1}.$$

注意 $|A| < |B|$。现在定义第一行下钩长上的单射映射 ϕ

$$\phi : A \to B \quad \text{such that} \quad h_*^\lambda(1,j) \mapsto h_*^\mu(1,j')$$

其中 j' 是满足 $h_\lambda(1,j) \leqslant h_\mu(1,j')$ 的 μ 的最大列索引。由于 $a_\lambda(1,j) \leqslant a_\mu(1,j')$，我们有 $h_*^\lambda(1,j) \leqslant h_*^\mu(1,j')$。令 $\mathrm{im}\phi \subseteq B$ 为 ϕ 的像。根据 ϕ 的定义，我们有 $\prod_{a\in A} a \leqslant \prod_{b\in \text{像}\phi} b$。由于 $n \geqslant 6$，我们有 $3 \leqslant \prod_{b\notin \text{像}\phi} b$，因此

$$H_*^1(\lambda) = \prod_{a\in A} a \leqslant 3 \prod_{b\in \mathrm{im}\phi} b \leqslant H_*^1(\mu)/3,$$

按要求。 □

探索这些推论在 $\alpha \in \mathbb{R}$ 的其他取值范围内的情形可能会很有趣。计算实验表明，当 $\alpha < 0$时，Jack错排的表现截然不同，但也许在这一范围内，符号、相对大小和极值仍然存在一种优雅的刻画。利用推论3，还可以尝试将推论 4 扩展为对所有 Jack 错排和的全序。

8 置换错排图的特征值

第 1 节中提到的所有置换错排图特征值的递归表达式，均始于 [48, Ex. 7.63a], ，其中 Stanley 考察了以下求和

$$d_\lambda := \sum_{\pi \in D_n} \chi^\lambda(\pi)$$

并证明它　　可以用完全齐次对称函数表示:

$$\sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda s_\lambda = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} n^{\underline{k}} h_1^{n-k} h_{n-k}.$$

对于钩形，Stanley [48, Ex. 7.63b]和 Okazaki [35, Corollary 1.3] 均证明了

$$d_{(j,1^{n-j})} = (-1)^{n-j}\binom{n}{j}|D_j| + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{j} = (-1)^{n-j}\binom{n-1}{j}((n-j)|D_{j-1}| + |D_j|).$$

回顾第 1 节可知，$\eta_1^\lambda = d_\lambda / f^\lambda$ 其中 $f^\lambda := \chi^\lambda(1)$ 是形状为 λ 的标准杨表数量，以下结果将 Stanley 和 Okazaki 的结论推广到所有 λ。

推论 17。$d_\lambda = (-1)^{|\lambda|-\lambda_1} f^\lambda D^\lambda$。

这表明，可以根据形状为 λ 的标准杨表 t 以及带颜色错排 $(c, \sigma) \in \mathcal{D}^\lambda$，对 $|d_\lambda|$ 给出一种自然的组合解释。事实上，集合 $\mathcal{D}^\lambda$ 与定义在固定杨图 t 的 λ_1 个单元格上的排列 σ' 构成双射；该杨图的形状为 λ，且这些排列满足以下条件。

1. 如果 $\sigma'(i) = j$，那么包含 i 和 j 的单元格属于 t 的同一行。
2. 置换 σ' 中涉及的任意两个单元格都不位于 t 的同一列。
3. 如果 $\sigma'(i) = i$，那么包含 i 的单元格不属于 t 的第一行。

让 t 遍历所有形状为 λ 的标准杨表，即可得到所需的计数。对于 $\lambda = 1^n$，这给出了著名恒等式的一种截然不同的证明:

$$d_{1^n} = \sum_{\pi \in D_n} \operatorname{sgn}(\pi) = \sum_{\pi \in D_n} (-1)^{\operatorname{inv}(\pi)} = (-1)^{n-1}(n-1),$$

也就是说，t 奇错排数与偶错排数相差 $\pm(n-1)$。

回顾一下，定理 1 将 Jack 错排数表示为 α 中系数非负的多项式

$$D_\alpha^\lambda = d_1^\lambda \alpha^{\lambda_1 - 1} + d_2^\lambda \alpha^{\lambda_1 - 2} + \cdots + d_{\lambda_1}^\lambda$$

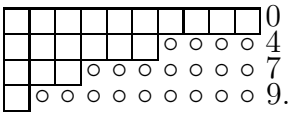
其中 d_k^λ 是恰有 k 个互不相交循环的 $\mathcal{D}^\lambda$ 带色排列数。这个公式的一个问题是，对于一般形状 λ，d_k^λ 的计算很困难，因为

它们至少和相应的第一类斯特林数一样难计算。定理 14 提供了一种更具体、但组合性较弱的形式；对于任意 α ，这似乎已是最佳结果。不过，对于 $\alpha = 1$，2，我们证明可以将定理 14 加以改写，得到一个关于我们称为扩展钩积的显式组合闭式。此外，我们还为 $\alpha = 1$ 推导出 η_1^{λ} [41, 定理 4.2] 的 Renteln 行列式公式。在开始之前，我们需要介绍几个简单但不常见的杨表理论定义。

令 λ^c 为 λ的补形，定义如下：

$$\lambda^c := (\lambda_1 - \lambda_1, \lambda_1 - \lambda_2, \cdots, \lambda_1 - \lambda_{\ell(\lambda)}).$$

换句话说， λ 的补形是形状 $(\lambda_1)^{\ell(\lambda)}$ 中不属于 λ的单元格子集。对于 $\lambda = (10, 6, 3, 1)$，补形 $\lambda^c = (0, 4, 7, 9)$就是下方的点集：



令 $\mathrm{rev}(\lambda^c)$ 表示将 λ^c的行顺序反转后得到的分拆。我们还令 $\mathrm{rev} : \lambda^c \to \mathrm{rev}(\lambda^c)$ 表示定义在它们的单元格上的自然双射，例如：

$$\mathrm{rev}\left(\begin{array}{r} u\ t\ s\ r \\ q\ p\ o\ n\ m\ l\ k \\ j\ i\ h\ g\ f\ e\ d\ c\ b\ a \end{array}\right) \quad = \quad \begin{array}{l} a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\ i\ j \\ k\ l\ m\ n\ o\ p\ q \\ r\ s\ t\ u \end{array} \quad .$$

对于任意单元格 $\square \in \lambda^c$，我们将其上钩长定义为 $h^*_{\lambda^c}(\square) = h^*_{\mathrm{rev}(\lambda^c)}(\mathrm{rev}(\square))$，下钩长的定义类似。例如，对于 $\alpha = 1$ 和 $\mu = (10, 6, 3, 1)$，其上钩长如下：

13	11	10	8	7	6	4	3	2	1
8	6	5	3	2	1	1	2	3	4
4	2	1	1	2	3	5	6	7	8
1	1	2	4	5	6	8	9	10	11

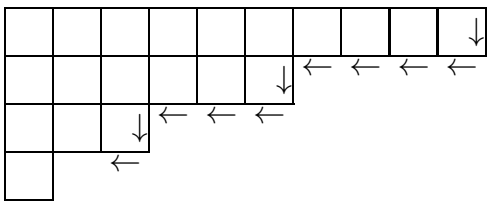
.

我们将扩展第 i 个主上钩积定义如下：

$$H_i^+(\lambda) := H_i^*(\lambda) H_i^*(\lambda^c).$$

继续上面的例子，我们看到 $H_3^+(\mu) = 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 8!/4 = 80640$。注意，$H_1^*(\lambda) = H_1^+(\lambda)$ 对所有 λ 均成立，因为 $(\lambda^c)_1 = 0$。

设 $p(\lambda) = p_0, p_1, ..., p_{\lambda_1}$ 为由 λ诱导的东北—西南格路上的前 $\lambda_1 + 1$ 条边的序列，例如，



.

设 $\nu(\lambda) := \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_l$ 是 p 的竖直边子序列的指标。不难看出，

$$\nu(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda_i + i - 1 : i - 1 \leqslant \lambda_i).$$

继续这个例子，我们有 $\nu(\mu) = 0$、5、9。注意，对于所有 λ， $\nu(\lambda)_1 = 0$ 。

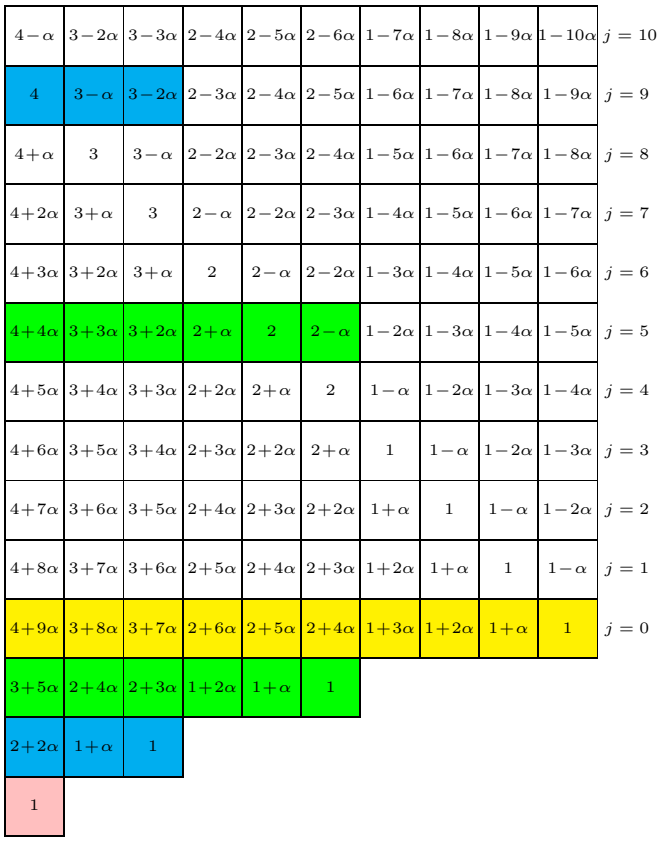


图 2： $\lambda = (10, 6, 3, 1)$ 的平移主下钩积。行 j 显示乘积 $H_*^1(\lambda, j)$。对于 $\alpha = 1$，任何未着色行上的钩长乘积均为 0， λ 第 2 行的钩长乘积等于 $j = 5$ 行中绿色单元格的乘积，而 λ 第 3 行的钩长乘积等于 $j = 9$ 行中蓝色单元格的乘积。定理 18 表明 $\eta_1^\lambda = p_{10,\ 0}[13!/(12 \cdot 9 \cdot 5)] + p_{10,\ 5}[8!4!/(7 \cdot 4)] - p_{10,\ 9}H_3^+(\lambda) = 4242315$（注意 $p_{10,\ 9} = 0$）。对于 $\alpha = 2$，有 $H_*^1(\lambda, j) = 0$，其中 $j = 5$ 为 6、7。

回顾第 6 节，$d_{n,\ k}$ 是第 k 个错位排列数，即恰好有 k 个不动点的 S_n 的置换数量。令 $p_{n,\ k} = d_{n,\ k}/n!$ 表示从 S_n 中均匀随机抽取一个恰好有 k 个不动点的置换的概率。 λ 的弗罗贝尼乌斯坐标为 $\lambda = (a_1、\ldots\ldots、a_d \mid b_1、\ldots\ldots、b_d)$，其中 $a_i := \lambda_i - i$ 表示第 i 行中对角线右侧的方格数， $b_i := \lambda_i' - i$ 表示第 i 列中对角线下方的方格数。默认情况下，我们定义 $a_{d+1} := -1$。现在，我们可以给出置换错排图 $\Gamma_{n,\ 1}$的特征值的漂亮闭式。

定理 18（$\boldsymbol{\Gamma_{n,\ 1}}$ 的特征值）。对于所有 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell) = (a_1, \ldots, a_d \mid b_1, \ldots, b_d) \vdash n$，我们有

$$\eta_1^\lambda = (-1)^n \sum_{i \leqslant \lambda_i + 1} (-1)^{\lambda_i} p_{\lambda_1, a_1 - a_i}\ H_i^+(\lambda)$$

证明。若存在某个 k 使得 $h_k = i$，则乘积 $\prod_{k=1}^{\lambda_1}(h_k - i)$ 为零；这当且仅当 $i \notin \nu(\lambda)$ 成立（示意见图 2）。否则，我们有 $H_i^+(\lambda) = |\prod_{k=1}^{\lambda_1}(h_k - i)|$，且 $\operatorname{sgn} \prod_{k=1}^{\lambda_1}(h_k - i) = (-1)^{\lambda_1 - \lambda_i}$。证明现在由定理 14 得出。 □

推论 19。 [7] 对于所有两行形状 $\lambda = (n - k, k)$，我们有

$$\eta_1^\lambda = \frac{(-1)^k d_{n-k+1,1} + (-1)^{n-k} d_{k,1}}{(n - 2k + 1)}.$$

证明。

$$\begin{aligned}
\eta_1^{(n-k,k)} &= \frac{1}{(n-k)!}\left((-1)^k d_{n-k,0}H_1(\lambda) + (-1)^{n-k}d_{n-k,n-2k+1}H_2^+(\lambda)\right)\\
&= \frac{1}{(n-k)!}\left((-1)^k d_{n-k,0}\frac{(n-k+1)!}{(n-2k+1)} + (-1)^{n-k}d_{n-k,n-2k+1}k!(n-2k)!\right)\\
&= (-1)^k d_{n-k,0}\frac{(n-k+1)}{(n-2k+1)} + (-1)^{n-k}\frac{d_{n-k,n-2k+1}}{\binom{n-k}{k}}\\
&= (-1)^k \frac{d_{n-k+1,1}}{(n-2k+1)} + (-1)^{n-k}\frac{\binom{n-k}{k-1}d_{k-1,0}}{\binom{n-k}{k}}\\
&= \frac{(-1)^k d_{n-k+1,1} + (-1)^{n-k}d_{k,1}}{(n-2k+1)}.
\end{aligned}$$

□

对于 e 为简化记号，令 $d'_{n,k} := k!d_{n,k}$（参见移位错排数 [41, §4]）.

推论 20. 对所有三行形状 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$，我们有

$$\eta^\lambda = \frac{(-1)^{|\lambda|-\lambda_1}d'_{\lambda_1+2,2}}{(\lambda_1-\lambda_3+2)(\lambda_1-\lambda_2+1)} + \frac{(-1)^{|\lambda|-\lambda_2}d'_{\lambda_2+1,2}}{(\lambda_1-\lambda_2+1)(\lambda_2-\lambda_3+1)} + \frac{(-1)^{|\lambda|-\lambda_3}d'_{\lambda_3,2}}{(\lambda_1-\lambda_3+2)(\lambda_2-\lambda_3+1)}.$$

证明。

$$\begin{aligned}
\eta_1^\lambda &= \frac{(-1)^{|\lambda|}}{\lambda_1!}\left((-1)^{\lambda_1}d_{\lambda_1,0}H_1(\lambda) + (-1)^{\lambda_2}d_{\lambda_1,\lambda_1-\lambda_2+1}H_2^+(\lambda) + (-1)^{\lambda_3}d_{\lambda_1,\lambda_1-\lambda_3+2}H_3^+(\lambda)\right)\\
&= \frac{(-1)^{|\lambda|-\lambda_1}d_{\lambda_1,0}(\lambda_1+2)!}{\lambda_1!(\lambda_1-\lambda_2+1)(\lambda_1-\lambda_3+2)} + \frac{(-1)^{|\lambda|-\lambda_2}d_{\lambda_1,\lambda_1-\lambda_2+1}(\lambda_2+1)!(\lambda_1-\lambda_2)!}{\lambda_1!(\lambda_2-\lambda_3+1)}\\
&\qquad + \frac{(-1)^{|\lambda|-\lambda_3}d_{\lambda_1,\lambda_1-\lambda_3+2}\lambda_3!(\lambda_1-\lambda_3+1)!}{\lambda_1!(\lambda_2-\lambda_3+1)}\\
&= \frac{(-1)^{|\lambda|-\lambda_1}d_{\lambda_1+2,2}}{(\lambda_1-\lambda_2+1)(\lambda_1-\lambda_3+2)} + \frac{(-1)^{|\lambda|-\lambda_2}d'_{\lambda_2+1,2}}{(\lambda_1-\lambda_2+1)(\lambda_2-\lambda_3+1)}\\
&\qquad + \frac{(-1)^{|\lambda|-\lambda_3}d'_{\lambda_3,2}}{(\lambda_1-\lambda_3+2)(\lambda_2-\lambda_3+1)}.
\end{aligned}$$

□

继续采用这种方式，对于包含更多部分的分拆，将上述表达式明确写出会变得极其繁琐；然而，它确实暗示了一个以行列式表示的紧凑表达式。令 $\ell := \ell(\lambda)$，并定义以下 $\ell \times \ell$ 矩阵：

$$W(\lambda) := \begin{bmatrix}
(-1)^{\lambda_1-\lambda_1+1-1}d'_{\lambda_1+\ell-1,\ell-1} & (\lambda_1-1)^{\ell-2} & (\lambda_1-1)^{\ell-3} & \cdots & 1\\
(-1)^{\lambda_1-\lambda_2+2-1}d'_{\lambda_2+\ell-2,\ell-1} & (\lambda_2-2)^{\ell-2} & (\lambda_2-2)^{\ell-3} & \cdots & 1\\
(-1)^{\lambda_1-\lambda_3+3-1}d'_{\lambda_3+\ell-3,\ell-1} & (\lambda_3-3)^{\ell-2} & (\lambda_3-3)^{\ell-3} & \cdots & 1\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots &
\end{bmatrix},$$

以及 $V(\lambda) := ((\lambda_i - i)^{j-1})_{i,j=1}^{\ell}$。显然，$V(\lambda)$ 是关于变量 $x_i = \lambda_i - i$ 的范德蒙德矩阵，而从 $W(\lambda)$ 中删去第一列，再删去任意一行所得到的任何子矩阵也都是范德蒙德矩阵。现在我们可以证明 η_1^λ 是一个行列式。

定理 21。 [41, 定理 4。2] 对于所有形状 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell)$，我们有

$$\eta_1^\lambda = \det W(\lambda) V(\lambda)^{-1}$$

证明。首先，我们声称 $H_+^k(\lambda)$ 可以写成范德蒙德行列式之比乘以一个比例因子，即，

$$\begin{aligned} H_+^k(\lambda) &= (\lambda_k - k + \ell)!(\lambda_1 - \lambda_k + k - 1)! \frac{\prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j + j - i)}{\prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j + j - i)} \\ &= \frac{(\lambda_k - k + \ell)!(\lambda_1 - \lambda_k + k - 1)!}{\prod_{i=k \text{ or } j=k}^{i<j} (\lambda_i - \lambda_j + j - i)}. \end{aligned}$$

显然，任意形状的第 k 个扩展主钩积都不可能大于 $(\lambda_k - k + \ell)!(\lambda_1 - \lambda_k + k - 1)!$。这里，我们将 $(\lambda_k - k + \ell)!$ 视为 λ_k 中单元格的所有可能钩长，即 $(\lambda_k - k + \ell)! \leqslant H_k^*(\lambda)$；将 $(\lambda_1 - \lambda_k + k - 1)!$ 视为 λ_k 右侧非单元格的所有可能钩长，即 $(\lambda_1 - \lambda_k + k - 1)! \leqslant H_k^*(\lambda^c)$。分母用于修正那些未出现在 $H_k^*(\lambda)$ 和 $H_k^*(\lambda^c)$ 中的钩长。事实上，当 $i < j = k$ 时，对于所有 i，数值 $(\lambda_i - \lambda_k + k - i)$ 是唯一未出现在 $H_k^+(\lambda)$ 中的钩长。类似地，当 $k = i < j$ 时，对于所有 j，数值 $(\lambda_k - \lambda_j + j - k)$ 是唯一未出现在 $H_k^+(\lambda^c)$ 中的钩长，这就证明了该结论。

由定理 14 可知，we have

$$\begin{aligned} \eta_1^\lambda &= \frac{(-1)^{\lambda_1}}{\lambda_1!} \sum_{k \leqslant \lambda_k + 1} (-1)^{\lambda_k} d_{\lambda_1, \lambda_1 - \lambda_k + k - 1} \frac{(\lambda_k - k + \ell)!(\lambda_1 - \lambda_k + k - 1)!}{\prod_{i=k \text{ or } j=k}^{i<j} (\lambda_i - \lambda_j + j - i)} \\ &= \frac{(-1)^{\lambda_1}}{\lambda_1!} \sum_{k \leqslant \lambda_k + 1} (-1)^{\lambda_k} \binom{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_k + k - 1} d_{\lambda_k - k + 1, 0} \frac{(\lambda_k - k + \ell)!(\lambda_1 - \lambda_k + k - 1)!}{\prod_{i=k \text{ or } j=k}^{i<j} (\lambda_i - \lambda_j + j - i)} \\ &= (-1)^{\lambda_1} \sum_{k \leqslant \lambda_k + 1} (-1)^{\lambda_k} \frac{d_{\lambda_k - k + 1, 0}}{(\lambda_k - k + 1)!} \frac{(\lambda_k - k + \ell)!}{\prod_{i=k \text{ or } j=k}^{i<j} (\lambda_i - \lambda_j + j - i)} \\ &= (-1)^{\lambda_1} \sum_{k \leqslant \lambda_k + 1} (-1)^{\lambda_k} \binom{\lambda_k - k + \ell}{\ell - 1} (\ell - 1)! \frac{d_{\lambda_k - k + 1, 0}}{\prod_{i=k \text{ or } j=k}^{i<j} (\lambda_i - \lambda_j + j - i)} \\ &= \sum_{k \leqslant \lambda_k + 1} (-1)^k \left((-1)^{\lambda_1 - \lambda_k + k} d'_{\lambda_k - k + \ell, \ell - 1} \right) \left(\frac{1}{\prod_{i=k \text{ or } j=k}^{i<j} (\lambda_i - \lambda_j + j - i)} \right). \end{aligned}$$

令 $W(\lambda)^{k,1}$ 为从 $W(\lambda)$ 中删去第一列和第 k 行后得到的子矩阵。于是我们有

$$= \frac{1}{\det V(\lambda)} \sum_{k \leqslant \lambda_k + 1} (-1)^{k+1} \left((-1)^{\lambda_1 - \lambda_k + k - 1} d'_{\lambda_k - k + \ell, \ell - 1} \right) \det W(\lambda)^{k,1}.$$

由于 $W(\lambda)_{k,\,1} = (-1)^{\lambda_1 - \lambda_k + k - 1} d'_{\lambda_k - k + \ell,\ \ell - 1}$，求和就是沿第一列对 $W(\lambda)$ 进行的拉普拉斯展开，也就是说，

$$= \frac{\det W(\lambda)}{\det V(\lambda)} = \det W(\lambda) V(\lambda)^{-1},$$

由此证明完成。 □

对称函数理论中的一个标准结果是， f^λ 可以通过雅可比–特鲁迪恒等式表示为一个行列式（参见 [48, 推论 7.16.3]），由此得到 [48,例 7.63a]的行列式表达式。

推论 22. [41] 对于所有形状 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell)$，我们有

$$d_\lambda = |\lambda|!\ \det\left(\frac{1}{\lambda_i - i + j}\right)_{i,j=1}^{\ell} \det W(\lambda) V(\lambda)^{-1}.$$

然而， d_λ 可以写成 $\ell \times \ell$ 矩阵的行列式这一事实，实际上可以追溯到 Goulden 和 Jackson 关于不变量行列式表达式的一项结果。不变量是永久式和行列式的 λ 推广，定义如下:

$$\mathrm{Imm}_\lambda(A) := \sum_{\pi \in S_n} \chi^\lambda(\pi) A_{i,\pi(i)}$$

其中 A 是任意 $n \times n$ 矩阵。事实上，如果我们考虑完全图 $K_n = J_n - I_n$ 的邻接矩阵，其中 J_n 是 $n \times n$ 全 1 矩阵，那么我们有

$$\mathrm{Imm}_\lambda(K_n) = \sum_{\pi \in S_n} \chi^\lambda(\pi) \prod_{i=1}^{n} (K_n)_{i,\pi(i)} = \sum_{\pi \in D_n} \chi^\lambda(\pi) = d_\lambda.$$

借助 MacMahon 主定理，Goulden 和 Jackson [16, 定理 2.1] 构造了一个 $\ell \times \ell$矩阵 A'，使得 $\mathrm{Imm}_\lambda(K_n) = \det A'$。上文表明，这个行列式具有自然的组合解释，也可以高效地计算。

我们注意到，最初的Ku–Wales定理（见第 1节）似乎与Pate [40] 关于正半定厄米矩阵的归一化不变量不等式的支配性结果有些关联；这是一个由 Schur开创的经典研究主题。具体而言，Pate证明，对于所有满足 $\mu_{\ell(\mu)} = 1$且 B为正半定的 $\mu \nearrow \lambda$，都有$\mathrm{Imm}_\mu(B)/f^\mu \leqslant \mathrm{Imm}_\lambda(B)/f^\lambda$。James [20] 证明，对于任意 μ、 $\lambda \vdash n$，如果 $\mathrm{Imm}_\mu(B)/f^\mu \leqslant \mathrm{Imm}_\lambda(B)/f^\lambda$，那么$\mu \trianglelefteq \lambda$，因此 Pate 的结果是一个部分逆命题（已知完整的逆命题不成立）。我们不确定 Ku–Wales 定理究竟如何与这一文献相契合，因为 K_n 不是正半定的；然而，颇为有趣的是，其不变量的绝对值仍然满足关于分拆上的支配序的不变量支配性质。

对于每个 $\lambda \vdash n$，令 $\mathrm{Imm}_\lambda(xI - A)/f^\lambda$ 为 A 的（归一化）不变量多项式。无需付出太多额外努力，我们就能推导出 $\mathrm{Imm}_\lambda(xI - K_n)$ 的系数的显式公式，这些系数也具有组合意义。事实上，对于每个 $0 \leqslant k \leqslant n$，不难证明，$(-1)^{n-k}x^k$ 的系数是 k-错排图的 λ-特征值；也就是说，该图是由恰有 k 个不动点的所有排列生成的 S_n 的凯莱图。这个主题已在代数图论领域的许多论文中得到研究。

定理 23。对于所有 $\lambda \vdash n$，我们有

$$\mathrm{Imm}_\lambda(xI - K_n)/f^\lambda = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left[\sum_{\mu \nearrow^k \lambda} f^\mu \frac{s^\star_\mu(\lambda)}{(n-k)!} \eta_1^\mu \right] x^k.$$

证明。回忆一下， $s^\star_\lambda$'s 是移位 Schur 多项式，即参数为 $\alpha = 1$时未归一化的移位 Jack 多项式，而 f^λ 是形状为 λ 的标准杨表数量。根据不变量多项式的定义，我们有

$$\mathrm{Imm}_\lambda(xI - K_n)/f^\lambda = \frac{1}{f^\lambda} \sum_{\pi \in S_n} \chi^\lambda(\pi) \prod_{i=1}^{n} (xI - K_n)_{i,\pi(i)}$$

对于任意 k-集 $I \subseteq \binom{[n]}{k}$，令 $S_n^I \subseteq S_n$ 为满足以下条件的排列集合：对于所有 $i \in I$， $\sigma(i) = i$；对于所有 $j \notin I$， $\sigma(j) \neq j$。

$$= \frac{1}{f^\lambda} \sum_{k=0}^{n} \sum_{I \subseteq \binom{[n]}{k}} \sum_{\sigma \in S_n^I} x^k (-1)^{n-k} \chi^\lambda(\sigma)$$

Fo对于 S_n 的任意特征标 χ，令 $\chi{\downarrow_{S_{n-k}}}$ 表示其在子群 S_{n-} 上的限制。 k.

$$= \frac{1}{f^\lambda} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{\pi \in D_{n-k}} x^k (-1)^{n-k} \chi^\lambda{\downarrow_{S_{n-k}}}(\pi)$$

为了计算这一限制，我们迭代分支规则 k 次（例如参见 [43], ）。众所周知， λ到 S_{n-k} 的限制中 $\mu \vdash (n-k)$的重数为 $f^{\lambda/\mu}$，即形状为 λ/μ的标准斜表的数量；等价地，这是从 μ 开始连续添加 k 个外角以得到 λ 的不同方式的数量。这给出

$$= \frac{1}{f^\lambda} \sum_{k=0}^{n} x^k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{\mu \nearrow^k \lambda} f^{\lambda/\mu} \sum_{\pi \in D_{n-k}} \chi^\mu(\pi)$$

$$= \frac{1}{f^\lambda} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{\mu \nearrow^k \lambda} f^{\lambda/\mu} f^\mu \eta_1^\mu x^k$$

其中 μ 遍历所有由 $n-k$ 个单元格组成的形状，这些形状是从 λ中依次移除 k 个外角得到的。注意到$\sum_{\mu \nearrow^k \lambda} f^{\lambda/\mu} f^\mu = f^\lambda$，因此这些系数是 μ-特征值的凸组合，其中$\Gamma_{n-k,\ 1}$。根据 [36, 命题5。2], 我们可以写成

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \sum_{\mu \nearrow^k \lambda} f^\mu \frac{s_\mu^\star(\lambda)}{(n-k)!}\ \eta_1^\mu x^k,$$

这就完成了证明。 □

对于较小的 k，我们可以得到以 $\Gamma_{n-k,\ 1}$ 的特征值为正系数的线性组合表示的合理表达式；然而，随着 k 增大，这些公式很快就变得难以处理。另一方面，当 k 接近 n 时，由于 $|\mu|$ 较小，这些系数也可以通过其他方法高效计算。例如， x^{n-2} 的系数是著名的换位图的 λ-特征值，也就是说，它是由 S_n 的所有换位生成的凯莱图。若能为 $[x^k]$ $\mathrm{Imm}_\lambda(xI - K_n)/f^\lambda$ 得到更显式的表达式，将会很有意思。一个障碍是， $s_\mu^\star(\lambda)/(n-k)!$ 的优美表达式仅在特殊情形下已知，而对任意的 $\mu \subseteq \lambda$ 尚无此类表达式；这本身也是一个开放问题。关于 k-错排图的更多详情，请参阅近期的综述 [31]。

9 E完美匹配错排图的特征值 h

现在我们转向完美匹配错排图，即 $\alpha = 2$ 的情形。这里的情况较为复杂，因为上钩长和下钩长并不相同。我们首先考虑两行的情形，它与超八面体群 $B_n = \mathbb{Z}_2 \wr S_n \leqslant S_{2n}$ 的错排有着有趣的联系；超八面体群也就是超立方体 $\{\pm 1\}^n$ 的自同构群。下面我们回顾 Chen 和 Stanley 的一些结果 [4]，这些结果将为 $\alpha = 2$ 的两行 Jack 错排和提供组合解释。

B_n 的元素 w 可以表示为带符号排列，即 $[n]$ 的一个置换，并为每个符号附加一个正号或负号。要表示这些符号，

我们采用简写 $\bar{i} := i^-$ 和 $i := i^+$，例如，$(2, 4, \bar{5})(\bar{3})(1, \bar{6}) \in B_6$。按照 Chen 和 Stanley [4], 的说法，若 $w \in B_n$ 的每个循环都含有偶数个负号，则称其为平衡的。例如，元素 $(\bar{2}, 4, \bar{5})(3)(\bar{1}, \bar{6})$ 是平衡的，而 $(\bar{2}, 4, \bar{5})(\bar{3})(1, 6)$ 则不平衡。根据 [4, 推论 2.4], ， B_n 中的平衡元素数等于 $(2n-1)!!$。若 $w \in B_n$ 的每个循环都不平衡，则称其为完全不平衡的。根据 [4, 命题 3.1],， B_n 中的完全不平衡元素数也等于 $(2n-1)!!$。Chen 和 Stanley 将元素 $w \in B_n$ 称为 k-可分的，若 w 的循环可分为两部分 A、B，使得 A 的每个循环都平衡，且 B 中各循环的长度之和等于 k。此外，他们还证明，这些恰好是 B_n 中固定 k 维子立方体 $\{\pm 1\}^k$ 的元素（命题 2.2]）。注意，若 $k = 0$，则将超立方体的零维子立方体视为一个顶点。

令 $\mathcal{E}_n$ 为 B_n的错排（无不动点元素）集合，即，

$$\mathcal{E}_n = \{w \in B_n : w(j) \neq j \text{ for all } j \in [n]\}.$$

众所周知，$|\mathcal{E}_n| = d_{n\,0}^{(2)}$，。 B_n 中的每个完全不平衡元素都属于 $\mathcal{E}_n$。[4, 第 70]页给出的组合证明可推广为 B_n 的平衡带符号排列与 $\mathcal{M}_{2n}$ 之间的一个双射；该双射还将 B_n 的无不动点平衡带符号排列映射为 $\mathcal{M}_{2n}$的完美匹配错排：

$$\mathcal{D}'_{2n} := \{m \in \mathcal{M}_{2n} : m \cap m^* = \emptyset\}$$

其中 $m^* = \{\{1, \bar{1}\}, \{2, \bar{2}\}, \cdots \{n, \bar{n}\}\}$。最后，回顾一下，我们在第 4 节中对定理 1 的组合证明表明，在 $\alpha = 2$ 处，$|\eta_2^\lambda| = |\mathcal{D}'_\lambda|$，其中 $\mathcal{D}'_\lambda$ 是 λ着色完美匹配的错排集合 $\mathcal{M}_\lambda$。

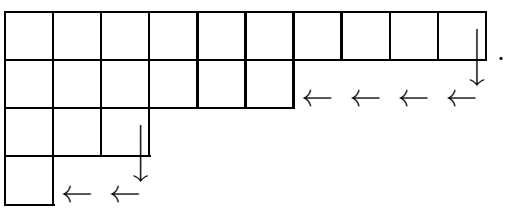
上述观察为两行形状（$n-k$，k）的 η_2^λ 提供了一种有趣的解释：它可用稳定固定超立方体 $\{\pm 1\}^k \subseteq \{\pm 1\}^{n-k}$的 B_{n-k}-错排来刻画。

定理 24。对于所有两行形状 $\lambda = (n-k, k)$，我们有

$$\begin{aligned}\eta_2^\lambda &= (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (2i-1)!!\ |\mathcal{D}'_{2(n-k-i)}| \\ &= (-1)^k\ |\{\sigma \in \mathcal{E}_{n-k} : \sigma \textit{ fixes } \{\pm 1\}^k\}|.\end{aligned}$$

注意，当 n 为偶数且 $k = n/2$ 时，我们有 $\eta_2^{(n/2, n/2)} = (-1)^{n/2}|\mathcal{E}_{n/2}|$，因此两行形状在稳定超立方体某个固定顶点的错排与稳定整个超立方体的错排之间进行插值。

回想一下，对于 $\alpha = 1$，我们忽略了所有对应于由 λ诱导的格路径中 $\leftarrow$ 步的指标 j，因为在这些情况下，$H_*^1(\lambda, j) = 0$。对于 $\alpha = 2$，情况不再如此；不过，我们仍可通过格路径确定非零项。在这里，每个竖直移动不再是 $\downarrow$向下移动一行，而是向下移动两行；与之前一样，如果水平移动 $\leftarrow$ 与一行 λ相邻，我们就忽略它。例如，若$\lambda = (10, 6, 3, 1)$，那么我们忽略对应于与第二行相邻的箭头的指标 $j = 5$、6、7（见 $\alpha = 2$处的图 2）：



显然，当 λ' 的所有部分均为偶数时，我们基本上会得到与 $\alpha = 1$ 情形相同的上钩积表达式。

推论 25. 对于每个部分均为偶数的 $\lambda \vdash n$，令 μ 为从 λ 中删除所有偶数编号的行后得到的分拆，并令 $\mu = (a_1, \ldots, a_d \mid b_1, \ldots, b_d)$。那么

$$\eta_2^\lambda = (-1)^{|\mu|} \sum_{i \leqslant \mu_i + 1} (-1)^{\mu_i} p^{(2)}_{\mu_1, a_1 - a_i} \; H_i^+(\mu),$$

其中，$p_m^{(2)}$，$_k$ 是从 B_m 中取出的元素恰有 k 个不动点的概率。

顺带一提，通过考察与群 $S_\alpha \wr S_n$相关的相遇数，可以证明所有 $\alpha \in \mathbb{N}_+$ 都有类似的结果；在这些情况下，也可以像上一节那样稍作调整，推导出行列式公式。

本节最后给出一个较为复杂的公式，用扩展下钩积表示完美匹配错排图的特征值。为了理解为何不应期待所有λ都能得到像 $\alpha = 1$ 情形那样简单的表达式，不妨考察单行情形：

$$\eta_2^{(n)} = |\mathcal{D}'_{2n}| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k p^{(2)}_{n,k} (2k-1)!!(2(n-k)-1)!!.$$

回想一下，对于 $\alpha = 1$，这个求和只有一项，即 $\eta_1^{(n)} = d_n$，$_0 n!$。事实上，对于 $\alpha = 2$，我们预计表达式会更复杂，因为尽管有$|\mathcal{D}_{2n}| = (2n-1)!!(1/\sqrt{e} + o(1))$，但 $o(1)$项趋于0的速度远不及排列错位情形。具体来说，n阶部分和是对从 $\mathcal{M}_{2n}$中抽取一个错排的概率的近似值。

鉴于上文给出的格路解释，将 λ 的各部分视为分成连续的数对 $\lambda_{2i-1}, \lambda_{2i}$ 会很有帮助；粗略来说，相邻行之间的差 $\lambda_{2i-1} - \lambda_{2i}$ 给出了近似的阶。默认情况下，如果 λ的部分少于 $2i$，则令 $\lambda_{2i} := 0$。我们将扩展下钩积的移位类比定义如下。

$$H_+^i(\lambda, j) := H_*^i(\lambda, j) H_*^i(\lambda^c, j),$$

即，将 $H_+^i(\lambda)$ 的每个因子减去 αj 后得到的乘积。

定理 26（$\mathbf{\Gamma}_{n,\ 2}$ 的特征值）。对于所有 $\lambda \vdash n$，我们有

$$\eta_2^\lambda = (-1)^n \sum_{\substack{i=1 \\ 2i-1 \leqslant \lambda_{2i-1}+1}} (-1)^{\lambda_{2i-1}} \sum_{\substack{j=0 \\ 2i-1+j \leqslant \lambda_1}}^{\lambda_{2i-1}-\lambda_{2i}} (-1)^j \; p^{(2)}_{\lambda_1, a_1 - a_i + j} \; H_+^{2i-1}(\lambda, j).$$

要得到与 $\alpha = 1$ 情形完全相同的表达式，一个主要障碍在于，概率分布 $\{p_{n,i}^{(2)}\}$ 定义在 B_n 的 $(2n)!!$ 个元素上，而不是 $S_{2n}/B_n \cong \mathcal{M}_{2n}$ 的 $(2n-1)!!$ 个元素上。理想情况下，我们希望得到一个定义在完美匹配上的概率分布 $\{p'_{n,i}\}$，使得$p'_{n,\ i}$ 表示从 $\mathcal{M}_{2n}$ 中均匀随机抽取一个与 m^* 有 i 条边相同的完美匹配的概率。似乎这些概率的精确公式无法像置换情形那样简洁地表达（例如，参见上文讨论以及命题 16 的证明）。我们将 $\alpha = 2$ 情形是否存在更优雅的公式留作一个开放问题；尽管如此，我们已经给出了一个适用于计算和应用的闭式表达式，正如前文各节所展示的那样。

10 未来工作与开放问题

从纯组合学的角度研究 Jack 错排、有色排列和有色完美匹配或许颇有价值。事实上，可以验证，许多著名的错排恒等式都有 Jack 类比，而对其组合学进行更深入的研究，或许能为 Jack 错排带来更优雅的公式。

在 [50], ´Sniady 从渐近表示理论的角度研究Jack 特征。与经典错排一样，我们关于 Jack 错排的表达式非常适合进行渐近分析，因此，自然可以考察 Jack 错排的渐近行为，以及它们与 ´Sniady 的结果之间的关系（另见 [6, 8]）。

如前文所述，我们在 $\alpha = 1$ 的主要结果的一个副产物是 Imm$_\lambda(J - I)$的一种简单组合形式，这引出了一个问题：其他邻接矩阵的不变量是否也具有良好的组合性质。特别是，除了 $A(K_n) = J_n - I_n$ 之外，是否能够为图族 $\{G_n\}$的邻接矩阵 $A(G_n)$ 的不变量找到漂亮的组合表达式？关于不变量的组合解释的更多细节，请参阅 [49] 。沿着这一思路，如果能够找到其他共轭类的并 $S \subseteq S_n$ ，使得正规 Cayley 图Cay(S_n, S) 的 λ-特征值可以由某种“λ-颜色变体”来计数，那将会非常有趣。

令 $GL(n, q)$ 为 $\mathbb{F}_q^{n\times n}$ 上的 $n \times n$ 可逆矩阵群。若对所有 $\lambda \in \mathbb{F}_q$ 都有 det$(\lambda I - g)$ $\neq 0$ ，则称 $g \in G$ 为无特征值元素（参见 [34] ，其中有更详细的讨论）。可以将这类元素视为 S_n 的错排的 q 类比。由于无特征值元素的集合是 $GL(n, q)$ 的若干共轭类之并，因此，由无特征值元素生成的正规 Cayley 图的特征值可以通过 $GL(n, q)$ 的特征理论来理解。与对称群类似，存在一个从类代数映射到某个 Hopf 代数的特征映射，它使我们能够通过对称函数变换，得到 $GL(n, q)$ 的不可约特征的具体表达式（尽管极其复杂；例如参见 [17], ）。特别地，这个 Hopf 代数的一组基可以用 Macdonald 多项式来定义，而 Macdonald 多项式可以看作 Jack 多项式 [32, 第 VI 章] 的 q 类比。要完整推广我们的主要结果，得到一个 q 类比，第一步可以是将本文所做的工作推广到 Macdonald 多项式。或许本文中出现的组合学能为正确的推广方式提供一些线索。

参考资料

[1] Per Alexandersson 和 Valentin F´eray。《移位对称函数与杨图的多矩形坐标》。《代数杂志》，483：262–305，2017年。[2] Per Alexandersson、James Haglund 和 George Wang。《关于 Jack 多项式舒尔展开的一些猜想》。《组合学杂志》，12(2)：215–233，2021年。QC 20210823。[3] E.R. Canfield 和 S.G. Williamson。《钩长乘积与经典不变量理论中的 Cayley 算子》。《线性与多重线性代数》，9(4)：289–297，1981年。[4] William Y. C. Chen 和 Richard P. Stanley。《 n-立方体上的错排》。《离散数学》，115(1-3)：65–75，1993年。[5] L. Comtet。《高级组合学》。Reidel，Dordrecht，1974年。[6] Cesar Cuenca、Maciej Do lega 和 Alexander Moll。《不同温度下 Jack 变形随机杨图全局渐近行为的普适性》。arXiv：概率，2023年。[7] Yun-Ping Deng 和 Xiao-Dong Zhang。《关于错排图特征值的注记》。《Ars Combinatoria》，101，2011年7月。

[8] Maciej Do lega 和 Piotr ´Sniady。《Jack 变形随机杨图的高斯涨落》。《概率论及相关领域》，174，2019年6月。[9]David Ellis。《Cameron-Ku 猜想的证明》。《伦敦数学学会杂志》，85(1)：165–190，2012年。[10] Valentin F´eray 和 Piotr ´Sniady。《与 Stanley 特征标公式相关的对称群特征标渐近性质》。《数学年刊》（第2辑），173(2)：887–906，2011年。[11] Yuval Filmus 和 Nathan Lindzey。《完美匹配上的调和多项式（扩展摘要）》。载于第34届“形式幂级数与代数组合学”国际会议论文集，FPSAC ’22，2022年。[12] Valentin F´eray。《对称群特征标的 Stanley 公式》。《组合学年刊》，13：453–461，2006年1月。[13] C. Godsil 和 K. Meagher。《Erd˝os–Ko–Rado 定理：代数方法》。剑桥高级数学研究丛书。剑桥大学出版社，2015年。[14] Chris Godsil 和 Karen Meagher。《相交完美匹配族的 Erd¨os-Ko-Rado 定理的代数证明》。《当代数学》，12(2)：205–217，2016年。[15] Chris Godsil 和 Gordon Royle。《代数图论》，数学研究生教材第207卷。施普林格出版社，纽约，2001年。[16] I. P. Goulden 和 D. M. Jackson。《不变量、舒尔函数与 MacMahon 主定理》。《美国数学会会刊》，115(3)：605–612，1992年。[17] Darij Grinberg 和 Victor Reiner。《组合学中的 Hopf 代数》。arXiv：组合学，2014年。[18] Phil Hanlon。《Jack 对称函数与杨对称化子的一些组合性质》。《组合理论杂志A辑》，47(1)：37–70，1988年。[19] Christian Ikenmeyer、Igor Pak 和 Greta Panova。《对称群特征标的正性问题与多项式时间层级一样困难》，2022年。[20] Gordon James。《不变量》。《线性与多重线性代数》，32(3-4)：197–210，1992年。[21] Zhi Kang Samuel Koh、Cheng Yeaw Ku 和 Kok Bin Wong。《完美匹配错排图的交错符号性质》。《组合理论杂志A辑》，194：105706，2023年。[22] Cheng Yeaw Ku 和 David B. Wales。《错排图的特征值》。《组合理论杂志A辑》，117(3)：289–312，2010年。[23] Cheng Yeaw Ku 和 Kok Bin Wong。《解决 Ku–Wales 关于错排图特征值的猜想》。《欧洲组合学杂志》，34(6)：941–956，2013年。[24] Cheng Yeaw Ku 和 Kok Bin Wong。《匹配错排图的特征值》。《代数组合学杂志》，48(4)：627–646，2018年12月。[25] Michel Lassalle。《关于 Jack 多项式的一些组合猜想》。《组合学年刊》，2：61–83，1998年。[26] Michel Lassalle。《Jack 多项式正性猜想》。《数学研究快报》，15，2007年4月。[27] Michel Lassalle。《Jack 多项式与自由累积量》。《数学进展》，222(6)：2227–2269，2009年。[28] Nathan Lindzey。《完美匹配的 Erd¨os–Ko–Rado 定理》。《欧洲组合学杂志》，65：130–142，2017年。

[29] Nathan Lindzey。《匹配与表示论》。博士论文，滑铁卢大学，2018年。[30] Nathan Lindzey。《完美匹配的 1-相交族的稳定性》。欧洲组合学杂志，86:103091，2020年。[31] 刘晓刚、周三明。《凯莱图的特征值》。电子组合学杂志，29(2)，2022年4月。[32] I.G. Macdonald。《对称函数与霍尔多项式》。牛津数学专著。克拉伦登出版社，1995年。[33] Hiroshi Naruse。《舒伯特演算与钩公式》。第73届 S ´eminaire Lotharingien de Combinatoire，2014年。[34] Peter Neumann、Cheryl Praeger。《有限经典群中的错排与无特征值元素》。伦敦数学会杂志，58:564–586，1998年12月。[35] Satomi Okazaki。《受限位置排列的循环类型及一类新区间序的刻画》。博士论文，麻省理工学院，1996年。[36] A. Okounkov、G. Olshanski。《移位 Jack 多项式、二项式公式及其应用》。数学研究快报，4(1):69–78，1997年。arXiv:q-alg/9608020。[37] A. Yu. Okun’kov、G. Ol’shanskij。《移位舒尔函数》。圣彼得堡数学杂志，9(2):1，1997年。[38] Igor Pak。《什么是组合解释？》arXiv：组合学，2022年。[39] Igor Pak、Greta Panova。《关于计算克罗内克系数的复杂性》。计算复杂性，26:1–36，2017年。[40] Thomas H. Pate。《不变量不等式与分拆节点图》。伦敦数学会杂志，s2-46(1):65–80，1992年。[41] Paul Renteln。《错排图的谱》。电子组合学杂志，14(1):研究论文82，17页（电子版），2007年。[42] Paul Renteln。《完美匹配错排图的谱》。代数组合学杂志，56(1):215–228，2022年8月。[43] B.E. Sagan。《对称群：表示、组合算法与对称函数》。数学研究生教材。施普林格，2001年。[44] Murali K. Srinivasan。《完美匹配关联方案》。代数组合学，3(3):559–591，2020年。[45] Richard Stanley。《关于对称群不可约特征标值归一化的一种猜想的组合解释》。arXiv：组合学，2006年。[46] Richard P. Stanley。《Jack 对称函数的一些组合性质》。数学进展，77(1):76–115，1989年。[47] Richard P. Stanley。《计数枚举组合学：第1卷》。剑桥大学出版社（美国），第2版，2011年。[48] R.P. Stanley。《计数枚举组合学：第2卷》。剑桥高等数学研究丛书。剑桥大学出版社，2001年。[49] Rebecca Tessier。《路径杨表与不变量函数的组合学》。硕士论文，滑铁卢大学，2013年。[50] Piotr ´Sniady。《杰克特征标的渐近性质》。组合理论杂志A辑，166:91–143，2019年。