arXiv:2304.06633v1 [math.DG] 13 Apr 2023

流形上的高阶几何结构与德利涅上同调的规范理论

S. BUNK 和 C. S. SHAHBAZI

摘要。我们研究流形上一般高阶几何结构的光滑高阶对称群和模 ∞ 叠。对称性是覆盖底流形非平凡微分同胚的自同构。我们构造任意几何结构在 M 上的光滑高阶对称群，并证明它通过泛性质完全刻画了高阶几何上的等变结构。我们将高阶几何数据的模叠构造为高阶对称性作用下的 ∞ 范畴商，提取这些模 ∞ 叠的同伦类型信息，并证明一个有用的充分判据，用以判断两个这样的高阶模叠何时等价。

在论文的第二部分，我们研究高阶 U(1) 联络。首先，我们注意到高阶联络组织成高阶群胚，并且这些群胚还带有 Baez-Crans 型高阶向量空间的仿射作用。我们计算了带有 k-联络的 n-gerbe 的高阶规范作用的一种表示，讨论其与高阶形式对称性的关系，并提出一种新的 String 群模型。我们构造高阶麦克斯韦解和爱因斯坦-麦克斯韦解的光滑模 ∞ 叠，纠正了文献中此前相关研究中的问题，并计算了若干高阶 U(1) 联络模∞叠的同伦群。最后，我们证明，NSNS 超引力微分几何的两种研究途径（分别通过广义几何和高阶几何）之间的差异，在 NSNS 超引力解的模 ∞ 叠层级上消失。

目录

1. 引言 2 2. 主要结果概述 3

第 1 部分. 流形上高阶几何结构的模空间 ∞-叠 11

3. 流形光滑族与微分同胚的站点 11 4. 高阶几何结构的光滑族 17 5. 将开覆盖上的平均化视为 ∞-范畴局部化 19 6. 保持几何结构等价类的微分同胚 23 7. 高阶几何结构的高阶对称群 27 8. 高阶几何结构的模空间 ∞-预叠 36 9. 模空间 ∞-预叠的下降性质 48

第 2 部分. 高阶 U(1) 联络与 NSNS 超引力的应用 54

10. 流形上的高阶 U(1) 联络光滑族 54 11. 规范作用与高阶形式对称性 60 12. 遗忘高阶联络数据 68 13. 带有 k-联络的 n-gerbe 堆在 M 上的同伦类型 71 14. 涉及高阶 U(1) 联络的模空间 ∞-(预)叠示例 72 15. 高阶 U(1)- 规范理论与一种新的 String 群模型 81 16. NSNS 超引力解与 gerbe 联络的模空间 83

第3部分。附录 93

附加 附录 A. 单纯预层的严格化 9 3

关键词和短语。高阶几何；gerbe；高阶规范理论；模叠；Courant代数丛；超引力。2020年数学学科分类。主要分类：53C08。次要分类：18N50、18N60、53Z05、58D27。

附录B. Dold-Kan 对应与带有n-gerbe 及k-联络的 gerbe 95
参考文献 100

1. 引言

在 [35] Gajer 同时给出了任意流形 M 上 Deligne 上同调群 $\mathrm{H}^n(M;\mathcal{D}(n))$ 的几何描述和范畴化，对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。其开创性见解是，这些群可视为带有 n-联络的 $\mathrm{B}^{n-1}\mathrm{U}(1)$-丛的同构类 [35,定理 C]。对于 $k \in \mathbb{N}_0$，$\mathrm{B}^{n-1}\mathrm{U}(1)$-丛上的 k-联络由底流形[1]上的一列局部联络形式组成，其次数依次为 1，2，……，k。人们很快意识到，这种结构还可以进一步解析：任意流形 M 上都存在带 k-联络的 $\mathrm{B}^{n-1}\mathrm{U}(1)$-丛的 Kan 复形（事实上是对称幺半 n-群胚）。它们可通过 Dold-Kan 对应，从德利涅复形 $\mathcal{D}(n)$ 的切赫分解构造而得——例如参见 [29]；也可以用微分函数谱 [49]来建模（这更贴近 Cheeger-Simons 对微分上同调的描述，而非德利涅的描述）。在现代文献中，$\mathrm{B}^n\mathrm{U}(1)$-丛通常称为 n-*gerbe*。相应地调整指标后，我们可以将 $\mathrm{H}^{n+2}(M;\mathcal{D}(n+2))$ 描述为流形 M 上带有 $(n+1)$-联络的 n-gerbe 所构成的单纯阿贝尔群的连通分支。

（高阶）gerbe 上的联络在弦理论以及由其低能极限导出的各种超引力理论中发挥着重要作用 [2,24,30–32,68,72]。然而，尽管经典主丛上的联络在几何、拓扑学和物理学中取得了成功，目前人们对高阶联络的数学规范理论，尤其是其模理论，仍知之甚少（相关初步研究，参见例如 [28,29,58,72]）。这在一定程度上是因为，要真正处理高阶几何结构的模空间，必须运用高阶范畴技术；而这项技术在数学中的发展只是近些年才取得的成果，且仍在持续推进。

在本文中，我们将研究范围从带联络的高阶丛的纯结构理论（例如它们如何组织成高阶群胚、它们的局部到整体性质、分类、平行移动等）扩展到对其实际规范 理论的研究。首先，我们需要建立一套通用形式体系，用以构造流形上一般高阶几何结构的光滑高阶对称群和模空间 ∞-(预)叠[2]。重要的是，对称性作用包括微分同胚对高阶几何数据的作用。我们证明，这些光滑高阶对称群通过泛性质完全分类了高阶几何结构的等变结构；提取了关于底层空间的高阶模叠之同伦类型的信息；并证明了一个有用的充分判据，可用于判断两个模叠何时等价。

例如，这一理论完全适用于带联络的高阶丛；但在本文第二部分，我们聚焦于高阶 U(1) 联络的几何，因此也聚焦于 Deligne 微分上循环。由此，我们对高阶联络的规范理论获得了诸多见解，包括高阶联络是组织成高阶群胚而非集合的，并且带有高阶 Baez-Crans 向量空间的仿射作用。我们计算了由第 1 部分的形式体系导出的、带 k-联络的 n-gerbe 的高阶规范作用的一个显式表示，讨论了这些光滑高阶规范群与高阶形式对称性之间的关系，并证明一个带 1-联络的 1-gerbe 的特定高阶对称群会产生一种新的 String 群模型（按 [13,53,70] 的含义）。后者的证明用到了关于模叠等价性的定理，以及关于模叠拓扑学的进一步结果。我们呈现并分析了高阶 U(1) 联络的光滑高阶叠，包括高阶……的模叠

[1]请注意，我们采用的术语与 [35]略有不同。[2]我们强调，本文着重探讨高阶规范理论模叠的有限或整体方面，而非变形理论意义上的无穷小模空间；后者将在后续研究中探讨。

麦克斯韦理论和爱因斯坦-麦克斯韦理论，并以完全同伦的方式在固定背景数据上进行研究，从而修正了文献中此前的相关考量。最后，我们探讨了 NSNS 超引力几何的两种研究路径，分别源自高阶几何和广义几何。我们证明，在 NSNS 超引力微分几何中，关于 B 场的两种研究路径之间的差异在高阶模叠层级上消失。解决这一差异是本文最初的主要动机之一。

2. 主要结果概述

2.1. 高阶几何结构的模空间 ∞-（预）叠。本文分为两个主要部分，另加第三部分附录。第 1 部分从一般层面探讨流形上的高阶几何结构，以及它们的光滑高阶对称性和模空间。第 2 部分详细分析若干涉及高阶 U(1) 联络的几何与规范理论问题。

2.1.1. 高阶几何数据：光滑族与微分同胚作用。我们首先发展一些技术，从局部数据构造流形上的全局高阶几何结构，并将几何结构的光滑族和光滑微分同胚作用纳入其中。下面简要勾勒关键构造，再于后续各节阐述主要结果。在最一般的层面上，高阶几何结构被建模为∞-预层或 ∞-层 [57,68]之间的态射。在我们的情形中，它们是从 1-范畴的脉络出发的函子，因此我们可以用单纯预层的模型范畴来描述它们。具备这种明确的描述有利于计算。

具体而言，令 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 表示由笛卡尔空间[3] 及光滑映射组成的范畴；本文中的所有几何数据光滑族都以 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 的对象为参数。高阶几何结构的光滑族 的局部模型，是定义在某个范畴 $\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ （定义 3.2）上的单纯同伦层，其对象为笛卡尔空间的光滑族[4]。为了也能处理微分同胚群 Diff(M) 在几何数据光滑族上的光滑作用，我们引入以下范畴 $\mathrm{B}\mathcal{D}$：其对象是笛卡尔空间，态射是由光滑映射构成的交换方块

$$\begin{array}{ccc} c_0 \times M & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & c_1 \times M \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}} \\ c_0 & \xrightarrow[f]{} & c_1 \end{array} \tag{2.1}$$

其中，$\hat{\varphi}$ 在所有纤维上都限制为微分同胚，并且其逐纤维逆映射也是光滑的。我们将函子 $\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}$ 理解为描述 M 上的高阶几何数据光滑族，并使其受 Diff(M) 通过拉回产生的光滑作用。我们给出一个函子

$$\mathrm{Fun}(\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}{}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}),$$

它以高阶几何结构的局部模型为输入，以一种特别良好的方式在 $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 上生成单纯预层（定理4.10）。与非族情形一样，其基本思想是用笛卡尔空间的良好开覆盖来解析 M ，然后在该覆盖的 Čech神经上取值单纯预层（例如参见 [29]）。这里增强形式体系的困难在于，要将这一思想与覆盖和几何数据的光滑参数化，以及M的微分同胚作用结合起来：我们通过一个中间范畴来解决这一问题，该范畴由M的覆盖族构成，其态射中包含微分同胚族；随后借助左 Kan 延拓，对所有良好开覆盖取平均

[3]笛卡尔 空间是一个流形c ，它与某个$n \in \mathbb{N}_0$微分同胚。[4]这一方法拓展了例如 [29,68] 中的形式体系，用以描述给定流形上的高阶几何数据光滑族。

（命题 4.6）。我们的构造还可用于按照 [6,28,68] 的意义生成具体化（尤其参见第 10 节）。

我们专门用一节来说明，这种平均化构造具有更深层次的同伦意义：对于与我们的单纯预层相关联的左纤维化，上述左 Kan 扩张恰好等价于在所有开覆盖的细化处进行 ∞-范畴局部化（定理 5.8）。因此，我们能够以可计算的方式，仅凭纯粹的局部数据，在 M 上构造几何结构的光滑族，并且这些族具有 M 的微分同胚群的自然光滑作用。

2.1.2. 自同构与对称的光滑高阶群。 完成这一构造后，我们将转向主要目标，即研究M上的高阶几何数据的光滑高阶对称群和模叠。首先，我们研究它们的对称群：设$G^{\mathcal{D}}\colon \mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}$为一个单纯预层。我们固定一个顶点$\mathcal{G} \in G^{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^0)$；例如，如果$G$ 对笛卡尔空间上的高阶丛进行分类，那么$\mathcal{G}$ 就是M上的一个高阶丛数据。我们将 $\mathrm{Diff}^{\mathcal{G}}(M) \subset \mathrm{Diff}(M)$ 定义为所有满足其在M 上的作用可以提升至$\mathcal{G}$的微分同胚所构成的子群；也就是说，它由满足以下条件的微分同胚 φ 组成：存在一个等价$\mathcal{G} \simeq \varphi^*\mathcal{G}$ ，使得 $\mathcal{G}$ 与沿着 φ的作用拉回$\mathcal{G}$ 所得的对象等价。令 $\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}] \subset \mathrm{B}\mathcal{D}$ 表示一个范畴，其对象为笛卡尔空间，态射为交换方块（2.1），其中 $\hat{}\varphi$ 在每个纤维上的限制均属于 $\mathrm{Diff}^{\mathcal{G}}(M)$。

光滑 ∞-群是空间预层范畴 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中的群对象 $\mathbb{\Gamma}$；光滑 ∞-群构成一个 ∞-范畴 $\mathcal{S}\mathrm{m}\mathcal{G}\mathrm{rp}$。任何光滑群作用 $\Phi\colon \mathbb{\Gamma} \to \mathrm{Diff}(M)\ \mathrm{on} M$ ，若其在 $\mathcal{G}$ 上存在等变结构，则必定通过 $\mathrm{Diff}^{\mathcal{G}}(M)$ 分解。对于任何此类作用，我们构造一个光滑 ∞-群 $\mathbb{S}\mathrm{ym}_{\Phi}(\mathcal{G})$，它由所有可能的提升方式组成，即将 $\mathbb{\Gamma}$ 中光滑族的作用从 M 提升到 $\mathcal{G}$。特别地，若 $\mathbb{\Gamma} = *$ 是平凡群，则由此得到自同构光滑 ∞-群 $\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G})$，其元素为 $\mathcal{G}$ 的自同构。例如，若$\mathcal{G}$ 是 M 上的高阶主丛，则 $\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G})$ 是它的光滑高阶规范群。我们证明（推论 7.18 和 7.23）：

定理 2.2。 给定任意截面 $G \in G^{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^0)$ 以及任意光滑 ∞-群作用 $\Phi\colon \mathbb{\Gamma} \to \mathrm{Diff}^{\mathcal{G}}(M)$，存在一个群对象的扩张，其位于 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中

$$\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{S}\mathrm{ym}_{\Phi}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{\Gamma}\,. \tag{2.3}$$

我们利用如下事实推导出这一结论：光滑的 ∞-群可以表示为左纤维化，其纤维是约化单纯集合 [20,60]。光滑 ∞-群 $\mathbb{S}\mathrm{ym}_{\Phi}(\mathcal{G})$ 的重要性在于，它完全控制了几何对象 $\mathcal{G}$ 上的等变结构。为此，我们定义如下函子

$$\mathrm{Equivar}(\mathcal{G})\colon (\mathcal{S}\mathrm{m}\mathcal{G}\mathrm{rp}_{/\mathrm{Diff}(M)})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\,.$$

其定义域是光滑 ∞-范畴，即作用于 M 的光滑 ∞-群作用所构成的范畴，也就是光滑 ∞-群态射 $\Phi\colon \mathbb{\Gamma} \to \mathrm{Diff}(M)$ 所构成的范畴。其目标是空间的 ∞-范畴。$\mathrm{Equivar}(\mathcal{G})$ 在一对 $(\mathbb{\Gamma}, \Phi)$ 上的取值，是作用 $(\mathbb{\Gamma}, \Phi)$ 作用于 M 时，$\mathcal{G}$ 上等变结构所构成的空间。我们证明了主要结果的一个重要推广 [10](定理 7.27 和推论 7.29)：

定理 2.4. 函子 $\mathrm{Equivar}(G)$ 是可表的。它由态射表示

$$\mathbb{S}\mathrm{ym}_{\iota}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathrm{Diff}_{[\mathcal{G}]}(M)$$

根据 (2.3)，其中 $\mathbb{\Gamma} = \mathrm{Diff}^{\mathcal{G}}(M)$ 以及 $\iota\colon \mathrm{Diff}^{\mathcal{G}}(M)$ ，$\check{}\mathrm{Diff}(M)$ 是典范包含。此外，以下空间之间存在自然等价：

（*1*）G 上的等变结构$\Phi(G)$ 空间；（*2*）$\Phi\colon \mathbb{\Gamma} \to \mathrm{Diff}(M)$ 经由态射 $\mathbb{S}\mathrm{ym}_{\iota}(G) \to \check{}\mathrm{Diff}^{\mathcal{G}}($ $M)$的提升空间，

[5]在本引言中，我们将自由地在 ∞-范畴 $\mathcal{P}(N\mathcal{C})$（即脉络 $N\mathcal{C}$ 上的空间预层范畴）与其通过 $\mathcal{C}$ 上的单纯预层的投射模型范畴和 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$上的协变模型范畴所作的表示之间转换。在正文中，我们使用附录 A中的技术在这些模型之间进行转换。

（3）光滑 ∞-群扩张 $\mathbb{A}\mathrm{ut}(G) \hookrightarrow \mathbb{S}\mathrm{ym}_\Phi(G) \twoheadrightarrow \Gamma$ 的分裂空间，即 $\mathbb{S}\mathrm{ym}_\Phi(G) \twoheadrightarrow \Gamma$ 在 $\mathbb{S}\mathrm{m}\mathcal{G}\mathrm{rp}$ 中的态射的截面。

2.1.3. 模空间 ∞——高阶几何结构的（预）叠。 高阶几何结构的光滑高阶自同构群和对称群，是研究模空间的关键要素：它们编码了我们希望在系统中除去的冗余。我们以如下通用框架来处理几何模问题，这一框架受到物理场论的启发。本形式体系是本文的核心。为尽可能充分利用计算工具，我们仍从单纯预层开始介绍，随后才转向左纤维化和 ∞-范畴语言，以表述并证明主要结果。

考虑 $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 上一对单纯预层的态射，

$$\mathrm{Sol}^{\mathcal{D}} \longhookrightarrow \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}. \tag{2.5}$$

我们将 $\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}$ 视为描述我们感兴趣的高阶几何数据的所有可能构型。例如，这可以由M上的带联络的高阶丛的光滑族构成，例如支撑德利涅上同调几何的带联络的高阶 U(1) 丛。态射 $\mathrm{Sol}^{\mathcal{D}} \hookrightarrow \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}$ 是一个满单纯子预层的包含，我们将其视为描述仅由那些我们希望研究其模空间的构型组成的光滑族。例如，这些可以是一组场方程的解族（关于这一观点的更多内容，参见第 2.2 节），例如满足高阶杨-米尔斯方程的M 上的带联络的高阶丛。最后，态射 $\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} \to \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}$ 是一个逐对象 Kan 纤维化；我们将其视为遗忘部分几何数据，只留下我们希望在模问题中固定的部分。一个重要的例子是，$\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}$ 描述M上的带联络的高阶丛的光滑族，$\mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}$ 编码M上的不带联络的高阶丛的光滑族，而态射 $\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} \to \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}$ 遗忘联络。

对于每个截面 $\mathcal{G} \in \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^0)$，我们都得到一个定义在$N\mathcal{C}\mathrm{art}$ 上的 ∞-预层，它编码$\mathcal{G}$ 上的光滑解族（例如，满足某组场方程的固定高阶丛上的联络），以及这类解在几何设定中固有的态射；我们将此 ∞-预层记为 $\mathbb{S}\mathrm{ol}(\mathcal{G})$。回顾一下，给定一个光滑高阶群作用$\Phi\colon \Gamma \to \mathrm{Diff}^{\mathcal{G}}(M)$，我们可得到相应的光滑高阶对称群 $\mathbb{S}\mathrm{ym}_\Phi(\mathcal{G})$。我们证明， ∞-群 $\mathbb{S}\mathrm{ym}_\Phi(\mathcal{G})$ 自然地作用于 $\mathbb{S}\mathrm{ol}(\mathcal{G})$。

定义 2.6. 在$\mathcal{G}$ 上的解的模空间 ∞-预堆，除以 $\mathbb{S}\mathrm{ym}_\Phi(\mathcal{G})$ 的作用，得到∞-范畴商

$$\mathbb{M}\mathrm{dl}_\Phi(\mathcal{G}) \coloneqq \mathbb{S}\mathrm{ol}(\mathcal{G})/\!\!/\mathbb{S}\mathrm{ym}_\Phi(\mathcal{G}) \quad \in \mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art}).$$

我们构 造这个商，将其显式地表示为一个 ∞-范畴左 Kan 延拓，并给出一种表示，作为一个左纤维化，它位于$N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$之上（定义 8.27）。此外，我们证明（定理 9.13）：

定理 2.7. 每当 Γ 是 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 上的普通群层（满足关于良好开覆盖的下降条件），且解子预层满足某个下降条件时，则$\mathbb{M}\mathrm{dl}_\Phi(G) \in \mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 是一个 ∞-堆（或 ∞-层），即它满足关于良好开覆盖的下降条件。

一个非常重要的情形是 $(\Gamma, \Phi) = (*, e)$ 是作用在 M 上的平凡群作用，因此 $\mathbb{S}\mathrm{ym}_e(\mathcal{G}) = \mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G})$ 是由 $\mathcal{G}$ 的自同构构成的光滑 ∞-群（如果 $\mathcal{G}$ 是 M 上的高阶主丛，那么 $\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G})$ 就是它的光滑高阶规范群）。下面的陈述表明，这个特殊情形已经包含了关于任意作用 (Γ, Φ) 的模叠的大量信息（定理 8.42）：

定理 2.8. 对于 M 上的每个光滑 ∞-群作用 $\Phi\colon \Gamma \to \mathrm{Diff}^{\mathcal{G}}(M)$，存在一个主$\infty$-丛

$$\mathbb{M}\mathrm{dl}_e(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{M}\mathrm{dl}_\Phi(\mathcal{G})$$

在 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 上具有结构群 Γ。

令 $S\colon \mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art}) \to \mathcal{S}$ 表示如下函子：它取一个定义在$\mathcal{C}\mathrm{art}$ [13,14]上的 ∞-预层的底层空间 。它也称为光滑奇异复形，或协调空间 [8] ，并且等价于 ∞-范畴余极限函子。由于S 保留群对象和主∞-丛 [13], ，我们得以洞察模叠的拓扑学（推论 8.43 和 8.44）：

推论 2.9. 对于 M 上每个光滑的 ∞-群作用 $\Phi\colon \mathbb{\Gamma} \to \mathrm{Diff}^{\mathcal{G}}(M)$ ，都存在一个纤维序列

$$S\mathbb{\Gamma} \longrightarrow S\big(\mathbb{M}\mathrm{dl}_e(\mathcal{G})\big) \longrightarrow S\big(\mathbb{M}\mathrm{dl}_\Phi(\mathcal{G})\big)$$

其空间。特别地，这会导出一个同伦群的长正合列。

本文第一部分的主要结果之一，是给出一个简单的充分判据，用于判断两个高阶模叠何时等价。该判据适用于这样的情形：我们用另一个态射增广序列 (2.5)，即得到如下序列

$$\mathrm{Sol}^{\mathcal{D}} \longhookrightarrow \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathrm{Fix}_0^{\mathcal{D}} \xrightarrow{\ p\ } \mathrm{Fix}_1^{\mathcal{D}} \tag{2.10}$$

$\mathrm{B}\mathcal{D}$ 上的单纯预层。我们称 p 是 0-连通的，如果对于每个对象 c $\in \mathrm{B}\mathcal{D}$，态射 $\mathrm{p}_{|c}\colon \mathrm{Fix}_0^{\mathcal{D}}(c) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fix}_1^{\mathcal{D}}(c)$ 都诱导出连通分支的双射。令 $G_0 \in \mathrm{Fix}_0^{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^0)$，并令 $G_1 := p(G_0)$ 为其在 $\mathrm{Fix}_1^{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^0)$ 中的像。在这种情况下，分别对应于固定数据 G_0 和 G_1, 的解预层 $\mathbb{S}\mathrm{ol}^{\mathcal{D}}(G_0)$ 与 $\mathbb{S}\mathrm{ol}^{\mathcal{D}}(G_1)$ 并不等价，由此取商得到的光滑高阶对称群也不等价。一个关键例子是：$\mathrm{Fix}_0^{\mathcal{D}}$描述 M 上带有 k-联络的 n-gerbe，$\mathrm{Fix}_1^{\mathcal{D}}$描述带有 l-联络的 n-gerbe，其中 l $<$k，而态射 p 会遗忘部分联络数据（关于此例的更多细节，见下文第 2.2 节）。我们证明（定理 8.30）：

定理 2.11。 在(2.10)所述情形下，假设 p 是 0-连通的。那么，对于每个光滑的∞-群作用 $\Phi\colon \mathbb{\Gamma} \to \mathrm{Diff}^{\mathcal{G}}(M)$，在 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中，模∞-预堆之间存在典范等价，

$$\mathbb{M}\mathrm{dl}_\Phi(\mathcal{G}_0) \simeq \mathbb{M}\mathrm{dl}_\Phi(\mathcal{G}_1)\,.$$

这一洞见使我们得以比较并协调那些先验上彼此不同的模问题（例如 NSNS 超引力中的模问题；见下文）。同时，它也使我们能够以几种不同但等价的方式处理某些模问题，其中有些方式可能特别适合我们希望解决的问题。

2.2. **高阶 U(1)-联络与超引力的应用**。 在本文第 2 部分中，我们将第 1 部分的一般形式体系和结果应用于高阶丛上的高阶 U(1) 联络的几何，从而也应用于 Deligne 微分上循环。

2.2.1. 高阶 U(1)-联络的性质。 我们对广为人知的、用于分类带有 k-联络的 n-gerbe 的 ∞-叠构造（综述见 [29] ）进行增强，从而得到单纯预层

$$\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k}\colon \mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta\,.$$

这些单纯预层描述固定流形 n 上带有 k 阶联络的 gerbe 光滑族，并且它们还受到 M 的光滑微分同胚群作用。它们借助第 1 部分中的形式体系以及 Dold-Kan 对应构造得出，这些方法应用于 Deligne 复形的族版本。给定 M 上一个无联络的 n-gerbe，$\mathcal{G} \in \mathrm{Grb}^{n,M}(\mathbb{R}^0)$，$k$ 阶联络是 $\mathcal{G}$ 上由局部定义的微分形式组成的元组 $\mathcal{A}^{(k)} = (A_1, \dots, A_k)$，其次数为 $1, 2, \dots, k$，并满足某些相容条件。在 ∞-层于 $N\mathcal{C}\mathrm{art}$ 的层级上，Schreiber 早已借助抽象的（微分）具体化形式体系构造了类似对象（例如参见 [68, 定义 5.2.8、定义 5.2.105、注 5.2.106、定义 6.4.118]以及 [6, 定义 3.3、命题 3.4]）。

这里我们采用显式构造来描述 ∞-层中带有 n-gerbe 和 k 阶联络的光滑族[6]。

我们作如下观察（定理 13.1 和第 10.3 节）：

定理 2.12。 M 上任意 n-丛的 k-联络构成一个光滑（$k-1$）-群胚。此外，这个（$k-1$）-群胚带有一个由光滑单纯向量空间给出的光滑仿射作用。

这些正是高阶联络的本质特征。尤其是第一个结果与经典规范理论形成鲜明对比：在经典规范理论中，给定主丛上的联络仅构成一个集合，并没有内禀的联络间态射概念。第二个陈述则将这样的事实范畴化：主丛上的联络构成一个仿射空间，其上的向量空间是取值于伴随丛的 1-形式向量空间。

2.2.2. 高阶 U(1) 丛与联络的对称性。设 $(\mathrm{G}, \mathrm{A}^{(k)})$ 是 M 上一个固定的 n-丛，带有固定的 k-联络 $\mathrm{A}^{(k)}$，其中 $\mathrm{k} \leq \mathrm{n}$；我们可以将其视为光滑结构群为 $\mathrm{B}^{n-k}\mathrm{B}^{k}_{\nabla}\mathrm{U}(1)$ 的主 ∞-丛，其中 B 表示解环函子（亦即分类空间函子），而 $\mathrm{B}^{k}_{\nabla}\mathrm{U}(1)$ 将群 $\mathrm{B}^{k-1}\mathrm{U}(1)$ 的带联络主 ∞-丛分类。我们关注 $(\mathrm{G}, \mathrm{A}^{(k)})$ 上联络的高阶群胚，即将 $\mathrm{A}^{(k)}$ 扩展为 G 上完全联络的各种方式，再对 $\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathrm{G}, \mathrm{A}^{(k)})$ 和 $\mathbb{S}\mathrm{ym}_{\Phi}(\mathrm{G}, \mathrm{A}^{(k)})$ 的作用取商（对于任意光滑作用$\Phi\colon \mathbb{\Gamma} \to \mathrm{Diff}_{\mathcal{G}}(\mathrm{M})$）。

到目前为止，我们仅用 ∞-函子或左纤维化来描述光滑高阶自同构群 $\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(k)})$ 的作用。我们将专门用一节来阐明或严格化这一高阶群作用，并将其表述为单纯群预层的作用。我们证明，这种光滑 ∞ 群作用恰好由 U(1) 规范变换的标准作用的一种高阶形式所呈现，并针对结构群 $\mathrm{B}^{n-k}\mathrm{B}^{k}_{\nabla}\mathrm{U}(1)$ 作了调整。这种严格化在很大程度上依赖 Dold-Kan 对应，并在定理 11.10 中得到证明。此前尚未有人研究联络的高阶群胚上的光滑高阶规范作用（尽管其截断版本曾见于例如 [30–32, 72]）；本文从第一性原理推导出其完整形式。

存在一个典范等价

$$\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(k)}) \simeq \mathrm{Grb}^{n-1,M}_{\nabla,k}$$

光滑 ∞-群，其中右侧是由带k-联络的M 上的（$n-1$）-gerbe及其典范（阿贝尔）张量积构成的光滑高阶群。特别地，这些光滑高阶群将 ∞维李群范畴化；在高阶阿贝尔规范理论中，这些李群被视为规范群，而在 [31, 32, 72], 中，仅考虑了 $\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(k)})$ 的零截断。

光滑高阶规范群和对称群与物理学中的高阶形式对称性有着有趣的联系 [33, 34]。特别是，它们描述并形式化了 [69] 中研究的量子场论中的高阶对称性。我们指出，对于每个固定的n-gerbe（带有n-联络），定义在M 上，以及每个从闭的（$n-p$）维流形 $\Sigma^{(n-p)}$ 到M 的光滑映射 $\sigma\colon \Sigma^{(n-p)} \to M$，高阶 gerbe holonomy 都给出一个光滑群态射（备注 11.15，另见备注 14.9）

$$U_{(-)}(\Sigma^{(n-p)}, \sigma)\colon \pi_p \mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(n)}) \longrightarrow \mathrm{U}(1)\,,$$

对于$p \geq 0$，其中同伦群是在 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中构造的。这些态射仅取决于 σ 的同伦类（当$p > 0$ 时），并进一步下降到联络在（$\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(n)}$）上的模叠，再对规范变换取商（备注 14.9）。若我们考虑的不是$n+1$-联络$\mathcal{A}$ 在$\mathcal{G}$上，则当$p = 0$时，同伦不变性也成立。

最后，我们运用迄今建立的理论，为弦群（如 [53, 70] 中所引入）提供一种新的光滑模型。设 H 是一个紧致、单连通的简单李群，并令 $\Phi = L\colon H \to H$ 表示 H 通过左乘作用于自身的作用。此外，令 $\mathcal{G}_{bas}$ 为一个

[6]请注意，我们对模空间 ∞-堆一词的使用不同于 [68]中的用法：在那里，该词指描述流形上（或其他 ∞-堆上）高阶几何结构的光滑族的高阶堆；而在这里，我们保留该词，用于描述解堆在光滑高阶对称群作用下的商。

定义在 H 上的基本gerbe（即其在 $\mathrm{H}^3(H;\mathbb{Z})$ 中的类是一个生成元）。它具有一个特定的联络 $\mathcal{A}_{bas}$ [59]。由 [28] 可知，提升作用 L 的光滑 2-群 $\mathbb{S}\mathrm{ym}_L(\mathcal{G}_{bas},\mathcal{A}_{bas})$，即 $(\mathcal{G}_{bas},\mathcal{A}_{bas})$ 的对称性，是李群 H 的弦群 $\mathbb{S}\mathrm{tring}(H)$ 的一个光滑模型（注意， $\mathbb{S}\mathrm{tring}(H)$ 仅在弱同伦等价意义下定义）。此外， [10,13] 还证明了 $\mathbb{S}\mathrm{ym}_L(\mathcal{G}_{bas})$ 也是 $\mathbb{S}\mathrm{tring}(H)$ 的光滑高阶群模型。这里，我们证明以下中间情形（定理 15.3）：

定理 2.13。 设 $A^{(1)}$ 是紧致、单连通的单李群 H 上基本*gerbe* G_{bas} 的任意 *1*-联络。那么，光滑 ∞-群的扩张（参见定理 *2.2*）

$$\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G}_{bas},\mathcal{A}^{(1)}) \longrightarrow \mathbb{S}\mathrm{ym}_L(\mathcal{G}_{bas},\mathcal{A}^{(1)}) \longrightarrow H$$

是一个光滑弦群扩张。

2.2.3. 高阶 U(1) 联络的规范理论。 我们介绍高阶 U(1) 联络的高阶规范理论模叠的若干重要实例，包括高阶麦克斯韦理论和爱因斯坦-麦克斯韦理论、高阶自对偶联络以及高阶 U(1)-BF 理论；近期的研究在 [50] 和其中的参考文献中，结合 Turaev-Viro 模型探讨了这些理论。特别地，我们推广 [58] 中的论证，以证明（定理 14.17）：

定理 2.14。 对于闭流形 M 上的每个黎曼度量 g，以及 M 上带有 k-联络的每个 n-丛$(G, A^{(k)})$，当 $k \leq n$ 时，存在将 G 上的 k-联络 $A^{(k)}$ 扩展为相对于 g 的高阶（真空）麦克斯韦解的扩张。

接下来，我们转而讨论 n-gerbe 上不同联络模堆之间的关系：对于$l,k \in \mathbb{N}_0$ 且满足 $l < k$，令

$$p_l^k \colon \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k} \to \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|l} \tag{2.15}$$

表示遗忘 $\mathcal{G}$ 上 k-联络的最高阶形式部分（$A_{l+1},\dots,A_k$）的态射。利用切赫-德利涅上同调的各种性质，我们证明了以下技术性结果（推论 12.5），从而得以将定理 2.11 应用于高阶 U(1) 联络：

命题 2.16. 态射 (2.15) 是一个 *Kan* 纤维化，并且当 $k \leq n$ 时是 *0*-连通的。

因此，只要$k \leq n$，$\mathrm{Diff}^{\mathcal{G},\mathcal{A}^{(k)}}(M) = \mathrm{Diff}^{\mathcal{G}}(M)$ 就仅取决于 $\mathcal{G}$ 的等价类。作为定理 2.11 和命题 2.16 的直接应用，我们得到若干对高阶 U(1) 联络模堆彼此等价。例如，我们得到：

定理 2.17。 设 $(G, A^{(k)})$ 是 M 上带有 k-联络的 n-丛，并设 $A^{(l)}$ 是通过遗忘部分联络数据（借助态射 (2.15)）从 G 得到的 l-联络。对于每个光滑高群作用 $\Phi\colon \mathbb{\Gamma} \to \mathrm{Diff}^{\mathcal{G}}(M)$，分别存在关于 $(G, A^{(k)})$ 和 $(G, A^{(l)})$ 上麦克斯韦方程解的模空间 ∞-*(*预*)*堆之间的典范等价，

$$\mathbb{M}\mathrm{dl}_{MW,\Phi}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(k)}) \simeq \mathbb{M}\mathrm{dl}_{MW,\Phi}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})\,.$$

换言之，在任何模空间问题中，我们都可以固定 n-丛上高阶 U(1)-联络的任意一部分，前提是每种情况下都使用正确的规范变换概念。我们阐明了文献 [58] 中研究的是高阶麦克斯韦理论完整模叠的哪种截断，并计算了带有 k-联络的 n-丛的高阶堆（定理 13.5），以及 M 上高阶麦克斯韦解的高阶堆（定理 14.18）的同伦类型。

2.2.4. *NSNS* 超引力解的模叠。本文的一个动机，是比较固定流形 M 上 NSNS 超引力解的两个高阶模叠，下面将对此作出说明。受 Gajer 的见解启发，并鉴于微分上同调理论在弦理论中的重要性，[2, 24, 30–32, 68, 72]，（高阶）gerbe 已在弦理论及其低能极限下产生的各种超引力理论中发挥重要作用。具体而言，有观点认为，弦理论中的 B 场由 1-丛上的 2-联络描述 [52]。对超引力方程解及其

模空间的研究长期以来一直是微分几何中的一个未解问题（例如，参见 [38] 的引言，其中有很好的综述及更多参考文献），但对于 B 场底层的 1-丛具有非平凡拓扑的情形（即类 $[\mathcal{G}] \in \mathrm{H}^3(M;\mathbb{Z})$ 非零），人们所知甚少。

近年来，广义几何的引入在微分几何领域以及数学超引力领域都取得了显著进展 [43, 47]（教科书式的介绍另见 [37]）。在这种方法中，B 场（在 NSNS 超引力中）被描述为M上的恰当 Courant 代数丛上的广义度量的一部分。这样的广义度量总可以分解为M 上的黎曼度量和恰当 Courant 代数丛的各向同性分裂；后者对应于 NSNS 超引力中的 B 场。

由此产生的问题是，这两种描述 NSNS 超引力几何的模型之间有何关联；更重要的是，两种方法得出的 NSNS 超引力解有何异同。正如下文将要解释的，这两种模型对 NSNS 超引力所预言的（高阶）场构型叠并不等价。因此，一个极其重要的问题是，能否调和这两种关于 B 场的方法（问题 16.25）以及关于M 上 NSNS 超引力解的模空间的方法（问题 16.26）之间的分歧；如果能，又该如何调和。

为了回答这些问题，我们在自己的形式体系中，为M 上的精确 Courant algebroid（分别考虑有各向同性分裂和无各向同性分裂的情形）引入模型，即将其视为单纯预层，

$$\mathrm{ECA}^{\mathcal{D}},\ \mathrm{ECA}^{\mathcal{D}}_{\nabla} \colon \mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}\,.$$

我们的描述有一个令人欣喜的特点：Ševera 分类给出了 $\mathrm{H}^3(M;\mathbb{R})$ 的元素与M上的精确 Courant algebroid 的同构类之间的典范双射。因此，精确 Courant 代数丛的群胚实现了M的三次德拉姆上同调的范畴化。一个自然的问题是，这是否也实现了 $\mathrm{H}^3(M;\mathbb{R})$ 上阿贝尔群结构的范畴化。对于一般的精确 Courant 代数丛，这一点似乎尚不清楚，但我们的模型给出了一个群胚，它与M 上的精确 Courant 代数丛的群胚典范等价，并具有典范的对称幺半结构，从而实现了这种精细的范畴化（定理 16.14）。

我们将 Hitchin 构造的广义切丛提升为单纯预层态射

$$\mathrm{AtCA}_{\nabla} \colon \mathrm{Grb}^{1,\mathcal{D}}_{\nabla|1} \longrightarrow \mathrm{ECA}^{\mathcal{D}}$$

在 $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 上。它将 M 上带联络结构的 gerbe 光滑族关联到 M 上的精确 Courant algebroid 光滑族。然后，正如 Hitchin [46], 已经观察到的，对于 M 上每个带 1-联络的 1-gerbe 光滑族 $(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(1)})$，$(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(1)})$ 上的曲率形式（即将 $\mathcal{A}^{(1)}$ 扩展为 $\mathcal{G}$ 上的完全联络）与 $\mathrm{AtCA}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(1)})$ 的光滑族各向同性分裂之间存在典范双射。

在超引力中，（半经典）电荷量子化 [24, 31, 32, 72] 迫使描述 B 场的恰当 Courant 代数丛的 Ševera 类落在有理化映射 $\mathrm{H}^3(M;\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^3(M;\mathbb{R})$ 的像中，因此该恰当 Courant 代数丛是 M 上带联络结构的 1-丛 $(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(1)})$ 的广义切丛。将后者视为 M 上结构 2-群为 $\mathrm{B}_{\nabla}\mathrm{U}(1)$ 的主2-丛，其关联的恰当 Courant 代数丛 $\mathrm{AtCA}_{\nabla}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(1)})$ 即为其高阶Atiyah代数丛 [23]。从这一视角来看，作用于 B场构型的自同构的正确概念是 $(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(1)})$ 的自同构。这类似于将主G-丛 P 上的联络描述为其 Atiyah正合列的分裂，但作用于这些联络的规范变换仍是 P 的自同构。相反，研究模去 P 的 Atiyah 代数丛自同构后的 P 上的联络，则是另一个有趣的问题。

于是我们仍然面临以下难题：如果将 NSNS B场建模为固定的1-丛簇 $\mathcal{G}$ 上的联络，其构型构成一个光滑群胚（见上文定理 2.12），相关的光滑对称 2-群为 $\mathbb{S}\mathrm{ym}_{\Phi}(\mathcal{G})$。相比之下，假设将 NSNS B场建模

为恰当 Courant 代数丛的各向同性分裂（或广义度量的一部分）；根据电荷量子化，我们可以假设它具有 $\mathrm{AtCA}_\nabla(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(1)})$ 的形式，其中对应于某个定义在 $\mathcal{G}$ 上的 1-联络 $\mathcal{A}^{(1)}$。此时，B 场的构型构成一个光滑集合，相关的光滑对称 2-群为 $\mathbb{S}\mathrm{ym}_\Phi(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(1)})$。描述构型的两个对象并不等价，这两个对称 2-群也不等价。尽管如此，结合定理 2.11 和命题 2.16，我们可以证明（定理 16.27 和 16.35）：

定理 2.18. 设 G 是 M 上的一个 *1*-丛，$A^{(1)}$ 是 G 上任意一个 *1*-联络。此外，令$\Phi\colon \mathbb{\Gamma} \to \mathrm{Diff}_{[\mathcal{G}]}(M)$ 是作用于 M 上的一个光滑高阶群作用。

(1) 存在模空间 ∞-叠的典范等价，

$$\mathbb{M}\mathrm{dl}_{B,\Phi}(\mathcal{G}) \simeq \mathbb{M}\mathrm{dl}_{B,\Phi}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(1)})$$

由 G 和 $\mathrm{AtCA}_\nabla(G,A^{(1)})$分别描述的 *NSNS* B 场。

(2) 其 存在 *NSNS* 超引力解模空间 ∞-预叠的典范等价 s

$$\mathbb{M}\mathrm{dl}_{NS,\Phi}(\mathcal{G}) \simeq \mathbb{M}\mathrm{dl}_{NS,\Phi}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(1)})\,,$$

以 G 和 AtCA_∇（$G, A^{(1)}$）为模型。

注记 2.19。NSNS 超引力的解特别是广义里奇孤子 [37]。事实上，我们后文中关于 NSNS 超引力解模空间的大多数论述，经适当调整后也适用于广义里奇孤子的模空间。◁

这消除了 NSNS 超引力模空间两种研究方法之间表面上的差异：尽管这两种模型在构型层级上并不等价，其对称性 2-群也不等价，但在过渡到模空间∞-预叠时，这些差异彼此抵消。未来，在异质超引力的背景下探讨类似结果将十分有趣；我们预计，陈-西蒙斯 2-丛带 [19,74] 上的联络与 String 锚丛上的结构 [39,40]之间存在类似的联系。

记号。

- $\mathcal{M}\mathrm{fd}$ 表示由光滑流形及光滑映射构成的范畴。
- $\mathcal{C}\mathrm{art} \subset \mathcal{M}\mathrm{fd}$ 是笛卡尔空间构成的全子范畴。
- $\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ 表示一个范畴，其对象是由对象 $c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$ 参数化的笛卡尔空间族（定义 3.2）。

- $\mathcal{G}\mathrm{pd}$ 表示由（小）群胚构成的 2-范畴，而 $\mathcal{C}\mathrm{at}$ 表示由（小）范畴构成的 2-范畴。
- $\mathcal{S}$是由空间（或等价地，∞-群胚）构成的 ∞-范畴。
- 所谓 ∞-范畴，是指满足内角提升条件的单纯集合，例如参见 [20,57]。

- 我们用 $\mathrm{Fun}(-,-)$ 表示普通范畴之间的函子范畴，并用 $\mathcal{F}\mathrm{un}(-,-)$ 表示 ∞-范畴之间的函子 ∞-范畴。

- 我们用 $\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta = \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}},\mathcal{S}\mathrm{et})$ 表示单纯集合的范畴。
- 若 $\mathcal{C}$ 是单纯富化范畴，我们用 $\mathcal{C}(-,-)\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 表示单纯富集同函子。

- 对于一个 ∞-范畴 A，我们将其上的 ∞-预层的 ∞-范畴简记为 $\mathcal{P}(A) := \mathcal{F}\mathrm{un}(A^{\mathrm{op}},\mathcal{S})$。
- 对于范畴 $\mathcal{C}$ 和对象 $c \in \mathcal{C}$，我们分别用 $\mathcal{C}_{/c}$ 和 $\mathcal{C}_{c/}$ 表示在 c 之上和之下的切片范畴。若 $\mathcal{C}$ 是一个 ∞-范畴，亦同。
- $\mathrm{Diff}(M)$ 是流形 M 的微分同胚群。我们用 $\mathrm{Diff}_{[\mathcal{G}]}(M)$ 表示 $\mathrm{Diff}(M)$ 的子群，它保持给定的几何结构 $\mathcal{G}$ 在M 上的等价类（定义 6.1）。

- 给定一个群 H，记 $\mathbf{B}H \in \mathcal{G}\mathrm{pd}$ 为其解环：这是一个只有单个对象的群胚，其自同构群为 H。

- 我们将函子 $\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{G}\mathrm{pd}, c \mapsto \mathbf{B}\mathrm{Diff}(M)$ 的 Grothendieck 构造记作 $\mathbf{B}\mathcal{D}$。类似地，我们将 $\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{G}\mathrm{pd}, c \mapsto \mathbf{B}\mathrm{Diff}_{[\mathcal{G}]}(M)$ 的 Grothendieck 构造记作 $\mathbf{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]$。

- 我们引入一个范畴 $\mathbf{GCov}^{\mathcal{D}}$，其对象是$c \times M$的良好开覆盖的光滑族，其中$c \in \mathcal{C}\mathbf{art}$ 是一个笛卡尔空间。其态射由以下操作组合而成：沿纤维上的微分同胚拉回覆盖，并用良好开覆盖细化所得结果（定义 3.14）。

- 我们将 $\mathcal{C}\mathrm{h}_{\geq 0}$ 记作阿贝尔群的非负分次链复形范畴。
- $\mathcal{A}\mathrm{b}_{\Delta}$ 表示单纯阿贝尔群的范畴。
- 我们将 $\Gamma\colon \mathcal{C}\mathrm{h}_{\geq 0} \to \mathcal{A}\mathrm{b}_{\Delta}$ 记作 Dold-Kan 对应中的一个函子（两个函子之一）。
- 我们用粗体表示 ∞-预层，用罗马体表示普通预层或单纯预层。

- 我们用 $\int F \to N\mathcal{C}$ 表示与（1-范畴）函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}$相关联的左纤维化。

致谢。 作者谨向 André Henriques、Lukas Müller、Dmitri Pavlov、Sakura Schäfer-Nameki 和 Richard Szabo 致以诚挚谢意，感谢他们所进行的富有帮助的讨论。SB 的研究由德国研究联合会（DFG）资助，项目编号为 468806966。C.S.S. 的研究工作由德国卓越战略计划量子宇宙 （项目编号：390833306）以及 BBVA 基金会 2022 年度莱昂纳多研究人员与文化创作者资助计划资助。

第1. 部分 流形上的高阶几何结构的模空间 ∞-叠

本文的第一部分建立了一套一般性的形式体系，用于构造流形上的高阶几何结构的光滑族，并将流形的微分同胚所施加的光滑作用纳入考量。这两个方面对于全面了解高阶几何结构的全局模空间 ∞-叠至关重要。

高阶几何结构在完全一般的情形下，可用相对于（良好）开覆盖的 ∞层[7] 来描述。由于我们研究的是 1-范畴站点，这些 ∞层总能用满足同伦下降的单纯预层来表示（例如参见 [20, 定理 7.9.8，推论 7.9.9]）。鉴于这类表示提供了额外的计算工具，我们从适当的带有格罗滕迪克覆盖的范畴上的单纯同伦层出发来建立我们的框架（第 3、4、5 节）。

接着，我们构造高阶几何结构的光滑高阶自同构群和对称群，并证明它们的泛性质（第 6 节和第 7 节）。为了编码这些群的光滑且同伦相干的作用——它们构成了模空间 ∞-叠定义的基础——我们转而采用左纤维化的语言（这是 ∞-预层的另一种模型 [20, 定理 7.8.9]）。

最后，运用迄今建立的形式体系，我们构造高阶几何数据的模空间 ∞-预叠（第 8 节），并证明一个实用判据，用以判断两个不同的模空间 ∞-预叠何时等价。我们提出的框架由场论问题所启发，但也适用于更一般的情形。第 9 节将说明，在某些条件下，我们的模空间 ∞-预叠关于参数空间的良好开覆盖满足下降，即构成 ∞-叠。

3. 流形光滑族与微分同胚的站点

本节为我们研究流形上的高阶几何结构奠定基础。我们引入一个带有格罗滕迪克覆盖的特定范畴，其上的层编码了固定流形 M 上由笛卡尔空间参数化的几何数据光滑族，以及微分同胚群 $\mathbf{Diff}(M)$ 的光滑作用。

3.1. 光滑笛卡尔空间的族。 我们首先构造一个（Grothendieck）位点，用于参数化高阶几何结构的光滑族。

[7] 我们交替使用术语 ∞-层和 ∞-堆。

定义 3.1。 令 $\mathcal{M}\mathrm{fd}$ 为光滑流形及光滑映射所构成的范畴。令 $\mathcal{C}\mathrm{art} \subset \mathcal{M}\mathrm{fd}$ 为由那些与 $\mathbb{R}^n$ 微分同胚的流形构成的满子范畴，其中 c n 遍历所有非负整数。

定义 3.2. 令 $\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ 表示如下范畴：其对象是光滑的局部平凡纤维丛 $\hat{c} \to c$，其中 $c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$，且其纤维为笛卡尔空间[8]。态射 $(\hat{c} \to c) \longrightarrow (\hat{d} \to d)$ 是交换方块

$$\begin{array}{ccc} \hat{c} & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{d} \\ \downarrow & & \downarrow \\ c & \xrightarrow[f]{} & d \end{array}$$

中的态射，属于 $\mathcal{C}\mathrm{art}$。

特别地，对于 $\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ 中的每个对象 $(\hat{c} \to c)$，都存在一个笛卡尔空间 d，以及 $\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ 中形如以下形式的某个同构：

$$\begin{array}{ccc} \hat{c} & \xrightarrow{\cong} & c \times d \\ \downarrow & & \downarrow \mathrm{pr}_c \\ c & = & c \end{array}$$

定义 3.3. 如果流形 M 的开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_a\}_{a\in\Lambda}$ 的每个有限交 $U_{a_0\cdots a_n} := U_{a_0} \cap \cdots, \cap U_{a_n}$（其中 $a_0, \ldots, a_n \in \Lambda$）要么为空，要么是笛卡尔空间，则称该开覆盖是良好的。

注记 3.4. 每个流形 M 的任意开覆盖都存在一个由良好开覆盖构成的细化 [29,附录A]。◁

定义 3.5。 对象 $(\hat{c} \to c) \in \mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ 的覆盖 是一个子集族 $(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}) = \{(\hat{U}_a \to U_a)\}_{a\in\Lambda}$。

$$\begin{array}{ccc} \hat{U}_a & \hookrightarrow & \hat{c} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_a & \hookrightarrow & c \end{array}$$

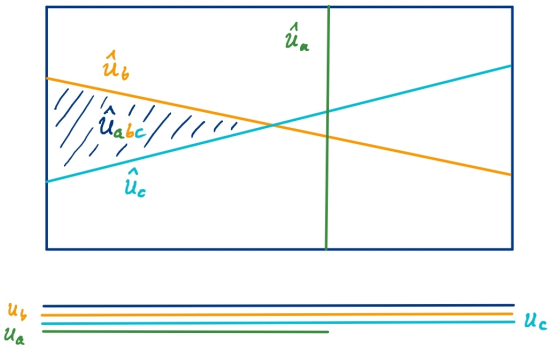
使得

(1) $\hat{\mathcal{U}}$ 和 $\mathcal{U}$ 分别是 $\hat{c}$ 和 c的良好开覆盖，并且 (2) 每个有限交 $(\hat{U}_{a_0\cdots a_n} \to U_{a_0\cdots a_n})$ 要么为空，要么是 $\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ 中的一个对象。

例 3.6。 设 $c,d \in \mathcal{C}\mathrm{art}$ 配有良好开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_a\}_{a\in\Lambda}$，分别覆盖 c 和 $\mathcal{V} = \{V_b\}_{b\in\Xi}$ 覆盖 d。那么，乘积覆盖 $\{U_a \times V_b\}_{a\in\Lambda,b\in\Xi}$ 是 c（$\mathrm{pr}\colon c \times d \to c$）在 $\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ 中的覆盖。◁

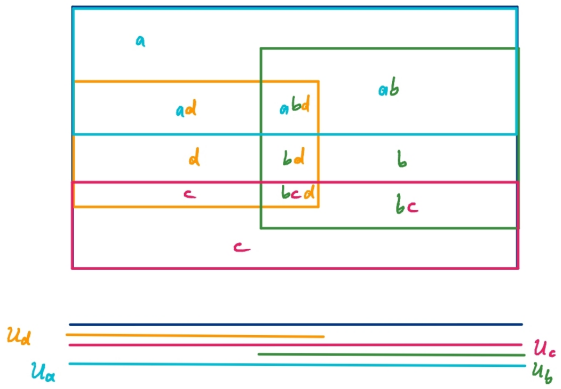
例 3.7. 定义 3.5 中的第二个条件并不能由第一个条件推出：例如，令 $\mathrm{x}c = d = \mathbb{R}$，并考虑对象 $(\mathrm{pr}_c\colon c \times d \to c) \in \mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$。此处所示的 $c \times d$ 与 c 的覆盖：

[8]请注意，由于 c 是光滑且可缩的，且由 [54, 定理 44.24]可知，丛 $(\hat{c} \to c)$ 也是整体平凡的。因此，$\hat{c}$ 本身是一个笛卡尔空间。



满足条件 (1)，但不满足条件 (2)，因为投影 $\hat{}U_{abc} \to U_{abc}$ 不是满射。◁

注记 3.8。考虑对象 $(\hat{}\mathcal{U} \to \mathcal{U})$ 的一个覆盖 $(\hat{}c \to c) \cong (c \times c' \to c) \in \mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$。对于每个 $\hat{}x \in c$，我们都得到纤维 d的一个诱导开覆盖 $\mathcal{U}|_x$。这个覆盖可能随点而变化，如下例中 $c = c' = \mathbb{R}$所示：



这里，顶部空间$c \times c' \cong \mathbb{R}^2$ 中边界颜色单一的每个矩形都是$c \times c'$, 的良好开覆盖 $\hat{}\mathcal{U} = \{\hat{}U_a, \hat{}U_b, \hat{}U_c, \hat{}U_d\}$ 中的一个局部片；对于每个由这些局部片交集形成的矩形，我们都标出了参与该交集的所有局部片的指标。特别地，这使我们能够描述M 上的光滑几何数据族，而不必先为每个族固定$c \times M$ 的一个良好开覆盖。◁

定义 3.9. 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴。在 $\mathcal{C}$ 上的格罗滕迪克覆盖是覆盖的一个集合 τ，对每个对象 $c \in \mathcal{C}$ 都有一个覆盖；覆盖是一个态射族 $U = \{f_a\colon c_a \to c\}_{a\in\Lambda}$，其余域为 c。这些覆盖满足以下性质：若 U 是 $c \in \mathcal{C}$ 的一个覆盖，且 $h \in \mathcal{C}(d, c)$ 是任意一个态射，则存在 d 的一个覆盖 $V = \{g_b : d_b \to d\}_{b\in\Xi} \in \tau$，以及一个映射 $\lambda\colon \Xi \to \Lambda$，使得对每个 $b \in \Xi$，在 $\mathcal{C}$ 中都有一个交换图表：

$$\begin{array}{ccc} d_b & \xrightarrow{h_b} & c_{\lambda(b)} \\ {\scriptstyle g_b}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{\lambda(b)}} \\ d & \xrightarrow[h]{} & c \end{array}$$

注记 3.10。良好开覆盖赋予范畴 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 一个格罗滕迪克覆盖（参见 [29,附录 A. 的推论1]）。◁

引理 3.11. $\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ 上的覆盖在 $\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$上定义了一个格罗滕迪克覆盖，我们将其记为 τ_{fam}。

证明。考虑(ˆd → d)的一个覆盖(ˆU → U)以及一个态射(ˆf, f) : (ˆc → c) —˘ (ˆd → d)。由于ˆc → c是可平凡化丛，我们可以找到一个同构(φ, 1c) : (c × ˜c → c) —˘ (ˆc → c)，其中定义域对象是c上的平凡 ˜c-丛。开覆盖ˆU在ˆd上的拉回是c × ˜c的一个开覆盖(ˆfφ)−1(ˆU)。根据积拓扑的性质，它有一个形如ˆ V′ = {V′b × ˜V ′b}b∈B的细化，其中V ′b和 ˜V ′b分别是c和 ˜c的开子集。对每个因子作投影，我们得到 c的开覆盖V′ = {V′b}b∈B 以及 ˜c的开覆盖 ˜V′ = { ˜V′b}b∈B。我们可以找到这些覆盖的良好细化W = { Wi}i∈I 和 ˜W ={Wj}j∈J （见 [29, 命题 A.1]的证明）。于是，族ˆW = {φ(Wi × ˜Wj)}i∈I,j∈J 和W组合起来，构成(ˆc →c)的一个覆盖(ˆW → W)，并具有所需性质。□

3.2. M 上的微分同胚的光滑族。接下来，我们纳入 M 的微分同胚群 Diff(M) 的作用。我们将 Diff(M) 视为 Fun($\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}$) 中的一个群对象：它将每个 c ∈ Cart 对应到所有光滑映射 φ−1: c × M → c × M 的集合，这些映射与到 c 的投影相容，在每个 x ∈c 处都限制为 M 的一个微分同胚，并且存在一个同样具有这些性质的逆映射。等价地，我们可以将这些数据描述为一个光滑映射 φ: c → Diff(M)。令 Gpd 表示群胚的 2-范畴。给定一个群对象 H ∈ Fun($\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}$)，我们令 BH : $\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ → Gpd 表示严格函子，它将 c ∈ Cart 对应到群胚 B(H(c))；该群胚仅含一个对象，其自同构群为 H(c)。

固定一个流形M。我们引入简写记号

$$\mathrm{B}\mathcal{D} := \int \big(\mathrm{BDiff}(M)\big) \xrightarrow{\pi_M} \mathcal{C}\mathrm{art}$$

表示 BD〈style id='1'>M 的 Grothendieck 构造。具体而言，B$\mathcal{D}$ 的对象与 Cart 的对象相同，但 B$\mathcal{D}$ 中的态射 $c \to d$ 是一个二元组 (f, φ)，其中 $f \in \mathcal{C}\mathrm{art}(c,d)$ 是一个态射， $\varphi\colon c \to \mathrm{Diff}(M)$ 是一个光滑映射；这些数据在 $\mathcal{M}$ fd 中诱导出一个交换方块，

$$\begin{array}{ccc} c \times M & \xrightarrow{f \wr \varphi} & d \times M \\ \downarrow & & \downarrow \\ c & \xrightarrow[f]{} & d \end{array}$$

这里，对于$x \in c$ 和$z \in M$，我们定义

$$(f \wr \varphi)(x, z) = \big(f(x), \varphi^{\dashv}(x, z)\big)\,. \tag{3.12}$$

对反变函子 BDiff(M): $\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{G}\mathrm{pd}$ 应用 Grothendieck 构造并取脉络，可得到一个*right* 纤维化

$$N\pi_M\colon N\mathrm{B}\mathcal{D} \longrightarrow N\mathcal{C}\mathrm{art}\,.$$

注 3.13。 在本文中，对偶范畴 B$\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ 扮演着重要角色。其脉络是左纤维化 $N\pi_M\colon N\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}} \longrightarrow N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 的定义域（为简化记号，我们省略态射上的 $(-)^{\mathrm{op}}$ ；这一点从上下文中即可看出）。我们指出，对于每个c ∈Cart，纤维 $(\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}})_c$ 是对偶群$\mathit{Diff}(M)^{\mathrm{rev}}$ 的解环——也就是说，是将乘法反转后的 Diff(M)(c)——而不是 Diff(M)(c)。也就是说，存在一个典范同构

$$N\mathrm{B}\mathcal{D} \cong r^*_{\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}\mathrm{B}\big(\mathrm{Diff}(M)^{\mathrm{rev}}\big)$$

定义 A.3 中， $\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 上单纯集合的函子，其中$Nr^*_{\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}\colon \mathrm{Fun}(\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta) \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}$ 是单纯集合预层的整直函子。我们考虑这种反转确实很自然，因为我们将遇到的 Diff(M) 作用是通过拉回几何结构实现的；因此，它们自然是右作用，但我们通常会将其视为 Diff(M)$^{\mathrm{rev}}$ 的左作用。

◁

注意到，存在一个典范函子

$$e_M\colon \mathcal{C}\mathrm{art} \longrightarrow \mathrm{B}\mathcal{D}\,,$$

它在对象上是恒等映射，并将态射 $f: c \to d$ 从 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 映射为 $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 中的态射 $(f, 1_M)$。它还满足恒等式

$$\pi_M \circ e_M = 1_{\mathcal{C}\mathrm{art}},$$

即 e_M 是 π_M 的一个截面。

接下来，我们为M 关联一个范畴，它编码了M 的良好开覆盖的光滑族，以及 $\mathrm{Diff}(M)$ 在这些覆盖上的作用。

定义 3.14。我们定义一个范畴 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$，其对象 是由以下数据构成的二元组 $(c, \hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U})$：$c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$ 是一个笛卡尔空间，而 $(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U})$ 是一个族

$$(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}) = \{(\hat{U}_a \to U_a) \in \mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}\}_{a\in\Lambda}$$

由对象 $(\hat{U}_a \to U_a)$ 构成的 $\in \mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$，满足以下性质：

(1) $\hat{U}_a \subset c \times M$ 是一个开子集；(2) $U_a \subset c$ 是

一个开子集；(3) 对每个$a \in \Lambda$，典范图表

$$\begin{array}{ccc} \hat{U}_a & \hookrightarrow & c \times M \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_a & \hookrightarrow & c \end{array}$$

流形和光滑映射的

(4) $\{\hat{U}_a\}_{a\in\Lambda}$ 和 $\{U_a\}_{a\in\Lambda}$ 分别构成$c \times M$和c的良好开覆盖， d

(5) 每一对（$\hat{U}_{a_0\cdots a_l} \to U_{a_0\cdots a_l}$）有限交再次是 $\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ 中的一个对象。

$\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$ 中的态射定义如下：考虑 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$中的两个对象 $(c, \hat{U} \to U)$ 和 $(d, \hat{V} \to V)$，其覆盖分别写作 $(\hat{U} \to U) = \{\hat{U}_a \to U_a\}_{a\in\Lambda}$ 和 $(\hat{V} \to V) = \{\hat{V}_b \to V_b\}_{b\in\Xi}$。$\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$ 中的态射 $(c, \hat{U} \to U) \leadsto (d, \hat{V} \to V)$ 由 $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 中的态射 $(f, \varphi): c \to d$ 和一个指标集映射 $\lambda: \Lambda \to \Xi$ 组成，使得对于每个 $a \in \Lambda$，$(f \circ \varphi \to f): (c \times M \to c) \leadsto (d \times M \to d)$ 在 $(\hat{U}_a \to U_a)$ 上的限制可因子分解通过 $(\hat{V}_{\lambda(a)} \to V_{\lambda(a)})$。

例 3.15。设 $\mathcal{W} = \{W_i, \to M\}_{i\in\Xi}$ 是 M 的良好开覆盖，并设 $\mathcal{U} = \{U_a, \to c\}_{a\in\Lambda}$是 $c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$ 的良好开覆盖。我们得到乘积覆盖

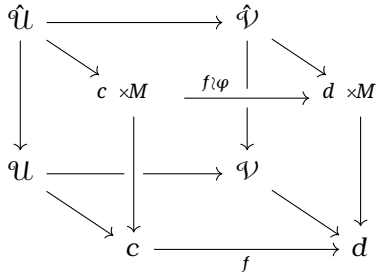
$$\hat{\mathcal{U}} = \mathcal{W} \times \mathcal{U} = \{U_a \times W_i \hookrightarrow c \times M\}_{a\in\Lambda, i\in\Xi}.$$

于是，典范投影 $(\hat{U} \to U)$ 是 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$ 中的一个对象。设 $\varphi: c \to \mathrm{Diff}(M)$ 是一个微分同胚的光滑族，且 $f: c \to c$ 是一个微分同胚。令 $\hat{U}'_{ai} := (f \circ \varphi)^{-1}(U_a \times W_i) \subset c \times M$，且 $U'_a := f^{-1}(U_a) \subset c$。我们得到一个新的对象 $(\hat{U}' \to U') \in \mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$，其中 $\hat{U}' = \{\hat{U}'_{ai}\}_{a\in\Lambda、\ i\in\Xi}$ 以及 $U' = \{U'_a\}_{a\in\Lambda}$。这带有一个典范同构

$$(\lambda = \mathrm{id}, f \wr \varphi \to f): (\hat{\mathcal{U}}' \to \mathcal{U}') \longrightarrow (\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U})$$

在 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$ 中。注意，新的覆盖（$\hat{\mathcal{U}}' \to \mathcal{U}'$）一般不再具有乘积形式；相反，它被微分同胚 $f \wr \varphi: c \times M \to c \times M$ 扭曲了。◁

注记 3.16. 我们可以将 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$ 中的态射表示为交换立方体



将映射 λ 保持为隐式。 ◁

注记 3.17。 存在一个典范投影函子

$$\bar{\omega}^{\mathcal{D}}\colon \mathrm{GCov}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathrm{B}\mathcal{D}\,, \tag{3.18}$$

其纤维 $(\bar{\omega}^{\mathcal{D}})^{-1}(c) = \mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}_{|c}$ 在 $c \in \mathrm{B}\mathcal{D}$ 上是 $(c \times M \to c)$ 的良好开覆盖的余滤范畴（余滤性可类似于引理 3.11 的证明得出）。◁

引理 3.19. 设 $c \in \mathrm{B}\mathcal{D}$。纤维到下范畴中的包含 $\jmath_c^{\mathcal{D}}\colon \mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}_{|c} \check{}\, \mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}_{c/}$ 是同伦余终。

证明。$X \in \mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}_{/c}$ 中的一个对象由一个态射 $(f,\ \varphi)\colon c \to d$ 属于 $\mathrm{B}\mathcal{D}$，其中 $d \in$ 是 $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 中的某个对象，以及 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}_{|d}$ 中的一个对象 $(\hat{\mathcal{V}} \to \mathcal{V})$ 组成。我们必须证明，对于每个 $X \in \mathrm{GCov}_{/c}$，其脉络

$$N(\jmath_c/X) \cong N\big(\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}_{|c}\big) \underset{N(\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}_{c/})}{\times} N\big((\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}_{|c})_{/X}\big)$$

是一个弱可缩单纯集合。然而，逗号范畴 $\jmath_c/X$ 可描述为由所有加细了 $(c \times M \to c)$ 的开覆盖 $((f \wr \varphi)^{-1}(\hat{\mathcal{V}}) \to f^{-1}(\mathcal{V})$ 的良好开覆盖构成的范畴（后者通常不是微分意义下良好的）。这个范畴是余滤的，因此其脉络确实是可缩的。□

引理 3.20. ∞-函子 $N\bar{\omega}^{\mathcal{D}}\colon N\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}} \check{}\, N\mathrm{B}\mathcal{D}$ 满足以下性质：

(1) 它是一个等纤维化。*(2)* 它是光滑的（按照 *[20, Defs. 4.4.1, 4.4.15]* 的定义）。

证明。任意（1-）范畴之间的函子的脉络都是内纤维化 [20,Rmk. 3.3.15]；因此，$\mathrm{N}\bar{\omega}^{\mathcal{D}}$ 是内纤维化。要证明它还是等纤维化，取 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$ 中的一个对象 $(\mathrm{c}_1, \hat{\mathrm{U}} \to \mathrm{U})$，其中 $\mathrm{U} = \{\mathrm{U}_i\}_{i\in\Lambda}$，且 $\hat{\mathrm{U}} = \{\hat{\mathrm{U}}_i\}_{i\in\Lambda}$（参见定义 3.14）。令 $(\mathrm{f}, \varphi)\colon \mathrm{c}_0 \to \mathrm{c}_1$ 是 $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 中的一个同构；也就是说，$\mathrm{f}\colon \mathrm{c}_0 \to \mathrm{c}_1$ 是笛卡尔空间之间的微分同胚。对每个 i，令 $\mathrm{V}_i := \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{U}_i)$，且 $\hat{\mathrm{V}}_i := (\mathrm{f} \circ \varphi)^{-1}(\hat{\mathrm{U}}_i)$，并令 $\mathrm{V} = \{\mathrm{V}_i\}_{i\in\Lambda}$，且 $\hat{\mathrm{V}} = \{\hat{\mathrm{V}}_i\}_{i\in\Lambda}$。那么，三元组 $(\mathrm{f}, \varphi, \lambda = 1_\Lambda)$ 给出 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$ 中的一个同构 $(\mathrm{c}_0, \hat{\mathrm{V}} \to \mathrm{V}) \to (\mathrm{c}_0, \hat{\mathrm{U}} \to \mathrm{U})$，它在 $\bar{\omega}^{\mathcal{D}}$ 下映射为 (f, φ)。这表明 $\mathrm{N}\bar{\omega}^{\mathcal{D}}$ 是等纤维化。第二个结论现在由引理 3.19 和 [20, Thm. 4.4.36] 得出。□

定义 3.21. 令 $\mathrm{GCov} \subset \mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$ 为宽子范畴[9]，其态射仅包含 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$ 中形如 $(f, \varphi) = (f, 1_M)$ 的态射。因此，GCov 带有一个典范投影函子 $\bar{\omega}\colon \mathrm{GCov} \to \mathcal{C}\mathrm{art}$。

注 3.22. ∞-函子 $N\bar{\omega}\colon N\mathrm{GCov} \to N\mathcal{C}\mathrm{art}$ 由与引理 3.20 相同的论证可知是光滑等纤维化。◁

我们得到一个范畴的交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GCov} & \xhookrightarrow{\hat{\mathrm{e}}_M} & \mathrm{GCov}^{\mathcal{D}} \\ \downarrow{\scriptstyle \bar{\omega}} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\omega}^{\mathcal{D}}} \\ \mathcal{C}\mathrm{art} & \underset{\pi_M}{\overset{\mathrm{e}_M}{\rightleftarrows}} & \mathrm{B}\mathcal{D} \end{array}$$

根据子范畴 $\mathrm{GCov} \subset \mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$ 的定义，我们有以下引理：

引理 3.23. 单纯集合的交换方块

$$\begin{array}{ccc} N\mathrm{GCov} & \xhookrightarrow{N\hat{\mathrm{e}}_M} & N\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}} \\ \downarrow{\scriptstyle N\bar{\omega}} & & \downarrow{\scriptstyle N\bar{\omega}^{\mathcal{D}}} \\ N\mathcal{C}\mathrm{art} & \xrightarrow{N\mathrm{e}_M} & N\mathrm{B}\mathcal{D} \end{array}$$

[9]如果一个子范畴包含其所在范畴的所有对象，则称其为宽子范畴。

是笛卡尔的。

引理 3.24. 对每个 $c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$，以下陈述均成立：

(1) 包含 $\jmath_c^{\mathcal{D}}\colon \mathrm{GCov}_{/c}\,,\check{}\,\mathrm{GCov}_{c/}$ 是同伦余终。*(2)* 典范包含 $\imath_c\colon \mathrm{GCov}_{/c}\,,\check{}\,\mathrm{GCov}_{c/}^{\mathcal{D}}$ 是同伦余终

证明。 注意到每个纤维都重合，即可类似于引理 3.19 得出断言 1。

$$\mathrm{GCov}_{/c} = \mathrm{GCov}_{/c}^{\mathcal{D}},$$

for 每个 $c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$。断言 2 则结合断言 1、引理 3.19 和 [20, 推论 4.1.9 即可得出。]. □

4. Smooth families of higher geometric structures

本节介绍一种函子性构造，它将 $\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ 上的单纯同伦层转化为 $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 上的单纯预层。借此，我们可以根据局部模型，在 M 上构造全局几何数据的光滑族。

定义 4.1。 我们作出如下定义：

(1) 令 $\mathcal{H} := \mathrm{Fun}(\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta)$ 表示 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 上的单纯预层范畴。我们将其视为赋有投射模型结构的范畴。(2) 令 $\mathcal{H}^{loc}$ 表示 $\mathcal{H}$ 在笛卡尔空间的良好开覆盖的切赫神经处的左 Bousfield 局部化。
(3) 令 $\mathcal{H}_{\mathrm{fam}} := \mathrm{Fun}(\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}{}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta)$ 表示 $\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ 上的单纯预层范畴，并赋有投射模型结构。
(4) 我们用 $\mathcal{H}_{\mathrm{fam}}^{loc}$ 表示 $\mathcal{H}_{\mathrm{fam}}$ 在 τ_{fam}-覆盖的切赫神经处的左 Bousfield 局部化（见定义 3.5）。

注 4.2。 上述每个模型结构都是单纯的。对于单纯范畴 $\mathcal{C}$，我们将其中的单纯富集同函子记为 $\mathcal{C}(-,\ -)\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$。 ◁

存在一个函子 $\check{\mathrm{C}}\colon \mathrm{GCov}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathrm{fam}}$，定义如下：考虑 $(c \times M \to c)$ 的良好开覆盖 $(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U})$，它由局部片 $(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}) = \{(\hat{U}_a \to U_a)\}_{a\in\Lambda}$ 组成。函子 $\check{\mathrm{C}}$ 将其映为 $\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ 上的单纯预层，其第l层为

$$\check{\mathrm{C}}(c, \hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}) = \coprod_{a_0\cdots a_l\in\Lambda} h_{(\hat{U}_{a_0\cdots a_l} \to U_{a_0\cdots a_l})},$$

其中h 表示 $\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ 的 Yoneda嵌入。$\check{\mathrm{C}}$ 对态射的作用由 $\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ 的 Yoneda嵌入典范地诱导。由于 $\check{\mathrm{C}}(c,\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U})$ 逐层都是可表函子的余积，因此它在 $\mathcal{H}_{\mathrm{fam}}$ 中是余纤维的。

注 4.3. 考虑 $\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ 上的预层 $(c \times M \to c)$，它将对象 $(\hat{d} \to d)$ 映为光滑映射的交换方块集合

$$\begin{array}{ccc} \hat{d} & \longrightarrow & c \times M \\ \downarrow & & \downarrow \mathrm{pr}_c \\ d & \longrightarrow & c \end{array}$$

上述切赫神经甚至是该预层在 $\mathcal{H}_{\mathrm{fam}}^{loc}$ 中的余纤维化近似：例如，这可由如下事实推出：典范态射

$$\check{\mathrm{C}}(c, \hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U})_0 = \coprod_{a\in\Lambda} h_{(\hat{U}_a \to U_a)} \longrightarrow (c \times M \to c)$$

是一个局部 关于覆盖 τ_{fam} 在 $\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ 上的满态射（见第3节）。其切赫神经随后是一个 W
局部模型结构中的弱等价，见 [26, 推论 A.3]）。 ◁

构造 4.4。 存在一个函子

$$\check{C}^{\mathcal{D}*}\colon \mathcal{H}^{loc}_{\mathrm{fam}} \longrightarrow \mathrm{Fun}\big((\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}\big)\,, \qquad G \longmapsto \check{C}^{\mathcal{D}*}G\,,$$
$$\check{C}^{\mathcal{D}*}G(c, \hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}) := \underline{\mathcal{H}_{\mathrm{fam}}}\big(\check{C}(c, \hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}), G\big)$$

赋予 $\mathrm{Fun}((\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta})$ 投射模型结构后，该函子保纤维化、平凡纤维化和极限，也保纤维对象之间的弱等价。特别地，它将 $\mathcal{H}^{loc}_{\mathrm{fam}}$ 中的纤维对象映射为 $\mathrm{Fun}((\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta})$ 的纤维对象。

类似地，我们定义函子

$$\check{C}^{M*}\colon \mathcal{H}^{loc}_{\mathrm{fam}} \longrightarrow \mathrm{Fun}\big(\mathrm{GCov}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}\big)\,, \qquad G \longmapsto \check{C}^{M*}G\,,$$
$$\check{C}^{M*}G(c, \hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}) := \underline{\mathcal{H}_{\mathrm{fam}}}\big(\check{C}(c, \hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}), G\big)$$

该函子具有与上文的 $\check{C}^{\mathcal{D}*}$ 相同的性质。 ◁

引理 4.5. 设 $\check{C}^{\mathcal{D}*}G$ 是由纤维对象 $G \in \mathcal{H}^{loc}_{\mathrm{fam}}$ 经构造 *4.4* 得到的定义在 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$ 上的单纯预层。对于每个 $c \in \mathrm{B}\mathcal{D}$，函子 $\check{C}^{\mathcal{D}*}G$ 限制在纤维 *over* c 上时是本质常值函子 $(\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})^{\mathrm{op}}_{|c} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}$，即 $\check{C}^{\mathcal{D}*}G$ 将 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}_{|c}$ 中的每个态射映为弱等价。函子 $\check{C}^{M*}$ 也同样如此。

Proof. 这是由G 满足关于 τ_{fam}的下降这一事实直接得出的。 □

我们现在的目标是摆脱对良好开覆盖的选择的依赖。我们通过以下左 Kan 延拓对所有这类覆盖取平均来实现这一点:

命题 *4.6.* *</style>》（1-范畴意义下的）左 Kan 延拓*

$$\mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}}\colon \mathrm{Fun}\big((\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}\big) \longrightarrow \mathrm{Fun}\big(\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}\big) \quad \textit{and}$$
$$\mathrm{Lan}_{\bar{\omega}}\colon \mathrm{Fun}\big(\mathrm{GCov}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}\big) \longrightarrow \mathrm{Fun}\big(\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}\big)$$

保持有限极限，以及射影弱等价和纤维化（相对于 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}$上的 *Kan–Quillen* 模型结构）。特别地，它们保持投射纤维对象。

证明. 我们给出关于 $\mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}}$ 的陈述的证明；关于 $\mathrm{Lan}_{\bar{\omega}}$ 的证明完全类似。设 $\mathrm{e}G^{\mathcal{D}}\colon (\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}$ 是一个函子。由引理 3.19 和 3.24，对于每个$c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$，单纯集合之间的典范态射

$$\mathrm{colim}\big(\widetilde{G}^{\mathcal{D}}\colon (\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}_{/c})^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}\big) \longrightarrow \mathrm{colim}\big(\widetilde{G}^{\mathcal{D}}\colon (\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}_{|c})^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}\big) \tag{4.7}$$

是一个同构。同构 (4.7) 对c 并非自然，因为纤维 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}_{|c}$ 并不函子性地依赖于c （赋值$c \mapsto \mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}_{|c}$ 不是一个 $\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}\mathrm{at}$ 函子）。然而，对于固定的$c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$，它们关于图表 $\mathrm{e}G^{\mathcal{D}}$是自然的。因此，对于每个$c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$，我们得到一个典范同构

$$\big(\mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}}\widetilde{G}^{\mathcal{D}}\big)(c) \cong \mathrm{colim}\Big(\widetilde{G}^{\mathcal{D}}\colon (\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})^{\mathrm{op}}_{|c} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}\Big)\,,$$

对 $\mathrm{e}G^{\mathcal{D}}$ 自然。由于我们需要验证的所有性质都是逐对象的，并且在同构下稳定，因此只需证明对于每个 $c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$，函子

$$\mathrm{Fun}\big((\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}\big) \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}\,, \qquad \widetilde{G}^{\mathcal{D}} \longmapsto \mathrm{colim}\big(\widetilde{G}^{\mathcal{D}}\colon (\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}_{|c})^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}\big)$$

保有限极限、纤维化和弱等价。

指标范畴 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}_{|c}$ 是余滤的（见注 3.17），因此上述余极限与有限极限可交换。特别地，值为 $K \in \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}$ 的常值图表 $(\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})^{\mathrm{op}}_{|c} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}$ 的余极限与 K 典范同构。因此，$\mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}}$ 保持终对象性。

接下来，由于 Kan纤维化在滤过余极限下稳定（ [20, 引理 3.1.24] ），且在同构下封闭，因此 $\mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}}$ 保持 Kan 纤维化。又因为 $\mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}}$ 也保持终对象，所以它保持投射纤维对象。

最后，同样由于 $(\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})^{\mathrm{op}}_{/c}$ 是滤过的，由 [25, 命题 7.3] 可知，上述余极限实际上是一个同伦余极限。因此，左 Kan 延拓 $\mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}}$ 甚至是一个同伦左 Kan 延拓，因而保持逐对象弱等价。□

命题 5.8 中的两个左 Kan 延拓由一个基变换公式联系起来：

引理 4.8. 存在一个典范自然同构

$$e_M^* \circ \mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}} \cong \mathrm{Lan}_{\bar{\omega}} \circ \hat{e}_M^*$$

函子之间的 $\mathrm{Fun}((\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta)$。

证明。对每个 $c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$，函子 e_M 诱导出一个函子 $\mathrm{GCov}_{c/} \to (\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})_{c/}$；这正是引理 3.24 中考虑的函子 $\jmath_c^{\mathcal{D}}$。根据该引理，函子 $\jmath_c^{\mathcal{D}}$是同伦余终的，因此特别是共尾的。□

我们还有引理 4.8 的以下 ∞-范畴版本。令 $\mathcal{S}$ 表示空间的 ∞-范畴。对于一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，我们将 $\mathcal{P}(\mathcal{C}) := \mathcal{F}\mathrm{un}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$ 记作 $\mathcal{C}$ 上 ∞-预层的 ∞-范畴。

命题 4.9. 设 $\widetilde{\mathbb{G}}^{\mathcal{D}} \in \mathcal{P}(N\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})$ 是 $N\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$ 上任意一个 ∞-预层。典范基变换态射

$$N\bar{\omega}_! \circ N\hat{e}_M^* \widetilde{\mathbb{G}}^{\mathcal{D}} \longrightarrow Ne_M^* \circ N\bar{\omega}_!^{\mathcal{D}} \widetilde{\mathbb{G}}^{\mathcal{D}}$$

在 $\mathcal{P}(N\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})$ 中是一个等价。

证明。这由引理 3.20 和 3.23，以及真基变换定理 [20,Prop.6.4.3,Thm. 6.4.13] 得出。□

我们以总结迄今为止的主要构造来结束本节：

定理4.10. 我们有以下函子：

(1) 函子

$$\check{C}^{\mathcal{D}*} \colon \mathcal{H}^{loc}_{\mathrm{fam}} \longrightarrow \mathrm{Fun}\big((\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta\big), \qquad G \longmapsto \check{C}^{\mathcal{D}*}G = \underline{\mathcal{H}}_{\mathrm{fam}}\big(\check{\mathrm{C}}(-), G\big),$$

它保持极限、纤维化、平凡纤维化以及纤维对象之间的弱等价。此外，它将纤维对象映射为这样的函子：这些函子把覆盖的细化映射为弱等价。

(2) 函子

$$\mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}} \colon \mathrm{Fun}\big((\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta\big) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta), \qquad \widetilde{G}^{\mathcal{D}} \longmapsto \mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}} \widetilde{G}^{\mathcal{D}},$$

保持余极限、有限极限、纤维化以及纤维对象之间的弱等价。*(3)* 上述函子的复合

$$\mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}} \circ \check{C}^{\mathcal{D}*} \colon \mathcal{H}^{loc}_{\mathrm{fam}} \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta), \qquad G \longmapsto \mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}} \check{C}^{\mathcal{D}*}G,$$

保持有限极限和纤维化（因此也保持纤维对象），以及纤维对象之间的弱等价。

类似的结论也适用于函子 $\check{C}^{M*}$ 和 $\mathrm{Lan}_{\bar{\omega}}$。

5. 作为 ∞-范畴局部化的开覆盖平均化

在命题 4.6 中，我们看到，在 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$ 中对开覆盖取平均具有良好的技术性质。这里我们对这一左 Kan 延拓作更深入的诠释：在定理 5.8 中，我们证明，在相应的左纤维化上，它恰好等同于在由良好开覆盖的细化所产生的态射处进行 ∞-范畴局部化。这表明，定理4.10中的构造确实给出了正确的表示方式，使我们能够从几何数据的局部表示转向 M 上全局对象的族。尽管这一点在概念上十分重要，也为我们的形式体系提供了依据，但主要关注应用的读者可以跳过本节。

命题 5.1. [20, 命题 7.1。12] 设 $q\colon C \to D$ 是一个 ∞-范畴的态射。假设 q 具有以下性质：

(1) 它是内纤维化，*(2)* 它是光滑的或真的，并且 *(3)* 对于每个顶点 $d \in D$，纤维 $C^d = q^{-1}(d) \subset C$ 是一个弱可缩单纯集合。

那么，对于每个笛卡儿方块

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & C \\ {\scriptstyle q'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ B & \xrightarrow[v]{} & D \end{array}$$

∞-范畴的，该 ∞-函子 q' 将 $\mathcal{B}$ 表示为 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{A}$ 中那些经 q' 映为恒等态射的态射处的 ∞-范畴局部化。

推论 5.2. 设 $q\colon C \to D$ 是 ∞-范畴之间的一个态射。假设 q 是一个内纤维化，且同时是光滑的或真的，并且其所有纤维均弱可缩。那么，q 将 D 表示为 C 在那些经 q 映为 D 中恒等态射的 C 中的态射处的 ∞-范畴局部化。

证明。 这是 Proposition 5.1 在u 和 v 为恒等态射时的情形。 □

在推论 5.2 的情形下，令 $W \subset C_1$ 为在 q 下变为恒等态射的边类。令 $W \subset C_1$ 表示按照备注 7.1 的意义对 W 进行的饱和，即由满足以下条件的边f 组成的类：C 中的$q(f)$是 ∞-范畴D中的等价。于是，q 等价地将 D 呈现为 C 在 W处的局部化。

推论 5.3。 以下陈述成立：

(1) 以下 ∞-范畴态射

$$N\bar{\omega}^{\mathcal{D}}\colon N\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}} \longrightarrow N\mathrm{B}\mathcal{D}$$

是关于由 τ_{fam}-覆盖的细化构成的态射类 $W^{\mathcal{D}}$ 的 ∞-范畴局部化；或者等价地，是关于其饱和 $W^{\mathcal{D}}$ 的局部化；该饱和由这样的态射 $((\hat{f}, f), \varphi)$ 组成：它们属于 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$，且其在 $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 中的像是一个同构。这等价于 f 是笛卡尔空间之间的微分同胚。

(2) ∞-范畴之间的态射

$$N\bar{\omega}\colon N\mathrm{GCov} \longrightarrow N\mathcal{C}\mathrm{art}$$

是对由 τ_{fam}-覆盖的细化构成的态射类 W 的 ∞-范畴局部化；或者等价地，是对其饱和 W 的局部化；这是 GCov 中的态射类，其在 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 中的像是笛卡尔空间之间的微分同胚。

证明。 函子 $N\bar{\omega}^{\mathcal{D}}$ 是光滑内纤维化，由引理 3.20 可知。注 3.17 表明它也具有弱可缩纤维。□

引理 5.4。 考虑一个 ∞-范畴的笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & C \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ B & \xrightarrow[v]{} & D \end{array}$$

假设 q 具有命题 *5.1* 中的性质，且此外 v 是保守的（即反映等价）。令 $W \subset C_1$ 表示 q 将 C 局部化时所对应的态射类的饱和（参见推论 *5.2*）。那么，p 将 B 表示为 A 在满足其经 u 映射后属于 W 的那些边处的 ∞-范畴局部化。也就是说，

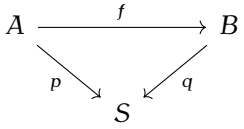
$$B \simeq L_{u^{-1}(\overline{W})}A\,.$$

证明。 由命题 5.1 可知，p 将B 表示为A 在态射类V 处的局部化，其中这些态射在p 下的像为恒等态射。该类的饱和$V \subset A_1$ 由A 中在p下映射到B 中的等价的那些态射组成。因此，

$$B \simeq L_{\overline{V}} A .$$

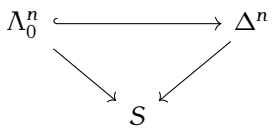
我们断言，边 $f \in A_1$ 属于 V 当且仅当 $u(f) \in W$。根据假设，v 是保守的，因此V是 A 中满足其在 $v \circ p$ 下的像是 $D \simeq LwC$中的等价的边所构成的类。也就是说，$f \in V$当且仅当$vp(f) \in D_1$是一个等价。由图表的交换性可知，$vp(f) = qu(f)$，而$qu(f)$是等价当且仅当$u(f) \in W$。□

引理 5.5. 设 $S \in \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 是一个单纯集合，并考虑一个交换三角形



假设 p 和 q 是左纤维化。那么，f 在 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/S}$ 中是协变弱等价，当且仅当它是范畴弱等价，也就是说，是 $\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 上 *Joyal* 模型结构中的弱等价。

证明。 令 T 表示模型范畴 $\mathcal{C}$ 中的一类态射，并假设左 Bousfield 局部化 $L_T\mathcal{C}$存在。那么，$L_T\mathcal{C}$中纤维对象之间的态射是弱等价，当且仅当它在原模型范畴中是弱等价 $\mathcal{C}$。我们将此结论应用于以下情形：$\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 上的 Joyal 模型结构在切片范畴 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/S}$上诱导出一个模型结构（例如参见 [48, 定理 7.6.5]）。 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/S}$ 上的协变模型结构，是将此诱导模型结构对所有态射 [45, p. 5]进行左 Bousfield 局部化所得。



其中 n 遍历 $\mathbb{N}_0$，并且对于每个 n，我们考虑所有可能的态射 $\Delta^n \to S$。这就证明了该断言。□

现在，我们将上述陈述应用于与第4节中的单纯预层相关联的左纤维化。这些左纤维化是通过整直函子计算得到的（更多背景见附录 A 以及 [12,45] ）：给定一个范畴 $\mathcal{C}$，整直是一个函子

$$r^*_{\mathcal{C}} \colon \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta) \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}} .$$

在 $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta)$ 上赋予投射模型结构，并在 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}}$ 上赋予协变模型结构，$r^*_{\mathcal{C}}$ 甚至是一个右 Quillen 等价（见定理 A.2）。给定一个单纯预层$F^{\mathcal{D}} \colon \mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$或$F^M \colon \mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$，我们分别记作

$$\textstyle\int F^{\mathcal{D}} := r^*_{\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}}} F^{\mathcal{D}} \qquad \text{and} \qquad \int F^{\mathcal{D}} := r^*_{\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}} F^M , \tag{5.6}$$

。由引理 A.6，存在一个典范同构

$$Ne^*_M \textstyle\int F^{\mathcal{D}} \cong \int e^*_M F^{\mathcal{D}}$$

在 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}$ 中。

对于一个范畴 $\mathcal{C}$，我们将 $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta)$ 在逐对象弱同伦等价处的 ∞-范畴局部化记作

$$\gamma_{\mathcal{C}} \colon N\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta) \longrightarrow \mathcal{F}\mathrm{un}(N\mathcal{C}, \mathcal{S}) .$$

进一步回想，$r^*_{\mathcal{C}}$ 通过局部化函子 $\gamma_{\mathcal{C}}$ （定理 A.7）生成由 ∞-预层分类的左纤维化。换言之，对于 $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$，函子 $\gamma_{\mathcal{C}} F \colon N\mathcal{C} \to \mathcal{S}$

分类左纤维化 $r^*_{\mathcal{C}}F \to N\mathcal{C}$。由此可见，同构 (5.6) 正是命题 4.9 中基变换等价在左纤维化层级上的体现。

回忆一下 (3.18) 中的投影函子 $\omega^{\mathcal{D}}\colon \mathrm{GCov}^{\mathcal{D}} \to \mathrm{B}\mathcal{D}$。

引理 5.7. 设 $\widetilde{G}^{\mathcal{D}}\colon (\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 是一个单纯预层，使得对于每个 $c \in \mathrm{B}\mathcal{D}$，将 $\widetilde{G}^{\mathcal{D}}$ 限制到纤维 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}_{|c} = (\omega^{\mathcal{D}})^{-1}(c)$ 在 c 处的纤维上，所得函子本质上是常值的（即它将定义域中的每个态射映为余域中的弱等价）。那么，存在一个典范协变等价

$$\int \widetilde{G}^{\mathcal{D}} \longrightarrow (N\omega^{\mathcal{D}})^* \int \mathrm{Lan}_{\omega^{\mathcal{D}}} \widetilde{G}^{\mathcal{D}}$$

它是 $(N\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})^{\mathrm{op}}$上的左纤维化之间的等价。

证明。 给定一个对象 $X = (c, \widehat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}) \in \mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$，考虑典范余锥态射

$$\begin{aligned}\eta_{|X}\colon \widetilde{G}^{\mathcal{D}}(X) &\longrightarrow \mathrm{colim}\Big(\widetilde{G}^{\mathcal{D}}\colon \big(\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}_{/c}\big)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta\Big)\\ &\cong \mathrm{colim}\Big(i_c^*\widetilde{G}^{\mathcal{D}}\colon \big(\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}_{|c}\big)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta\Big).\end{aligned}$$

这些态射 $\eta_{|X}$ 是一个自然变换的各个分量：它是伴随 $(\omega^{\mathcal{D}})^* \dashv \mathrm{Lan}_{\omega^{\mathcal{D}}}$ 的单位。第二行中的同构源自命题 4.6；一般而言，它对 c并不自然。然而，根据注 3.17，第二行中的余极限是滤过的；结合 $i_c^*\mathrm{e}G^{\mathcal{D}}$ 本质上是常值的这一假设，可知 $\eta_{|X}$ 与上述同构的复合对每个 $X \in \mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$都是弱等价。由三者中两者性质可知， η 是单纯预层上的投射模型结构中纤维对象之间的弱等价，其中这些单纯预层定义在 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$上。由定理 A.2，我们由此得到一个协变弱等价

$$\int \widetilde{G}^{\mathcal{D}} \longrightarrow r^*_{(\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})^{\mathrm{op}}} \circ (\omega^{\mathcal{D}})^* \circ \mathrm{Lan}_{\omega^{\mathcal{D}}} \widetilde{G}^{\mathcal{D}}$$

在 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N(\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})^{\mathrm{op}}}$ 中的纤维对象之间。最后，在右侧我们还有一个由典范同构

$$r^*_{(\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})^{\mathrm{op}}} \circ (\omega^{\mathcal{D}})^* \circ \mathrm{Lan}_{\omega^{\mathcal{D}}} \widetilde{G}^{\mathcal{D}} \cong N(\omega^{\mathcal{D}})^* \circ r^*_{\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}}} \circ \mathrm{Lan}_{\omega^{\mathcal{D}}} \widetilde{G}^{\mathcal{D}} = N(\omega^{\mathcal{D}})^* \int \mathrm{Lan}_{\omega^{\mathcal{D}}} \widetilde{G}^{\mathcal{D}},$$

引理 A.6 导出。 □

定理 5.8。 设 $\widetilde{G}^{\mathcal{D}}\colon (\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 是一个单纯预层。假设 $\widetilde{G}^{\mathcal{D}}$ 是投射纤维化的，并且沿着 $\omega^{\mathcal{D}}\colon \mathrm{GCov}^{\mathcal{D}} \to \mathrm{B}\mathcal{D}$ 的纤维本质上为常值（如引理 *5.7* 的假设所述）。存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \int \widetilde{G}^{\mathcal{D}} & \xrightarrow{\ v\ } & N(\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})^{\mathrm{op}} \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle N\omega^{\mathcal{D}}} \\ \int \mathrm{Lan}_{\omega^{\mathcal{D}}} \widetilde{G}^{\mathcal{D}} & \xrightarrow[\ u\ ]{} & N\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}} \end{array}$$

在 $\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 中，并且以下陈述成立：

(1) 该图在 $\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 上的 *Joyal* 模型结构中是同伦笛卡尔的。*(2)* 水平态射是左纤维化。*(3)* 态射 q 将 $\int \mathrm{Lan}_{\omega^{\mathcal{D}}} \widetilde{G}^{\mathcal{D}}$ 表示为 ∞-范畴局部化，其中 $\int \widetilde{G}^{\mathcal{D}}$ 是在那些经 u 映到推论 *5.3(1)* 中的类 $W^{\mathcal{D}}$ 的态射处进行局部化。 —

对于映射 $\int \widetilde{G}^M \to \int \mathrm{Lan}_{\bar{\omega}} \widetilde{G}^M$，以下类似结论同样成立：对于任意沿函子 $\bar{\omega}\colon \mathrm{GCov} \to \mathcal{C}\mathrm{art}$ 的纤维本质上为常值的射影纤维化单纯预层 $\widetilde{G}^M\colon \mathrm{GCov}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$，以及推论 *5.3(2)* 中的类 W。 —

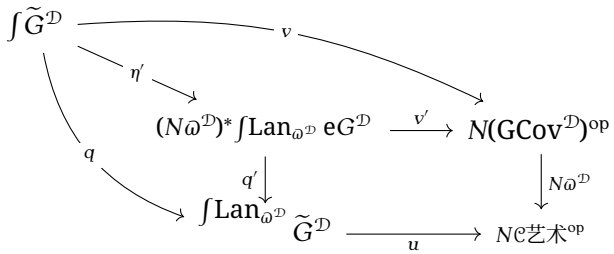
注意，$\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$ 上的任意投射纤维化单纯预层 $\mathrm{e}G^{\mathcal{D}}$ 都会导出 GCov 上的一个投射纤维化单纯预层 $\mathrm{e}G^M := \iota^*\mathrm{e}G^{\mathcal{D}}$。此外，如果前者在 $\omega^{\mathcal{D}}$ 的纤维上本质上是常值的，那么后者沿着 $\bar{\omega}$ 的纤维本质上是常值的。

定理 5.8 表明，∞-范畴 $\int \mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}} \mathrm{e}G^{\mathcal{D}}$ 是从 ∞-范畴 $\int \mathrm{e}G^{\mathcal{D}}$ 出发，并将其中源自重新参数化（即 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 中的同构）、M 的微分同胚的光滑族以及τ_{fam}-覆盖的细化的态射（按 ∞-范畴意义）取逆后得到的。在 $\mathrm{e}G^{M}$ 的情形下，我们只将来自重新参数化和 τ_{fam}-覆盖细化的态射取逆。

定理 5.8 的证明。 态射 q 和 v 由引理 5.7 中的态射以及拉回的泛性质所诱导；这便得到了交换图。引理 5.5 和引理 5.7 表明，为了证明断言 (1)，只需证明严格拉回。

$$\begin{array}{ccc} (N\bar{\omega}^{\mathcal{D}})^{*}\left(\int \mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}} \widetilde{G}^{\mathcal{D}}\right) & \xrightarrow{v'} & N(\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})^{\mathrm{op}} \\ \downarrow{\scriptstyle q'} & & \downarrow{\scriptstyle N\bar{\omega}^{\mathcal{D}}} \\ \int \mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}} \widetilde{G}^{\mathcal{D}} & \xrightarrow[u]{} & N\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}} \end{array} \tag{5.9}$$

在 Joyal 模型结构中是同伦笛卡尔的。这是因为其右上、左下和右下顶点是 ∞-范畴，并且 $N\omega^{\mathcal{D}}$ 是 ∞-范畴之间的等纤维化（见引理 3.20）；因此，它是 Joyal 模型结构中的纤维化 [20,定理 3.6.1]。断言 (2) 由定理 A.2 得出。最后，我们证明断言 (3)：首先注意到，由断言 (2) 和 [20, 命题 3.4.8] 可知，v' 和 u 是保守等纤维化。因此，我们可以应用引理 5.4，得到 (5.9) 中的态射 q' 是一个在 $(N\bar{\omega}^{\mathcal{D}})^{*}\left(\int \mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}} \mathrm{e}G^{\mathcal{D}}\right)$中那些在 v' 下的像属于 $W^{\mathcal{D}}$的边处的 ∞-范畴局部化函子。该断言现在由引理 5.5 和引理 5.7 得出，因为它们提供了一个适合交换图的弱范畴等价 η'



由于局部化与弱范畴等价相容 [20,命题 7.1.8]，因此结论成立。关于 $\int \mathrm{e}G^{M} \to \int \mathrm{Lan}_{\bar{\omega}} \mathrm{e}G^{M}$及类$W$的证明类似。□

6. 保持几何结构等价类的微分同胚

现在，我们将重点放在保持给定几何结构 $\mathcal{G}$ on M 的等价类的微分同胚上。它们恰好是那些能够提升到$\mathcal{G}$的M 的微分同胚，因此可能出现在$\mathcal{G}$的对称性中。

设 $G^{\mathcal{D}}$ 是 $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 上的一个投射纤维化单纯预层，且设 $\mathcal{G} \in G^{M}(\mathbb{R}^{0})$ 是 $G^{\mathcal{D}} = e_{M}^{*}G^{\mathcal{D}}$ 在 $\mathbb{R}^{0}$ 上的一个截面。等价地，由于 $\mathbb{R}^{0} \in \mathcal{C}\mathrm{art}$ 是终对象，$G^{M}(\mathbb{R}^{0})$ 中的一个顶点是一个单纯预层态射

$$\mathcal{G}\colon \Delta^{0} \longrightarrow G^{M} = e_{M}^{*}G^{\mathcal{D}}\,,$$

即 G^{M} 在 $\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$上的一个整体截面。具体而言，这个截面可写作

$$c \mapsto \mathrm{coll}_{c}^{*}\,\mathcal{G}\,,$$

其中 $\mathrm{col}\ \ \mathrm{l}_{c}\colon c \to \mathbb{R}^{0}$ 是 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 中的塌缩态射。然而，我们通常会省略 th e 收缩 态射，并像上文一样，简单地将截面记为$\mathcal{G}$。

定义 6.1。 给定一个截面$\mathcal{G} \in G^M(\mathbb{R}^0)$，令

$$\mathrm{Diff}_{[\mathcal{G}]}(M) \subset \mathrm{Diff}(M)$$

表示由 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 定义的群子预层

$$\mathrm{Diff}_{[\mathcal{G}]}(M)(c) = \left\{ \varphi \in \mathrm{Diff}(M)(c) \,\middle|\, (1_c, \varphi)^* \mathcal{G} \simeq \mathcal{G} \text{ in } G^{\mathcal{D}}(c) \right\}.$$

等价地，态射

$$G^{\mathcal{D}}(1_c, \varphi) \colon G^{\mathcal{D}}(c) \longrightarrow G^{\mathcal{D}}(c)$$

of 单纯集合保持 $\mathcal{G} \in (e_M^* G^{\mathcal{D}})(c) = G^{\mathcal{D}}(c)$ 的连通分支。我们令

$$\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}] \subset \mathrm{B}\mathcal{D}$$

表示 $\mathrm{Diff}_{[\mathcal{G}]}(M)$ 的解环的 Grothendieck 构造，并将相应的包含映射记为

$$\jmath_{[\mathcal{G}]} \colon \mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}] \hookrightarrow \mathrm{B}\mathcal{D}.$$

由于我们使用 $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 还是其子范畴 $\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]$，总是显而易见，因此我们仍将 $\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]$ 与 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 之间的典范函子记为

$$e_M : \mathcal{C}\mathrm{art} \rightleftarrows \mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}] : \pi_M .$$

注意到，这些函子在对象层级上都充当恒等态射。

类似地，我们得到一个宽[10]子范畴的包含

$$\iota_{[\mathcal{G}]} \colon \mathrm{GCov}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]} \hookrightarrow \mathrm{GCov}^{\mathcal{D}},$$

其中 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}$ 定义为范畴的严格拉回

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GCov}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]} & \xrightarrow{\iota_{[\mathcal{G}]}} & \mathrm{GCov}^{\mathcal{D}} \\ {\scriptstyle \bar{\omega}^{\mathcal{D}}_{[\mathcal{G}]}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\omega}^{\mathcal{D}}} \\ \mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}] & \xrightarrow[\jmath_{[\mathcal{G}]}]{} & \mathrm{B}\mathcal{D} \end{array} \tag{6.2}$$

定义 6.3。 给定一个单纯预层 $G^{\mathcal{D}} \in \mathrm{Fun}(\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta)$，我们将其在 $\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]$ 上的限制记为 $G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]} \in \mathrm{Fun}(\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta)$。将其关联的左纤维化记为

$$\textstyle\int G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]} := r^*_{\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}} G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]} \longrightarrow N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}.$$

注意，根据引理 A.6，存在一个典范同构

$$\textstyle\int G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]} \cong \jmath^*_{[\mathcal{G}]} \int G^{\mathcal{D}}.$$

注意，$\mathcal{G}$ 定义了 G^M的一个截面，但并未定义 $G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}$的截面。然而，由于 $\mathcal{C}\mathrm{art}$、$\mathrm{B}\mathcal{D}$ 和 $\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]$各自具有相同的对象，对于每个 $c \in \mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]$，都存在一个典范识别 $G^M(c) = G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}(c)$。尽管这并不是一个自然变换，但它确定了 $G^{\mathcal{D}}(c)$ 的一个连通分支。限制到 $\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]$ 后，这些连通分支定义了 $G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}$的一个单纯子预层：

定义 6.4. 设 $G^{\mathcal{D}}$ 是 $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 上的一个射影纤维化单纯预层，并设 $\mathcal{G} \in G^M(\mathbb{R}^0)$。作如下定义：

(1) 令 $G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]} \subset G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}$ 表示 $\mathrm{B}\mathcal{D}[$ 上的单纯子预层 $\mathcal{G}]$，使得对于每个 $c \in \mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]$,

$$G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]}(c) \subset G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}(c) = G^M(c)$$

它是顶点 $\mathcal{G}(c) \in G^M(c) = G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}(c)$ 所在的完整连通分支。特别地，若对象 $G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]} \in \mathrm{Fun}(\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}$ $\mathrm{et}_\Delta)$ 在 $\mathrm{Fun}(\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta)$ 中是射影纤维化的，那么它仍然是射影纤维化的。(2) 我们还定义了位于 $N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}$ 上的相应左纤维化，

$$\textstyle\left(\int G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]}\right) := r^*_{\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}} G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]} \subset \int G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}.$$

[10]如果一个子范畴包含其所在范畴的所有对象，则称其为宽。

（3）回顾$G^M := e_M^* G^{\mathcal{D}}$。注意到$G^{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^0) = G^M(\mathbb{R}^0)$，我们还定义了一个单纯子预层$G^M_{[\mathcal{G}]} \subset G^M$ 于 $\mathcal{C}$art上，要求

$$G^M_{[\mathcal{G}]}(c) \subset G^M(c)$$

对每个 $c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$，都是 $\mathcal{G} \in G^M(c)$ 的连通分支。

(4) 我们再次定义了 $N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 上关联的左纤维化，

$$\left(\int G^M_{[\mathcal{G}]}\right) := r^*_{\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}} G^M_{[\mathcal{G}]} \subset \int G^M .$$

根据这些定义，我们立即得到以下观察：

引理 6.5. 在定义 *6.4* 的设定下，存在一个典范同构

$$(Ne_M)^* \int G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]} \cong \int G^M_{[\mathcal{G}]}$$

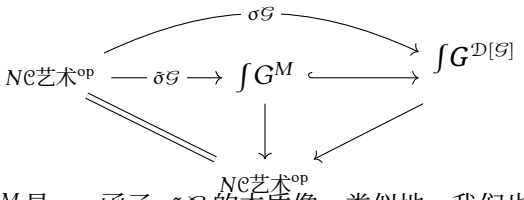
$N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 上的左纤维化之间。

证明。 我们有典范同构

$$(Ne_M)^* \int G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]} = (Ne_M)^* r^*_{\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}} G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]} \cong r^*_{\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}} e_M^* G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]} \cong r^*_{\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}} G^M_{[\mathcal{G}]} ,$$

这里我们用到了引理 A.6。 □

备注 6.6。 我们也可以等价地将 $\int G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\ ]\mathcal{G}}$定义如下：截面 $\mathcal{G} \in \mathrm{G}^{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^0)$ 定义了左纤维化 $\tilde{\sigma}\mathcal{G}$ 的一个截面，其中左纤维化为 $\int G^M \to N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$。由此，我们得到左纤维化 $(N\pi_M)_! \int G^{\mathcal{D}} \longrightarrow N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 的一个截面（注意，$N\pi_M$ 是左纤维化），即一个由∞-范畴构成的交换图表



那么，单纯子集 $\int G^M_{[\mathcal{G}]} \subset \int G^M$是 ∞-函子 $\tilde{\sigma}\mathcal{G}$ 的本质像。类似地，我们也可以将单纯子集定义为

$$\left(\int G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]}\right) \subset \int G^{\mathcal{D}}$$

作为 ∞-函子 σ 的本质像。请注意，此处将范围限制在子范畴 $\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}] \subset \mathrm{B}\mathcal{D}$ 至关重要。◁

注 6.7. 我们指出，尽管典范态射 $\int G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\ ]\mathcal{G}} \twoheadrightarrow N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}$ 是左纤维化，但复合态射 $\int G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\ ]\mathcal{G}} \twoheadrightarrow N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}} \hookrightarrow N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}$ 通常不再具有这一性质。◁

引理 6.8. 设 $G^{\mathcal{D}}$ 是位点 $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 上的射影纤维化单纯预层，并设 $G \in G^{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^0)$。态射

$$(N\iota_{[\mathcal{G}]})_{c/} : \left(N\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}\right)_{c/} \hookrightarrow \left(N\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}\right)_{c/}$$

对每个 $c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$ 都是单纯集合的共尾态射。

证明。 对于每个$c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$，都存在一个纤维的恒等态射

$$\left(\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}\right)_{|c} = \left(\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}\right)_{|c} .$$

此外，对于每个$c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$，都存在一个单纯集合的交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\left(N\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}\right)_{|c} & \longrightarrow & \left(N\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}\right)_{c/} & \xrightarrow{(N\iota_{[\mathcal{G}]})_{c/}} & \left(N\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}\right)_{c/} \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (N\bar{\omega}^{\mathcal{D}}_{[\mathcal{G}]})_{c/}} & & \downarrow{\scriptstyle (N\bar{\omega}^{\mathcal{D}})_{c/}} \\
\Delta^0 & \xrightarrow[\{c\}]{} & \left(N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]\right)_{c/} & \xrightarrow[(N_{J[\mathcal{G}]})_{c/}]{} & \left(N\mathrm{B}\mathcal{D}\right)_{c/}
\end{array}$$

此图中的每个方块都是拉回图。由于单纯集合之间的光滑态射在拉回下稳定，此图中的每个垂直态射都是 $\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 中的光滑态射（由引理 3.20）。于是可得（例如由 [20, Def.4.4.1]）左上方的水平态射是共尾的。由于我们已知（见引理 3.24）顶部水平箭头的复合是共尾的，因此推知态射 $(N\iota_{[\mathcal{G}]})_{c/}$ 也是共尾的 [20,Cor. 4.1.9]。□

引理 6.9. 设 $G^{\mathcal{D}}$ 是 $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 上的一个投射纤维化单纯预层，且 G 是 $G^{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^0)$ 的一个元素。以下断言成立：

(1) 态射 $N\bar{\omega}^{\mathcal{D}}_{[\mathcal{G}]}\colon N\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]} \to N\mathrm{B}\mathcal{D}[G]$ 是光滑的。*(2)* 对于 $\widetilde{F}^{\mathcal{D}}$ 上的每个单纯预层，其中底空间为 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$，存在一个定义在 $\mathrm{B}\mathcal{D}[G]$ 上的单纯预层之间的典范同构

$$j^*_{[\mathcal{G}]}\mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}}\widetilde{F}^{\mathcal{D}} \cong \mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}_{[\mathcal{G}]}}\iota^*_{[\mathcal{G}]}\widetilde{F}^{\mathcal{D}}\,.$$

(3) 设 $\widetilde{F}^{\mathcal{D}}$ 是 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$ 上的一个投射纤维化单纯预层。令 $F^{\mathcal{D}} := \mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}}\widetilde{F}^{\mathcal{D}}$，并令 $F^M := \mathrm{Lan}_{\bar{\omega}}\iota^*\widetilde{F}^{\mathcal{D}}$。假设 $G \in F^{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^0)$。存在单纯预层之间的典范同构，定义在 $\mathcal{C}\mathrm{art}$

$$Ne^*_M\big(F^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]}\big) \cong Ne^*_M\Big(\big(\mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}_{[\mathcal{G}]}}\iota^*_{[\mathcal{G}]}\widetilde{F}^{\mathcal{D}}\big)_{[\mathcal{G}]}\Big) \cong \big(\mathrm{Lan}_{\bar{\omega}}\iota^*\widetilde{F}^{\mathcal{D}}\big)_{[\mathcal{G}]}\,.$$

证明。 断言 (1) 成立，因为单纯集合之间的光滑映射在拉回下稳定，而 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}$ 的定义是一个拉回（见方程 (6.2)）。断言 (2) 由引理 6.8 得出（本质上，这是与方形 (6.2) 相关的 ∞-预层的光滑基变换的一种表示）。

为证明断言 (3)，首先回顾一下，$e_M\colon \mathcal{C}\mathrm{art} \to \mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]$ 在对象上是恒等态射。因此，对每个 $c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$，取 $\mathcal{G}$ 的连通分支与沿 e_M限制可交换；也就是说，存在一个典范同构

$$Ne^*_M\Big(\big(\mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}_{[\mathcal{G}]}}\iota^*_{[\mathcal{G}]}\widetilde{F}^{\mathcal{D}}\big)_{[\mathcal{G}]}\Big) \cong \Big(Ne^*_M\big(\big(\mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}_{[\mathcal{G}]}}\iota^*_{[\mathcal{G}]}\widetilde{F}^{\mathcal{D}}\big)\big)\Big)_{[\mathcal{G}]}\,.$$

接下来，考虑交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GCov} & \xhookrightarrow{\hat{e}_M} & \mathrm{GCov}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]} \\ {\scriptstyle\bar{\omega}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\bar{\omega}^{\mathcal{D}}_{[\mathcal{G}]}} \\ \mathcal{C}\mathrm{art} & \xrightarrow[e_M]{} & \mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}] \end{array}$$

这是一个范畴的严格拉回方块。相应的基变换态射

$$\mathrm{Lan}_{\bar{\omega}} \circ \hat{e}^*_M \longrightarrow e^*_M \circ \mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}_{[\mathcal{G}]}}$$

是一个同构；这可由与引理 4.8 相同的论证得出，只需注意引理 3.24 和 3.19 在以 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}$ 替代 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$时仍然适用。因此，我们得到一个典范同构

$$Ne^*_M\big(\mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}_{[\mathcal{G}]}}(\iota^*_{[\mathcal{G}]}\widetilde{F}^{\mathcal{D}})\big) \cong \mathrm{Lan}_{\bar{\omega}}\iota'^*(\iota^*_{[\mathcal{G}]}\widetilde{F}^{\mathcal{D}})\,.$$

证明至此完成。 □

备注 6.10。 设 $G^{\mathcal{D}}$ 是 $\mathrm{B}\mathcal{D}$上的一个投射纤维化单纯预层。我们强调，本节中的所有定义仅取决于 $\mathrm{G}^{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^0)$中$\mathcal{G}$ 的连通分支，而与$\mathcal{G}$ 本身的具体选择无关。也就是说，若$G^M(\mathbb{R}^0)$中有$\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}'$，则有

$$\begin{aligned} \mathrm{Diff}_{[\mathcal{G}]}(M) &= \mathrm{Diff}_{[\mathcal{G}']}(M)\,, & \mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}] &= \mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}']\,, & \mathrm{GCov}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]} &= \mathrm{GCov}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}']}\,, \\ G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]} &= G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}']}\,, & G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]} &= G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}']}_{[\mathcal{G}']}\,, \\ \textstyle\int G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]} &= \textstyle\int G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}']}\,, & \textstyle\int G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]} &= \textstyle\int G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}']}_{[\mathcal{G}']}\,, \end{aligned}$$

以及类似情况 地，对上述单纯预层和左纤维化沿着拉回到范畴 GCov 范畴和 $\mathcal{C}$文。 ◁

7. 高阶几何结构的高阶对称群

本节使用迄今讨论过的单纯预层所关联的左纤维化，构造固定高阶几何结构 $\mathcal{G}$ 在M上的光滑高阶自同构群与对称群。更确切地说，对于M 上的每个光滑高阶群 $\mathbb{\Gamma}$ 的光滑作用 $\Phi\colon \mathbb{\Gamma} \to \mathrm{Diff}^{\mathcal{G}}(M)$，我们构造一个光滑 ∞-群，其元素可将$\mathbb{\Gamma}$ 的作用提升到$\mathcal{G}$上。我们证明，这些高阶对称群是由 $\mathbb{\Gamma}$ 和$\mathcal{G}$ 的光滑高阶自同构群构成的扩张（定理 7.18 和推论 7.23），并且光滑高阶对称群完全刻画了$\mathcal{G}$ 上的光滑等变结构（定理 7.27 和推论 7.29）。

7.1. 光滑高阶自同构群与对称群。 首先，给定一个光滑高阶群作用 $\Phi\colon \mathbb{\Gamma} \to \mathrm{Diff}^{\mathcal{G}}(M)$，我们定义固定的高阶几何结构 $\mathcal{G}$ 在M上的光滑高阶自同构群与对称群。我们证明存在一个光滑 ∞-群的短正合列，它将$\mathcal{G}$ 的光滑高阶对称群表示为 $\mathbb{\Gamma}$ 被$\mathcal{G}$的光滑高阶自同构群扩张所得的群。

定义 7.1。 设$G^{\mathcal{D}}$ 是 $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 上的一个投射纤维化单纯预层，并设$\mathcal{G}$ $\in G^{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^0)$。回顾注 6.6 中的截面 $\check{\sigma}\mathcal{G}$ 和 $\sigma\mathcal{G}$ 。我们定义以下单纯集合：

(1) 我们将其记为

$$\mathrm{BAUT}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}) \subset \int G^{M}$$

由截面 $\check{\sigma}\mathcal{G}\colon N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \to \int G^{M}$（见注 6.6）的像中顶点所构成的满单纯子集（即满 ∞-子范畴）。

(2) 我们记为

$$\mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}) \subset \int G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}$$

由该复合的像中的顶点构成的满单纯子集（即满 ∞-子范畴）

$$\sigma\mathcal{G}\colon N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\check{\sigma}\mathcal{G}} \int G^{M} \longrightarrow \int G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}. \tag{7.2}$$

例 7.3。单纯集合 $\mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}(\mathrm{G})$ 在每个对象 $\mathrm{c} \in \mathcal{C}\mathrm{art}$ 上都有唯一的顶点；它由常值族 $\check{\sigma}\mathrm{G}(\mathrm{c}) \in \mathrm{G}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}(\mathrm{c}) = (\int \mathrm{G}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]})_{\mathrm{c}}$ 构成（回忆一下，$\check{\sigma}\mathrm{G}(\mathrm{c}) = \mathrm{coll}_{\mathrm{c}}^{*}\,\mathrm{G}$，其中 $\mathrm{G} \in \mathrm{G}^{M}(\mathbb{R}^0)$ 是固定选取的顶点，而 $\mathrm{coll}_{\mathrm{c}}\colon \mathrm{c} \to \mathbb{R}^0$ 是典范塌缩态射）。$\mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}(\mathrm{G})$ 中的一个 1- 单形是一个二元组 $((\mathrm{f},\,\varphi),\,\psi)$，由 $\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathrm{G}]$ 中的一个态射 $(\mathrm{f},\,\varphi)\colon \mathrm{c}_0 \to \mathrm{c}_1$ 和一个等价构成。

$$\psi\colon (f,\varphi)^{*}\big(\check{\sigma}\mathcal{G}(c_1)\big) \longrightarrow \check{\sigma}\mathcal{G}(c_0)$$

在 $G^{\mathcal{D}}(\mathrm{c}_0) = G^{M}(\mathrm{c}_0)$ 中。注意，一般而言，$(f,\varphi)^{*}(\check{\sigma}\mathcal{G}(\mathrm{c}_1)) \neq \check{\sigma}\mathcal{G}(\mathrm{c}_0)$，但只要 (f,φ) 是 $\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}] \subset \mathrm{B}\mathcal{D}$ 中的一个态射，根据 $\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]$ 的定义，就存在如上所述的 $G^{\mathcal{D}}(c_0)$ 中的一个等价。特别地，$\mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G})$ 并非 $G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}$ 的某个单纯子预层的严格化。

最后，$\mathrm{BAUT}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G})$ 中的顶点与 $\mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G})$ 中的顶点相同，而态射则是 $\mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G})$ 中满足 $\varphi = \mathrm{id}_M$ 的那些态射。◁

备注 7.4。 上标 rev 表示 $\mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G})$ 与 G 的对称性群的$\mathcal{G}$的反群自然相关；这与左纤维化 $\mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}) \to N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}$ 的余域描述微分同胚群 $\mathrm{Diff}^{\mathcal{G}}(M)$ 的反群这一事实一致。◁

引理 7.5。 设 $\mathcal{C}$ 是一个 ∞-范畴，c 是 $\mathcal{C}$ 的一个对象，且 $F\colon K \to \mathcal{C}_{/c}$ 是 $\mathcal{C}_{/c}$ 中由某个单纯集合 K 索引的图表。如果 K 弱可缩（即在 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}$ 上的 *Kan–Quillen* 模型结构中弱等价于 Δ^0），那么投影函子 $\mathrm{pr}\colon \mathcal{C}_{/c} \to \mathcal{C}$ 保持并反映极限。也就是说，$F\colon \underline{K}^{\triangleleft} \to \mathcal{C}_{/c}$ 是极限图表，当且仅当 $\mathrm{pr} \circ F\colon K^{\triangleleft} \to \mathcal{C}$ 是极限图表。

证明。 $\mathcal{C}_{/c}$ 中F 的极限与以下对象的极限一致

$$F * c\colon K^{\triangleright} = K * \Delta^{0} \longrightarrow \mathcal{C},$$

以及其到 c 的典范态射，其中 $(-)*(-)$ 表示单纯集合的连接构造。当且仅当K是弱可缩的时，典范包含 $K \hookrightarrow K * \Delta^0$ 是单纯集合的共尾态射。□

备注 7.6. 在 $\mathcal{C}$、 $\mathcal{D}$ 和K 都是 1-范畴，且我们关注 1-范畴极限的情形下，指标范畴K 只需是连通的；这足以保证包含$K \hookrightarrow K*[0]$ 是 1-范畴之间的共尾函子（尽管一般而言它并非同伦余终）。◁

P命题 7.7. 考虑定义 *7.1* 中的情形。对于交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{BAUT}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}) & \hookrightarrow & \mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} & \xhookrightarrow[Ne_M]{} & N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}} \end{array}$$

对于单纯集合，以下陈述成立：

(1) 两个垂直态射都是左纤维化。*(2)* 该方块是一个拉回图，因此（由断言 *(1)*）它甚至是 *Joyal* 模型结构中的同伦拉回方块。*(3)* 通过映射 $N\mathrm{B}\mathcal{D}[G] \to N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 增补后，在 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}$中得到一个笛卡儿方块；它甚至是协变模型结构中的同伦笛卡尔方块。

证明。 对于断言 (1)，只需证明该态射

$$\mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}$$

是一个左纤维化。左侧竖直态射的结论随后可由断言 (2) 得出。我们有一个序列

$$\mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}) \hookrightarrow \int G_{[\mathcal{G}]}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]} \longrightarrow N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}\,.$$

第一个态射是一个满 ∞-子范畴的包含，第二个态射是一个左纤维化。我们需要证明该复合对所有左角包含 $\Lambda^r_s \hookrightarrow \Delta^r$（其中 $0 \leq s < r \in \mathbb{N}_0$）都具有右提升性质。由于第一个态射是一个满$\infty$-子范畴的包含，它自动对所有左角包含都具有右提升性质，除了可能的情形 $\Lambda^1_0 \hookrightarrow \Delta^1$。由于第二个态射是一个左纤维化，该复合唯一非平凡的提升问题出现在角包含 $\Lambda^1_0 \hookrightarrow \Delta^1$ 的情形。我们明确验证提升性质：一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^1_0 & \longrightarrow & \mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^1 & \longrightarrow & N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}} \end{array}$$

等价于指定 $N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}$ 中的一个 1-单形，以及其初始顶点到 $\mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G})$ 的一个提升。该 1-单形是一个对 (f,φ)，其中 $f\colon c_1 \to c_0$ 是笛卡尔空间之间的光滑映射，且另有一个光滑映射$\varphi\colon c_1 \to \mathrm{Diff}^{\mathcal{G}}(M)$。令 $\mathrm{coll}_c\colon c \to \mathbb{R}^0$ 表示 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 中的塌缩映射。提升问题的一个解相当于指定一个等价

$$(\mathrm{coll}_{c_1}, 1_M)^*(\mathcal{G}) \simeq (f,\varphi)^*(\mathrm{coll}_{c_0}, 1_M)^*(\mathcal{G}) = (1_{c_1},\varphi)^*(\mathrm{coll}_{c_1}, 1_M)^*(\mathcal{G})$$

在 $G^{\mathcal{D}}(c_1)$ 中（另见整直函子 $r^*_{\mathcal{C}}$ 的构造，见 [45,Sec. 4] 和 [12, Sec. 2.2]）。这样的等价存在，因为 f 的取值落在 $\mathrm{Diff}^{\mathcal{G}}(M)$ 中（见定义 6.1）。

断言 (2) 可通过检查图表得出：包含 $\mathrm{BAUT}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}) \hookrightarrow \mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G})$ 在顶点上是一个双射，而 $\mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G})$ 中的高维单形属于 $\mathrm{BAUT}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G})$，当且仅当它在 $N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]$ 中的像由 $\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]$ 中的一列可复合态射 $(f_0,\varphi_0),\dots,(f_n,\varphi_n)$ 组成，其中对每个 $i = 1,\dots,n$，都有 $\varphi_i = 1_M$。引理 7.5（另见注 7.6）和断言 (2) 可直接推出断言 (3)，

因为左纤维化对象之间的协变纤维化恰好就是左纤维化（参见 [20, 定理 4.1.5] 的反向版本）。□

引理 7.8。 在定义 *7.1* 的设定下，典范包含态射

$$\mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}) \hookrightarrow \int G_{[\mathcal{G}]}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}, \qquad \mathrm{BAUT}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}) \hookrightarrow \int G_{[\mathcal{G}]}^{M}$$

分别是 $\mathcal{S}\mathrm{et}^{\Delta/N\mathcal{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}}$ 和 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}$中的协变弱等价。

证明。 我们证明 $\mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G})$ 的情形；$\mathrm{BAUT}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G})$ 的证明类似。首先注意，根据引理 7.7 和定义 7.1，$\mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G})$ 和 $\int G_{[\ ]}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}{}_{\mathcal{G}}$ 在 $\mathcal{S}\mathrm{et}^{\Delta/N\mathcal{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}}$ 上的协变模型结构中都是纤维化的。因此，这两个单纯集合都是 ∞-范畴。回忆一下，单纯子集

$$\int G_{[\mathcal{G}]}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]} \subset \int G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}$$

is 是函子 (7.2) 的本质像（根据注 6.6）。进一步的单纯子集

$$\mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}) \subset \int G_{[\mathcal{G}]}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}$$

是由函子 (7.2) 的像中的所有顶点构成的满单纯子集；由此显然可得包含

$$\mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}) \subset \int G_{[\mathcal{G}]}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}$$

作为 ∞-范畴之间的函子，它既是全忠实的，也是本质满的。也就是说，它是 Joyal 模型结构中的弱等价 [20, Thm. 3.1.9]。由引理 5.5 可知，它也是 $\mathcal{S}\mathrm{et}^{\Delta/N\mathcal{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}}$ 中的协变弱等价。□

注 7.9。 注意，对于每个 $c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$，纤维 $\mathrm{BAUT}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G})_{|c}$ 和 $\mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G})_{|c}$ 都是约化单纯集合，即它们都只有一个顶点。约化单纯集合与单纯群之间的环化-解环化 Quillen 等价 [42, Prop. V.6.3] 表明，左纤维化 $\mathrm{BAUT}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}) \to N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 和 $\mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}) \to N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 表示 ∞-群在 $N\mathcal{C}\mathrm{art}$ 上的预层，依据 [61,Sec.3.5,Cor. 3.34] （另见下文注释和定义 7.15）。◁

注记 7.10。 我们回顾一下带基点连通对象在 ∞-topos $\mathcal{X}$ 与群对象在 $\mathcal{X}$ [57,引理 7.2.2.11]之间的等价。具体而言，存在如下反向等价的 ∞-范畴

$$\Omega : \mathcal{X}_{\geq 1}^{*/} \rightleftarrows \mathrm{Grp}(\mathcal{X}) : \mathrm{B}, \tag{7.11}$$

其中，$\mathcal{X}_{\geq 1}^{*/} \subset \mathcal{X}$ 表示 $\mathcal{X}$中带基点连通对象构成的 ∞-子范畴，而 $\mathrm{Grp}(\mathcal{X})$ 表示 $\mathcal{X}$ 中群对象构成的 ∞-范畴（例如，参见下文 [57, 定义 7.2.2.1] 和 [13, 60]）。函子 B 取群对象的分类对象，而 Ω 取 $\mathcal{X}$中带基点连通对象的环对象（连同其同伦相干乘法）。这里我们主要关注那些作为空间预层的 ∞-范畴出现的 ∞-topoi。◁

定义 7.12。 A 光滑 ∞-群 是 ∞-topos $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中的群对象。 ∞-范畴 *of smooth* ∞-群 为 $\mathrm{Grp}(\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art}))$。

令 $\rho\colon \mathbb{\Delta} \to \mathbb{\Delta}$ 为由下式定义的函子

$$\rho[n] = [n], \qquad \rho(\lambda)(i) = n - \lambda(m - i)$$

对每个 $\lambda \in \mathbb{\Delta}([m],[n])$ 和 $i \in \{0,\dots,m\}$（例如比较 [20, 第 1.5 节。7]）。此函子是严格对合，即 $\rho \circ \rho = 1_{\mathbb{\Delta}}$。特别地，它是 $\mathbb{\Delta}$ 的自等价。

定义 7.13。 设 $\mathcal{C}$为一个 ∞-范畴。我们定义对合

$$\mathrm{rev} := (N\rho^{\mathrm{op}})^* : \mathcal{F}\mathrm{un}(N\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{F}\mathrm{un}(N\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C})$$

于 $\mathcal{C}$ 中单纯对象的 ∞-范畴上。

若一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 具有几何实现，是指 $\mathcal{C}$ 中的所有 $\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}}$-形图表都具余极限。

引理 7.14。 若 $\mathcal{C}$ 是一个具有几何实现的 ∞-范畴，且 $X \in \mathcal{F}\mathrm{un}(N\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C})$是 $\mathcal{C}$中的一个单纯对象，则存在一个典范等价

$$|\mathrm{rev}X| \simeq |X|$$

在 $\mathcal{C}$中，对 X 自然。

证明。 由于 ρ 是范畴等价，$N\rho^{\mathrm{op}}$ 在$N\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}}$ 上的诱导函子是等价。因此，根据命题 5.3.1]，它具有终对象性 [20, 。□

定义 7.15。 在定义 7.1 的设定下，我们作如下定义：

(1) 我们将分类左纤维化 $\pi_{\mathrm{SYM}}\colon \mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}) \longrightarrow N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$的 ∞-预层记为

$$\mathrm{B}\mathbb{S}\mathrm{ym}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G})\colon N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\,.$$

由于 π_{SYM} 的纤维是约化单纯集合，$\mathrm{B}\mathbb{S}\mathrm{ym}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G})$的取值是带基点的连通空间。由注 7.10 可知，与 $\mathrm{B}\mathbb{S}\mathrm{ym}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G})$相关联的群对象唯一，我们将其记为

$$\mathbb{S}\mathrm{ym}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}) \in \mathrm{Grp}\big(\mathcal{F}\mathrm{un}(N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})\big)\,.$$

(2) 反向单纯对象

$$\mathbb{S}\mathrm{ym}(\mathcal{G}) := \big(\mathbb{S}\mathrm{ym}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G})\big)^{\mathrm{rev}} \quad \in \mathrm{Grp}\big(\mathcal{F}\mathrm{un}(N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})\big)$$

是对称性 $\mathcal{G}$ $\in \mathrm{G}^{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^0)$.的光滑高阶群

(3) 类似地，我们令

$$\mathrm{B}\mathbb{A}\mathrm{ut}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G})\colon N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$$

表示对 ∞ 进行分类的预层，其中左纤维化为 $\pi_{\mathrm{AUT}}\colon \mathrm{BAUT}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}) \longrightarrow N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$。我们将其关联的群对象记为

$$\mathbb{A}\mathrm{ut}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}) \in \mathrm{Grp}\big(\mathcal{F}\mathrm{un}(N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})\big)\,.$$

(4) 反向单纯对象

$$\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G}) := \big(\mathbb{A}\mathrm{ut}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G})\big)^{\mathrm{rev}} \quad \in \mathrm{Grp}\big(\mathcal{F}\mathrm{un}(N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})\big)$$

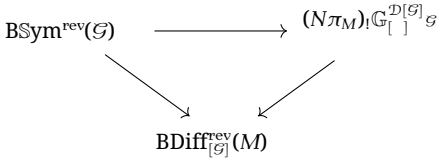
是G $\mathcal{G}$ $\in \mathrm{G}^{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^0)$.的自同构光滑高阶群

我们记

$$\mathbb{G}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]} = \gamma^{*}_{\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}} G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]}$$

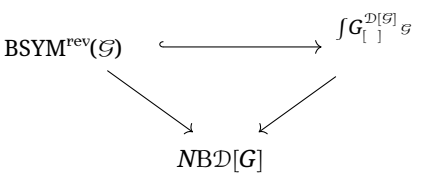
与$G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\ ]}$ $\mathcal{G}$相关的 ∞-预层。

引理 7.16. 存在一个典范的交换三角形



顶部态射是逐对象等价。

证明。 对于每个 ∞-范畴 A， ∞-范畴化的 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/A}$ 在协变弱等价下的局部化与 ∞-范畴 $\mathcal{F}\mathrm{un}(A, \mathcal{S})$ [20, 定理 7.8.9]之间存在一个典范等价。根据构造，陈述中的三角形在此等价下由以下交换三角形表示：



上方是覆叠于 $N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 的单纯集合。引理 7.8 表明，顶部态射是覆叠于 $N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}$ 的协变弱等价。由于协变模型结构中的每个对象都是余纤维的，在左 Quillen 函子下，

$$(N\pi_M)_!\colon \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}$$

这就成为了在 $N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 上的协变弱等价。 □

定义 7.17. [60, Def. 4.26] 设 $\mathcal{X}$ 是一个 ∞-topos。$\mathcal{X}$ 中群对象的扩张是群对象 $\mathcal{X}$ 的 ∞-范畴 $\mathrm{Grp}(\mathcal{X})$ 中的态射序列 $\mathbb{A} \to \mathbb{H} \to \mathbb{\Gamma}$，使得其诱导的序列 $\mathrm{B}\mathbb{A} \to \mathrm{B}\mathbb{H} \to \mathrm{B}\mathbb{\Gamma}$ 在 $\mathcal{X}$ 中构成一个纤维序列。

命题 7.7(3) 有如下直接推论：

推论 7.18. 我们在 $\mathcal{F}\mathrm{un}(N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$ 中有一个群对象的扩张：

$$\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{S}\mathrm{ym}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathrm{Diff}_{[\mathcal{G}]}(M)\,.$$

证明。根据命题 7.7(3)，以及由协变模型范畴 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}$ 对 ∞-范畴 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 的呈现（参见 [20, Thm.7.8.9]），该方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{B}\mathbb{A}\mathrm{ut}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathrm{B}\mathbb{S}\mathrm{ym}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & \mathrm{BDiff}^{\mathrm{rev}}_{[\mathcal{G}]}(M) \end{array}$$

是 $\mathcal{F}\mathrm{un}(N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$ 中的一个纤维序列。引理 7.14 表明，这等价于非反向群对象的分类对象所对应的纤维方块是一个纤维序列这一事实。□

光滑的 ∞-群 $\mathbb{S}\mathrm{ym}(\mathcal{G})$ 可以解释为由将元素 $\varphi \in \mathrm{Diff}_{\mathcal{G}}(M)$ 提升到 $\mathcal{G}$ 的所有可能方式构成（特别参见下文的定理 7.27 和推论 7.29）。现在，我们将类似的普适群与 M 上的任意光滑群作用联系起来。

定义 7.19。 考虑一个协变纤维化对象 $Q \to N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$，它属于 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}$，并假设对于每个 $c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$，纤维 Q^c 都是一个约化单纯集。假设 $\phi\colon Q \to N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}$ 是 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}$ 中的一个态射。我们将 Q 上的左纤维化定义为如下拉回（由命题 7.7(1) 可知，这确实产生一个左纤维化）

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}_{\phi}(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}) \\ {\scriptstyle \psi_\phi}\downarrow & & \downarrow \\ Q & \xrightarrow[\phi]{} & N\mathrm{B}\mathcal{D}[G]^{\mathrm{op}} \end{array}$$

注意，存在一个典范分解

$$\begin{array}{ccc} N\mathcal{C}\text{艺术}^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{\eta_M} & Q \\ & {\scriptstyle Ne_M}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \phi} & \\ & N\mathrm{B}\mathcal{D}[G]^{\mathrm{op}} & \end{array}$$

态射 $e_M\colon N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \longrightarrow N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}$ 经由 ϕ。

例 7.20. 设 H 是 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 上的群预层，且 $\psi\colon H \to \mathrm{Diff}_{\mathcal{G}}(M)$ 是 $\mathcal{H}$中的群对象态射。回忆同构

$$N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}} \cong r^*_{\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}\left(N \circ \mathrm{BDiff}_{[\mathcal{G}]}(M)^{\mathrm{rev}}\right)$$

来自注释 3.13。考虑单纯集合

$$Q = \mathrm{B}H^{\mathrm{rev}} := r^*_{\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}\mathrm{B}H^{\mathrm{rev}}\,,$$

其中 B 是去环化函子，以及典范态射 $\phi := r^*_{\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}\mathrm{B}(\phi^{\mathrm{rev}})\colon Q \to N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]$。于是，左纤维化 $\mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}_{\phi}(\mathcal{G})$ 编码了$\mathcal{G}$ 的那些覆盖H中元素作用的对称性。◁

我们有命题 7.7 的如下相对版本：

引理 7.21. 在定义 *7.19* 的情形下，我们有一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{BAUT}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}) & \hookrightarrow & \mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}_{\phi}(\mathcal{G}) \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_{\mathrm{Aut}}} & & \downarrow \\ N\mathcal{C}\text{艺术}^{\mathrm{op}} & \xhookrightarrow[\eta_M]{} & Q \end{array}$$

单纯集合。此外，以下陈述成立：

(1) 两个垂直态射都是左纤维化。*(2)* 该方块是一个拉回图，因此（由断言 *(1)*）它甚至是 *Joyal* 模型结构中的同伦拉回方块。*(3)* 通过映射 $Q \to N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 增广后，在 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}$ 中得到一个笛卡尔方块，而它甚至是协变模型结构中的同伦笛卡尔方块。

证明。 断言 (1) 来自命题 7.7(1)（对于左侧的垂直态射）和定义 7.19（对于右侧的垂直态射）。断言 (2) 由拉回的粘合法则得出，而断言 (3) 则由断言 (2) 和引理 7.5 得出（另见注 7.6）。□

左纤维化 $Q \to N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 由一个 ∞-预层 $\mathrm{B}\Gamma^{\mathrm{rev}}\colon N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}$ 分类，其取值于带基点的连通空间。因此，它给出了 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中本质唯一的群对象 $\Gamma = (\Omega\mathrm{B}\Gamma^{\mathrm{rev}})^{\mathrm{rev}}$（回忆等价 (7.11)）。于是，态射 $\phi\colon Q \to N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}$ 给出了 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中群对象之间的态射 $\Phi\colon \Gamma \to \mathrm{Diff}_{\mathcal{G}}(M)$。

定义 7.22。 设 Γ 是一个光滑的 ∞-群，即 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中的一个群对象，并设 $\Phi\colon \Gamma \to \mathrm{Diff}_{\mathcal{G}}(M)$ 是光滑 ∞-群之间的一个态射。我们将 $\mathrm{Grp}(\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art}))$ 中的拉回定义为一个光滑的 ∞-群，

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}\mathrm{ym}_{\Phi}(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathbb{S}\mathrm{ym}(\mathcal{G}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma & \xrightarrow[\Phi]{} & \mathrm{Diff}_{\mathcal{G}}(M) \end{array}$$

推论 7.23。 根据构造，这是一个以 Γ 为纤维、以 $\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G})$ 为商的扩张，也就是说，我们在 $\mathrm{Grp}(\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art}))$ 中有一个纤维序列：

$$\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{S}\mathrm{ym}_{\Phi}(\mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma\,.$$

证明。 这直接由推论 7.18 以及拉回的粘合法则得出。 □

注记 7.24. 在前面的讨论中，左纤维化 $\mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}_{\phi}(\mathcal{G}) \to Q$ 表述了

$$\mathbb{S}\mathrm{ym}_{\Phi}(\mathcal{G})^{\mathrm{rev}} \to \Gamma^{\mathrm{rev}}$$

光滑 ∞-群的态射。 ◁

7.2. **对称群的泛性质。** 在本小节中，我们证明高阶几何结构 $\mathcal{G}$ 的光滑高阶对称群与 $\mathcal{G}$上的光滑等变结构之间的关系。

设$G^{\mathcal{D}}$ 为 $\mathrm{B}\mathcal{D}$上的射影纤维化单纯预层，并设$\mathcal{G} \in \mathrm{G}^{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^0)$为一个截面。设$G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\ ]}\ _{\mathcal{G}}$为 $\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]$ 上与之关联的射影纤维化单纯预层（见定义 6.4）。我们将其记为

$$\mathbb{G}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]} := \gamma^*_{\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}} G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]}$$

NB$\mathcal{D}$[G]上的相关 ∞-预层。根据构造，存在一个 ∞-预层的典范态射 $\mathbb{G}_{[\ ]}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}\mathrm{G}_{]} \to \mathrm{BDiff}^{\mathrm{rev}}_{[\mathcal{G}]}(\mathrm{M})$。本节将阐明与 M 上任意高阶几何结构 $\mathrm{G} \in \mathrm{G}^{\mathcal{D}}$ 相关的光滑 ∞-群 $\mathbb{S}\mathrm{ym}(\mathrm{G})$ 的几何意义和结构意义：它源自一个泛性质（表示某个 ∞-函子），并且完全控制 G 上的等变结构的光滑族。与前文一样，设 $\phi\colon \mathrm{Q} \to \mathrm{NB}\mathcal{D}[\mathrm{G}]^{\mathrm{op}}$ 为左纤维化在 $\mathrm{N}\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 上的一个态射，它呈现 ∞-群作用 $\Phi\colon \mathbb{\Gamma} \to \mathrm{Diff}^{\mathcal{G}}(\mathrm{M})$。我们将左纤维化 $\mathrm{Q} \to \mathrm{N}\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 记为 q。

定义 7.25。设 $\Phi\colon \mathbb{\Gamma} \to \mathrm{Diff}(M)$ 是 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中群对象的一个态射。$\mathcal{G}$ 上的 $(\mathbb{\Gamma}, \Phi)$-等变结构空间是以下 ∞-群胚的拉回

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Equivar}_{\Phi}(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})_{/\mathrm{BDiff}^{\mathrm{rev}}_{[\mathcal{G}]}(M)}\left(\mathrm{B}\mathbb{\Gamma}^{\mathrm{rev}}, (N\pi_M)_!\mathbb{G}_{[\mathcal{G}]}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^0 & \xrightarrow[\{\mathcal{G}\}]{} & \left((N\pi_M)_!\mathbb{G}_{[\mathcal{G}]}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}\right)(\mathbb{R}^0) \end{array}$$

该方形中的右侧竖直态射源于这样一个事实：$\mathrm{B}\mathbb{\Gamma}^{\mathrm{rev}}$ 是 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中的一个带基点对象，即它具有一个指定的整体截面。这诱导出一个态射

$$\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})_{/\mathrm{BDiff}^{\mathrm{rev}}_{[\mathcal{G}]}(M)}\left(\mathrm{B}\mathbb{\Gamma}^{\mathrm{rev}}, (N\pi_M)_!\mathbb{G}_{[\mathcal{G}]}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}\right) \longrightarrow \left((N\pi_M)_!\mathbb{G}_{[\mathcal{G}]}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}\right)(\mathbb{R}^0)\,.$$

态射 $e_M\colon \mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]$ 诱导出一个典范态射

$$\mathbb{G}_{[\mathcal{G}]}^{M} = Ne_M^*\mathbb{G}_{[\mathcal{G}]}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]} \longrightarrow \left((N\pi_M)_!\mathbb{G}_{[\mathcal{G}]}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}\right).$$

底 部水平态射是该态射与 $\mathcal{G}\colon \Delta^0 \to Ne_M^*\mathbb{G}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}$ 的复合 .

下面说明定义 7.25。∞-函子 $\mathbb{G}_{[\ ]}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}\mathrm{G} : \mathrm{NB}\mathcal{D}[\mathrm{G}]^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}$ 编码了 $\mathrm{Diff}^{\mathcal{G}}(\mathrm{M})$ 在 $\mathbb{G}_{[\mathcal{G}]}^{M} \in \mathcal{P}(\mathrm{N}\mathcal{C}\mathrm{art})$ 上的光滑右作用。类似地，∞-函子 $\phi^*\mathbb{G}_{[\ ]}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}\mathrm{G} : \mathrm{Q} \to \mathcal{S}$ 通过态射 $\Phi\colon \mathbb{\Gamma} \to \mathrm{Diff}^{\mathcal{G}}(\mathrm{M})$，编码了 $\mathbb{\Gamma}$ 在 $\mathbb{G}_{[\mathcal{G}]}^{M} \in \mathcal{P}(\mathrm{N}\mathcal{C}\mathrm{art})$ 上的光滑右作用。带有光滑同伦不动点数据的 ∞-群胚，其对象为 $\mathbb{G}_{[\mathcal{G}]}^{M}$ 的截面，由映射空间 $\mathcal{F}\mathrm{un}(\mathrm{Q}, \mathcal{S})(\mathrm{e}_{\mathrm{Q}}, \phi^*\mathbb{G}_{[\ ]}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}\mathrm{G})$ 给出，其中 $\mathrm{e}_{\mathrm{Q}} \in \mathcal{F}\mathrm{un}(\mathrm{Q}, \mathcal{S})$ 是取 $\mathcal{S}$ 中终对象为值的常值函子。因此，G 上的 $(\mathbb{\Gamma}, \Phi)$-等变结构所成的空间，是 $\mathcal{F}\mathrm{un}(\mathrm{Q}, \mathcal{S})(\mathrm{e}_{\mathrm{Q}}, \mathbb{G}_{[\mathcal{G}]}^{M})$ 的满 ∞-子群胚，其对象是那些底层的 $\mathbb{G}_{[\ ]}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}\mathrm{G}$ 截面为常值截面 G 的顶点（我们也可以用这种方式定义 $\mathrm{Equivar}_{\Phi}(\mathrm{G})$）。

引理 7.26. 考虑一个 ∞-范畴的交换三角

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\ \phi\ } & B \\ & {\scriptstyle q}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \pi} & \\ & C & \end{array}$$

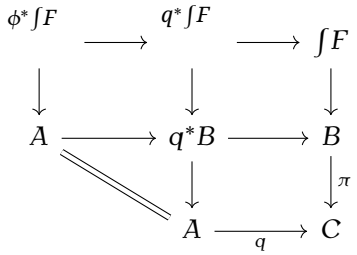
其中 q 和 π 是左纤维化。令 $\mathrm{e}_A \in \mathcal{F}\mathrm{un}(A, \mathcal{S})$ 为取值恒为 $\mathcal{S}$ 中终对象的 ∞-函子，$\mathrm{e}_B \in \mathcal{F}\mathrm{un}(B, \mathcal{S})$ 亦然。对每个 $F \in \mathcal{F}\mathrm{un}(B, \mathcal{S})$，存在一个典范等价

$$\phi^*F \simeq \mathrm{e}_A \underset{q^*\pi_!\mathrm{e}_B}{\times} q^*\pi_!F\,,$$

在 $\mathcal{F}\mathrm{un}(A, \mathcal{S})$ 中，且关于 F 自然。

证明。令 $\int F \to B$ 表示由F分类的左纤维化。由于 π 是左纤维化，左 Kan 延拓 $\pi_!F\colon C \to \mathcal{S}$ 分类了复合左纤维化 $\int F \to B \to C$（见 [20, 命题 6.1.14]）。由e_B 分类的左纤维化是恒等态射 $B \to B$。我们有一个交换图

单纯集合的



其中间的水平复合为 ϕ，根据粘合法则，每个方块都是拉回方块。特别地，左上方的方块在 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/A}$ 上的协变模型结构中是同伦笛卡尔的；它给出了所述等价。□

我们得到一个 ∞-群胚的拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}\mathrm{un}(Q,\mathcal{S})\big(\mathrm{e}_Q,\phi^*\mathbb{G}_{[\mathcal{G}]}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}\big) & \longrightarrow & \mathcal{F}\mathrm{un}(Q,\mathcal{S})\big(\mathrm{e}_Q,q^*(N\pi_M)_!\mathbb{G}_{[\mathcal{G}]}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}\big) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^0 \simeq \mathcal{F}\mathrm{un}(Q,\mathcal{S})\big(\mathrm{e}_Q,\mathrm{e}_Q\big) & \longrightarrow & \mathcal{F}\mathrm{un}(Q,\mathcal{S})\big(\mathrm{e}_Q,q^*(N\pi_M)_!\mathrm{e}_{N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}}\big) \end{array}$$

其中，底部态射由作用 Φ （它对应于 $\mathcal{F}\mathrm{un}(Q,\mathcal{S})$ 中的态射 $\mathrm{e}_Q \to \phi^*\mathrm{e}^{N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}}$）以及伴随的单位 $(N\pi_M)_! \dashv (N\pi_M)^*$ 所诱导。最后，回想一下，$q_!\mathrm{e}_Q$ 是由左纤维化 q 呈现的 ∞-函子。利用这一点，我们看到 Kan 扩张伴随诱导出典范等价

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\mathrm{un}(Q,\mathcal{S})\big(\mathrm{e}_Q,q^*(N\pi_M)_!\mathrm{e}_{N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}}\big) &\simeq \mathcal{F}\mathrm{un}(N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}},\mathcal{S})\big(\mathrm{B}\mathbb{\Gamma}^{\mathrm{rev}},\mathrm{BDiff}_{[\mathcal{G}]}^{\mathrm{rev}}(M)\big)\,, \\ \mathcal{F}\mathrm{un}(Q,\mathcal{S})\big(\mathrm{e}_Q,q^*(N\pi_M)_!\mathbb{G}_{[\mathcal{G}]}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}\big) &\simeq \mathcal{F}\mathrm{un}(N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}},\mathcal{S})\big(\mathrm{B}\mathbb{\Gamma}^{\mathrm{rev}},(N\pi_M)_!\mathbb{G}_{[\mathcal{G}]}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}\big)\,. \end{aligned}$$

将其与上述拉回方块结合起来，我们得到一个典范等价

$$\mathcal{F}\mathrm{un}(Q,\mathcal{S})\big(\mathrm{e}_Q,\phi^*\mathbb{G}_{[\mathcal{G}]}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}\big) \simeq \mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})_{/\mathrm{BDiff}_{[\mathcal{G}]}^{\mathrm{rev}}(M)}\big(\mathrm{B}\mathbb{\Gamma}^{\mathrm{rev}},(N\pi_M)_!\mathbb{G}_{[\mathcal{G}]}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}\big)\,,$$

其中左侧是 ∞-群胚，表示 $\mathbb{\Gamma}$- 在 $\mathbb{G}_{[\mathcal{G}]}^M$ 上作用的光滑同伦不动点。接着，定义 7.25 中进一步的拉回将这类同伦不动点限制到其底层截面为 $\mathcal{G}$ 的 ∞-子群胚，也就是说，限制到 $\mathcal{G}$ 上的光滑等变结构。让这对 $(\mathbb{\Gamma},\Phi)$ 变化，上述构造典范地汇集为一个函子

$$\mathrm{Equivar}(\mathcal{G})\colon \big(\mathrm{Grp}\big(\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})\big)_{/\mathrm{Diff}_{[\mathcal{G}]}(M)}\big)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$$

它将 M 上的一个 $\mathbb{\Gamma}$-作用 $(\mathbb{\Gamma},\Phi)$ 映射到如定义 7.25 所述的 $\mathcal{G}$ 上的 $(\mathbb{\Gamma},\Phi)$-等变结构空间。我们还可以将其扩展为定义在 ∞-范畴 $\mathrm{Grp}\big(\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})\big)_{/\mathrm{Diff}(M)}$ 上的函子，其中该范畴包含 M 上的所有光滑 ∞-群作用；若 Φ，则令 $\mathrm{Equivar}_\Phi(\mathcal{G}) = \emptyset$： $\mathbb{\Gamma} \to \mathrm{Diff}(M)$ 不通过 $\mathrm{Diff}^{\mathcal{G}}(M)$ 分解（在这种情况下，$\mathcal{G}$ 上不存在 $(\mathbb{\Gamma},\Phi)$-等变结构）。

定理 7.27。 ∞-函子

$$\mathrm{Equivar}(\mathcal{G})\colon \big(\mathrm{Grp}\big(\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})\big)_{/\mathrm{Diff}(M)}\big)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$$

由态射 $\mathbb{S}\mathrm{ym}(G) \to \mathrm{Diff}^{\mathcal{G}}(M)$, $\widetilde{\mathrm{Diff}}(M)$ 表示。也就是说，存在一个规范的自然等价

$$\mathrm{Equivar}_\Phi(\mathcal{G}) \simeq \mathrm{Grp}\big(\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})\big)_{/\mathrm{Diff}(M)}\big(\mathbb{\Gamma},\mathbb{S}\mathrm{ym}(\mathcal{G})\big) \tag{7.28}$$

G 上的 $(\mathbb{\Gamma},\Phi)$-等变结构与态射 $\Phi\colon \mathbb{\Gamma} \to \mathrm{Diff}(M)$ 沿态射 $\mathbb{S}\mathrm{ym}(G) \to \mathrm{Diff}^{\mathcal{G}}(M)$ 的光滑 ∞-群提升之间的对应关系。

证明。 我们首先注意到，如果 Φ 的取值并非完全落在子群 $\mathbf{Diff}^{\mathcal{G}}(M) \subset \mathbf{Diff}(M)$ 中，那么 (7.28) 两边都是空空间。因此，我们可以将注意力限制在 $\Phi\colon \Gamma \to \mathbf{Diff}^{\mathcal{G}}(M)$ 的情形，即 Φ 经由包含 $\mathbf{Diff}^{\mathcal{G}}(M) \hookrightarrow \mathbf{Diff}(M)$ 分解的情形。在这种情况下，存在一个等价

$$\mathrm{Grp}\big(\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})\big)_{/\mathbf{Diff}(M)}\big(\mathbb{\Gamma}, \mathbb{S}\mathrm{ym}(\mathcal{G})\big) \simeq \mathrm{Grp}\big(\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})\big)_{/\mathbf{Diff}_{[\mathcal{G}]}(M)}\big(\mathbb{\Gamma}, \mathbb{S}\mathrm{ym}(\mathcal{G})\big)\,,$$

等价 $\mathrm{rev}\colon \mathrm{Grp}(\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})) \to \mathrm{Grp}(\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art}))$ 给出了一个典范等价

$$\mathrm{Grp}\big(\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})\big)_{/\mathbf{Diff}_{[\mathcal{G}]}(M)}\big(\Gamma, \mathbb{S}\mathrm{ym}(\mathcal{G})\big) \simeq \mathrm{Grp}\big(\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})\big)_{/\mathbf{Diff}^{\mathrm{rev}}_{[\mathcal{G}]}(M)}\big(\Gamma^{\mathrm{rev}}, \mathbb{S}\mathrm{ym}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G})\big)\,.$$

根据等价 (7.11)，还存在一个进一步的等价

$$\begin{aligned}\mathrm{Grp}\big(\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})\big)_{/\mathbf{Diff}^{\mathrm{rev}}_{[\mathcal{G}]}(M)}\big(\mathbb{\Gamma}^{\mathrm{rev}}, \mathbb{S}\mathrm{ym}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G})\big) &\simeq \big(\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})^{*/}_{\geq 1}\big)_{/\mathbf{BDiff}^{\mathrm{rev}}_{[\mathcal{G}]}(M)}\big(\mathbf{B}\mathbb{\Gamma}^{\mathrm{rev}}, \mathbf{B}\mathbb{S}\mathrm{ym}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G})\big)\\ &\simeq \big(\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})^{*/}\big)_{/\mathbf{BDiff}^{\mathrm{rev}}_{[\mathcal{G}]}(M)}\big(\mathbf{B}\mathbb{\Gamma}^{\mathrm{rev}}, \mathbf{B}\mathbb{S}\mathrm{ym}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G})\big)\,.\end{aligned}$$

现在我们利用这样一个事实：根据 $\mathbb{S}\mathrm{ym}(\mathcal{G})$ 的构造，典范态射

$$\mathbf{B}\mathbb{S}\mathrm{ym}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}) \hookrightarrow (N\pi_M)_!\mathbb{G}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]}$$

是 $\mathbf{BDiff}^{\mathrm{rev}}_{[\mathcal{G}]}(M)$ 上的一个等价（见引理 7.16）。这个典范等价还为 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中的对象 $(N\pi_M)_!\mathbb{G}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\ ]}\mathcal{G}$ 赋予了一个基点，该基点从 $\mathbf{B}\mathbb{S}\mathrm{ym}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G})$ 迁移而来。取这个基点后，存在一个典范等价

$$\big(\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})^{*/}\big)_{/\mathbf{BDiff}^{\mathrm{rev}}_{[\mathcal{G}]}(M)}\big(\mathbf{B}\mathbb{\Gamma}^{\mathrm{rev}}, \mathbf{B}\mathbb{S}\mathrm{ym}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G})\big) \simeq \big(\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})^{*/}\big)_{/\mathbf{BDiff}^{\mathrm{rev}}_{[\mathcal{G}]}(M)}\big(\mathbf{B}\mathbb{\Gamma}^{\mathrm{rev}}, (N\pi_M)_!\mathbb{G}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]}\big)$$

具体而言，$(N\pi_M)_!\mathbb{G}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\ ]}\mathcal{G}$ 的基点是与元素相对应的整体截面

$$\mathcal{G}' \in \big((N\pi_M)_!\mathbb{G}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]}\big)(\mathbb{R}^0)$$

（例如，正如引理 7.16 的证明中所示，在左纤维化层级上可以看出）。因此， ∞-群胚的交换方块

$$\begin{array}{ccc}\big(\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})^{*/}\big)_{/\mathbf{BDiff}^{\mathrm{rev}}_{[\mathcal{G}]}(M)}\big(\mathbf{B}\mathbb{\Gamma}^{\mathrm{rev}}, (N\pi_M)_!\mathbb{G}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]}\big) & \longrightarrow & \mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})_{/\mathbf{BDiff}^{\mathrm{rev}}_{[\mathcal{G}]}(M)}\big(\mathbf{B}\mathbb{\Gamma}^{\mathrm{rev}}, (N\pi_M)_!\mathbb{G}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]}\big)\\ \downarrow & & \downarrow\\ * & \xrightarrow[\{\mathcal{G}\}]{} & \big((N\pi_M)_!\mathbb{G}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]}\big)(\mathbb{R}^0)\end{array}$$

是笛卡尔的。与定义 7.25 对照，这就完成了证明。 □

回忆定义 7.22 中的光滑 ∞-群 $\mathbb{S}\mathrm{ym}_\Phi(\mathcal{G})$。

推论 7.29. 以下 ∞-预层

$$\big(\mathrm{Grp}\big(\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})\big)_{/\mathbf{Diff}(M)}\big)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$$

在 M 上光滑 ∞-群作用的范畴中是典范等价的：

(1) 函子 $\mathrm{Equivar}(G)$，将对象 $(\mathbb{\Gamma}, \Phi)$ 映至 G 上的 $(\mathbb{\Gamma}, \Phi)$-等变结构的空间；*(2)* 将对象 $(\mathbb{\Gamma}, \Phi)$ 映至 $\Phi\colon \mathbb{\Gamma} \to \mathbf{Diff}^{\mathcal{G}}(M)$ 经由态射 $\mathbb{S}\mathrm{ym}(G) \to \mathbf{Diff}^{\mathcal{G}}(M)$的提升空间的函子；*(3)* 将对象 $(\mathbb{\Gamma}, \Phi)$ 映至该扩张的分裂空间的函子

$$\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{S}\mathrm{ym}_\Phi(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{\Gamma}\,.$$

证明。 (1) 和 (2) 之间的等价是对定理 7.27 的断言的换言之。(2) 和 (3) 之间的等价可直接由将 $\mathbb{S}\mathrm{ym}_\Phi(\mathcal{G})$ 构造为沿群态射 Φ 对$\mathbb{S}\mathrm{ym}(\mathcal{G})$ 作拉回得出。 □

8. 高阶几何结构的模空间 ∞-预堆

在构造并分析固定的高阶几何结构 $\mathcal{G}$ 在M上的光滑高阶对称性与自同构之后，我们现在构造高阶几何数据的模空间 ∞-叠，这些数据定义在 $\mathcal{G}$上，并且是模掉作用于这些数据的$\mathcal{G}$ 上的光滑高阶对称性或自同构而得到的。我们提取由此得到的模空间 ∞-预叠的拓扑学信息，并证明一个判据，用以判断我们的两个模空间 ∞-预叠何时等价；这里的关键结果是命题 8.13 和定理 8.30。先验地，这些模空间表现为 ∞-预层（或者等价地，∞-预叠）。然而，我们在第 9 节中证明，每当我们允许作为对底层流形 M作用的对称性的光滑高阶群『由一个1-群层描述时，我们的模空间 ∞-预叠实际上是 ∞-叠，即满足下降（定理 9.13）。

8.1. **构型族与解**。 本节将介绍我们用于研究高阶几何结构模空间的框架。我们的思路是研究给定的固定高阶几何结构$\mathcal{G}$ 在M上的一些附加数据。这些附加数据可能受到某些约束，例如要求它们构成某些场方程的解。比如，$\mathcal{G}$ 可以是M上的一个高阶丛，而附加数据可以由M 上的高阶联络和M 上的黎曼度量构成，它们共同满足一组耦合场方程（特别参见下文第14节和第16.3节）。此外，光滑高阶对称群对$\mathcal{G}$的作用光滑且具有同伦相干性，我们希望研究这一作用下的（同伦）商。

定义 8.1. 给定 $\mathrm{B}\mathcal{D}$上的单纯预层 $\mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}$ ，一个关于 $\mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}$ 的构型预层是 $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 上的单纯预层 $\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}$ ，并配备一个射影纤维化

$$p\colon \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}\,.$$

注 8.2. 对于 $\mathrm{B}\mathcal{D}$中的$c \in$ ，我们将构型预层 $\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}(c)$的顶点视为以$c$为参数的、定义在 M 上的几何结构构型族（例如高阶丛）。$\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}$ 的高阶单形编码构型的（高阶）同构的c-族，例如规范变换；而对对象$c \in \mathrm{B}\mathcal{D}$ 的函子性依赖，则编码了族的限制与重新参数化，以及 $\mathrm{Diff}(M)$对构型族的光滑作用。

如果$p\colon \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} \to \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}$ 是关于 $\mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}$的构型预层，那么态射$p$ 编码了这样一个假设：这些构型的底层高阶几何数据由 $\mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}$的一个截面给出。例如，一个重要情形是，$\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}$ 编码带联络的高阶丛的光滑族，$\mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}$ 编码不带联络的高阶丛的光滑族，而态射 $\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} \to \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}$ 则遗忘联络数据。◁

注意，$\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}$ 本身必然是投射纤维化的。设$\mathcal{G}$ 是 $\mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^0)$中的一个元素，或者等价地，是$e_M^*\mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}$的一个整体截面。假设$p\colon \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} \to \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}$ 是 $\mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}$上的一个构型预层。和之前一样，我们得到受限的投射纤维化单纯预层

$$\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[G]},\ \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}[G]}\colon \mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta \quad \text{and}$$

$$\mathrm{Conf}^{M} := e_M^*\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]},\ \mathrm{Fix}^{M} := e_M^*\mathrm{Fix}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}\colon \mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta\,.$$

我们将这些单纯预层所关联的左纤维化（通过矫正函子得到；参见附录 A）记为

$$\textstyle\int \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} := r^*_{\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}}}\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} \longrightarrow N\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\,,$$

$$\textstyle\int \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]} := r^*_{\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]}\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]} \longrightarrow N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}\,,$$

$$\textstyle\int \mathrm{Conf}^{M} := r^*_{\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}\mathrm{Conf}^{M} \longrightarrow N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}\,,$$

分别如此，对于 $\mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}$ 也可类似地得到。注意，这些态射

$$\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]} \longrightarrow \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]} \quad \text{and} \quad \mathrm{Conf}^{M} \longrightarrow \mathrm{Fix}^{M}\,,$$

仍然是逐对象的 Kan纤维化。它们诱导出典范的左纤维化

$$\int \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \int \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}, \qquad \int \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]} \longrightarrow \int \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}, \qquad \int \mathrm{Conf}^{M} \longrightarrow \int \mathrm{Fix}^{M}, \tag{8.3}$$

分别为 over$N\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$、$N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}$ 和 $N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$。

定义 8.4。 设 $p\colon \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} \to \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}$ 是一个射影纤维化。解预层 是一个单纯子预层

$$\mathrm{Sol}^{\mathcal{D}} \subset \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}$$

在 $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 上，使得对于每个 $c \in \mathrm{B}\mathcal{D}$，包含 $\mathrm{Sol}^{\mathcal{D}}(c), \to \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}(c)$ 是不交连通分支并集的包含关系。

注记 8.5。 我们认为，顶点 $\mathrm{Sol}^{\mathcal{D}}$ 由满足某种条件的那些构型组成，例如满足施加在 $\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}$顶点上的一组方程；示例见第 2 部分。要求每个 $\mathrm{Sol}^{\mathcal{D}}(c) \hookrightarrow \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}(c)$ 都是连通分支的包含，这等价于要求一个族是否为解仅取决于其同构类：如果 $\psi \in \mathrm{Conf}_1^{\mathcal{D}}(c)$ 是一个 1-单形，表示两个构型族 $d_1\psi$ 和 $d_0\psi$ 之间的等价，那么 $d_1\psi$ 是解，当且仅当 $d_0\psi$ 也是解。至于 $\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}$，在 $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 上的函子性确保解族在限制或重新参数化族时保持稳定，也在沿着M上的微分同胚的光滑族拉回时保持稳定。 ◁

考虑 $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 上的构型预层 $\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}$，以及任意解子预层 $\mathrm{Sol}^{\mathcal{D}} \subset \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}$。由于它是连通分支的包含，包含态射 $\mathrm{Sol}^{\mathcal{D}} \subset \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}$ 既是逐对象的单态射，也是射影纤维化。在左纤维化的层级上，这便产生了一个态射

$$\int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}} \hookrightarrow \int \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}$$

（在 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}}}$ 中）作用于相应的左纤维化上，它既是单态射（引理 A.4），也是左纤维化（定理 A.2）。设 $p\colon \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} \to \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}$ 是 $\mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}$ 上的构型预层。与 (8.3) 中顶部的左纤维化复合后，我们得到一个左纤维化

$$\int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \int \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}.$$

定义 8.6. 设 $\mathcal{G} \in \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^0)$ 是 $e_M^* \mathrm{Fix}^M$ 的一个整体截面。我们通过要求图表中的方块满足以下条件，来定义单纯集合$\int \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}(\mathcal{G})$ 和 $\int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}(\mathcal{G})$

$$\begin{array}{ccccc} \int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}(\mathcal{G}) & \hookrightarrow & \int \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \int \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]} & \hookrightarrow & \int \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]} & \longrightarrow & \int \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]} \end{array} \tag{8.7}$$

是笛卡尔的。

图表 (8.7) 中的竖直箭头是在某些顶点上的满单纯子集之间的包含，水平箭头则是左纤维化（由定理 A.2 可知）。由此得到的左纤维化

$$\int \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}(\mathcal{G}) \longrightarrow N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}} \qquad \text{and} \qquad \int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}(\mathcal{G}) \longrightarrow N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}$$

分别编码构型与解的光滑族，其在 $\int \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}$ 中的像等价于常值族 $\mathcal{G}$。

注记 8.8。 根据定义，单纯子预层 $\mathrm{Fix}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]} \subset \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}$ 仅取决于 $\mathrm{Fix}^M(\mathbb{R}^0)$ 中 $\mathcal{G}$ 的等价类 $[\mathcal{G}]$。因此，单纯子集 $\int \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}(\mathcal{G}) \subset \int \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}$ 也是如此。由此还可得，单纯子集

$$\int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}(\mathcal{G}) \subset \int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]} \qquad \text{and} \qquad \int \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}(\mathcal{G}) \subset \int \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}$$

仅取决于 $\mathcal{G}$ 在 $\mathrm{Fix}^M(\mathbb{R}^0)$ 中的等价类。 ◁

定义 8.9。 设 $\mathcal{C}$ 为一个小范畴，且令 $q\colon F_0 \to F_1$ 为 $\mathcal{C}$上的投射纤维化单纯预层之间的一个投射纤维化映射。我们称 q 是*0-连通* 的，如果对于每个$c \in \mathcal{C}$，映射

$$\pi_0 q_{|c}\colon \pi_0 F_0(c) \longrightarrow \pi_0 F_1(c)$$

由 q 在连通分支上诱导的映射是一个双射。

注记 8.10。 等价地， $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta N\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ 中纤维对象之间的左纤维化，

$$q\colon X_0 \longrightarrow \textstyle\int X_1$$

称为*0-连通* ，如果对每个$c \in \mathcal{C}$，q 在c 上的纤维上的限制，在这些纤维的连通分支之间诱导一个双射。◁

注记 8.11。 设$q\colon G_0^{\mathcal{D}} \to G_1^{\mathcal{D}}$是 $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 上投射纤维化单纯预层之间的态射，且为 0-连通。令$\mathcal{G}_0 \in G^M(\mathbb{R}^0)$，并设$\mathcal{G}_1 = q(\mathcal{G}_0) \in G^M(\mathbb{R}^0)$。在这种情况下，我们有

$$\mathrm{Diff}_{[\mathcal{G}_0]}(M) = \mathrm{Diff}_{[\mathcal{G}_1]}(M) \qquad \text{and thus} \qquad \mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}_0] = \mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}_1]\,.$$

因此，写作

$$G_{0[\mathcal{G}_1]}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_1]} := G_{0[\mathcal{G}_0]}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_0]}\,,$$

其中 $[\mathcal{G}_0] := (\pi_0 q)^{-1}([\mathcal{G}_1]) \in \pi_0 G_0^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_1]}$。态射 p 限制为一个态射

$$q\colon G_{0[\mathcal{G}_1]}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_1]} \longrightarrow G_{1[\mathcal{G}_1]}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_1]}\,,$$

为便于记号，我们仍将其记为q 。 ◁

注 8.12。注意，若 $\mathrm{q} : \mathrm{F}_0 \to \mathrm{F}_1$ 是一个映射，使得诱导态射 $\pi_0\mathrm{q} : \pi_0\mathrm{F}_0 \to \pi_0\mathrm{F}_1$ 仅为单射，则我们可以用满单纯子预层 $\mathrm{F}_1' \subset \mathrm{F}_1$ 替换 F_1 。该预层将 $\mathrm{c} \in \mathcal{C}$ 映射为子集 $\mathrm{F}_1'(\mathrm{c}) \subset \mathrm{F}_1(\mathrm{c})$，其中包含 $\mathrm{F}_1(\mathrm{c})$ 的所有连通分支，且每个连通分支都含有映射 $\mathrm{q}_{|\mathrm{c}}\colon \mathrm{F}_0(\mathrm{c}) \to \mathrm{F}_1(\mathrm{c})$ 的像中的一个顶点。/

考虑 $\mathrm{Fix}_0^{\mathcal{D}}$ 上的构型预层 $p\colon \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathrm{Fix}_0^{\mathcal{D}}$。令

$$q\colon \mathrm{Fix}_0^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathrm{Fix}_1^{\mathcal{D}}$$

设其为 $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 上投射纤维化单纯预层之间的一个射影纤维化。那么，我们有一个态射序列

$$\mathrm{Sol}^{\mathcal{D}} \hookrightarrow \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathrm{Fix}_0^{\mathcal{D}} \xrightarrow{\ q\ } \mathrm{Fix}_1^{\mathcal{D}}\,,$$

并且复合态射 $\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} \to \mathrm{Fix}_1^{\mathcal{D}}$也是 $\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ 上投射纤维化单纯预层之间的射影纤维化。特别是，我们可以考虑相对于 $\mathrm{Fix}_0^{\mathcal{D}}$ 或 $\mathrm{Fix}_1^{\mathcal{D}}$ 中的固定数据的解族。进一步假设 q 是 0-连通的。设 $\mathcal{G}_0 \in \mathrm{Fix}_0^M(\mathbb{R}^0)$ 是 e_M^* Fix_0^M 的一个整体截面，并令 $\mathcal{G}_1 = q(\mathcal{G}_0) \in \mathrm{Fix}_1^M(\mathbb{R}^0)$。根据注 8.11，我们可以写作 $\mathrm{Fix}_{0[\ \ \mathcal{G}_1]}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_1]} = \mathrm{Fix}_{0[\ \ 0]}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_0]}{}_{\mathcal{G}_1}$。本节的两个关键观察中的第一个是：

命题 8.13. 在上述设定中，存在 $N\mathrm{B}\mathcal{D}[G_0]^{\mathrm{op}}$ =$N\mathrm{B}\mathcal{D}[G_1]^{\mathrm{op}}$ 上左纤维化之间的一个恒等态射

$$\textstyle\int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_0]}(\mathcal{G}_0) = \int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_1]}(\mathcal{G}_1)\,.$$

证明。 只需证明

$$\textstyle\int \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_0]}(\mathcal{G}_0) = \int \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_1]}(\mathcal{G}_1)\,.$$

因此，由 $\int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_i]}(\mathcal{G}_i)$ 在 (8.7) 中作为左侧拉回方块的构造可得该结论。事实上，由于根据构造， $\int \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_i]}(\mathcal{G}_i) \subset \int \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_i]}$ 是某个顶点子集上的一个满 单纯子集，因此只需在顶点层级验证上述恒等态射。

[11]可以关联 也可以为一般态射 $q\colon F_0 \to F_1$, 定义 0-连通性，要求 q 的所有同伦纤维的。对于定义 8.9 中的 q ，严格纤维已经计算出了同伦纤维。

为此，首先注意到 $\int \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_0]} = \int \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_1]}$。对于$i = 0,1$，顶点$x \in \int \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_i]}$属于单纯子集 $\int \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_i]}(\mathcal{G}_i) \subset \int \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_i]}$，当且仅当它在 $\int p\colon \int \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} \to \int \mathrm{Fix}_i^{\mathcal{D}}$ 下的像属于函子 $\sigma\mathcal{G}_i : N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \to \int \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_i]}{}_i$ 的本质像；该函子与截面$\mathcal{G}_i$ 相关联（见注 6.6）。根据构造，我们有

$$\int q \circ \sigma\mathcal{G}_0 = \sigma\mathcal{G}_1 .$$

因此，每当 $\int p(x)$ 属于 $\sigma\mathcal{G}_0$, 的本质像时，$\int q \circ \int p(x)$ 就属于 $\sigma\mathcal{G}_1$ 的本质像。也就是说

$$\int \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_0]}(\mathcal{G}_0) \subset \int \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_1]}(\mathcal{G}_1) .$$

我们声称反过来同样成立：假设 $x \in \int \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_0]}$ 属于 $\sigma\mathcal{G}_1$ 的本质像。我们必须证明 $\int p(x)$ 属于 $\sigma\mathcal{G}_0$ 的本质像。设 α 是一个 1- 单形，它建立了从 $\sigma\mathcal{G}_1(c')$ 到 $\int q \circ \int p(x)$ 的等价，其中 $c' \in \mathcal{C}$ 属于 art。令 c 为 x 在$\mathcal{C}$art 中的像。

首先，我们证明一个辅助断言：总可以选取 $c' = c$：考虑以下交换方块

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_1^0 & \longrightarrow & \int \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_0]} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^2 & \longrightarrow & N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \end{array}$$

其中，底部态射是 α 的像与 c 上的恒等态射复合所得。顶部态射由态射 $\sigma\mathcal{G}_1(c') \to \sigma\mathcal{G}_1(c)$ 给出；该态射是将映射 $\sigma\mathcal{G}_1$ 应用于 α 在 $\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 中的像（这给出了角的一条边）后得到的，并与 1-单形 α 本身共同构成。由于右侧的垂直态射是左纤维化，上述方块存在一个提升 $\beta\colon \Delta^2 \to \int \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_0]}$。于是，$\alpha' := d_0\beta\colon \Delta^1 \to \int \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_0]}$ 给出了一个 1-单形

$$\alpha' \colon \sigma\mathcal{G}_1(c) \to \int q \circ \int p(x)$$

在纤维中

$$\left(\int q \circ \int p(x)\right)_{|c} \cong \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_0]}(c) .$$

这里我们使用了典范同构 $(r^*_{\mathcal{C}}F)_{|c} \cong F(c)$，它适用于任意小范畴 $\mathcal{C}$、对象 $c \in \mathcal{C}$和函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$（这来自引理 A.6）。这证明了辅助断言。

因此，$\int q \circ \int p(x)$ 与$\mathcal{G}_1(c) = \int q \circ \sigma\mathcal{G}_0(c)$ 位于 $\mathrm{Fix}_1^{\mathcal{D}}(c)$ 的同一个连通分支中。由于态射 $\int q$ 诱导了一个双射

$$\pi_0\left(\int q\right)_{|c} \colon \pi_0\left(\int \mathrm{Fix}_0^{\mathcal{D}}\right)_{|c} \longrightarrow \pi_0\left(\int \mathrm{Fix}_1^{\mathcal{D}}\right)_{|c} ,$$

现在可知，$\int p(x)$ 也与 $\sigma\mathcal{G}_0(c)$ 位于 $\mathrm{Fix}_0^{\mathcal{D}}(c)$ 的同一个连通分支中。特别地，我们推得 $x \in \int \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_0]}(\mathcal{G}_0)$。因此，我们有

$$\int \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_1]}(\mathcal{G}_1) \subset \int \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_0]}(\mathcal{G}_0) ,$$

由此证明得证。 □

我们还定义限制

$$\mathrm{Sol}^M := e_M^* \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}} \colon \mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$$

及其相关的左纤维化

$$\int \mathrm{Sol}^M := r^*_{\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}} \mathrm{Sol}^M \longrightarrow N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} .$$

注意，根据引理 A.6，存在一个典范同构

$$\int \mathrm{Sol}^M \cong N e_M^* \int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}} = N e_M^* \int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}$$

在$N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$上的左纤维化之间。类比于构造（8.7），我们通过要求图表中的方形来定义两个单纯子集$\int \mathrm{Conf}^M(\mathcal{G}) \subset \int \mathrm{Conf}^M$和 $\int \mathrm{Sol}^M(\mathcal{G}) \subset \int \mathrm{Sol}^M$

$$\begin{array}{ccccc} \int \mathrm{Sol}^M(\mathcal{G}) & \hookrightarrow & \int \mathrm{Conf}^M(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \int \mathrm{Fix}^M_{[\mathcal{G}]} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \int \mathrm{Sol}^M & \hookrightarrow & \int \mathrm{Conf}^M & \longrightarrow & \int \mathrm{Fix}^M \end{array}$$

是笛卡尔的。因此存在一个典范同构

$$Ne_M^* \int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}(\mathcal{G}) \cong \int \mathrm{Sol}^M(\mathcal{G}) .$$

我们有如下直接推论：

命题 8.14. 存在一个交换图表

$$\begin{array}{ccccc} \int \mathrm{Sol}^M(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \int \mathrm{Fix}^M_{[\mathcal{G}]} & \longrightarrow & N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Ne_M} \\ \int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \int \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]} & \longrightarrow & N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}} \end{array}$$

其中两个方块都是笛卡尔的，且所有水平箭头都是左纤维化。特别地，在 $\mathcal{S}\mathrm{et}^{\Delta}_{/N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}}$ 中，两个方块都是同伦笛卡尔的。

到目前为止，我们研究了 M 上的最大和最小光滑群作用，它们能够逐对象提升到 $\mathcal{G}$，也就是说，分别是 $\mathrm{Diff}^{\mathcal{G}}(M)$ 和平凡群的作用。现在，我们将其推广，为 M 上的一般光滑高阶群作用提供光滑高阶对称群。假设给定以下数据：

- 一个投射纤维化单纯预层 $\mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}$ on $\mathrm{B}\mathcal{D}$,
- 一个截面 $\mathcal{G} \in e^*_M \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^0)$,
- 一个具有约化纤维的左纤维化 $Q \to N\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{op}}$ （即 Kan 复形 Q_c 对每个 $c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$ 都只有一个顶点），
- 一个态射 $\phi\colon Q \to N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]_{\mathrm{op}}$ in $\mathcal{S}\mathrm{et}^{\Delta}_{/N\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{op}}}$。

在这种情形下，回顾定义 7.19 中 $\mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}_{\phi}(\mathcal{G})$ 的构造（另见定义 7.1）。

定义 8.15。 我们将单纯集合定义为以下拉回

$$\begin{array}{ccc} \int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{\phi}(\mathcal{G}) & \hookrightarrow & \phi^* \int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}(\mathcal{G}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}_{\phi}(\mathcal{G}) & \hookrightarrow & \phi^* \int \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \int \mathrm{Sol}^M_{\mathrm{res}}(\mathcal{G}) & \hookrightarrow & \int \mathrm{Sol}^M(\mathcal{G}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{BAUT}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}) & \hookrightarrow & \int \mathrm{Fix}^M_{[\mathcal{G}]} \end{array} \tag{8.16}$$

备注 8.17. 考虑$Q = N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}$ 以及 ϕ 恒等态射的情形。在这种情况下，(8.16) 中的左侧方形变为

$$\begin{array}{ccc} \int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{\mathrm{id}}(\mathcal{G}) & \hookrightarrow & \int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}(\mathcal{G}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}) & \hookrightarrow & \int \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]} \end{array}$$

请注意，一般而言，顶部的水平箭头是严格包含。 ◁

注记 8.18。 考虑情形 $Q = N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 以及 $\phi = Ne_M$；这对应于由左纤维化 $Q \to N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 表示的光滑高阶群为平凡群的情形。由命题 8.14 可得一个典范同构

$$\int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{Ne_M}(\mathcal{G}) \cong \int \mathrm{Sol}^M_{\mathrm{res}}(\mathcal{G})$$

在 $N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 上的左纤维化之间。特别地，由拉回的粘合法则可知，方块

$$\begin{array}{ccc} \int \mathrm{Sol}^{M}_{\mathrm{res}}(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathrm{BAUT}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{\phi}(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}_{\phi}(\mathcal{G}) \end{array} \tag{8.19}$$

同样是一个拉回方块。因此，将此方块与到 $N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 的典范映射一同扩充后，它在 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}$ 中成为笛卡尔方块（由引理 7.5 可知）。◁

以下定理是本节的第二个主要结果。再次考虑命题 8.13 中的情形。也就是说，考虑 $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 上投射纤维化单纯预层之间的射影纤维化 $p\colon \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} \to \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}_0$ 和 $q\colon \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}_0 \to \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}_1$，并假设 q 是 0-连通的（见定义 8.9）。设 $\mathcal{G}_0 \in \mathrm{Fix}^{M}_0(\mathbb{R}^0)$ 是一个截面，并令 $\mathcal{G}_1 := q^{\mathbb{R}^0}(\mathcal{G}_0) \in \mathrm{Fix}^{M}_1(\mathbb{R}^0)$。回想在此情形下 $\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}_0] = \mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}_1]$（见注 8.11）。我们得到拉回方块

$$\begin{array}{ccccc} \int \mathrm{Sol}^{M}_{\mathrm{res}}(\mathcal{G}_i) & \longrightarrow & \mathrm{BAUT}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}_i) & \longrightarrow & N\mathcal{C}\text{艺术}^{\mathrm{op}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Ne_M} \\ \int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_i]}_{\phi}{}_{i}(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}_{\phi}(\mathcal{G}_i) & \longrightarrow & Q \end{array}$$

对每个 $i = 0,1$。

定理 8.20。 在上述情形下，存在一个典范的之字形

$$\int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_0]}_{\phi}(\mathcal{G}_0) \hookrightarrow \phi^* \int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_0]}(\mathcal{G}_0) = \phi^* \int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_1]}(\mathcal{G}_1) \hookleftarrow \int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_1]}_{\phi}(\mathcal{G}_1) \tag{8.21}$$

在 $\mathcal{S}\mathrm{et}^{\Delta/Q}$ 中纤维对象之间的协变弱等价。特别地，这些映射中的每一个都是弱范畴等价。

在证明定理 8.20 之前，我们先证明以下命题：

命题 8.22. (8.16) 中的方块分别在 $\mathcal{S}\mathrm{et}^{\Delta/Q}$ 和 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}$ 上的协变模型结构中是同伦笛卡尔的。其水平态射分别是 Q 和 $N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 上的协变弱等价。

证明。 我们证明左侧图表的结论；右侧图表的情形类似。这个拉回方块所对应的余跨图表具有以下性质：(1) 其中每个对象都是 Q 上的左纤维化；(2) 其竖直箭头都是左纤维化；(3) 其底部水平态射是 Q 上的协变弱等价。这些性质都源于函子

$$\phi^*\colon \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/Q}$$

相对于协变模型结构是右 Quillen 函子。因此，这些方块在 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}\mathrm{an}$ 中是笛卡尔的，故根据引理 7.5，它们在 $\mathcal{S}\mathrm{et}^{\Delta/Q}$ 中也如此。根据 [57, Prop. A.2.4.4]，的对偶命题，性质 (1) 和 (2) 可推出所考虑的拉回方块在 $\mathcal{S}\mathrm{et}^{\Delta/Q}$ 中是同伦笛卡尔的。结合性质 (3)，我们得到其顶端态射在协变模型结构中也是弱等价。□

定理 *8.30* 的证明。(8.21) 中间的恒等式直接由命题 8.13 得出。关于左侧和右侧包含态射的陈述由命题 8.22 得出。最后，引理 5.5 （连同 Q 是一个 ∞- 范畴这一事实）表明，(8.21) 中的态射也是范畴弱等价。□

为便于后文使用，我们还记录以下结果：

推论 8.23。方形(8.19)连同到 $N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 的典范映射，是 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}$ 上协变模型结构中的同伦笛卡尔方形。

证明。 该方块是 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}$ 中的拉回。因此，根据引理 7.5（实际上只用到了其 1-范畴版本；见注 7.6），其增广是 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}$ 中的拉回方块。其每个顶点在 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}$ 上的协变模型结构中都是纤维化的，且水平态射都是左纤维化；因此，该方块确实是 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}$ 上协变模型结构中的同伦笛卡尔方块。□

推论 8.24。 图表中的两个方块

$$\begin{array}{ccccc} \int \mathrm{Sol}^{M}_{\mathrm{res}}(\mathcal{G}) & & \longrightarrow & & \\ & & \mathrm{BAUT}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}) & \longrightarrow & N\mathcal{C}艺术^{\mathrm{op}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow Ne_M \\ \int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{\phi} & (\mathcal{G}) & \longrightarrow & & \\ & & \mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}_{\phi}(\mathcal{G}) & \longrightarrow & Q \end{array}$$

在 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}$ 中既是笛卡尔的，也是同伦笛卡尔的。因此，外侧方形在 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}$ 中也同时是笛卡尔的和同伦笛卡尔的。

证明。 根据推论 8.23，左侧方形具有这两种性质。根据引理 7.21，右侧方形是笛卡尔的，也是同伦笛卡尔的。对于外侧方形，根据（同伦）拉回的粘合法则，结论成立。□

8.2. **模对称性与自同构的解**。 在上一节中，我们考察了光滑解族的左纤维化。现在，我们以同伦相干的方式，考虑对高阶几何结构的自同构与对称性作用取商后得到的分类 ∞-预层和解的模叠。特别地，我们证明了在我们的形式体系中，两个模 ∞-预叠何时等价的判据。

左纤维化

$$\textstyle\int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]} \longrightarrow \int \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}$$

由唯一的 ∞-函子分类

$$\mathbb{S}\mathrm{ol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]} \colon \textstyle\int \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]} \longrightarrow \mathcal{S}\,.$$

给定一个截面 $\mathcal{G} \in \mathrm{Fix}^{M}(\mathbb{R}^0)$，我们令

$$\mathbb{S}\mathrm{ol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}(\mathcal{G}) \colon \textstyle\int \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]} \longrightarrow \mathcal{S}$$

表示 $\mathbb{S}\mathrm{ol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}$ 到 $\int \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\ ]}{}_{\mathcal{G}}$ 的限制；这个 ∞-函子将该左纤维化分类

$$\textstyle\int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}(\mathcal{G}) \longrightarrow \int \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]}\,.$$

和之前一样，设 $\phi \colon Q \to \mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}$ 是左纤维化对象在 $N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 上的一个态射，其中 $Q \to N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 具有约化纤维。回顾定义 7.19 之前的讨论，这些数据给出了一个光滑的 ∞-群作用 $\Phi \colon \mathbb{\Gamma} \to \mathrm{Diff}^{\mathcal{G}}(M)$。令

$$\iota_{\phi} \colon \mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}_{\phi}(\mathcal{G}) \hookrightarrow \phi^{*} \textstyle\int \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]}$$

为典范包含，并将 $\pi_{\phi} \colon \mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}_{\phi}(\mathcal{G}) \to N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 记作典范投影态射，即按定义 7.19 的记号，$\pi_{\phi} := N\pi_M \circ \phi \circ \psi_{\phi}$。最后，我们令

$$\mathbb{S}\mathrm{ol}_{\phi}(\mathcal{G}) \colon \mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}_{\phi}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{S} \tag{8.25}$$

是将左纤维化 $\int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{\phi}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}_{\phi}(\mathcal{G})$ 分类的 ∞-函子。

注 8.26。 ∞-函子 (8.25) 编码了群对象 $\mathbb{S}\mathrm{ym}_{\Phi}(\mathcal{G})$ 在对象上的 ∞-topos $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中的右作用

$$(\sigma\mathcal{G})^{*}\mathbb{S}\mathrm{ol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}(\mathcal{G}) = (\tilde{\sigma}\mathcal{G})^{*}\mathbb{S}\mathrm{ol}^{M}(\mathcal{G}) \quad \in \mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})\,,$$

其中 $\sigma\mathcal{G}\colon N\mathcal{C}\mathrm{art} \to \int G^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}$ 和 $\check{\sigma}\mathcal{G}\colon N\mathcal{C}\mathrm{art} \to \int G^{M}$ 是注 6.6 中的态射。特别地，若 $\phi = Ne_M$ presents 表示平凡群的作用，则 ∞-函子 $\mathbb{S}\mathrm{ol}^{Ne_M}(\mathcal{G})\colon \mathrm{BAUT}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}) \to \mathcal{S}$ 编码了群对象 $\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G})$ 在对象 $(\check{\sigma}\mathcal{G})^*\mathbb{S}\mathrm{ol}^{M}(\mathcal{G}) \in \mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 上的光滑作用。 ◁

定义 8.27. 解的模空间预堆 $\mathbb{M}\mathrm{dl}_{\Phi}(\mathcal{G})$ 在 $\mathcal{G}$ 上模去 $\mathbb{S}\mathrm{ym}_{\Phi}(\mathcal{G})$的作用是沿左纤维化将 $\mathbb{S}\mathrm{ol}_{\Phi}(\mathcal{G})$ 作 ∞-范畴左 Kan 延拓

$$\pi_{\phi}\colon \mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}_{\phi}(\mathcal{G}) \longrightarrow N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}.$$

也就是说，我们定义 ∞-预层

$$\mathbb{M}\mathrm{dl}_{\Phi}(\mathcal{G}) := (\pi_{\phi})_{!}\,\mathbb{S}\mathrm{ol}_{\Phi}(\mathcal{G})\colon N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}.$$

沿 π_{ϕ} 的左 Kan 延拓，对每个 $c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$，将 $\mathbb{S}\mathrm{ol}^{M}(\mathcal{G})(c)$ 按 $\mathbb{S}\mathrm{ym}_{\Phi}(\mathcal{G})(c)$ 的作用取商，并且关于 c 是函子性的。

命题 8.28. ∞-预层 $\mathbb{M}\mathrm{dl}_{\Phi}(G)$ 对复合左纤维化进行分类

$$\int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{\phi}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}_{\phi}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\pi_{\phi}} N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}.$$

证明。 这直接由 [20, 命题 6.1.14]得出。 □

注记 8.29. 考虑以下两种极限情形：

(1) 对于 $Q = \mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G})$ 和 $\phi = 1_{\mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G})}$，所得的模空间预堆 $\mathbb{M}\mathrm{dl}_{\mathrm{id}}(\mathcal{G})$ 描述了 $\mathcal{G}$ 上的解的光滑族，模去 G 的对称性的光滑族。(2) 对于 $Q = N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$和 $\phi = Ne_M$，所得的模空间预堆 $\mathbb{M}\mathrm{dl}^{Ne_M}(\mathcal{G})$ 描述了 $\mathcal{G}$ 上的解的光滑族，模去 $\mathcal{G}$ 的自同构的光滑族（即覆盖 M上的恒等微分同胚的那些对称性）。 ∞-函子

$$(\psi_{Ne_M})_{!}\mathbb{S}\mathrm{ol}^{Ne_M}(\mathcal{G})\colon \mathrm{BAUT}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{S}$$

将左纤维化 $\int \mathrm{Sol}^{M}_{\mathrm{res}}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathrm{BAUT}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G})$ 分类。 ◁

经过这些准备以及前几节中的构造，我们现在可以陈述并证明本节的主定理：再次考虑命题 8.13 和定理 8.20 中的情形：设 $p\colon \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}_{0}$and $q\colon \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}_{0} \to \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}_{1}$ 是 $B\mathcal{D}$ 上投射纤维化单纯预层之间的射影纤维化。假设 q 是 0-连通的（见定义 8.9）。此外，假设 $\mathcal{G}_0 \in \mathrm{Fix}^{M}_{0}(\mathbb{R}^0)$ 是一个截面，并令 $\mathcal{G}_1 := q^{\mathbb{R}^0}(\mathcal{G}_0) \in \mathrm{Fix}^{M}_{1}(\mathbb{R}^0)$。

定理 8.30. </style}在上述情形下，存在一个 $(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中的典范等价

$$\mathbb{M}\mathrm{dl}_{\Phi}(\mathcal{G}_0) \simeq \mathbb{M}\mathrm{dl}_{\Phi}(\mathcal{G}_1).$$

我们可以将这两个模空间 ∞-预叠 $\mathbb{M}\mathrm{dl}_{\Phi}(\mathcal{G}_0)$ 和 $\mathbb{M}\mathrm{dl}_{\Phi}(\mathcal{G}_1)$ 视为描述了 M 上几何数据的光滑族，在这两种情形中，我们都将部分数据固定下来。不过，两种情形中固定下来的部分不同，因此变化的数据也不同。一般而言，这会导致不同的模问题及不同的模叠。于是，对定理 8.30 的一种解读是：在这种情形下，变化数据（包括其态射和高阶态射）的改变，会由固定数据的光滑高阶对称群同时发生的改变来补偿，从而得到等价的同伦商。具体示例和应用请参见第 14 节和第 16 节。

定理 8.30 的证明. </style}根据命题 8.28，-函子dl(G_i) 将左纤维化分类为

$$\int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}_i]}_{\phi}(\mathcal{G}_i) \longrightarrow N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}},$$

对于 $i = 0,1$。由于 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 是 ∞-范畴局部化 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}$ at（其协变弱等价为 [20, Thm. 7.8.9], ）的结果，定理 8.20 中协变弱等价的典范之字形链诱导出一个典范等价

$$\mathbb{M}\mathrm{dl}_{\Phi}(\mathcal{G}_0) \simeq \mathbb{M}\mathrm{dl}_{\Phi}(\mathcal{G}_1)$$

在 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中，正如所声称的那样。 □

8.3. 预层在 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 上的底层空间。 本节将介绍 ∞-预层 $\mathbb{F} \in \mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 的底层空间 的一些背景（它也称为光滑奇异复形 [14], 、协调空间 [8], 或形状 [67] ）。此外，它与主∞-丛以及 ∞-topos $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$中的 ∞-范畴群扩张具有良好的相容性，下面将对此作回顾。由此，我们可以推导出任意定义在M上的高阶几何结构$\mathcal{G}$ 的光滑高阶对称群和自同构群的同伦类型的重要信息，以及定义在$\mathcal{G}$上的高阶几何数据的模空间 ∞-预叠。

设 $\mathcal{X}$ 是一个 ∞-topos， $\mathbb{H}$ 是 $\mathcal{X}$ 中的一个群对象（背景介绍例如参见 [57,60] ）。 $\mathbb{H}$- 主 ∞-丛 在 $\mathcal{X}$ 中是指一个有效满态射 $\mathbb{P} \to \mathbb{X}$ （属于 $\mathcal{X}$ ），并附带一个 $\mathbb{H}$-作用 $\mathbb{P}/\!/\mathbb{H}$ 于$\mathbb{P}$ ，使得从作用群胚到 $\mathbb{P} \to \mathbb{X}$ 的切赫神经的典范态射 $\mathbb{P}/\!/\mathbb{H} \to \check{C}(\mathbb{P} \to \mathbb{X})$是 $\mathcal{X}$ 中的单纯对象之间的等价（这等价于 [60] 中由 [13, 定理 3.32]给出的原始定义）。这里我们主要关注 ∞-topoi $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$和 $\mathcal{S}$。

我们也回顾底层空间 ∞-函子，主要遵循 [13,14]: 令

$$\Delta_e : \mathbb{\Delta} \to \mathcal{C}\mathrm{art}, \quad [k] \mapsto \Delta^k_e = \left\{ x \in \mathbb{R}^{k+1} \,\middle|\, \textstyle\sum_{i=0}^k x^i = 1 \right\}$$

为扩展单形函子 （ Δ^k_e 之间的映射定义方式与拓扑标准单形 $|\Delta^k|$之间的映射相同）。那么，S 是 ∞-范畴的函子

$$S : \mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art}) \to \mathcal{S}, \qquad S(\mathbb{F}) = \operatorname*{colim}_{\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}}} (N\Delta_e)^* \mathbb{F}. \tag{8.31}$$

它是一个保有限积的左伴随，因此将$\mathcal{P}$中的主 ∞-丛（$N\mathcal{C}\mathrm{art}$）映射为 $\mathcal{S}$ [13, Thm. 3.48] 中的主 ∞-丛。进一步而言，它将 $\mathcal{P}$中的群对象扩张（$N\mathcal{C}\mathrm{art}$）映射为 $\mathcal{S}$ [13, Cor. 3.52] 中的群对象扩张。

函子S 由以下左 Quillen 函子S_Q表示：令 $\delta : \mathbb{\Delta} \to \mathbb{\Delta} \times \mathbb{\Delta}$ 表示对角线函子，并回顾记号 $\mathcal{H} = \mathrm{Fun}(\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta)$（定义 4.1）。那么，函子

$$S_Q : \mathcal{H} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta, \qquad F \mapsto \delta^*(\Delta_e^* F), \tag{8.32}$$

呈现了 ∞-函子 $S: \mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art}) \to \mathcal{S}$ [13,14]。

定义 8.33. 对于单纯预层 $F: \mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$，我们称 $S_Q(F) \in \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 为 底层空间 。稍微滥用一下术语，对于一个 ∞-预层 $\mathbb{F}: N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}$，我们称 $S(\mathbb{F}) \in \mathcal{S}$为其底层空间 。

我们考察S的一些性质：

定义 8.34. 当存在 $\mathcal{H}$ 中形如以下形式的交换图时，两个态射 $f_0, f_1 : F \to G$ in $\mathcal{H}$ 称为光滑同伦

$$\begin{array}{ccc} F \times \Delta^{\{0\}}_e & & \\ \downarrow & \searrow^{f_0} & \\ F \times \Delta^1_e & \xrightarrow{h} & G \\ \uparrow & \nearrow_{f_1} & \\ F \times \Delta^{\{1\}}_e & & \end{array}$$

函子 S_Q 将 $\mathcal{H}$ 中光滑同伦的态射映射为 $\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ [14, 中单纯同伦的态射（引理 3.10]）。对于流形 N, 令 $N \in \mathcal{H}$ 为由 $N(c) = \mathcal{M}\mathrm{fd}(c, N)$ 定义的对象。预层 $\mathbb{R} \in \mathcal{H}$ 甚至自然地是一个环预层。

引理 8.35. 设 $V \in \mathcal{H}$ 是一个单纯预层，同时也是 $\mathbb{R} \in \mathcal{H}$上的模。也就是说，对于每个$c \in \mathcal{C}$对象，单纯集合 $V(c)$ 是一个定义在 $\mathbb{R}(c) = \mathcal{M}\mathrm{fd}(c, \mathbb{R})$上的单纯模，且此模结构与 V 和 $\mathbb{R}$上的预层结构相容。于是，$S_Q(V) \in \mathcal{S}$集$_\Delta$ 是弱可缩的。

证明。 令 c: $\mathcal{S}$集$_\Delta \to \mathcal{H}$ 表示常值预层函子。考虑以下单纯预层之间的态射

$$p : V \rightleftarrows \mathrm{c}\,\Delta^0 = \{0\} : 0.$$

复合 $0\circ p$ 在 $\mathrm{c}\,\Delta^0$ 上是恒等态射。因此，只需给出 $\mathcal{H}$ 中$p\circ 0$ 与 1_V 之间的光滑同伦。这样的光滑同伦由映射

$$h\colon V \times \Delta^1_e \longmapsto V\,, \qquad \big(v \in V(c),\, f \in \Delta^1_e(c)\big) \longmapsto (\mathrm{pr}_0 \circ f)\cdot v \in V(c)\,,$$

其中 pr0: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是到第一个坐标的投影。 □

下面的陈述完整阐明了底层空间函子 S 的同伦论意义。该结果曾在 [13] 中以间接方式得到证明（参见该文献第 2.2 节最后一段；关于模型范畴的处理，另见 [14, 第 4 节）。直接证明最早见于 [63, 命题 12；另请参见著作 [1]，其中给出了另一种 ∞- 范畴论处理。为完整起见，这里给出一个简短证明。

命题 8.36。 扩展单形函子 $\Delta_e\colon \mathbb{\Delta} \to \mathcal{C}\mathrm{art}$ 是同伦余终的，即其脉络是单纯集合之间的共尾态射。

证明。 根据 [20, 推论 4.431]，只需证明切片 ∞-范畴

$$(N\Delta_e)_{/c} = N\mathbb{\Delta} \underset{N\mathcal{C}\mathrm{art}}{\times} N\mathcal{C}\mathrm{art}_{/c} \cong N\big(\mathbb{\Delta} \underset{\mathcal{C}\mathrm{art}}{\times} \mathcal{C}\mathrm{art}_{/c}\big)$$

对每个 $c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$，都是弱可缩单纯集合。由于每个对象 $c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$ 都与某个 $\mathbb{R}^n$ 同构，其中 $n \in \mathbb{N}_0$，我们不妨设 $c = \mathbb{R}^n$。注意，存在一个典范的弱同伦等价

$$(N\Delta_e)_{/\mathbb{R}^n} \simeq \mathrm{hocolim}\big(\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}\mathrm{art}\,,\ [k] \longmapsto \mathcal{C}\mathrm{art}(\Delta^k_e, \mathbb{R}^n)\big)\,,$$

这里可以使用双边 bar 构造来构造同伦余极限的模型（例如参见 [65, 推论 5.13]）。特别地，这是 $\mathcal{S}$ et$_\Delta$ 中一个单纯图表的同伦余极限，也就是说，是一个双单纯集合。Bousfield-Kan 映射给出另一个弱同伦等价 [48,定义 18.7.1、18.7.3，推论 18.77]，将这个同伦余极限映到该双单纯集合的对角线。也就是说，我们有一个单纯集合之间的弱同伦等价

$$N(\Delta_{e/\mathbb{R}^n}) \xrightarrow{\sim} S_Q\underline{\mathbb{R}^n}\,.$$

为完成证明，我们注意到 $h_{\mathbb{R}^n}$ 是一个 $\mathbb{R}$-模，并应用引理 8.35。 □

推论 8.37。 [14, 定理 4。14] 存在一个典范的自然弱等价

$$S_Q \simeq \underset{\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}{\mathrm{hocolim}}$$

函子 $\mathcal{H} = \mathrm{Fun}(\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta)$。因此，左 *Quillen* 函子 S^Q 给出 ∞-函子 colim: $\mathcal{F}\mathrm{un}(N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$。

结合 S: $\mathcal{F}\mathrm{un}(N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}) \to \mathcal{S}$ 保持群对象扩张这一事实 [13,定理 3.48] 与定理 7.23，可得：

定理 8.38。 对于每个光滑的 ∞-群作用 $\Phi\colon \mathbb{\Gamma} \to \mathrm{Diff}^{\mathcal{G}}(M)$，在 $\mathcal{S}$ 中存在一个群对象的扩张，

$$S\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G}) \longrightarrow S\mathbb{S}\mathrm{ym}_\Phi(\mathcal{G}) \longrightarrow S\mathbb{\Gamma}\,.$$

因此，存在一个关于同伦群的长正合列

$$\cdots \longrightarrow \pi_r\big(S\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G})\big) \longrightarrow \pi_r\big(S\mathbb{S}\mathrm{ym}_\Phi(\mathcal{G})\big) \longrightarrow \pi_r(S\mathbb{\Gamma}) \longrightarrow$$
$$\pi_{r-1}\big(S\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G})\big) \longrightarrow \pi_{r-1}\big(S\mathbb{S}\mathrm{ym}_\Phi(\mathcal{G})\big) \longrightarrow \pi_{r-1}(S\mathbb{\Gamma}) \longrightarrow \cdots$$

8.4. 解堆的同伦类型。 最后，为结束本节，我们运用迄今建立的形式体系，提取有关模空间 ∞-预堆底层空间的信息。作为一个重要的特例——当构型和场方程具有线性结构时便会出现这一情形——我们考虑单纯解子预层的底层空间可缩的情况。然后，我们利用底空间函子与主 ∞-丛之间的相互作用，为固定的高阶几何结构 $\mathcal{G}$ 上的解的模空间 ∞-预堆的同伦群构造一个长正合列（定理 8.44）。

8.4.1. 可缩的解空间。设 $\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}\colon \mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}$ 是定义在 $\mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}\colon \mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}$上的一个构型预层，并设 $\mathsf{G} \in \mathsf{e}^{*}_{M}\mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}$ 是一个截面。设 $\phi\colon \mathsf{Q} \to \mathrm{B}\mathcal{D}[\mathsf{G}]^{\mathrm{op}}$ 是 $\mathrm{N}\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$上的左纤维化之间的一个态射，其中 $\mathsf{Q} \to \mathrm{N}\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 具有约化纤维（另见定义 7.19）。令$\Phi\colon \mathbb{\Gamma} \to \mathrm{Diff}^{\mathcal{G}}(M)$表示这些数据在 $\mathcal{P}(\mathrm{N}\mathcal{C}\mathrm{art})$中呈现的群作用。回顾一下，左纤维化 $\mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}_{\phi}(\mathsf{G}) \longrightarrow \mathrm{N}\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 具有典范截面 $\mathsf{e}_{\phi}\colon \mathrm{N}\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}_{\phi}(\mathsf{G})$。

对于任意选取的解预层 $\mathrm{Sol}^{\mathcal{D}} \subset \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}$， ∞-函子 $\mathbb{S}\mathrm{ol}_{\Phi}(\mathcal{G})\colon \mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}_{\phi}(\mathcal{G}) \to \mathcal{S}$ en- 编码了 $\mathbb{S}\mathrm{ym}_{\Phi}(\mathcal{G})$ 在 $(\sigma\mathcal{G})^{*}\mathbb{S}\mathrm{ol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}(\mathcal{G})$ 上的右作用（参见注 8.26）。我们可以将∞-预层 $\mathbb{M}\mathrm{dl}_{\phi}(\mathcal{G})$描述为这一作用的 ∞-范畴商。

等价地，态射

$$\textstyle\int \mathrm{Sol}_{\phi}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}_{\phi}(\mathcal{G})$$

在 $N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 上的左纤维化之间描述了一个典范态射

$$\mathbb{M}\mathrm{dl}_{\phi}(\mathcal{G}) = (\pi_{\phi})_{!}\mathbb{S}\mathrm{ol}_{\phi}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathrm{B}\mathbb{S}\mathrm{ym}^{\mathrm{rev}}_{\Phi}(\mathcal{G})$$

在 $\mathcal{P}(\mathrm{N}\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中。此外，该态射在典范截面 $\sigma\mathsf{G}\colon * \to \mathrm{B}\mathbb{S}\mathrm{ym}^{\mathrm{rev}}_{\Phi}(\mathsf{G})$ 上的纤维由 $\mathcal{P}(\mathrm{N}\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中注 6.6 所述的态射表示，即 $(\sigma\mathsf{G})^{*}\mathbb{S}\mathrm{ol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}(\mathsf{G})$。由于 $\mathrm{B}\mathbb{S}\mathrm{ym}^{\mathrm{rev}}_{\Phi}(\mathsf{G})$ 是 $\mathcal{P}(\mathrm{N}\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中 $\mathbb{S}\mathrm{ym}(\mathsf{G})$ 右作用的分类对象，这便在 $\mathcal{P}(\mathrm{N}\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中导出一个单纯对象 $(\sigma\mathsf{G})^{*}\mathbb{S}\mathrm{ol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}(\mathsf{G})/\!/\mathbb{S}\mathrm{ym}_{\Phi}(\mathsf{G})$，它编码了前述 $\mathbb{S}\mathrm{ym}_{\Phi}(\mathsf{G})$ 在 $(\sigma\mathsf{G})^{*}\mathbb{S}\mathrm{ol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}(\mathsf{G})$ 上的右作用（参见 [60, Thm. 3.17]）。特别地，根据同一定理，这赋予典范态射 $(\sigma\mathsf{G})^{*}\mathbb{S}\mathrm{ol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}(\mathsf{G}) \to \mathbb{M}\mathrm{dl}_{\Phi}(\mathsf{G})$ 一个 $\mathcal{P}(\mathrm{N}\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中以 $\mathbb{S}\mathrm{ym}_{\Phi}(\mathsf{G})$ 为结构群的主 ∞-丛结构。因此，我们有一个典范等价

$$\mathbb{M}\mathrm{dl}_{\phi}(\mathcal{G}) \simeq \big|(\sigma\mathcal{G})^{*}\mathbb{S}\mathrm{ol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}(\mathcal{G})/\!/\mathbb{S}\mathrm{ym}_{\phi}(\mathcal{G})\big|\,,$$

在 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{ar}\ \mathrm{t})$ 中，其中 $|-|$ 表示单纯形图的余极限；更多背景信息见 [13,60] .

命题 8.39。 每当底层空间

$$S\big((\sigma\mathcal{G})^{*}\mathbb{S}\mathrm{ol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}(\mathcal{G})\big) = S\big((\tilde{\sigma}\mathcal{G})^{*}\mathbb{S}\mathrm{ol}^{M}(\mathcal{G})\big) \quad \in \mathcal{S}$$

等价于 Δ^{0} 时，我们便有典范等价

$$S\big(\mathbb{M}\mathrm{dl}_{\Phi}(\mathcal{G})\big) \simeq S\big(\mathrm{B}\mathbb{S}\mathrm{ym}_{\Phi}(\mathcal{G})\big)$$

证明。 由于 S 保持主 ∞-丛、余极限和有限积，并利用我们关于解的 ∞-预层的假设，我们得到 $\mathcal{S}$ 中如下形式的等价

$$\begin{aligned} S\big(\mathbb{M}\mathrm{dl}_{\Phi}(\mathcal{G})\big) &\simeq \big|\big(S\big((\sigma\mathcal{G})^{*}\mathbb{S}\mathrm{ol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}(\mathcal{G})\big)\big)/\!/S\big(\mathbb{S}\mathrm{ym}_{\Phi}(\mathcal{G})\big)\big| \\ &\simeq \big|\Delta^{0}/\!/S\big(\mathbb{S}\mathrm{ym}_{\Phi}(\mathcal{G})\big)\big| \\ &\simeq S\,\mathrm{B}\mathbb{S}\mathrm{ym}_{\Phi}(\mathcal{G})\,. \end{aligned}$$

这就证明了所述结论。 □

再次考虑命题 8.13 和定理 8.20 中的情形：设 $p\colon \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}_{0}$和$q\colon \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}_{0} \to \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}_{1}$是 $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 上投射纤维化单纯预层之间的射影纤维化，其中 $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 是 0-连通的。此外，假设 $\mathcal{G}_{0} \in \mathrm{Fix}^{M}_{0}(\mathbb{R}^{0})$ 是一个截面，并令 $\mathcal{G}_{1} := q^{\mathbb{R}^{0}}(\mathcal{G}_{0}) \in \mathrm{Fix}^{M}_{1}(\mathbb{R}^{0})$。

推论 8.40。 在上述情形中，进一步假设 $\mathbb{S}\mathrm{ol}^M(G_i)$ 的底层空间是可缩的，对 $i = 0,1$。那么，存在一个典范等价

$$S\big(\mathbb{S}\mathrm{ym}_\Phi(\mathcal{G}_0)\big) \simeq S\big(\mathbb{S}\mathrm{ym}_\Phi(\mathcal{G}_1)\big)$$

$\mathcal{S}$ 中群对象的

注意，我们得到的并不是 $\mathcal{P}$（$N\mathcal{C}\mathrm{art}$）中群对象的等价，而仅仅是在底层 $\mathcal{S}$ 中群对象这一层级上的等价。

证明。 结合定理 8.30 和命题 8.39，我们得到一串典范的空间等价：

$$S\big(\mathrm{B}\mathbb{S}\mathrm{ym}_\Phi(\mathcal{G}_0)\big) \simeq S\big(\mathbb{M}\mathrm{dl}_\Phi(\mathcal{G}_0)\big) \simeq S\big(\mathbb{M}\mathrm{dl}_\Phi(\mathcal{G}_1)\big) \simeq S\big(\mathrm{B}\mathbb{S}\mathrm{ym}_\Phi(\mathcal{G}_1)\big)\,.$$

由于S 保有限积和几何实现（事实上，保所有余极限），因此存在一个典范等价：

$$S\mathrm{B}\mathbb{H} \simeq \mathrm{B}S\mathbb{H}\,,$$

对每个 $\mathbb{H} \in \mathrm{Grp}(\mathcal{P}$（$N\mathcal{C}\mathrm{art}$）中的群对象均成立。结论现在由注 7.10 中的等价得出。□

8.4.2. 解堆的正合列。

命题 8.41. 在 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中存在一个典范拉回方块：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}\mathrm{dl}^{Ne_M}(\mathcal{G}) & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{M}\mathrm{dl}_\Phi(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathrm{B}\mathbb{\Gamma} \end{array}$$

证明。 这可由推论 8.24 得出：在 $N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 上的左纤维化层级上，我们在此关注的、关于 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 的 ∞-预层图表由推论 8.24 中图表的外层方块给出。我们在那里证明了，这个外层方块在 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}$ 中是同伦笛卡尔的。□

定理 8.42. 关于 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 的 ∞-预层态射

$$\mathbb{M}\mathrm{dl}_{Ne_M}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{M}\mathrm{dl}_\Phi(\mathcal{G})$$

规范地带有一个 $\mathbb{\Gamma}$-主 ∞-丛的结构，该丛位于 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中。

证明。 这可由命题 8.41 与 [60, 命题 3.13] 结合得出（另见 [13, 命题 3.33 和 3.41]）。□

将 (8.31) 中的函子 S 应用于光滑的 ∞-群$\mathbb{\Gamma}$，即可在 $\mathcal{S}$ 中得到一个群对象。特别地，对于 $Q = \mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]$, ，所得的群规范等价于微分同胚群的子群 $\mathrm{Diff}_{\mathcal{G}}(M) \subset \mathrm{Diff}(M)$，并赋予通常的拓扑学；这可由 [62, 命题 3.15 、 3.16] 得出（该处的结果针对整个群 $\mathrm{Diff}(M)$ 证明，但子群 $\mathrm{Diff}_{\mathcal{G}}(M) \subset \mathrm{Diff}(M)$ 由 $\mathrm{Diff}(M)$ 的若干连通分支的不交并构成，因此该结果可直接推广）。由此，我们可以得出有关模空间 ∞-(预)堆 $\mathbb{M}\mathrm{dl}_\Phi(\mathcal{G})$ 所对应空间的同伦类型的重要信息：

推论 8.43。 底层空间的态射

$$S\big(\mathbb{M}\mathrm{dl}_{Ne_M}(\mathcal{G})\big) \longrightarrow S\big(\mathbb{M}\mathrm{dl}_\Phi(\mathcal{G})\big)$$

典型地 带有一个主 ∞-丛的结构，位于 $\mathcal{S}$ ，其结构群为 $S\mathbb{\Gamma}$。特别是 ，其同伦纤维为 $S\mathbb{\Gamma}$。

推论 8.44. 存在一个同伦群长正合列

$$\cdots \longrightarrow \pi_r S(\mathbb{\Gamma}) \longrightarrow \pi_r S\big(\mathbb{M}\mathrm{dl}_{Ne_M}(\mathcal{G})\big) \longrightarrow \pi_r S\big(\mathbb{M}\mathrm{dl}_{\Phi}(\mathcal{G})\big) \hookrightarrow \pi_{r-1} S(\mathbb{\Gamma}) \longrightarrow \pi_{r-1} S\big(\mathbb{M}\mathrm{dl}_{Ne_M}(\mathcal{G})\big) \longrightarrow \pi_{r-1} S\big(\mathbb{M}\mathrm{dl}_{\Phi}(\mathcal{G})\big) \longrightarrow \cdots$$

9. 模空间 ∞-预堆的下降性质

本节中，我们考察一个重要的特殊情形：$\mathbb{\Gamma}$（作用于M的高阶光滑群）由 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 上的一个群层 给出。我们证明，在此情形下，固定高阶几何结构 $\mathcal{G}$ 上解的模空间 ∞-预堆，模去提升 $\mathbb{\Gamma}$ 中元素作用的对称性后，相对于笛卡尔空间的良好开覆盖满足下降性质；也就是说，我们的模空间 ∞-预堆甚至是 ∞- 堆。对于几何应用，最重要的情形是 H 为一个在底流形 M 上光滑作用的李群。

令 $H\colon\ \mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Grp}$ 为一个群预层，令 $\mathrm{B}H\colon\ \mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{G}\mathrm{pd}$ 为其解环，并令 $\int \mathrm{B}H$ 记 $\mathrm{B}H$ 的 Grothendieck 构造。我们将其关联的左纤维化记为

$$Q_H := N\textstyle\int \mathrm{B}H \longrightarrow N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}.$$

H 在M 上的光滑（左）作用是一个态射

$$\phi'\colon H \to \mathrm{Diff}(M)$$

在 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 上的群预层。我们得到一个态射

$$\phi := N\textstyle\int \mathrm{B}\phi'\colon Q_H \longrightarrow \mathrm{B}\mathcal{D}$$

在 $N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 上的左纤维化。

例 9.1. 对于$H = \{e\}$ 这个平凡群，我们得到 $\mathrm{B}\{e\} = \mathcal{C}\mathrm{art}$；对于$H$ =Diff(M)，我们有$\int \mathrm{B}H = \mathrm{B}\mathcal{D}$。◁

例 9.2. 设$G^{\mathcal{D}}\colon \mathrm{B}\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 是 $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 上一个单纯纤维化的单纯预层，且$\mathcal{G} \in G^{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^0)$ 是一个截面。设 $H = \mathrm{Diff}_{\mathcal{G}}(M) \subset \mathrm{Diff}(M)$ 是保持$\mathcal{G}$等价类的微分同胚所构成的光滑子群。在此情形下，H 到 $\mathrm{Diff}(M)$ 的包含诱导出H 在M上的典范作用。◁

对于 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 上的任意群预层 H，我们在 BH 上得到一个格罗滕迪克覆盖 τ_H：具体而言，设 $\{(\mathrm{f}_i, \varphi_i)\colon \mathrm{c}_i \to \mathrm{c}\}_{i\in\Lambda}$ 是 $\int \mathrm{B}\mathrm{H}$ 中一族余域为 c 的态射。也就是说，$\mathrm{f}_i \in \mathcal{C}\mathrm{art}(\mathrm{c}_i, \mathrm{c})$ 是 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 中的一个态射，并且 $\varphi_i \in \mathrm{H}(\mathrm{c}_i)$，对每个 $\mathrm{i} \in \Lambda$ 均成立。当且仅当该族在典范函子 $\int \mathrm{B}\mathrm{H} \to \mathcal{C}\mathrm{art}$ 下的像是 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 中的一个覆盖时，该族才是相对于 τ_H 的 BH 中 c 的覆盖；也就是说，当且仅当族 $\{\mathrm{f}_i\colon \mathrm{c}_i \to \mathrm{c}\}_{i\in\lambda}$ 是 c 的良好开覆盖时，情况才成立。对于 $\mathrm{H} = \mathrm{Diff(M)}$，我们将 $\tau := \tau_{\mathrm{Diff}(M)}$ 简记为 $\tau := \tau_{\mathrm{Diff}(M)}$。

备注 9.3. 我们可以将 τ-覆盖 $\{(\iota_i, \varphi_i)\colon \mathrm{c}_i \to \mathrm{c}\}_{i\in\Lambda}$ in $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 视为乘积流形 $\mathrm{c}\times\mathrm{M}$ 的一种特殊开覆盖：族 $\{\iota_i\colon \mathrm{c}_i \to \mathrm{c}\}_{i\in\Lambda}$ 在 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 中为 c 提供了一个良好开覆盖。族 $\{\varphi\}_{i\in\Lambda}$ 随后将其扩展为对 $\mathrm{c}\times\mathrm{M}$ 的覆盖，其覆盖片的形式为 $\mathrm{c}_i \times\mathrm{M}$，并沿光滑映射 $\iota_i \circ \varphi_i$ 嵌入 $\mathrm{c} \times \mathrm{M}$（回顾 (3.12) 中的记号）；它们可以描述为纤维为 M 的丛的映射（覆盖 ι_i），且在纤维上限制为微分同胚。/

为简洁起见，我们令

$$\mathcal{K}_H := \mathrm{Fun}(\textstyle\int \mathrm{B}H^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta) \quad \text{and} \quad \mathcal{K} := \mathcal{K}_{\mathrm{Diff}(M)} = \mathrm{Fun}(\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta).$$

引理 9.4. 设 $\phi'\colon H \to \mathrm{Diff}(M)$ 是 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 上群预层的态射。考虑一个余跨度

$$c_0 \xrightarrow{(\iota_0,\psi_0)} c \xleftarrow{(\iota_1,\psi_1)} c_1$$

在 $\mathrm{B}H$ 中，使得 $\iota_i \in \mathcal{C}\mathrm{art}(c_i, c)$ 是开嵌入，对 $i = 0,1$ 而言，并假设拉回 $c_0 \times_c c_1$ 在 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 中存在。那么，

(1) 拉回 $c_0 \times_c c_1$ *in* $\int \mathrm{B}H$ 存在，且 *(2)* 它在函子 $\int \mathrm{B}\phi'$:
$\int \mathrm{B}H \to \mathrm{B}\mathcal{D}$ 下保持不变。

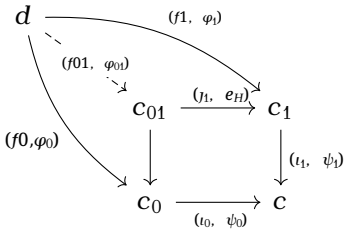
证明。 设 c_{01} 是表示拉回 $c_0 \times_c c_1$ in $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 的对象。因此我们有一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} c_{01} & \xrightarrow{\jmath_1} & c_1 \\ {\scriptstyle \jmath_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota_1} \\ c_0 & \xrightarrow[\iota_0]{} & c \end{array}$$

in $\mathcal{C}\mathrm{art}$。我们将其提升为 $\int \mathrm{B}H$ 中的一个方块:

$$\begin{array}{ccc} c_{01} & \xrightarrow{(\jmath_1, e_H)} & c_1 \\ {\scriptstyle (\jmath_0, (\jmath_0^*\psi_0)^{-1}\cdot \jmath_1^*\psi_1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\iota_1, \psi_1)} \\ c_0 & \xrightarrow[(\iota_0, \psi_0)]{} & c \end{array} \tag{9.5}$$

我们断言这是一个拉回方块。为验证这一点，我们将上述交换方块扩充为一个任意交换图，如实线箭头所示



在 $\int \mathrm{B}H$ 中。特别地，交换性蕴含恒等态射

$$f_1^*\psi_1 \cdot \varphi_1 = f_0^*\psi_0 \cdot \varphi_0$$

在群 $H(d)$ 中。为补全虚线箭头，首先注意到光滑映射 $f_{01}\colon d \to c_{01}$ 存在且唯一确定，因为我们将 c_{01} 构造为 $\mathcal{C}$中的拉回。其次，上方三角形的交换性迫使我们作出 $\varphi_{01} := \varphi_1$这一唯一 选择。根据上述 H 在 d 上的截面恒等式，左侧三角形也交换，因此我们得到 (9.5) 确实是 $\int \mathrm{B}H$ 中的拉回方块。

由于这一构造不依赖于群预层 H 的选择，并且函子$\int \mathrm{B}\phi'$ 在笛卡尔空间的底层态射层级上充当恒等函子，因此可知$\int \mathrm{B}\phi'$ 保持(9.5)型的拉回。□

注 9.6。 τ_H-覆盖的切赫神经中出现的每个拉回都属于引理 9.4 ◁中所考察的形式

引理 9.7。 对于 $\phi'\colon\ H \to \mathrm{Diff}(M)$ 上的群预层的每个态射，在 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 上都存在一个 *Quillen* 伴随

$$(\mathrm{B}\phi')_! : L_{\tau_H}\mathcal{K}_H \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\bot}} L_\tau \mathcal{K} : (\mathrm{B}\phi')^* .$$

它分别对应于关于 τ_H 和 τ的覆盖的 *Čech* 神经处的投射模型结构的左 *Bousfield* 局部化。

证明。 我们很容易观察到，这个伴随

$$(\mathrm{B}\phi')_! : \mathcal{K}_H \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\bot}} \mathcal{K} : (\mathrm{B}\phi')^*$$

相对于射影模型结构是一个 Quillen 伴随。根据 [48, 命题 3.3。18]只需证明 $(\mathrm{B}\phi')_!$ 将 τ_H-覆盖的切赫神经映射为 τ-覆盖的切赫神经。这由引理 9.4 和备注 9.6 得出。 □

命题 9.8. 设 $G\colon \mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}{}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 在 $\mathcal{H}^{\mathrm{loc}}_{\mathrm{fam}}$ 中是纤维化的，并考虑由其关联得到的函子

$$\check{C}^{\mathcal{D}*}G := \underline{\mathcal{H}}_{\mathrm{fam}}\big(\check{\mathrm{C}}(-), G\big)\colon (\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$$

来自构造 *4.4*。其（同伦）左 *Kan* 延拓

$$G^{\mathcal{D}} := \mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}}\check{C}^{\mathcal{D}*}G\colon \mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$$

在 $L_\tau\mathcal{K}$ 中是纤维化的；$L_\tau\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{K}$ 上投射模型结构在τ-覆盖处的左 *Bousfield* 局部化。

b证明。 证明思路如下：取 $c \in \mathrm{B}\mathcal{D}$，并设 $\mathcal{U} = \{(f_i, \psi_i)\colon c_i \to c\}_{i\in\Lambda}$ 是 $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 中的一个τ-覆盖。我们需要证明典范态射

$$(\mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}}\check{C}^{\mathcal{D}*}G)(c) \longrightarrow \mathrm{holim}_{[l]\in\Delta}\underline{\mathcal{K}}(\check{\mathrm{C}}_l\widehat{\mathcal{U}}, \mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}}\check{C}^{\mathcal{D}*}G)$$

b 是 $\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 中的弱同伦等价。回顾注记 9.3，我们可以将 $\mathcal{U}$ 理解为通过纤维为 M 的丛映射对 $c \times M$ 的覆盖。随后，我们再用一个 τ_{fam}-覆盖解析每个片 $c_{i_0\cdots i_l} \times M$，其中使用了 M 的良好开覆盖。这样便可以运用命题 4.6 中的论证，控制左 Kan 延拓。

因此，令 $\{d_a \to M\}_{a\in\Xi}$ 为 M 的良好开覆盖。置

$$\hat{c}_{ia} := (f_i \wr \psi_i)^{-1}\big(f_i(c_i) \times d_a\big) \subset c_i \times M\,.$$

流形 $\hat{c}_{ia}$ 带有一个典范光滑映射 $\hat{c}_{ia} \to c_i$，从而使其成为 $\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ 中的一个对象（它可以描述为覆盖在 c_i 上、纤维为 d_a，并由微分同胚的光滑族 ψ_i扭曲得到的丛）。此外，还有流形之间的典范微分同胚

$$\hat{c}_{ia} \underset{c\times M}{\times} \hat{c}_{jb} \cong (c_i \underset{M}{\times} c_j) \times (d_a \cap d_b) =: \hat{c}_{ij,ab}$$

（其中拉回是在 $\mathcal{M}\mathrm{fd}$ 中形成的），迭代拉回也同样如此。因此，我们得到一个对象

$$\mathcal{V} := \{(\hat{c}_{ia} \to c_i)\}_{i\in\Lambda, a\in\Xi} \in \mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}_{|c}\,,$$

其中 GC ov$^{\mathcal{D}}_{|c}$ 是函子 $\bar{\omega}^{\mathcal{D}}\colon \mathrm{GCov}^{\mathcal{D}} \to \mathrm{B}\mathcal{D}$ at $c \in \mathrm{B}\mathcal{D}$ 的纤维。我们还得到一个对象

$$\mathcal{V}_{i_0\cdots i_l} := \{(\hat{c}_{i_0\cdots i_l,a} \to c_{i_0\cdots i_l})\}_{a\in\Xi} \in \mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}_{|c_{i_0\cdots i_l}}\,,$$

对于每个$l \in \mathbb{N}_0$ 以及每个固定的$i_0, \ldots, i_l \in \Lambda$。

根据命题 4.6 中的相同论证，典范态射

$$\widetilde{G}(\mathcal{V}) = \underline{\mathcal{H}}_{\mathrm{fam}}(\check{\mathrm{C}}\mathcal{V}, G) \longrightarrow (\mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}}\check{C}^{\mathcal{D}*}G)(c)$$

是弱同伦等价。类似地，对每个 $l \in \mathbb{N}_0$和 $i_0, \ldots, i_l \in \Lambda$，典范态射

$$\underline{\mathcal{H}}_{\mathrm{fam}}(\check{\mathrm{C}}\mathcal{V}_{i_0\cdots i_l}, G) \longrightarrow (\mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}}\check{C}^{\mathcal{D}*}G)(c_{i_0\cdots i_l})$$

是弱同伦等价。此外，两边都是 Kan 复形，因为左 Kan 延拓是通过滤过余极限计算的，而 Kan 纤维化在滤过余极限下稳定 [20,引理 3.1。24]因此，典范映射

$$\begin{aligned}\mathrm{holim}_{[l]\in\Delta}\Big(\prod_{i_0\cdots i_l\in\Lambda}\underline{\mathcal{H}}_{\mathrm{fam}}(\check{\mathrm{C}}\mathcal{V}_{i_0\cdots i_l}, G)\Big) \longrightarrow &\mathrm{holim}_{[l]\in\Delta}\Big(\prod_{i_0\cdots i_l\in\Lambda}(\mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}}\check{C}^{\mathcal{D}*}G)(c_{i_0\cdots i_l})\Big)\\ &= \mathrm{holim}_{[l]\in\Delta}\,\underline{\mathcal{K}}(\check{\mathrm{C}}_l\widehat{\mathcal{U}}, \mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}}\check{C}^{\mathcal{D}*}G)\end{aligned}$$

也是一个弱同伦等价。通过应用 Bousfield-Kan 映射，典范态射

$$\mathrm{hocolim}_{[k]\in\Delta}\check{\mathrm{C}}_k\mathcal{V}_{i_0\cdots i_l} \longrightarrow \check{\mathrm{C}}\mathcal{V}_{i_0\cdots i_l}$$

是 $\mathcal{H}_{\mathrm{fam}}$ 中的射影弱等价（左侧是单纯恒定单纯预层的同伦余极限）。由此得到一个交换图表

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{holim}_{[m]\in\Delta} \mathcal{H}_{\mathrm{fam}}(\check{C}_m\mathcal{V}, G) & \longrightarrow & \operatorname{holim}_{[l]\in\Delta} \operatorname{holim}_{[k]\in\Delta} \left(\prod_{i_0\cdots i_l\in\Lambda} \mathcal{H}_{\mathrm{fam}}(\check{C}_k V_{i_0\cdots i_l}, G) \right) \\
\sim\uparrow & & \sim\uparrow \\
\underline{\mathcal{H}}_{\mathrm{fam}}(\check{C}\mathcal{V}, G) & \longrightarrow & \operatorname{holim}_{[l]\in\Delta} \left(\prod_{i_0\cdots i_l\in\Lambda} \underline{\mathcal{H}}_{\mathrm{fam}}(\check{C}V_{i_0\cdots i_l}, G) \right) \\
\downarrow\sim & & \downarrow\sim \\
(\mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}} \check{C}^{\mathcal{D}*}G)(c) & \longrightarrow & \operatorname{holim}_{[l]\in\Delta} \left(\prod_{i_0\cdots i_l\in\Lambda} (\mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}} \mathrm{e}G^{\mathcal{D}})(c_{i_0\cdots i_l}) \right)
\end{array}$$

顶部的水平态射恰好对应于对角线 $\mathbb{\Delta} \hookrightarrow \mathbb{\Delta} \times \mathbb{\Delta}$ 的包含；但这个函子是同伦余终的（例如参见 [65, 例 8.5.13]），因此顶部映射是弱同伦等价。结合上述图表的交换性与弱等价的三者中两者性质，即可得出结论。□

推论 9.9。 对于任意纤维对象 $G \in \mathcal{H}^{loc}_{\mathrm{fam}}$，单纯预层

$$\left(\int \mathrm{B}\phi'\right)^{*} \mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}} \check{C}^{\mathcal{D}*} G \colon \left(\int \mathrm{B}H\right)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}$$

在 $L_{\tau_H}\mathcal{K}_H$ 中是纤维化的。

引理 9.10。 考虑一个单纯集合的交换方块

$$\begin{array}{ccc}
A & \longrightarrow & X \\
\downarrow & & \downarrow \\
B & \xrightarrow[f]{} & Y
\end{array}$$

假设两个垂直态射都是左纤维化，并且 f 是范畴弱等价（即 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}$ 上 *Joyal* 模型结构中的弱等价）。那么，下列条件等价

(1) 典范态射 $A \to f^{*}X = X \times_Y B$ 在 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/B}$ 中是协变弱等价。*(2)* 典范态射 $f_!A \to X$ 在 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/Y}$ 中是协变弱等价。*(3)* 对于每个顶点 $b \in B$，纤维上的典范态射 $A|_b \to X|_{f(b)}$ 是弱同伦等价（即 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}$ 上 *Kan–Quillen* 模型结构中的弱等价）。

证明。 (1) 和 (3) 等价，即使不假设 f 是范畴弱等价；例如，参见 [20, 定理 4.1.16]。(1) 和 (2) 等价是由 [45,命题 F], 得出的，因为态射 $A \to B$ 和 $X \to Y$ 分别是 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/B}$ 和 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/Y}$ 上协变模型结构中的纤维对象和余纤维对象。□

引理 9.11. 在引理 *9.10* 的情形下，假设该引理中某一个（因而也就是所有）等价判据都成立。此外，假设 B 和 Y 是 ∞-范畴，那么顶部态射 $A \to X$ 是弱范畴等价。

证明。 根据我们的附加假设，引理 9.10 中交换方块的每个顶点现在都是一个 ∞-范畴。考虑以下单纯集合的拉回方块

$$\begin{array}{ccc}
B \times_Y X & \xrightarrow{\hat{f}} & X \\
\downarrow & & \downarrow \\
B & \xrightarrow[f]{} & Y
\end{array}$$

由于右侧的垂直映射是 ∞-范畴之间的左纤维化，因此它也是一个等纤维化 [20,命题 3.4.8]，，从而是 Joyal 模型结构中的纤维化 [20, 定理 3.6.1]。特别地，上述 b 方块在 Joyal 模型结构中是同伦笛卡尔的，因此 f 是范畴弱等价。结合引理 9.10 的性质 (1) 与引理 5.5，即得所述结论。□

备注 9.12. 设 $H\colon \mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Grp}$ 是一个群预层。那么，$H\colon \mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Grp}$ 是一个群层，当且仅当单纯预层 $N\mathrm{B}H\colon \mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}$ 关于 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 中的良好开覆盖满足同伦下降。◁

定理 9.13. 设 $H\colon \mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Grp}$ 是一个层群。设 $F\colon (\int \mathrm{B}H)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 在 $L_{\tau_H}\mathcal{K}_H$ 中是纤维化的。那么，同伦左 *Kan* 延拓

$$\mathrm{hoLan}_{\pi_M^H} F\colon \mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$$

在 $\mathcal{H}^{loc}$ 中是纤维化的（回忆定义 *4.1* 中的记号）。

证明。 证明分几个步骤进行。

(1) hoLan 的计算与性质。 首先，我们可以将同伦左 Kan 延拓计算为

$$(\mathrm{hoLan}_{\pi_M^H} F)(c) \simeq \mathrm{hocolim}\big(F_{|c}\colon \mathrm{B}H^{\mathrm{rev}}(c) \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta\big)\,,$$

即，将其视为沿 π_M^H 的纤维而非切片取同伦余极限（因为 $(\int N\mathrm{B}H)^{\mathrm{op}} \to N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 是左纤维化，因而是真），其中 $F_{|c}$ 是 F 在纤维 $(\pi_M^H)^{-1}(c) = \mathrm{B}H^{\mathrm{rev}}(c)$ 上的限制。进一步注意，由于我们使用严格群胚值函子的 Grothendieck 构造，此处的纤维甚至函子性地依赖于 c 。此外，由于 $\mathrm{B}H^{\mathrm{rev}}(c)$ 是群胚，而 $F(c)$ 是 Kan 复形，对于每个 $c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$，我们都可以选择一个同伦余极限模型，使得典范态射

$$\mathrm{hoLan}_{\pi_M^H} F \longrightarrow \mathrm{B}H^{\mathrm{rev}}$$

在 $\mathcal{H}$ 中成为纤维化，即逐对象 Kan 纤维化。具体而言，我们可以使用双边 bar 构造 [65,第 4.2、5.1] 节为同伦余极限建模，也可以使用整直函子（见 [45, 定理 C]）；在当前情形下，它具有上述性质。

函子 $F_{|c}$ 也可以等价地描述为单纯集合 $F(c)$，其右侧带有 $H(c)$ 的作用（该作用由 F 的函子性诱导）。同伦余极限 $(\mathrm{hoLan}_{\pi_M^H} F)(c)$ 是同伦商的一个模型，

$$(\mathrm{hoLan}_{\pi_M^H} F)(c) \simeq F(c)/\!\!/H(c)\,.$$

更确切地说，令 $F(c) \circlearrowleft H(c)$ 表示一个双单纯集合，它在水平次数 n 中是 作用群胚，即 $F_n(c)$ 上 $H(c)$ 的作用；也就是说，

$$\big(F(c) \circlearrowleft H(c)\big)_{n,k} = F_n(c) \times H(c)^k\,.$$

计算 $F_{|c}\colon \mathrm{B}H^{\mathrm{rev}}(c) \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 的同伦余极限的双边 bar 构造，与此双单纯集合的对角线典范地弱等价：

$$(\mathrm{hoLan}_{\pi_M^H} F)(c) \simeq B\big(*, \mathrm{B}H^{\mathrm{rev}}(c), F_{|c}\big) = \delta^*\big(F(c) \circlearrowleft H(c)\big) = F(c)/\!\!/H(c)\,.$$

最后，我们再次强调，这些构造中的每一个都函子性地依赖于 $c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$。

(2) 利用下降性质。 设 $c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$，并设 $\mathcal{U} = \{f_i\colon c_i \hookrightarrow c\}_{i\in\Lambda}$ 是 c 的良好开覆盖。我们的目标是证明典范映射

$$(\mathrm{hoLan}_{\pi_M^H} F)(c) \longrightarrow \mathrm{holim}_{[l]\in\Delta} \underline{\mathcal{H}}(\check{\mathrm{C}}_l\mathcal{U}, \mathrm{hoLan}_{\pi_M^H} F)$$

在 $\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 中是弱等价。应用 Bousfield-Kan 映射 [48, Cor. 18.7.7]，，我们得到弱等价

$$\underline{\mathcal{H}}\big(\check{\mathrm{C}}\mathcal{U}, \mathrm{hoLan}_{\pi_M^H} F\big) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathcal{H}}\big(\mathrm{hocolim}_{[l]\in\Delta} \check{\mathrm{C}}_l\mathcal{U}, \mathrm{hoLan}_{\pi_M^H} F\big) \cong \mathrm{holim}_{[l]\in\Delta} \underline{\mathcal{H}}(\check{\mathrm{C}}_l\mathcal{U}, \mathrm{hoLan}_{\pi_M^H} F)\,.$$

将这一点与本证明的步骤 (1) 结合起来，我们等价地需要证明典范映射

$$F(c)/\!\!/H(c) \simeq (\mathrm{hoLan}_{\pi_M^H} F)(c) \longrightarrow \underline{\mathcal{H}}\big(\check{\mathrm{C}}\mathcal{U}, \mathrm{hoLan}_{\pi_M^H} F\big)$$

b 是弱等价。我们将 $\mathcal{U}$ 提升为一个 τ_H-覆盖 $\mathcal{U}$，其定义如下

$$\widehat{\mathcal{U}} = \{(f_i, e_H)\colon c_i \to c\}_{i\in\Lambda}.$$

b 对每个 $i \in \Lambda$，元素 $e_H \in H(c_i)$ 是单位元。换言之，$\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{U}$ 在截面 $e_H\colon \mathcal{C}\mathrm{art} \to \mathrm{B}H$下的像。由于根据假设，$F$ 满足关于τ_H-覆盖的下降，典范态射

$$F(c)/\!\!/H(c) \longrightarrow \big(\underline{\mathcal{K}}_H(\check{\mathrm{C}}\widehat{\mathcal{U}}, F)\big)/\!\!/H(c)$$

是 $\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 中的弱等价。右侧的$H(c)$作用如下：一个截面 $\varphi \in H(c)$限制为一族相容的截面 $\varphi_i = f_i^*\varphi \in H(c_i)$，从而诱导出 $\mathcal{K}_H$ 中 $\check{\mathrm{C}}\,\mathrm{b}\mathcal{U}$ 的一个自同构。该作用由与此自同构前复合给出。由于右侧仍是一个以群胚 $\mathrm{B}H^{\mathrm{rev}}(c)$为指标、取值于 Kan复形的图表的同伦余极限，典范映射

$$\big(\underline{\mathcal{K}}(\check{\mathrm{C}}\widehat{\mathcal{U}}, F)\big)/\!\!/H(c) \longrightarrow N\mathrm{B}H^{\mathrm{rev}}(c)$$

仍然是 Kan 纤维化。

接下来，由于 Čech 神经 $\check{\mathrm{C}}\mathcal{U}$ 在 $\mathcal{H}$ 中是余纤维的，射影纤维化 $\mathrm{hoLan}_{\pi_M^H}F \longrightarrow \mathrm{B}H^{\mathrm{rev}}$诱导出一个 Kan 纤维化

$$\underline{\mathcal{H}}(\check{\mathrm{C}}\mathcal{U}, \mathrm{hoLan}_{\pi_M^H}F) \longrightarrow \underline{\mathcal{H}}\big(\check{\mathrm{C}}\mathcal{U}, N\mathrm{B}H^{\mathrm{rev}}\big).$$

因此，我们得到一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \big(\underline{\mathcal{K}}(\check{\mathrm{C}}\widehat{\mathcal{U}}, F)\big)/\!\!/H(c) & \longrightarrow & \underline{\mathcal{H}}(\check{\mathrm{C}}\mathcal{U}, \mathrm{hoLan}_{\pi_M^H}F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ N\mathrm{B}H^{\mathrm{rev}}(c) & \longrightarrow & \underline{\mathcal{H}}\big(\check{\mathrm{C}}\mathcal{U}, N\mathrm{B}H^{\mathrm{rev}}\big) \end{array} \tag{9.14}$$

在 $\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 中，其顶点是 Kan 复形，竖直箭头是 Kan纤维化，且底部箭头是弱同伦等价（见注释 9.12）。如果我们能够证明顶部箭头是弱同伦等价，定理即得证。

(3) 使用前述引理的形式性质。为此，我们应用引理 9.11：由于 Kan 复形之间的态射是弱范畴等价当且仅当它是弱同伦等价，因此只需证明 (9.14) 中的水平映射在所有纤维上诱导弱同伦等价；也就是说，我们证明引理 9.10 的条件 (3) 得到满足。然而，群胚 $N\mathrm{B}H^{\mathrm{rev}}(c)$ 恰好只有一个对象，因此只需考虑一个纤维。

(9.14) 中左侧竖直箭头的纤维是 Kan 复形 $\mathcal{K}(\check{\mathrm{C}}\,\mathrm{b}\mathcal{U}, F)$。$\mathcal{H}(\check{\mathrm{C}}\mathcal{U}, N\mathrm{B}H^{\mathrm{rev}})$ 中的一个顶点等同于一个在 c 上取值于 $\mathrm{H}^{\mathrm{rev}}$ 、从属于覆盖 $\mathcal{U}$ 的 Čech 1-余循环。(9.14) 中的底部箭头将$N\mathrm{B}H^{\mathrm{rev}}(c)$ 的唯一对象映射到平凡余循环。由此可知（例如，使用 Bar 构造计算 $\mathrm{hoLan}_{\pi_M^H}F$），右侧竖直态射在该顶点上的纤维同样由 Kan 复形 $\mathcal{K}(\check{\mathrm{C}}\,\mathrm{b}\mathcal{U}, F)$ 给出，而顶部水平箭头在这些纤维上诱导恒等映射。□

本文关注的核心模问题的直接推论如下：设 $\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}$、$\mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}\colon \mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 是投射纤维化单纯预层，且 $p\colon \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}$ 是射影纤维化。设 $\mathcal{G} \in \mathrm{Fix}^M(\mathbb{R}^0) = e_M^*\mathrm{Fix}(\mathbb{R}^0)$ 是一个整体截面，并设 $\mathrm{Sol}^{\mathcal{D}} \subset \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}$ 是一个解预层。

推论 9.15。设 $H\colon \mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Grp}$ 是一个群层，通过态射$\phi'\colon H \to \mathrm{Diff}(M)$ 作用于 M，其中 $H \to \mathrm{Diff}(M)$ 是 $\mathcal{C}\mathrm{art}$上的群层。令 $\phi\colon Q_H = N\!\int \mathrm{B}H \to \mathrm{B}\mathcal{D}$ 表示 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}$ 中相应的态射，并假设它通过 $\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]$ 分解。进一步假设限制

$$(\mathrm{B}\phi')^*\mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]}\colon (\!\int \mathrm{B}H)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$$

在 $L_{\tau_H}\mathcal{K}_H$ 中是纤维化的。相应的模空间 ∞-预堆 $\mathbb{M}\mathrm{dl}_\Phi(G)\colon N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\check{}} \mathcal{S}$ 是一个 ∞-堆，即它满足相对于 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 中良好开覆盖的下降。

证明。 回忆定义 6.4 中的单纯预层 $\mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\ ]}\mathcal{G}\colon \mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$。根据构造及 [12, 命题 5.4], , ∞-预层 $\mathbb{S}\mathrm{ol}_\Phi(\mathcal{G}) : N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}$ 由以下单纯预层表示

$$\mathrm{hoLan}_{\pi_M^H}\big((\mathrm{B}\phi')^*\mathrm{Sol}^{\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{[\mathcal{G}]}\big)\colon \mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta\,,$$

可能还需要逐对象进行纤维化替换。由此，结论可由定理 9.13 得出。 □

第 2 部分。关于带联络的高阶 U(1) 丛及 NSNS 超引力的应用

本文第二部分聚焦于一类尤为重要的高阶几何结构：在M 上的高阶主丛，其结构群为 U(1) 的迭代解环，而分类层 $\mathrm{B}^k_\nabla\mathrm{U}(1)$ 则对应带联络的高阶 U(1) 丛。这类高阶丛通常称为带k-联络的n-gerbe。我们研究这些高阶丛上联络规范理论的各个方面，包括高阶杨–米尔斯解；利用第 1 部分的形式体系计算这些丛的高阶规范作用；并应用定理 8.30，调和对 NSNS 超引力解模空间的两种观点。

10. 流形上的高阶 U(1) 联络光滑族

10.1. 竖直微分形式与竖直 Deligne 复形。就局部数据而言，流形上的 [29, 35, 68] 良好开覆盖所关联的切赫-Deligne 复形可用于构造带有 k-联络的 n-gerbe。此处我们关注固定但任意的流形M上的切赫-Deligne 上循环（也称为高阶 U(1) 联络，沿用 [9, 35] 的称法）的显式模型，即光滑族。为了描述这些模型，我们首先引入笛卡尔空间上的微分形式光滑族，然后以这些基本构件为基础，构造高阶 U(1) 联络光滑族的切赫数据。

回顾定义 3.2 中的范畴 $\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$。我们分别用$TN$ 和$T^\vee N$表示流形N 的切丛和余切丛。对于一个对象 $(p\colon \hat{c} \to c) \in \mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$，我们将其竖直切丛

$$T^{\mathrm{v}}(\hat{c} \to c) = \{X \in T\hat{c} \mid p_*(X) = 0\} = \ker(p_*) \subset T\hat{c}\,.$$

给定一个态射 $(\hat{f} \to f)\colon (p\colon \hat{c} \to c) \longrightarrow (q\colon \hat{d} \to d)$，我们得到一个丛态射

$$T^{\mathrm{v}}(\hat{f} \to f)\colon T^{\mathrm{v}}(\hat{c} \to c) \longrightarrow T^{\mathrm{v}}(\hat{d} \to d)\,, \qquad X \longmapsto \hat{f}_*(X)\,,$$

它覆盖光滑映射 f。事实上，由于 $q \circ \hat{f} = f \circ p$，我们有

$$p_*(X) = 0 \quad \Longrightarrow \quad q_*\big(\hat{f}_*(X)\big) = (q \circ \hat{f})_*(X) = (f \circ p)_*(X) = 0\,,$$

因此 $\hat{f}_*$ 限制为一个丛映射

$$T^{\mathrm{v}}(\hat{f} \to f) = \hat{f}_{|\ker(p_*)}\colon T^{\mathrm{v}}(\hat{c} \to c) \longrightarrow T^{\mathrm{v}}(\hat{d} \to d)\,.$$

对于 $k \in \mathbb{N}_0$，我们定义 $C^\infty(\hat{c})$-模

$$\Omega^{k,\mathrm{v}}(\hat{c} \to c) := \Gamma\big(\hat{c}; \Lambda^k(T^{\mathrm{v}}(\hat{c} \to c))^\vee\big) \subset \Omega^k(\hat{c})\,,$$

其中，对于向量丛 $E \to \hat{c}$，符号$E^\vee$ 表示其对偶向量丛。 $\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ 中的态射 $(\hat{f} \to f)\colon (\hat{c} \to c) \longrightarrow (\hat{d} \to d)$ 诱导一个 $\mathbb{R}$-线性映射

$$\Omega^{k,\mathrm{v}}(\hat{f} \to f) = \hat{f}^*\colon \Omega^{k,\mathrm{v}}(\hat{d} \to d) \longrightarrow \Omega^{k,\mathrm{v}}(\hat{c} \to c)\,, \qquad (\hat{f}^*\omega)_{|x}(X_1, \ldots, X_k) = \omega_{|\hat{f}(x)}\big(\hat{f}_*(X_1), \ldots, \hat{f}_*(X_k)\big)\,,$$

for $X_1, \ldots\ldots, X_k \in T^{\mathrm{v}}(\hat{c} \to c)|_x$。因此，特别地，对于每个$k \in \mathbb{N}_0$，我们得到一个预层

$$\Omega^{k,\mathrm{v}}\colon \mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}{}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{A}\mathrm{b}$$

阿贝尔群（$\mathcal{A}\mathrm{b}$ 表示阿贝尔群范畴）。

德拉姆微分 $\mathrm{d}\colon \Omega^k(\hat{c}) \to \Omega^{k+1}(\hat{c})$ 限制为态射 $\mathrm{d}^v\colon \Omega^{k,v} \to \Omega^{k+1,v}$: 给定 $(\hat{c} \to c)$ 上的垂直向量场 $X_0,\dots,X_k$，以及 $\omega \in \Omega^{k,v}(\hat{c} \to c)$，定义如下

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}^v\omega)(X_0,\dots,X_k) \coloneqq &\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \mathcal{L}_{X_i}\big(\omega(X_0,\dots,\widehat{X_i},\dots,X_k)\big)\\ &+\sum_{0\le i<j\le k}(-1)^{i+j}\omega\big([X_i,X_j],X_0,\dots,\widehat{X_i},\dots,\widehat{X_j},\dots,X_k\big),\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{L}$ 是标准的李导数，$[X_i,X_j]$ 是向量场的标准对易子，帽号表示省略该项。注意，两个垂直向量场的对易子仍然是垂直向量场；例如参见 [55, 命题 8.30]。垂直德拉姆微分对于 $\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$中的态射是自然的；这是因为对于任意 $x \in c$，我们有

$$(\mathrm{d}^v\omega)_{|(\hat{c}_{|x})} = \mathrm{d}(\omega_{|(\hat{c}_{|x})}),$$

也就是说，先取垂直德拉姆微分，再将其限制到p的任意纤维上：$\hat{c} \to c$所得的纤维上的形式，与先限制到纤维上、再应用通常的德拉姆微分所得的形式相同。此外，$\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ 中的态射可以限制到纤维上，而通常的德拉姆微分 d 对光滑映射是自然的。令 $\mathcal{C}\mathrm{h}^{\ge 0}$ 和 $\mathcal{C}\mathrm{h}_{\ge 0}$ 分别表示阿贝尔群的非负分次上链复形范畴和链复形范畴。我们得到一个由阿贝尔群的非负分次上链复形构成的预层

$$(\Omega^v,\mathrm{d}^v)\colon \mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}{}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}\mathrm{h}^{\ge 0}.$$

我们还考虑流形 $\hat{}^{,v}[\hat{c} \to c] = \Gamma(-;\Lambda^k(T^v(\hat{c} \to c))^\vee)$ 上垂直（或称“相对”）k-形式的层 Ω^k。特别地，这是 $\hat{c}$ 上的$C^\infty(c)$-模层。因此，它是细层，即在 $\hat{c}$ 上存在单位分解。由此可知，它是 $\hat{c}$ 上的无环层；又由于 $\hat{c}$ 是仿紧豪斯多夫空间，因此还可推出，对于 $\hat{c}$ 的任意开覆盖，$\Omega^{k,v}[\hat{c} \to c]$ 的 Čech 上同调在正次数时均为平凡。为便于后文引用，我们将此记录为以下引理。回顾定义 3.5 中范畴 $\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ 上的格罗滕迪克覆盖 τ_{fam}。

引理 10.1. 对于每个 $k \in \mathbb{N}_0$，层 $\Omega^{k,v}[\hat{c} \to c]$ 在 $\hat{c}$ 上是细层，因而是无环的。因此，对于 τ_{fam}-覆盖 $(\hat{U} \to U)$，其中 $(\hat{c} \to c)$ 属于 $\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$，与余单纯链复形 $\Omega^{k,v}(\check{C}\hat{U})$ 相关联的总体复形是无环的。

定义10.2。我们定义非负分次链复形的预层

$$\big(\mathrm{b}^{n+1-k}\mathrm{b}^k_\nabla \mathrm{U}(1)\big)^v\colon \mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}{}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}\mathrm{h}_{\ge 0},$$

$$\big(\mathrm{b}^{n+1-k}\mathrm{b}^k_\nabla \mathrm{U}(1)\big)^v = \big(\Omega^{k,v} \xleftarrow{\mathrm{d}^v} \Omega^{k-1,v} \xleftarrow{\mathrm{d}^v} \cdots \Omega^{1,v} \xleftarrow{\mathrm{d}^v \log} \mathrm{U}(1)\big),$$

其中 $\mathrm{U}(1)$ 位于$n+1$ 次（$\Omega^{k,v}$ 位于$n+1-k$次）。

引理10.3。对于每个 $0 \le k \le n \in \mathbb{N}_0$，函子

$$\big(\mathrm{b}^{n+1-k}\mathrm{b}^k_\nabla \mathrm{U}(1)\big)^v\colon \mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}{}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}\mathrm{h}_{\ge 0}$$

满足关于 τ_{fam}-覆盖的同伦下降。

证明。设 $(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}) \longrightarrow (\hat{c} \to c)$ 是 $\tau_{\mathrm{fam}}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ 中对象 $(\hat{c} \to c)$ 的一个 $\mathcal{C}$-覆盖。我们需要证明典范态射

$$\big(\mathrm{b}^{n+1-k}\mathrm{b}^k_\nabla \mathrm{U}(1)\big)^v(\hat{c} \to c) \longrightarrow \operatorname*{holim}_{l\in\mathbb{\Delta}}\big(\mathrm{b}^{n+1-k}\mathrm{b}^k_\nabla \mathrm{U}(1)\big)^v\big(\check{\mathrm{C}}_l(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U})\big)$$

它是链复形的拟同构。同伦极限由双复形的总体复形（的截断）建模，该双复形由各次数的 Čech 分解给出。注意，预层 $\mathrm{U}(1)$ 和 $\Omega^{p,v}$（其中 $p = 1,\dots,k$）的 Čech 复形，视为 $\hat{c}$ 上的预层时，仅利用笛卡尔空间 $\hat{\mathcal{U}}$ 的良好开覆盖来计算。由于 $\Omega^{p,v}$ 是 $\hat{c}$ 上的细层，对每个 $p \in \mathbb{N}_0$，它关于 $\hat{\mathcal{U}}$ 的 Čech 分解都是无环的（见引理 10.1）。

此外，由于 $\hat{\mathcal{C}}$ 是笛卡尔的，且 $\hat{\mathcal{U}}$ 在微分意义下良好，因此关于 $\hat{\mathcal{U}}$ 的 $\mathbf{U}(1)$ 的切赫复形也是无环的（它计算 $\hat{\mathcal{C}}$ 取 $\mathbf{U}(1)$ 为系数的层上同调；这与高一度的整数上同调一致，而后者是平凡的，因为 $\hat{\mathcal{C}}$ 是可缩的）。因此，上述双复形中的第 p 行是 $(\mathbf{b}^{n+1-k}\mathbf{b}^k_\nabla \mathbf{U}(1))^\nu$ 中层级为 k 的层的一个分解。该结论随即由 [73, 引理 8.5]. □ 得出。

令 $\mathcal{A}\mathrm{b}$ 表示阿贝尔群范畴，并令 $\mathcal{A}\mathrm{b}_\Delta = \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}\mathrm{b})$ 表示单纯阿贝尔群范畴。后者带有一个模型结构，该结构由遗忘函子 $\mathcal{A}\mathrm{b}_\Delta \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 以及 $\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 上的 Kan–Quillen 模型结构右诱导而来。

定义10.4。对于每个 $0 \leq k \leq n \in \mathbb{N}_0$，我们定义一个单纯预层

$$(\mathbf{B}^{n+1-k}\mathbf{B}^k_\nabla \mathbf{U}(1))^\nu := \Gamma \circ \left(\mathbf{b}^{n+1-k}\mathbf{b}^k_\nabla \mathbf{U}(1)\right)^\nu \colon \mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}{}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta\,,$$

其中 $\Gamma\colon \mathcal{C}\mathrm{h}_{\geq 0} \to \mathcal{A}\mathrm{b}_\Delta$ 是 Dold-Kan 对应的一部分（更多背景和细节另见附录 B），并且我们隐式地使用了遗忘函子 $\mathcal{A}\mathrm{b}_\Delta \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$。

由引理10.3以及 $\Gamma\colon \mathcal{C}\mathrm{h}_{\geq 0} \to \mathcal{A}\mathrm{b}_\Delta$ 和遗忘函子 $\mathcal{A}\mathrm{b}_\Delta \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 均保留同伦极限这一事实，可直接得到：

引理10.5。对于每个 $0 \leq k \leq n \in \mathbb{N}_0$，函子

$$\left(\mathbf{B}^{n+1-k}\mathbf{B}^k_\nabla \mathbf{U}(1)\right)^\nu \colon \mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}{}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$$

是 $\mathcal{H}^{loc}_{\mathrm{fam}}$ 中的一个纤维对象。

注记 10.6. 在逐对象弱同伦等价处对 $\mathcal{H}_{\mathrm{fam}} = \mathrm{Fun}(\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}{}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta)$ 作 ∞-范畴局部化，等价于空间的 ∞-范畴 $\mathcal{P}(\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}) = \mathcal{F}\mathrm{un}(N\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}{}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$ 中从 $N\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}{}^{\mathrm{op}}$ 到该 ∞-范畴 $\mathcal{S}$ 的 ∞-函子。函子 $(\mathbf{B}^{n+1-k}\mathbf{B}^k_\nabla \mathbf{U}(1))^\nu$ 经由单纯阿贝尔群范畴 $\mathcal{A}\mathrm{b}_\Delta$ 分解这一事实，意味着它在 $\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ 上给出了一个 ∞-皮卡 ∞-群胚层（见 [61, 定理 3.30、推论 3.34]）。◁

典范投影态射

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\left(b^{n+1-k}\mathbf{b}^k_\nabla \mathbf{U}(1)\right)^\nu & = & \left(\Omega^{k,\nu} & \xleftarrow{\mathrm{d}^\nu} & \Omega^{k-1,\nu} & \xleftarrow{\mathrm{d}^\nu} & \Omega^{k-2,\nu} & \xleftarrow{\mathrm{d}^\nu} & \cdots \Omega^{1,\nu} & \xleftarrow{\mathrm{d}^\nu \log} & \mathbf{U}(1)\right), \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle 1} \\
\left(b^{n+2-k}\mathbf{b}^{k-1}_\nabla \mathbf{U}(1)\right)^\nu & = & \left(0 & \longleftarrow & \Omega^{k-1,\nu} & \xleftarrow[\mathrm{d}^\nu]{} & \Omega^{k-2,\nu} & \xleftarrow[\mathrm{d}^\nu]{} & \cdots \Omega^{1,\nu} & \xleftarrow[\mathrm{d}^\nu \log]{} & \mathbf{U}(1)\right),
\end{array}$$

是 $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}{}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}\mathrm{h}_{\geq 0})$ 中的纤维化，其中 $\mathcal{C}\mathrm{h}_{\geq 0}$ 和函子范畴都带有投射模型结构。因此，与 Dold-Kan 对应复合后，便得到一个投射（Kan）纤维化

$$p^k_{k-1}\colon \left(\mathbf{B}^{n+1-k}\mathbf{B}^k_\nabla \mathbf{U}(1)\right)^\nu \longrightarrow \left(\mathbf{B}^{n+2-k}\mathbf{B}^{k-1}_\nabla \mathbf{U}(1)\right)^\nu$$

在 $\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ 上的单纯预层。对于整数 $0 \leq l \leq k \leq n+1$，我们还定义复合

$$p^k_l := p^{l+1}_l \circ \cdots \circ p^{k-1}_{k-2} \circ p^k_{k-1}\colon \left(\mathbf{B}^{n+1-k}\mathbf{B}^k_\nabla \mathbf{U}(1)\right)^\nu \longrightarrow \left(\mathbf{B}^{n+1-l}\mathbf{B}^l_\nabla \mathbf{U}(1)\right)^\nu. \tag{10.7}$$

10.2. 呈现流形上带联络的 n-gerbe 族。接下来，我们描述任意固定流形 M 上带 k-联络的 n-gerbe 族。在第4节的形式体系中，我们考虑单纯预层

$$G = \left(\mathbf{B}^{n+1-k}\mathbf{B}^k_\nabla \mathbf{U}(1)\right)^\nu \colon \mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}{}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta\,,$$

对于任意 k，$n \in \mathbb{N}_0$ 带有 $k \leq n+1$。遵循第4节的记号约定（尤其参见 ，构造 理 4.4），我们作如下定义：

定义 10.8. 对于每个 $k,n \in \mathbb{N}_0$ 满足 $k \leq n+1$的情形，我们定义单纯预层

$$\widetilde{\mathrm{Grb}}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k} := \check{C}^{\mathcal{D}*}\mathrm{Grb}^{n}_{\nabla|k} \colon (\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}\,,$$
$$(c, \hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}) \longmapsto \underline{\mathcal{H}_{\mathrm{fam}}}\big(\check{C}(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}), \big(\mathrm{B}^{n+1-k}\mathrm{B}^{k}_{\nabla}\mathrm{U}(1)\big)^{v}\big)\,.$$

我们将其在 $\mathrm{GCov} \subset \mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$ 上的限制记为

$$\widetilde{\mathrm{Grb}}^{n,M}_{\nabla|k} \colon \mathrm{GCov}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}\,.$$

注记 10.9。 借助附录 B 中的技巧，可以显式描述 $\mathrm{gGrb}^{n\,\mathcal{D}}_{\nabla|\ ,k}$ （特别参见例 B.13）。◁

记号 10.10。 在定义 10.8 的设定下，我们也记作

$$\widetilde{\mathrm{Grb}}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla} := \widetilde{\mathrm{Grb}}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|n+1} \quad \text{and} \quad \widetilde{\mathrm{Grb}}^{n,\mathcal{D}} := \widetilde{\mathrm{Grb}}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|0}\,,$$

对于 $\mathrm{gGrb}_{n,\nabla}$ 和 $\mathrm{gGrb}_{n,\ ,M}$ 也类似地记号。这一记号约定也适用于本小节接下来的定义；在每个相应的情形中，我们不再逐一明确说明。◁

注记 10.11。 （10.7）中的态射p^{k}_{l}诱导出射影纤维化

$$\widetilde{p}^{k}_{l} \colon \widetilde{\mathrm{Grb}}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Grb}}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|l}\,,$$

对每个$l,k \in \mathbb{N}_0$，满足 $0 \leq l \leq k \leq n+1$。 ◁

由引理10.5可知，$\mathrm{Grb}^{n\,\mathcal{D}}_{\nabla|\ ,k}$ 满足引理 4.5 的条件。对良好开覆盖取平均（特别参见命题 4.6 和第5节），我们得到以下单纯预层:

定义10.12。 对于每个$n \in \mathbb{N}_0$ 以及$k = 0, \ldots, n+1$，我们定义

$$\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k} := \mathrm{Lan}_{\bar{\omega}^{\mathcal{D}}}\big(\widetilde{\mathrm{Grb}}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k}\big) \colon \mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}\,, \qquad \text{and} \tag{10.13}$$
$$\mathrm{Grb}^{n,M}_{\nabla|k} := \mathrm{Lan}_{\bar{\omega}}\big(\iota^{*}\widetilde{\mathrm{Grb}}^{n,M}_{\nabla|k}\big) \colon \mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}\,.$$

我们将这些称为 M 上带*n-gerbe* 及*k*-联络 的光滑族的单纯预层（分别指带或不带 Diff(*M*) 作用的情形）。

注记 10.14。 由命题 4.6 可知，来自（10.7）的态射p^{k}_{l}诱导出射影纤维化

$$\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k} \longrightarrow \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|l}\,,$$

对每个$l,k \in \mathbb{N}_0$，满足 $0 \leq l \leq k \leq n+1$。为滥用记号，我们仍将这些态射记作p^{k}_{l}。◁

注记 10.15. 关于 *k*-联络 的概念最早由 [35] 引入，用于 *n*-gerbe。除了一些细微差异外——论文 [35] 使用 $\mathbb{C}^*$ 代替 U(1)，并将 *n*-gerbe 称为 $(n+1)$- 丛 ——Gajer 建立了带有 *k*- 联络的 *n*-gerbe，将其作为 *M* 上任意双次数的 Deligne 上同调群的几何模型。其他研究者沿用了这一范式并进一步加以完善，包括在 [29,68]，中定义 *M* 上带有 *k*-联络的 *n*-gerbe 的 Kan 复形，从而对这些对象之间各个层级的态射和高阶态射进行编码。Fiorenza、Rogers 和 Schreiber 还提出了一种抽象方法，用于在流形上获得带有 *k*-联络的 *n*-gerbe（以及其他高阶几何结构）的光滑族，并将其称为具体化 [28] （其中存在一个错误，后来在 [6,68] 中得到了纠正）。而在这里，我们直接在 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 上构造了单纯预层，用以分类任意给定流形 *M* 上带有 *k*-联络的 *n*-gerbe 的光滑族。此外，我们的构造不仅直接编码了其自同构的高阶代数结构，还同时编码了其以及 对称性的光滑高阶结构，即覆盖 *M* 上可能非平凡微分同胚的自同构。这使我们能够在接下来的章节中，为 Gajer 的 Deligne 上同调几何模型构造并研究模空间 ∞-叠。◁

注记 10.16。 引理 4.8 提供了一个典范同构

$$e_M^* \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k} \cong \mathrm{Grb}^{n,M}_{\nabla|k}$$

在 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 上的单纯预层。 ◁

我们还从 (10.13) 得到与单纯预层相关联的左纤维化：

定义 10.17. 我们定义对象

$$\textstyle\int \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k} := r^*_{\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}}} \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k} \qquad \in \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}}}$$
$$\textstyle\int \mathrm{Grb}^{n,M}_{\nabla|k} := r^*_{\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}} \mathrm{Grb}^{n,M}_{\nabla|k} \qquad \in \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}.$$

根据构造，这些分别在 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}}}$ 和 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}$ 中是协变纤维化的。

命题 10.18. 对于每个 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 $0 \leq l \leq k \leq n+1$，以下结论成立：

(1) 在 $N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 上存在一个典范同构，

$$N e_M^* \textstyle\int \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k} \simeq \int \mathrm{Grb}^{n,M}_{\nabla|k}.$$

(2) 遗忘映射

$$\textstyle\int p^k_l \colon \int \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k} \longrightarrow \int \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|l}, \qquad \int p^k_l \colon \int \mathrm{Grb}^{n,M}_{\nabla|k} \longrightarrow \int \mathrm{Grb}^{n,M}_{\nabla|l}$$

分别是 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}}}$ 和 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}$ 上协变模型结构中纤维对象之间的纤维化。因此，根据 *[20, 定理 4.4.14]*，它们是左纤维化。

证明。 断言 1 由引理 A.6 和引理 4.8 得出。断言 2 是注 10.14 和定理 A.2 的推论。□

最后，单纯预层 $\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|,k}$ 和 $\mathrm{Grb}^{n,M}_{\nabla|,k}$，以及等价地，定义 10.17 中与之对应的左纤维化，分别表示 $N\mathrm{B}\mathcal{D}$ 和 $N\mathcal{C}\mathrm{art}$ 上的 ∞-预层。回顾附录 A 中的 ∞-范畴局部化函子 $\gamma_{\mathcal{C}} \colon N\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta) \longrightarrow \mathcal{F}\mathrm{un}(N\mathcal{C}, \mathcal{S})$，其中 $\mathcal{C}$ 是任意小范畴。

定义 10.19。对每个$k,l \in \mathbb{N}_0$满足 $0 \leq l \leq k \leq n+1$的情形，我们定义以下 ∞-函子：

$$\mathbb{G}\mathrm{rb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k} := \gamma_{\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}}}\big(\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k}\big) \qquad \in \mathcal{P}(N\mathrm{B}\mathcal{D}),$$
$$\mathbb{G}\mathrm{rb}^{n,M}_{\nabla|k} := \gamma_{\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}\big(\mathrm{Grb}^{n,M}_{\nabla|k}\big) \qquad \in \mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art}).$$

注意，我们再次得到诱导的投影态射

$$p^k_l \colon \mathbb{G}\mathrm{rb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k} \longrightarrow \mathbb{G}\mathrm{rb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|l},$$

对每个$k,l \in \mathbb{N}_0$满足 $0 \leq l \leq k \leq n+1$的情形。

最后，我们定义带联络的 n-丛的光滑族的曲率：考虑 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$ 中的一个对象 $X = (c, \hat{U} \to U)$，并令 $(G, A) = (g, A_1, \ldots, A_{n+1})$ 为 $\mathrm{gGrb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla}(X)$ 中的一个顶点。也就是说，$g : \check{C}_{n+1}\hat{U} \to U(1)$ 是一个光滑函数，而 $A_i \in \Omega^{i,v}(\check{C}_{n+1-i}\hat{U})$ 是一个竖直 i-形式，其中 $i = 1, \ldots, n+1$。这些数据满足例 B.13 中方程的类似形式，只是将德拉姆微分替换为竖直德拉姆微分。于是，根据引理 10.1，存在唯一的 $H \in \Omega^{n+2,v,\mathcal{D}}\mathrm{cl}(c)$，使得 $\delta H = d^v A_{n+1}$ on $c \times M$。与带联络的 n-丛（即没有光滑族的情形）类似，可以验证此形式在 $\mathrm{gGrb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla}(X)$ 中的等价以及覆盖的细化下保持不变，并且与沿 $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 中态射的拉回相容。特别地，通过此构造，我们得到一个态射

$$\mathrm{curv} \colon \pi_0 \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla} \longrightarrow \Omega^{n+2,v,\mathcal{D}} \tag{10.20}$$

in $\mathrm{Fun}(\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta)$，其中 π_0 逐对象取每个 $c \in \mathrm{B}\mathcal{D}$ 的连通分支 .

定义 10.21。设 $n \in \mathbb{N}_0$。态射 (10.20) 称为带联络的曲率 n-gerbe。$\mathcal{G}$ 上的联络 $\mathcal{A}$ 称为平坦 的，若 $\mathrm{curv}(\mathcal{G}, \mathcal{A}) = 0$。我们令

$$\mathrm{Grb}_\flat^{n,\mathcal{D}} \subset \mathrm{Grb}_\nabla^{n,\mathcal{D}}$$

表示具有平坦联络的n-gerbe 上的全单纯子预层。最后，记 $\mathrm{Grb}_{\nabla|}^{n\ \mathcal{D}}{}_{,k} := \mathrm{Grb}_\flat^{n\ \mathcal{D}}{}_{,}$，其中$k > n + 1$。

10.3. **固定k-联络的n-gerbe 的结构**。我们旨在研究涉及高阶丛上的联络的几何数据的高阶模叠。这里我们首先介绍给定n-gerbe 上联络的光滑族所构成的叠，或者等价地，任意流形M上的 Deligne 微分上循环的 ∞-叠。设$n,k \in \mathbb{N}_0$，且 $0 \leq k \leq n + 1$。回忆注 6.6，带有k-联络 $(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(k)})$ 的n-gerbe $\in \mathrm{Grb}_{\nabla|}^{n\ M}{}_{,k}(\mathbb{R}^0)$ 在M 上诱导出一个态射

$$\tilde{\sigma}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(k)}) \colon N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \int \mathrm{Grb}_{\nabla|k}^{n,\mathcal{D}[\mathcal{G}]}$$

到$N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$上的左纤维化。

定义 10.22。令 $0 \leq k \leq n + 1 \in \mathbb{N}_0$，并假设 $\mathcal{G} \in \mathrm{Grb}^{n,M}(\mathbb{R}^0)$ 是 M 上的一个 n-丛。

(1) 我们将 $N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 上的左纤维化定义为以下拉回

$$\begin{array}{ccc} \int \mathrm{Con}_k(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \int \mathrm{Grb}_{\nabla|k}^{n,M} \\ \downarrow & & \downarrow \\ N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} & \xrightarrow[\tilde{\sigma}\mathcal{G}]{} & \int \mathrm{Grb}^{n,M} \end{array} \tag{10.23}$$

该左纤维化呈现了 ∞-堆 $\mathbb{C}\mathrm{on}_k(G)$ 上的 n-丛 G 的 k-联络（光滑族）。。

(2) 假设 $\mathcal{A}^{(k)}$ 是 k-联络，定义在 $\mathcal{G}$ 上；也就是说，$(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(k)})$ 是 $\mathrm{Grb}_{\nabla|}^{n\ M}{}_{,k}(\mathbb{R}^0)$ 中的一个元素。我们将 $N\mathcal{C}$ $\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 上的左纤维化定义为以下拉回

$$\begin{array}{ccc} \int \mathrm{Con}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(k)}) & \longrightarrow & \int \mathrm{Grb}_\nabla^{n,M} \\ \downarrow & & \downarrow \\ N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} & \xrightarrow[\tilde{\sigma}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(k)})]{} & \int \mathrm{Grb}_{\nabla|k}^{n,M} \end{array}$$

该左纤维化呈现了 ∞-堆 $\mathbb{C}\mathrm{on}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(k)})$ 上的 n-丛连同 k-联络 $(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(k)})$ 的联络（光滑族），也就是说，呈现了将 $\mathcal{A}^{(k)}$ 延拓为 $\mathcal{G}$ 上的完整 $(n+1)$-联络的各种方式（对于 $k \neq 0$）。

据我们所知，这些堆此前尚未见诸文献。对于$n > 0$，我们看到，即使忽略光滑族这一方面，并在 $\mathbb{R}^0 \in \mathcal{C}\mathrm{art}$ 上考察 $\mathbb{C}\mathrm{on}_k(\mathcal{G})$，固定$n$-gerbe 上的$k$-联络也具有（截断） ∞-群胚的结构。这与李群作为结构群的主丛上的联络这一 1-范畴情形形成鲜明对比：任何这类丛上的联络构成一个仿射集合。例如，1-gerbe 上的 2-联络构成一个真正的群胚。对于M的一个固定良好开覆盖$\mathcal{U}$，该群胚的态射是移位

$$(g, A_1, A_2) \longmapsto (g, A_1 + \delta C, A_2 + \mathrm{d}C),$$

其中$C \in \Omega^1(\check{C}_0\mathcal{U})$是任意 1-形式。这些态射既不属于 1-丛的规范 2-群作用，也不属于类似于主丛上的联络所具有的仿射作用（关于此处的仿射作用，另请参见下文段落以及定理 13.1 的证明）。相反，它们是 1-丛上 2-联络这一概念所固有的，也是固定的高阶主丛上高阶联络的真正特征。迄今为止，高阶丛文献中尚未讨论过它们。

上述群胚 $\mathbb{C}\mathrm{on}(\mathcal{G})(\mathbb{R}^0)$，即 1-gerbe $\mathcal{G}$ 在 M 上的联络群胚，带有由以下 (Baez-Crans) 2-向量空间给出的另一个仿射作用：其对象是满足 $\delta\omega_1 = 0$ and $\mathrm{d}\omega_1 = -\delta\omega_2$ 的对 (ω_1, ω_2)，其中 $\omega_i \in \Omega^i(\check{C}_{2-i}\mathcal{U})$；其态射 $(\omega_1, \omega_2) \to (\omega_1', \omega_2')$ 是满足 $\delta\eta = \omega_1' - \omega_1$ and $\mathrm{d}\eta = \omega_2' - \omega_2$ 的 1-形式 $\eta_1 \in \Omega^1(\check{C}_0\mathcal{U})$（作为群胚，这与平凡 1-纤维丛上的 2-联络群胚一致）。

注记 10 .24. 拉回方块 (10.23) 是 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}$ 中的同伦纤维序列。它给出一个纤维序列 ts 是一个纤维序列
其形式为 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中的序列

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\mathrm{on}_k(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathbb{G}\mathrm{rb}^{n,M}_{\nabla|k} \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \xrightarrow[\bar{\sigma}\mathcal{G}]{} & \mathbb{G}\mathrm{rb}^{n,M} \end{array} \tag{10.25}$$

这个纤维序列既是 [35,Thm. A] 中短正合列的范畴化，也是它的光滑增强。对于 $k = n+1$，它也可以看作微分上同调六边形 [71] 中朝上的对角短正合列的光滑族增强。自该文献首次发表以来，已有人找到了该图表的范畴化 [1, 18, 49, 68],，但迄今尚未研究光滑族，尤其是微分上循环的模空间；特别是，纤维序列 (10.25) 属于微分上同调模型的一个光滑族精化之中，见 [68]。◁

例 10.26. 令 $\mathcal{G}$ 为 M 上的平凡 1-gerbe，并且只考虑 $\mathcal{G}$ 上联络的群胚 $\mathbb{C}\mathrm{on}_2(\mathcal{G})(\mathbb{R}^0)$（即不考虑光滑族）。这是由前一段所述的配对 (ω_1, ω_2) 构成的群胚。根据引理 10.1， $\mathbb{C}\mathrm{on}(\mathcal{G})(\mathbb{R}^0)$ 中的每个对象都同构于形如 $(0, \omega_2)$ 的对象。因此我们看到，平凡 1-gerbe 上联络的同构类满足

$$\pi_0\big(\mathbb{C}\mathrm{on}_2(\mathcal{G})(\mathbb{R}^0)\big) \cong \frac{\Omega^2(M)}{\mathrm{d}\Omega^1(M)}\,.$$

此群胚中任意对象的自同构满足

$$\pi_1\big(\mathbb{C}\mathrm{on}_2(\mathcal{G})(\mathbb{R}^0)\big) \cong \Omega^1_{\mathrm{cl}}(M)\,.$$

特别地， $\mathbb{C}\mathrm{on}_2(\mathcal{G})$ 是一个真正的群胚，而非集合。 ◁

11. 规范作用与高阶形式对称性

涉及高阶 U(1) 联络的几何数据的高阶模叠，是与高阶堆 $\mathbb{C}\mathrm{on}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(k)})$的商；该高阶堆与第 10.3 节中给定 n-gerbe 配备 k-联络的联络高阶堆密切相关。回顾一下， $\mathbb{C}\mathrm{on}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(k)})$ 和高阶规范群 $\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(k)})$ 都具有高阶结构。为了更好地理解 $(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(k)})$ 上联络的规范理论结构，我们将在本节计算 $\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(k)})$ 对 $\mathbb{C}\mathrm{on}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(k)})$ 的作用。

第 1 部分中的一般形式体系给出了高阶规范变换的内在作用；该作用通过单纯集合的左纤维化，或通过分类此作用的 ∞-预叠的映射来编码（例如，参见公式 (8.16) 和第 8.4.1 节开头）。这样做的一大优点是，我们能够用 ∞范畴的左 Kan 延拓来描述模空间 ∞-预叠。虽然这确实编码了光滑高阶群的 ∞范畴作用，但我们可以用切赫–Deligne 复形和 Dold-Kan 构造，以非常具体的方式描述 M 上的带 k-联络的 n-gerbe 族，这一点引出了一个问题：我们能否也用如此明确的方式描述高阶规范作用？特别是，这应当能够还原熟知的 M 上 U(1)-丛的规范作用。因此，本节的第一个主要目标是从我们的形式体系中提取高阶 U(1)-丛的高阶规范作用的显式模型。这相当于将上述左纤维化所呈现的高阶群作用严格化。特别是，

一个重要的一致性检验是，我们的形式体系所导出的严格化作用具有预期的形式。

本节的第二个目标是探讨高阶 U(1) 规范对称性与物理学文献 [34] 中的高阶形式对称性之间的关系。我们认为，我们在第 7 节中发展的高阶几何结构的高阶对称群，在场论中的可逆高阶范畴对称性这一背景下具有更广泛的相关性；不过，此处我们将注意力限制在高阶 U(1) 联络的情形。

设 $k,l,n \in \mathbb{N}_0$，其中 $0 \leq k < l \leq n+1$。在第 8 节的形式体系中，我们令 $\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} = \mathbf{Grb}^{n\,\mathcal{D}}_{\nabla|\,,k}$ 和 $\mathrm{Fix}^{\mathcal{D}} = \mathbf{Grb}^{n\,\mathcal{D}}_{\nabla|\,,l}$，其典范投影态射为 $p^k_l\colon \mathbf{Grb}^{n\,\mathcal{D}}_{\nabla|\,,k} \longrightarrow \mathbf{Grb}^{n\,\mathcal{D}}_{\nabla|\,,l}$。为了揭示高阶 U(1) 规范变换的作用，令 $\mathrm{Sol}^{\mathcal{D}} = \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}$。设 $(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)}) \in \mathbf{Grb}^{n\,M}_{\nabla|\,,k}(\mathbb{R}^0)$ 是一个带有 l-联络的 n-gerbe，定义在 M 上。回顾拉回方块 (8.16)，这里可写为

$$\begin{array}{ccc} \int \mathrm{Sol}^M_{\mathrm{res}}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)}) & \hookrightarrow & \int \mathrm{Sol}^M(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{BAUT}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G},\ \mathcal{A}^{(l)}) & \hookrightarrow & \int \mathbf{Fix}^M_{[\mathcal{G}]} \end{array}$$

垂直态射是左纤维化（根据命题 8.14）。

备注 11.1。 我们还记得，根据定义 8.27，复合左纤维化 $\int \mathrm{Sol}^M_{\mathrm{res}}(\mathcal{G},\ \mathcal{A}^{(l)}) \to N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ presents 表示了模空间 ∞-堆：它是 $(\mathcal{G},\ \mathcal{A}^{(l)})$ 上的k-联络模去规范变换所得，即 $(\mathcal{G},\ \mathcal{A}^{(l)})$ 的自同构。因此，我们也可以同样写作

$$\int \mathrm{Mdl}_{\mathrm{res},k}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)}) := \int \mathrm{Sol}^M_{\mathrm{res}}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)})$$

对于左纤维化在 $N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 上的定义域，它描述了 $(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})$ 上的 k-联络，模去 $(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})$ 的自同构所构成的作用。◁

由构造可知，

$$\mathbf{BAUT}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)}) = r^*_{\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}} \mathbf{BAut}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)})\,,$$

其中 $\mathbf{BAut}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})$ 是 $\mathbf{Grb}^{n\,M}_{\nabla|\,,l}$ 中以截面 $(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)})$ 为对象的满单纯子预层。也就是说，

$$\mathbf{BAut}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)}) = \mathbf{B}\Omega_{(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})}\mathbf{Grb}^{n,M}_{\nabla|l}\,,$$

其中 $\Omega_{(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})}$ 表示以 $(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})$ 为基点的环路。由通过 Dold-Kan 对应构造 $\mathbf{Grb}^{n\,M}_{\nabla|\,,l}$ （参见第 10 节）可知，存在一个典范同构

$$\mathbf{Aut}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)}) \cong \mathbf{Grb}^{n-1,M}_{\nabla|l}\,. \tag{11.2}$$

这是 M 上的一个单纯阿贝尔群预层。它是 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中的群对象$\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})$ 的一个表示（按 [61, 命题 3.35] 的含义）。

记号 11.3。 回顾我们的约定：

$$\mathbf{Grb}^{n,M}_{\nabla|l} = \mathbf{Grb}^{n,M}_{\flat}$$

每当 $l \geq n+2$。特别地，对于 $l = n+1$ （即 $(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})$ 是一个带有完全联络的 n-gerbe），等价（11.2）写作

$$\mathbf{Aut}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)}) = \mathbf{Grb}^{n-1,M}_{\flat}$$

（由于两个群都是阿贝尔群，因此我们可以省略上标 rev。） ◁

我们将注意力限制在由任意固定的笛卡尔空间 $c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$ 参数化的族上。根据引理 4.5、命题 4.6 和 [20, 推论 5.3.6]，我们还可以进一步将研究范围限制在任意固定的 $\mathbf{GCov}_{/c}$ 对象 $(\hat{}\mathcal{U} \to \mathcal{U})$ 上（见定义 3.14）。为简洁起见，我们令

$$A := \mathrm{Tot}^{\times}\left(\tau_{\geq 0}(\mathbf{b}^{n+1-k}\mathbf{b}^k_{\nabla}\mathbf{U}(1)(\check{\mathbf{C}}\hat{\mathcal{U}}))\right) \qquad \text{and} \qquad C := \mathrm{Tot}^{\times}\left(\tau_{\geq 0}(\mathbf{b}^{n+1-l}\mathbf{b}^l_{\nabla}\mathbf{U}(1)(\check{\mathbf{C}}\hat{\mathcal{U}}))\right)$$

表示描述 M 上带有 k-联络和 l-联络的 n-gerbe 光滑族的 Čech-Deligne 双复形（截断到非负次数）的总（乘积）复形。按照定义 10.8 的记号，我们于是有

$$\widetilde{\mathrm{Grb}}^{n,M}_{\nabla|k}(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}) = \Gamma A \qquad \text{and} \qquad \widetilde{\mathrm{Grb}}^{n,M}_{\nabla|l}(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}) = \Gamma C\,.$$

根据上述讨论，存在一个典范同构

$$\mathrm{BAut}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}) \cong \Gamma(\tau_{\geq 1} C) = \Gamma\big(0 \longleftarrow Z_1(C) \xleftarrow{D_C} C_2 \xleftarrow{D_C} \cdots \big)\,.$$

这里，D_C 是复形C中的微分，而$Z_1(C)$表示C中的 1-循环群；它位于一阶。我们进一步将 ΓA 的一个单纯子集定义为如下拉回

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mdl}_{\mathrm{res},k}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}) & \longrightarrow & \Gamma A \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma p^k_l} \\ \Gamma(\tau_{\geq 1} C) & \xrightarrow[\{(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)})\}]{} & \Gamma C \end{array}$$

其中，底部态射是由单个顶点（$\mathcal{G}$，$\mathcal{A}^{(l)}$）上的满单纯子集到整体的包含。具体而言，按照 Dold-Kan 构造（使用附录 B 中的记号），我们有

$$\mathrm{Mdl}_{\mathrm{res},k}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U})_r \coloneqq \left\{ X = (X_\varphi)_{\varphi \in [r] \to [t]} \in \Gamma A \,\middle|\, X_\varphi \in A_t,\ (p^k_l)_0(X_{[r]\to[0]}) = (\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)}) \right\},$$

对每个$r \in \mathbb{N}_0$。因此，根据构造，存在一个典范等价

$$\mathrm{Mdl}_{\mathrm{res},k}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}) \simeq \mathrm{Sol}^M(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)})(c)\,.$$

T该 Kan 纤维化 Γp^k_l限制后仍是 Kan 纤维化（我们仍用同一名称表示它）

$$\Gamma p^k_l \colon \mathrm{Mdl}_{\mathrm{res},k}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}) \longrightarrow \Gamma(\tau_{\geq 1} C)\,.$$

注意，$\Gamma(\tau_{\geq 1} C)$ 是一个约化单纯集，即它只有一个顶点。还有一个拉回图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Con}_k(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}) & \longrightarrow & \mathrm{Mdl}_{\mathrm{res},k}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma p^k_l} \\ \Delta^0 & \longrightarrow & \Gamma(\tau_{\geq 1} C) \end{array}$$

在 $\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 中，其中显式地，

$$\begin{aligned} &\mathrm{Con}_k(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U})_r \qquad (11.4)\\ &= \left\{ X = (X_\varphi)_{\varphi \in [r]\to[t]} \,\middle|\, X_\varphi \in A_t,\ (p^k_l)_0(X_{\mathrm{id}_{[0]}}) = (\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)}),\ (p^k_l)_r(X_\varphi) = 0\ \forall\, \varphi \colon [r] \twoheadrightarrow [t], t > 0 \right\}. \end{aligned}$$

最后，根据构造，存在一个典范等价

$$\mathrm{Con}_k(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)})(c) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Con}_k(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U})\,.$$

这里我们用到了 $\mathrm{Con}_k(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)}) \in \mathcal{H}$ 是一个同伦层这一事实（例如，这可由推论 9.15 得出；也可由如下事实得出：定义 10.22 中的拉回是满足同伦下降的左纤维化之间的同伦拉回）。

因此，限制到由 $c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$ 参数化的族时，高阶规范作用由以下 Kan 纤维化建模

$$\Gamma p^k_l \colon \mathrm{Mdl}_{\mathrm{res},k}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}) \longrightarrow \Gamma(\tau_{\geq 1} C)\,.$$

更具体地说，这个 Kan 纤维化呈现了一个 ∞-函子

$$\mathrm{B}\big(\mathrm{Aut}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U})\big) = \Gamma(\tau_{\geq 1} C) \longrightarrow \mathcal{S} \qquad (11.5)$$

它编码了由约化单纯集$\Gamma(\tau_{\geq 1}C)$呈现的 ∞-群 $\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})(c)$ 对由 $\Gamma\ker(p_l^k)$ 呈现的空间 $\mathrm{Con}_k(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})(c)$ 的作用。

现在我们通过 Dold-Kan 对应给出这一作用的严格化。根据 [12, Rmk. 3.5、Rmk. 3.6、引理 3.7], ，如 (11.5) 中所示的一个 ∞-函子对应于以下数据：对于每个态射 $Y\colon \Delta^r \to \Gamma(\tau_{\geq 1}C)$，我们需要指定一个左纤维化

$$\big(\mathrm{Mdl}_{\mathrm{res},k}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}}\to\mathcal{U})\big)(Y)\longrightarrow\Delta^r$$

以及对每个 $\psi\colon \Delta^s\to\Delta^r$，选择一个拉回图

$$\begin{array}{ccc}\big(\mathrm{Mdl}_{\mathrm{res},k}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}}\to\mathcal{U})\big)(Y;\psi) & \xrightarrow{\widehat{\psi}} & \big(\mathrm{Mdl}_{\mathrm{res},k}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}}\to\mathcal{U})\big)(Y)\\ \downarrow & & \downarrow\\ \Delta^s & \xrightarrow[\psi]{} & \Delta^r\end{array}\tag{11.6}$$

这些数据必须满足以下相干条件：

$$\big(\mathrm{Mdl}_{\mathrm{res},k}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}}\to\mathcal{U})\big)(Y;\psi)=\big(\mathrm{Mdl}_{\mathrm{res},k}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}}\to\mathcal{U})\big)(Y\circ\psi)$$

作为 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/\Delta^s}$ 中的对象，对于每个 $Y\colon \Delta^r\to\Gamma(\tau_{\geq 1}C)$ 以及每个 $\psi\colon\Delta^s\to\Delta^r$。我们通过定义 $(\mathrm{Mdl}_{\mathrm{res},k}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})(\hat{}\mathcal{U}\to\mathcal{U}))(Y)$ 为以下拉回，得到这类数据的一个规范选择

$$\begin{array}{ccc}\big(\mathrm{Mdl}_{\mathrm{res},k}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}}\to\mathcal{U})\big)(Y) & \longrightarrow & \mathrm{Mdl}_{\mathrm{res},k}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}}\to\mathcal{U})\\ \downarrow & & \downarrow\\ \Delta^r & \xrightarrow[Y]{} & \Gamma(\tau_{\geq 1}C)\end{array}$$

对每个$Y\colon \Delta^r\to\Gamma(\tau_{\geq 1}C)$，其中我们使用 $\mathcal{S}\mathrm{et}$ 中拉回的典范构造来构造 $(\mathrm{Mdl}_{\mathrm{res},k}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})(\hat{}\mathcal{U}\to\mathcal{U}))(Y)$（另见 [12, 引理 3.7]），并令

$$\big(\mathrm{Mdl}_{\mathrm{res},k}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}}\to\mathcal{U})\big)(Y;\psi):=\big(\mathrm{Mdl}_{\mathrm{res},k}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}}\to\mathcal{U})\big)(Y\circ\psi),$$

对每个 $\psi\colon\Delta^s\to\Delta^r$。这典范地诱导出态射 ψ 的选取，如 (11.6) 中所示（另见 [12,引理3.7]）。请注意，具体而言，

$$\begin{aligned}&\big(\mathrm{Mdl}_{\mathrm{res},k}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}}\to\mathcal{U})\big)(Y)_M\\ &=\big\{X=(X_\varphi)_{\varphi\in[m]\twoheadrightarrow[t]}\,\big|\,X_\varphi\in A_t,\ (p_l^k)_0(X_{[m]\twoheadrightarrow[0]})=(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)}),\ (p_l^k)_m(X_\varphi)=Y_\varphi\ \forall\,\varphi\colon[m]\twoheadrightarrow[t],t>0\big\}.\end{aligned}\tag{11.7}$$

注记 11.8。由于 $\mathrm{Mdl}_{\mathrm{res},k}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})(\hat{}\mathcal{U}\to\mathcal{U})\to\Gamma(\tau_{\geq 1})$ 甚至是 Kan 纤维化，因此所有纤维化 $(\Gamma A)(Y)\to\Delta^r$ 和 $(\Gamma A)(Y;\psi)\to\Delta^s$ 也都是如此，因为 Kan 纤维化在拉回下保持不变。◁

假设给定了任意这样一个相容的左纤维化与拉回的集合。令$Y\colon\Delta^r\to\Gamma(\tau_{\geq 0}C)$ 为任意一个r-单形。由于 $\Delta^{\{0\}}\hookrightarrow\Delta^r$ 中初始顶点的包含是左平凡纤维化，对于每个$r\in\mathbb{N}$，每个实线方块中的左侧垂直态射

$$\begin{array}{ccc}\Delta^{\{0\}}\times\mathrm{Con}_k(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}}\to\mathcal{U}) & \hookrightarrow & \big(\mathrm{Mdl}_{\mathrm{res},k}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}}\to\mathcal{U})\big)(Y)\\ \downarrow & \overset{\rho(Y)}{\nearrow} & \downarrow\\ \Delta^r\times\mathrm{Con}_k(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}}\to\mathcal{U}) & \xrightarrow[\mathrm{pr}]{} & \Delta^r\end{array}\tag{11.9}$$

是单纯集合之间的左平凡单射（借助 [20, 命题 3.4.3]）。由于右侧的竖直态射是左纤维化（根据注 11.8，它甚至是 Kan 纤维化），上述方形存在一个提升 $\rho(Y)$，而且该提升在可缩选择意义下唯一。

此外，结合注 11.8 与（对偶的） [20, 定义 4.4。1] 和 [20, 命题 4.4。11], ，我们得到上述图表中的顶端水平态射是一个共终单射，并且

因此也是一个左迷向扩张 [20, 推论 4.1。9]。由此可知，在这种情况下，方形中的任意提升本身都是共尾的，特别地，它是一个弱同伦等价。

这意味着我们可以将右侧的垂直 Kan 纤维化平凡化。若我们还能为每个Y在 (11.9) 中找到提升，且这些提升与 $\Gamma(\tau_{\geq 1}\mathcal{C})$ 的单纯结构相容，那么就能为 ∞-函子 (11.5) 构造出一个显式的严格模型。

定理 11.10。 设 k、l、$n \in \mathbb{N}_0$ 满足 $0 \leq l < k$，并设$(\mathcal{G}, A^{(l)})$ 是 M 上带有 l-联络的 n-丛。设$(\hat{U} \to U) \in \mathrm{GCov}_{\mathcal{C}}$。存在一族同构

$$\rho(Y)\colon \Delta^r \times \mathrm{Con}_k(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}) \longrightarrow \big(\mathrm{Mdl}_{\mathrm{res},k}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U})\big)(Y)\,,$$

由所有态射 $Y\colon \Delta^r \to \Gamma(\tau_{\geq 1}\mathcal{C})$ *in* $\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$索引；此外，这族同构与 $\Gamma(\tau_{\geq 1}\mathcal{C})$ 的单纯结构相容。也就是说，ρ 构成函子之间的自然同构 $\mathbb{\Delta}_{/\Gamma(\tau_{\geq 1}\mathcal{C})} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$，且该同构与到函子 $\Delta^\cdot \circ \mathrm{pr}\colon \mathbb{\Delta}_{/\Gamma(\tau_{\geq 1}\mathcal{C})} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 的投影交换。

证明。 对于每个 $(\hat{c} \to c) \in \mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ （符号说明见第3节.1），以及每个$t \in \mathbb{N}_0$，都存在一个阿贝尔群态射（即忽略微分）

$$\big(\mathrm{b}^{n+1-l}\mathrm{b}^l_\nabla \mathrm{U}(1)\big)_t(\hat{c} \to c) \longrightarrow \big(\mathrm{b}^{n+1-k}\mathrm{b}^k_\nabla \mathrm{U}(1)\big)_t(\hat{c} \to c)$$

它在$t < n+1-k$次为零映射，在$t \geq n+1-k$次为恒等映射（回忆一下第 10 节中的记号）。这些态射与$\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$中态射的作用相容，因此我们得到一族阿贝尔群预层的态射

$$s_t\colon \big(\mathrm{b}^{n+1-l}\mathrm{b}^l_\nabla \mathrm{U}(1)\big)_t \longrightarrow \big(\mathrm{b}^{n+1-k}\mathrm{b}^k_\nabla \mathrm{U}(1)\big)_t\,,$$

它们是以下态射的截面

$$(p^k_l)_t\colon \big(\mathrm{b}^{n+1-k}\mathrm{b}^k_\nabla \mathrm{U}(1)\big)_t \longrightarrow \big(\mathrm{b}^{n+1-l}\mathrm{b}^l_\nabla \mathrm{U}(1)\big)_t\,,$$

对每个$t \in \mathbb{N}_0$。

由s_t 与态射的作用相容可知，s_t 与切赫微分相容，因此对每个$t \in \mathbb{N}_0$，我们得到一个诱导的阿贝尔群态射

$$\check{s}_t\colon (\tau_{\geq 1}C)_t \longrightarrow A_t\,.$$

然而，这*not* 不是链复形的态射，因为 $\tau_{\geq 1}C$ 中的微分D_C 仅通过切赫微分作用于最高形式次数，而D_A 还通过（垂直）德拉姆微分作用。由于s_t 是$(p^k_l)_t$的截面，我们有

$$(p^k_l)_t \circ \check{s}_t = \mathrm{id}_{(\tau_{\geq 1}C)_t} \qquad \forall\, t \in \mathbb{N}_0\,. \tag{11.11}$$

为了指定陈述中所述的一组映射 $\rho(Y)$，只需为每个Y指定映射

$$\rho_{(r)}(Y)\colon \{\sigma_r\} \times \big(\mathrm{Con}_k(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U})\big)_r \longrightarrow \big(\mathrm{Mdl}_{\mathrm{res},k}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U})\big)(Y)_r\,,$$

其中 $\sigma_r \in \Delta^r_r$ 是唯一的非退化r-单形。接下来要求对每个 $\psi\colon \Delta^s \to \Delta^r$，存在一个交换方块，从而确定映射 $\rho(Y)$

$$\begin{array}{ccc}
\Delta^s \times \mathrm{Con}_k(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}) & \xrightarrow{\rho(Y\circ\psi)} & \big(\mathrm{Mdl}_{\mathrm{res},k}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U})\big)(Y \circ \psi) \\
\downarrow{\scriptstyle \psi\times \mathrm{id}} & & \downarrow \\
\Delta^r \times \mathrm{Con}_k(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}) & \xrightarrow[\rho(Y)]{} & \big(\mathrm{Mdl}_{\mathrm{res},k}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U})\big)(Y)
\end{array}$$

其中，右侧的竖直态射由赋值 $(\mathrm{Mdl}_{\mathrm{res},\,k}(\mathcal{G},\ \mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}))(-)$ 固定。回顾表达式 (11.4) 和 (11.7)。r-单形 $Y\colon \Delta^r \to \Gamma(\tau_{\geq 1}C)$ 由一个族组成

$$Y = (Y_{\varphi\colon [r]\to[t]}) \quad \in \bigoplus_{\varphi\colon [r]\to[t]} (\tau_{\geq 1}C)_t\,, \qquad \text{with} \qquad Y_{[r]\to[0]} = 0\,.$$

设 $X = (X_{\varphi\colon [r]\twoheadrightarrow[t]})$ 是 $\mathrm{Con}_k(\mathcal{G},\ \mathcal{A}^{(l)})(\hat{}\mathcal{U} \to \mathcal{U})$ 的一个r-单形。令

$$\big(\rho_{(r)}(Y)(X)\big)_{\varphi\colon [r]\twoheadrightarrow[t]} := X_\varphi + \check{s}_t(Y_\varphi) \quad \in A_t\,.$$

特别地，由 (11.4) 和 (11.11) 可得

$$\big(\rho_{(r)}(Y)(X)\big)_{[r]\twoheadrightarrow[0]} = X_{[r]\twoheadrightarrow[0]}\,, \qquad \text{and}$$
$$(p_l^k)_t\big(\rho_{(r)}(Y)(X)\big)_{\varphi\colon [r]\twoheadrightarrow[t]} = (p_l^k)_t\big(X_\varphi + \check{s}_t(Y_\varphi)\big) = Y_\varphi\,,$$

对于每个满射 $\varphi\colon [r]\twoheadrightarrow[t]$，其中 $t > 0$。因此，我们确实看到，

$$\rho_{(r)}(Y)(X) \in \mathrm{Mdl}_{\mathrm{res},k}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U})$$

（比较 (11.4) 和 (11.7)）。此外，映射 $\rho_{(r)}(Y)$ 的逆映射为

$$\rho_{(r)}(Y)^{-1}\colon \big(\mathrm{Mdl}_{\mathrm{res},k}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U})\big)_r \longrightarrow \big(\mathrm{Con}_k(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U})\big)_r\,,$$
$$\big(X' = (X'_{\varphi\colon [r]\twoheadrightarrow[t]})\big) \longmapsto \big(X = (X'_\varphi - \check{s}_t(Y_\varphi))\big)\,.$$

根据构造，诱导映射 $\rho(Y)$ 与到 Δ^r 的投影以及单纯结构相容。□

注 11.12。因此，我们可以将 $\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})$ 在 $\mathbb{C}\mathrm{on}_k(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})$ 上的高阶规范作用展开如下：赋值

$$Y \longmapsto \Delta^r \times \mathrm{Con}_k(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U})\,,$$

现在它显然在对象上是常值的。相反，它包含了高阶规范作用在结构态射中的全部信息。

$$\Delta^s \times \mathrm{Con}_k(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}) \longrightarrow \Delta^r \times \mathrm{Con}_k(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U})$$

与单纯形映射 $\psi\colon \Delta^s \to \Delta^r$ 相关联。

然而，根据定理 11.10，它等价于从左纤维化（甚至是 Kan 纤维化）中提取的 ∞-函子的标准表示（11.7）。

$$\Gamma p_l^k\colon \mathrm{Mdl}_{\mathrm{res},k}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}) \longrightarrow \Gamma(\tau_{\geq 1}C)\,.$$

因此，我们给出了一个等价的 ∞-函子 $\Gamma(\tau_{\geq 0}C) \to \mathcal{S}$，它同样分类了上述左纤维化，因此编码了所需的高阶规范作用。◁

我们可以读出高阶规范变换的作用：带有 l-联络的 n-丛 $(G, A^{(l)})$ 由相对于覆盖 $(\hat{}U \to U)$ 的切赫-Deligne 上循环 $(g, A_1, \ldots, A_l)$ 表示。令元组 $(g, A_1, \ldots, A_l, A_{l+1}, \ldots, A_k)$ 表示 $(g, A_1, \ldots, A_l)$ 向带有 k-联络的 n-丛的扩张。$(g, A_1, \ldots, A_l)$ 的一个自同构是一个切赫-Deligne 链 $(h, a_1, \ldots, a_{l-1}) \in (\tau_{\geq 1}C)_0$。$(g, A_1, \ldots, A_k)$ 上的恒等态射一单形由这一对给出（参见附录 B）

$$X := \big((g, A_1, \ldots, A_k), (1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{(k-1)\text{ many}})\big)\,.$$

利用由 $(h, a_1, \ldots, a_{l-1})$ 给出的 1-单形 $Y\colon\ \Delta^1 \to \Gamma(\tau_{\geq 1}C)$，并采用定理 11.10 的证明中的记号，我们得到

$$\rho_{(1)}(Y)(X) = \big((g, A_1, \ldots, A_k), (h, a_1, \ldots, a_{l-1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{(k-l)\text{ many}})\big)\,.$$

$(h, a_1, \ldots, a_{l-1})$ 对 $(g, A_1, \ldots, A_k)$ 的高阶规范作用，便是上述 1-单形[12] 的目标；也就是说，

$$(g, A_1, \ldots, A_k) \triangleleft (h, a_1, \ldots, a_{l-1}) = d_0\big(\rho_{(1)}(Y)(X)\big)$$
$$= (g, A_1, \ldots, A_{l-1}, A_l + (-1)^{n+1-l}\mathrm{d}^v a_l, A_{l+1}, \ldots, A_k)\,.$$

[12]严格来说，这是该目标在同构 $\rho^{-1}{}_{(0)}(Y_0)$ 下的像，其中 $Y_0\colon\ \Delta^0 \to \Gamma(\tau_{\geq 1}C)$ 是唯一的态射；不过，$\rho^{-1}{}_{(0)}(Y_0)$ 只是 $\mathrm{Con}_k(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})(\hat{}\mathcal{U} \to \mathcal{U})$ 上的恒等态射。

例 11.13。 考虑如下情形

$$\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} = \mathrm{Grb}^{1,\mathcal{D}}_{\nabla|k} \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}} = \mathrm{Grb}^{1,\mathcal{D}}_{\nabla|l}\,,$$

并令 $\mathrm{Sol}^{\mathcal{D}} \subset \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}$ 为某个解子预层。此处取 $l \in \{0,1\}$，$0 \leq l \leq k$，并采用约定 $\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|} , k = \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\flat}$，对所有 $k \geq n+2$ 均成立。设 $(G, A^{(l)}) \in \mathrm{Grb}^{1,M}_{\nabla|}, l(\mathbb{R}^0)$ 是 M 上带有 l-联络的一个 1-丛。设李群 H 通过态射 $H \to \mathrm{Diff}_{\mathcal{G}}(M)$ 作用于 M；等价地，该作用由 art 上的态射 $\phi\colon \mathbf{B}H \to \mathbf{B}\mathcal{D}(G)$ 编码。这给出 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中群对象的一个短正合列

$$\mathbb{G}\mathrm{rb}^{0,M}_{\nabla|l} \longrightarrow \mathbb{S}\mathrm{ym}_{\Phi}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)}) \longrightarrow H\,. \tag{11.14}$$

此处我们利用了 $\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|}{}_{,l}$ 的构造：存在一个阿贝尔群对象的典范等价

$$\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)}) \simeq \mathbb{G}\mathrm{rb}^{n-1,M}_{\nabla|l}\,,$$

对每个 $(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)}) \in \mathrm{Grb}^{n,M}_{\nabla|}{}_{,l}(\mathbb{R}^0)$ 均成立。回顾一下，$\mathrm{Grb}^{0,M}_{\nabla|}{}_{,l}$ 是（脉络）群胚预层，分别描述了 M 上 U(1) 丛的光滑族（当 $l = 0$ 时）、带联络的 U(1) 丛的光滑族（当 $l = 1$ 时），以及带平坦联络的 U(1) 丛的光滑族（当 $l > 1$ 时）。群结构由 M 上 U(1) 丛的典范张量积诱导。特别地，光滑 2-群 $\mathrm{Grb}^{0,M}_{\flat}$, 是 [69, Sec. 3.1] 和 [34, Sec. 4.1] 中出现的 2-群的光滑增强。

我们考察一些重要的特殊情形，以便进一步联系物理学文献：

(1) 假设 $H^2(M;\mathbb{Z}) \cong 0$，即 M 上的每个 U(1)-丛都是可平凡化的。那么，存在一个典范等价

$$\mathrm{Grb}^{0,M} = \mathrm{Grb}^{0,M}_{\nabla|0} \simeq \mathbf{B}\big(\mathrm{U}(1)^M\big)\,,$$

其中，$\mathrm{U}(1)^M$ 是群层，它将 $c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$ 映为从 $c \times M \to$ 到 U(1) 的光滑映射群。也就是说，在此假设下，对于 $l = 0$，序列 (11.14) 是由 $\mathbf{B}(\mathrm{U}(1)^M)$ 对 H 作出的扩张。

在相同假设下，$\mathrm{Grb}^{0,M}_{\nabla}{}_{,}$ 与通过 Dold-Kan 构造从复形得到的群单纯预层之间存在典范等价

$$\Omega^{1,v,M} \xleftarrow{\mathrm{d}^v \log} \mathrm{U}(1)^M\,,$$

其中，$\Omega^{p,v,M}$ 表示 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 上的层，它将 $c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$ 映为 p-形式的垂直群，定义在 $c \times M$ 上。类似地，$\mathrm{Grb}^{0,M}_{\flat}{}_{,}$ 与由复形关联得到的单纯预层之间存在等价

$$\Omega^{1,v,M}_{\mathrm{cl}} \xleftarrow{\mathrm{d}^v \log} \mathrm{U}(1)^M\,,$$

其中 $\Omega^{p,v,M}_{\mathrm{cl}}$ 表示 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 上的层，它将 $c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$ 映射到 $c \times M$ 上在垂直德拉姆微分 d^v 作用下闭合的垂直 p 形式群。

(2) 此外，假设 M 是单连通的，即 $\pi_i(M) = 0$ 对于 $i = 0, 1$。在这种情况下，M 上的平坦联络 U(1)-丛只有一个同构类，并且我们有一个典范等价

$$\mathrm{Grb}^{0,M}_{\flat} \simeq \mathbf{B}\mathrm{U}(1)\,.$$

在这些假设下，对于 $l = 2$，序列 (11.14) 是 H 被 $\mathbf{B}\mathrm{U}(1)$ 扩张。这些扩张也出现在 [69] 中。

(3) 若李群 H 是离散群（例如任意有限群），则短正合序列 (11.14) 由群上同调分类；这里的系数仍取自高阶群，但我们可以忽略所涉及高阶群的光滑结构，因此

这一情形下，问题就纯粹变成了代数问题。于是，序列 (11.14) 由以下上同调类分类：

$$\mathrm{H}^2\big(H;\mathrm{Grb}^{0,M}_{\nabla|l}(\mathbb{R}^0)\big)\,.$$

特别地，在本例中采用（1）和（2）中的简化假设，并且对于$l>0$，我们有一个典范等价

$$\mathrm{H}^2\big(H;\mathrm{Grb}^{0,M}_{\nabla|l}(\mathbb{R}^0)\big)\cong\mathrm{H}^2\big(H;\mathrm{BU}(1)\big)\cong\mathrm{H}^3\big(H;\mathrm{U}(1)\big)\,,$$

其中 U(1) 被视为纯代数群。也就是说，这个上同调群的元素描述了在M 上为带有 2-联络的 1-丛（$\mathcal{G},\mathcal{A}$）赋予H-等变结构的障碍（参见推论 7.29）。◁

注11.15. 设（$\mathcal{G},\mathcal{A}^{(n)}$）是一个带有$n$-联络的$n$-gerbe，回忆一下光滑高阶群之间的典范等价

$$\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(n)})\simeq\mathbb{G}\mathrm{rb}^{n-1,M}_{\nabla}\,.$$

每一对（$\Sigma^{(n)},\sigma$）由闭合定向n-流形 $\Sigma^{(n)}$ 和光滑映射 $\sigma\colon\Sigma^{(n)}\to M$ 构成，并由此产生一个光滑群态射

$$\begin{aligned}U_{(-)}(\Sigma^{(n)},\sigma):=\mathrm{hol}\big(\Sigma,\sigma^*(-)\big)\colon\pi_0\,\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(n)})&\longrightarrow\mathrm{U}(1)\,,\\(\mathcal{G}',\mathcal{A}')&\longmapsto\mathrm{hol}\big(\Sigma^{(n)},\sigma^*(\mathcal{G}',\mathcal{A}')\big)\,,\end{aligned}$$

它将带联络的（$n-1$）-gerbe（$\mathcal{G}',\mathcal{A}'$）映射为其绕（$\Sigma^{(n)},\sigma$）的平行移动。注意，同伦集合 π_0 是逐对象在 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 上构成的，即在 ∞-拓扑斯 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中构成（下文的 π_p 也同样如此）。类似地，任意从闭合定向（$n-p$）-流形$\Sigma^{(n-p)}$ 出发的光滑映射 $\sigma\colon\Sigma^{(n-p)}\to M$ 都会诱导一个光滑群态射

$$U_{(-)}(\Sigma^{(n-p)},\sigma)\colon\pi_p\,\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G},\mathcal{A})\longrightarrow\mathrm{U}(1)\,,\qquad(\mathcal{G}',\mathcal{A}')\longmapsto\mathrm{hol}\big(\Sigma^{(n-p)},\sigma^*(\mathcal{G}',\mathcal{A}')\big)\,,\tag{11.16}$$

对每个 $p\in\{1,\dots,n\}$，且此态射仅取决于映射$\sigma\colon\Sigma^{(n-p)}\to M$ 在 $p>0$下的同伦类。

当 $(\mathcal{G},\mathcal{A})$ 是 n-gerbe，且在 M 上带有 $(n+1)$-联络时，我们有

$$\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G},\mathcal{A})\simeq\mathbb{G}\mathrm{rb}^{n-1,M}_{\flat}\,.$$

在这种情况下，光滑群态射也

$$U_{(-)}(\Sigma^{(n)},\sigma):=\mathrm{hol}\big(\Sigma^{(n)},\sigma^*(-)\big)\colon\pi_0\,\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G},\mathcal{A})\longrightarrow\mathrm{U}(1)$$

is 是拓扑的，即它仅取决于映射 $\sigma\colon\Sigma^{(n)}\to M$ 的光滑同伦类 .

赋值 $(\mathcal{G}',\mathcal{A}')\mapsto U_{(\mathcal{G}',\mathcal{A}')}(\Sigma,\sigma)$ 恰好具有 [34] 所述的 M 上的 $(d-n-1)$-形式对称结构（见公式 (1.1)），其中 $\dim(M)=d$ （至少在我们限于 σ 为嵌入的情形时）。请注意，更一般地说，在光滑高阶自同构群由 $\mathbb{G}\mathrm{rb}^{n-1}_{\flat}M$，给出的任何情形下，这一结论都成立。

对于 $n=1$，上述态射可以通过 [16,17] 中由带联络的 gerbe 构造的光滑函子场论得到几何解释和增强（高阶 n 的情形将在后续工作中讨论）。我们预计，这为本文得到的高阶对称群与 [33] 中描述的量子场论高阶对称性形式体系建立了联系。最后请注意，对于 $p\geq1$，映射 (11.16) 在 [31,32,72], 中高阶阿贝尔规范理论的截断方法下不可见，因为该方法纯粹关注 $\mathcal{G}$ 的 $\pi_0\mathbb{A}\mathrm{ut}$，其中 $\mathcal{G}$ 是 M 上的一个 n-gerbe。◁

12. 忘却高阶联络数据

本节的目标是证明投影态射

$$\textstyle\int p^k_l \colon \int \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k} \longrightarrow \int \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|l}$$

对于每个 $k,l \in \mathbb{N}_0$，若 $0 \leq l \leq k \leq n$，则它们是 0-连通的（见定义 8.9）：

命题 12.1。对于每个 $k, l, n \in \mathbb{N}_0$，若 $0 \leq l \leq k \leq n$，并且对于每个 $c \in \mathrm{B}\mathcal{D}$（分别地，$c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$），由此诱导出的连通分支之间的态射

$$\pi_0\Big(\textstyle\int p^k_{l|c}\Big) \colon \pi_0\Big(\big(\int \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k}\big)_{|c}\Big) \longrightarrow \pi_0\Big(\big(\int \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|l}\big)_{|c}\Big)$$
$$\pi_0\Big(\textstyle\int p^k_{l|c}\Big) \colon \pi_0\Big(\big(\int \mathrm{Grb}^{n,M}_{\nabla|k}\big)_{|c}\Big) \longrightarrow \pi_0\Big(\big(\int \mathrm{Grb}^{n,M}_{\nabla|l}\big)_{|c}\Big)$$

是双射。

这将使我们能够把定理 8.30 应用于涉及 n-gerbe 上联络的各种模叠。我们证明 $\int \mathrm{Grb}^{n\,\mathcal{D}}_{\nabla|}{}_{,k}$ 的情形；$\int \mathrm{Grb}^{n\,M}_{\nabla|}{}_{,k}$ 的证明类似。命题 12.1 将直接由下文的推论 12.5 得出。

引理 12.2. 设 M 是一个流形，$c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$ 是一个笛卡尔空间。考虑 $(\mathrm{b}^l_\nabla \mathrm{U}(1))^v$ 作为$\mathcal{C}\mathrm{h}_{\geq 0}$-值预层定义在 $c \times M$ 上（回顾第 *10* 节中的记号）。群同态

$$\kappa \colon \mathrm{H}_k\big(c \times M; (\mathrm{b}^l_\nabla \mathrm{U}(1))^v\big) \longrightarrow \mathrm{H}_k\big(c \times M; (\mathrm{b}^l \mathrm{U}(1))^v\big) = \mathrm{H}^{l+k+1}(M; \mathbb{Z})$$

具有以下性质：

(1) 当 $k \geq 1$ 时，它是同构；*(2)* 当 $k = 0$ 时，它是满射。

这里，对于每个 $k,l \in \mathbb{N}_0$，我们可以将其描述为

$$\mathrm{H}_k\big(c \times M; (\mathrm{b}^l_\nabla \mathrm{U}(1))^v\big) \cong \mathrm{H}^0\big(c \times M; (\mathrm{b}^k \mathrm{b}^l_\nabla \mathrm{U}(1))^v\big)$$

$c \times M$ 上层链复形中的超上同调。

证明。我们改编了 [9] 中的一个论证（另见 [75, 命题 1.3.7]）。这里采用链复形预层来处理更为方便

$$\mathrm{b}^{l+1}_\nabla \mathbb{Z} = \big(\Omega^{l,v} \xleftarrow{\mathrm{d}^v} \Omega^{l-1,v} \xleftarrow{\mathrm{d}^v} \cdots \xleftarrow{\mathrm{d}^v} \Omega^{1,v} \xleftarrow{\mathrm{d}^v} \Omega^0 \xleftarrow{\iota} \mathbb{Z}\big)\,.$$

态射 $\Omega^0 \to \mathrm{U}(1)$ 诱导出典范逐对象弱等价

$$(\mathrm{b}^{l+1}_\nabla \mathbb{Z})^v \xrightarrow{\sim} (\mathrm{b}^l_\nabla \mathrm{U}(1))^v\,.$$

对于 $0 \leq r \leq s \in \mathbb{N}_0$，考虑$C^\infty(c)$-模在$c \times M$上的层链复形 ，

$$\Omega^v(r,s)[c \times M] = \big(\Omega^{s,v}[c \times M] \xleftarrow{\mathrm{d}^v} \cdots \xleftarrow{\mathrm{d}^v} \Omega^{r,v}[c \times M]\big)\,,$$

其中 $\Omega^{s,v}[c \times M]$ 位于零次。这里，$\Omega^{s,v}[c \times M]$ 表示这样一个层：它将开子集 $U \subset c \times M$ 对应到 U 上的垂直微分 s-形式（即仅沿 M 方向取微分、但沿 c 方向光滑变化的 s-形式）。我们用记号 $\Omega^{s,v}(c \times M)$ 表示该层在 $c \times M$ 上的整体截面。在每个次数上，复形 $\Omega(r,s)^v[c \times M]$由 $c \times M$ 上的一个层组成；作为 $C^\infty(c \times M)$-模的层，该层是细层（参见引理 10.1）；因此，$\Omega^v(r,s)[c \times M]$ 的每个次数都是 $c \times M$ 上的阿贝尔群的无环层。因此，

我们有一个典范同构

$$\mathrm{H}_k\big(c\times M;\Omega(r,s)^v[c\times M]\big)=\mathrm{H}_k\big(c\times M;\Omega^{s,v,M}[c\times M]\xleftarrow{\mathrm{d}^v}\cdots\xleftarrow{\mathrm{d}^v}\Omega^{r,v,M}[c\times M]\big)$$

$$=\begin{cases}\Omega^{s,v}(c\times M)/\mathrm{d}^v\big(\Omega^{s-1,v}(c\times M)\big)\,, & k=0\,,\\ \Omega^{s-k,v}_{cl}(c\times M)/\mathrm{d}^v\big(\Omega^{s-k-1,v}(c\times M)\big)\,, & 1\leq k<s-r\,,\\ \Omega^{r,v}_{cl}(c\times M)\,, & k=s-r\,,\\ 0\,, & k<0,\ k>s-r\,.\end{cases}$$

对每个 $k\in\mathbb{N}_0$，我们都有一个层的链复形的短正合列

$$0\longrightarrow \mathrm{b}^k\Omega(0,l)^v\longrightarrow(\mathrm{b}^k\mathrm{b}^{l+1}_\nabla\mathbb{Z})^v\longrightarrow(\mathrm{b}^k\mathrm{b}^{l+1}\mathbb{Z})^v\longrightarrow 0\,. \tag{12.3}$$

与这个层的链复形短正合列相关联的同调长正合列现在得出了这两个结论。□

根据构造定义 10.17 中的 $\int\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|,k}$ 以及引理 A.6，可得一个典范同构

$$\big(\textstyle\int\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k}\big)_{|c}\cong\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k}(c)=\mathrm{colim}\Big(\widetilde{\mathrm{Grb}}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k}\colon(\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})^{\mathrm{op}}_{|c}\to\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta\Big)\,.$$

设 $X=(\mathcal{U}\to\mathcal{U},c)$ 是 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$ 中的一个对象。引理 4.5 表明，典范余锥态射

$$\eta_{|X}\colon\widetilde{\mathrm{Grb}}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k}(X)\longrightarrow\mathrm{colim}\Big(\widetilde{\mathrm{Grb}}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k}\colon(\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})^{\mathrm{op}}_{|c}\to\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta\Big)$$

对于每个对象 $X=(\hat{}\mathcal{U}\to\mathcal{U},c)\in\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$ 的选择，它都是弱同伦等价。因此，只需证明，对于任意一个 $X\in\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}_{|c}$，诱导态射

$$\widetilde{p}^k_l\colon\widetilde{\mathrm{Grb}}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k}(X)\longrightarrow\widetilde{\mathrm{Grb}}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|l}(X)$$

诱导出连通分支之间的双射。

令 $\mathcal{V}=\{V_i\}_{i\in\Lambda}$ 为 M 的一个良好开覆盖。由此我们得到 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$ 中的一个对象 $X=(\hat{}\mathcal{U}\to\mathcal{U},c)$：令 $\mathcal{U}$ 为 c 的平凡覆盖（其唯一的片是整个 c），并令 $\hat{}\mathcal{U}=\{\hat{}U_i\}_{i\in\Lambda}$，其中对每个 $i\in\Lambda$，都有 $\hat{}U_i=c\times V_i$。回顾第 10.1 节中的链复形预层 $\mathrm{b}^m\mathrm{b}^k_\nabla\mathrm{U}(1)$。

命题 12.4. 设 $V=\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 M 的一个良好开覆盖，且 c 是一个笛卡尔空间。设 $X=(\hat{}U\to U,c)$ 是上文构造的诱导对象 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$。对于每个 $l\leq k\in\{0,\dots,n\}$ 以及 $c\in\mathcal{C}\mathrm{art}$，*Kan* 复形之间的态射

$$\widetilde{p}^k_{l|c}\colon\widetilde{\mathrm{Grb}}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k}(X)\longrightarrow\widetilde{\mathrm{Grb}}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|l}(X)$$

在连通分支上诱导一个双射。一般来说，当 $k=n+1$ 时，这一结论并不成立。此外，连通分支上的同构由阿贝尔群的典范同构诱导

$$\pi_0\big(\widetilde{\mathrm{Grb}}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k}(X)\big)\cong\mathrm{H}^{n+2}(M;\mathbb{Z})\,.$$

证明. 根据定义 10.4 和 10.8，问题等价于证明态射

$$\widetilde{p}^k_{0|\check{\mathrm{C}}\mathcal{U}}\colon\tau_{\geq0}\,\mathrm{Tot}^\times\big((\mathrm{b}^{n+1-k}\mathrm{b}^k_\nabla\mathrm{U}(1))^v(\check{\mathrm{C}}(\hat{\mathcal{U}}\to\mathcal{U}))\big)\longrightarrow\tau_{\geq0}\,\mathrm{Tot}^\times\big((\mathrm{b}^{n+1}\mathrm{U}(1))^v(\check{\mathrm{C}}(\hat{\mathcal{U}}\to\mathcal{U}))\big)\,,$$

在 H_0，上诱导出同构，其中我们采用了注 10.9 的记号。存在典范同构

$$\mathrm{H}_i\big(\tau_{\geq0}\,\mathrm{Tot}^\times\big((\mathrm{b}^{n+1-k}\mathrm{b}^{k+1}_\nabla\mathbb{Z}(1))^v(\check{\mathrm{C}}(\hat{\mathcal{U}}\to\mathcal{U}))\big)\big)\cong\mathrm{H}_i\big(\tau_{\geq0}\,\mathrm{Tot}^\times\big((\mathrm{b}^{n+1-k}\mathrm{b}^k_\nabla\mathrm{U}(1))^v(\check{\mathrm{C}}(\hat{\mathcal{U}}\to\mathcal{U}))\big)\big)\,,$$

$$\mathrm{H}_i\big(\tau_{\geq0}\,\mathrm{Tot}^\times\big((\mathrm{b}^{n+1}\mathrm{U}(1))^v(\check{\mathrm{C}}(\hat{\mathcal{U}}\to\mathcal{U}))\big)\big)\cong\mathrm{H}^{n+2-i}(M;\mathbb{Z})\,.$$

我们首先证明可以得到 H_0 上的满射。我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}_0\big(\tau_{\geq 0}\,\mathrm{Tot}^{\times}\,\big((\mathrm{b}^{n+2}_{\nabla}\mathbb{Z})^{v}(\check{\mathrm{C}}(\hat{\mathcal{U}}\to\mathcal{U}))\big)\big) & \xrightarrow{\mathrm{H}_0(\overline{p}_0^{n+2})} & \mathrm{H}_0\big(\tau_{\geq 0}\,\mathrm{Tot}^{\times}\,\big((\mathrm{b}^{n+2}\mathbb{Z})^{v}(\check{\mathrm{C}}(\hat{\mathcal{U}}\to\mathcal{U}))\big)\big) \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ \mathrm{H}^{n+2}\big(c\times M;(\mathrm{b}^{n+2}_{\nabla}\mathbb{Z})^{v}\big) & \longrightarrow & \mathrm{H}^{n+2}(c\times M;\mathbb{Z})\cong\mathrm{H}^{n+2}(M;\mathbb{Z}) \end{array}$$

由于 $(\mathrm{b}^{n+2}_{\nabla}\mathbb{Z})^{v}$ 的每个次数在笛卡尔空间上都是无环层，并且我们可以用 Čech 上同调来计算层超上同调，因此该图表中的垂直态射都是同构。根据引理 12.2(2)，底部态射是满射，所以顶部态射也必定是满射。最后，映射 $\mathrm{ep}_{0|}^{n+2}{}^{\vee}c\mathcal{U}$ 经由 $\mathrm{ep}_{0|}^{k}{}^{\vee}c\mathcal{U}$ 分解，其中 $k\in\{0,\dots,n+1\}$。因此，后者也必定是满射。

接下来，我们证明 $\mathrm{ep}^{k}_{0|}$ 也是单射。为此，首先注意到链复形 $\tau_{\geq 0}\mathrm{Tot}^{\times}((\mathrm{b}^{n+1-k}\mathrm{b}^{k+1}_{\nabla}\mathbb{Z})^{v}(\check{\mathrm{C}}(\hat{}\mathcal{U}\to\mathcal{U}))$可以描述如下（另见注 10.9 和附录 B）：一个零次元素是一个元组 $(z,A_0,\dots,A_k)$，其中 $z\in\mathbb{Z}(\check{}C_{n+2}\mathcal{V})$，且 i-形式$A_i\in\Omega^{i,v}(c\times\check{}C_{n+1-i}\mathcal{V})$，对 $i=\{0,\dots,k\}$成立。这些数据满足

$$\begin{aligned} 0&=\delta z\,,\\ 0&=\delta A_0+(-1)^{n+2}\iota z\\ 0&=\delta A_{i+1}+(-1)^{n+1-i}\mathrm{d}^{v}A_i\,,\quad \text{for } i=1,\dots,k-1\,. \end{aligned}$$

映射 ep^{k}_{0}将元组 $(\mathrm{z},\mathrm{A}_0,\dots,\mathrm{A}_k)$ 投影到 z。现在我们反复应用引理 10.1。假设 $(\mathrm{z},\mathrm{A}_0,\dots,\mathrm{A}_k)$ 满足：存在 $\mathrm{y}\in\mathbb{Z}(\mathrm{c}\times\check{}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{V})$，使得 $\delta\mathrm{y}=\mathrm{z}$。由此可得$\delta(\mathrm{A}_0+(-1)^{n+1}\iota\mathrm{y})=0$，根据引理 10.1，存在某个元素 $\mathrm{a}_0\in\Omega^{v,0}(\mathrm{c},\check{}\mathrm{C}n\mathrm{V})$，满足 $\mathrm{A}_0=\delta\mathrm{a}_0+(-1)^{n+1}\iota\mathrm{y}$。重复这一过程，我们找到元素 $\mathrm{a}_i\in\Omega^{v,i}(\mathrm{c},\check{}\mathrm{C}_{n-i}\mathrm{U})$，满足恒等式 $\mathrm{A}_i=\delta\mathrm{a}_i+(-1)^{n-i}\mathrm{d}^{v}\mathrm{a}_{i-1}$，对每个 $\mathrm{i}=0,\dots,\mathrm{k}$ 都成立。也就是说，$(\mathrm{z},\mathrm{A}_0,\dots,\mathrm{A}_{k-1})$ 在总体复形中是恰当的。然而，要找到 a_k，关键条件是 $\mathrm{k}\in\{0,\dots,\mathrm{n}\}$，因此我们排除 $\mathrm{k}=\mathrm{n}+1$ 的情况。因此，当 $\mathrm{k}\in\{0,\dots,\mathrm{n}+1\}$ 时，映射 $\mathrm{H}_0(\mathrm{ep}^{k}_{0})$ 是单射，因而是同构。

对于 $k=n+1$，该映射一般不是同构；引理 12.2(2)表明它是满射，其核为

$$\frac{(\Omega^{n+1,v})(c\times M)}{\mathrm{d}^{v}(\Omega^{n,v}(c\times M))}\Big/\mathrm{H}^{n+1}(M;\mathbb{Z})\,,$$

而这一般并非平凡的。 □

推论 12.5. 对于每个 $l<k\in\{0,\dots,n\}$ 和 $c\in\mathcal{C}\mathrm{art}$，投射纤维化

$$p^{k}_{l}\colon \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k}\longrightarrow\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|l}$$

投射纤维化单纯预层的 $\mathcal{D}$ B 上是 *0*-连通的。

证明。 这由命题 12.4 以及以下事实可得：对于 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$ 中的每个对象 $X=(\hat{}\mathcal{U}\to\mathcal{U},c)$，典范态射

$$\widetilde{\mathrm{Grb}}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k}(X)\longrightarrow\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k}(c)$$

是弱等价：包含 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}_{|c}\hookrightarrow\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}_{/c}$ 是同伦余终，因此，定义 $\mathrm{Grb}^{n\,\mathcal{D}}_{\nabla|}{}_{,k}(c)$ 时的左 Kan 延拓可以通过 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}_{|c}$ 来计算。该范畴是余滤的（因而其脉络可缩），且我们取其余极限的图表将 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}_{|c}$ 中的每个态射映为弱等价。于是，例如由以下事实可得出此断言：对象 $X\colon *\to\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}_{|c}$ 的包含是一个同伦余终函子，并且单纯集合的滤过余极限是同伦余极限 [25, 命题 7.3]. □

由此对整直函子应用命题 12.1 即得

$$r^{*}_{\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}}}\colon\mathrm{Fun}(\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}},\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta})\longrightarrow\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}}\,.$$

注 12.6。给定任意一个带有n-联络的k-gerbe（$\mathcal{G}$，$\mathcal{A}^{(k)}$），定义在M上——即 $\mathrm{Grb}^{n,M}_{\nabla|}{}_{,k}(\mathbb{R}^0)$ 的一个元素——令（$\mathcal{G}$，$\mathcal{A}^{(l)}$）$= p_l^k$（$\mathcal{G}$，$\mathcal{A}^{(k)}$）表示在M上通过遗忘部分联络数据得到的带l-联络的n-gerbe（当 $0 \leq k \leq n$ 时）。特别地，我们用 $\mathcal{G} = p_0^k$（$\mathcal{G}$，$\mathcal{A}^{(k)}$）表示定义在M 上的底层n-gerbe，它不带联络。注 8.11 蕴含恒等态射

$$\begin{aligned}
\mathrm{Diff}_{[\mathcal{G},\mathcal{A}^{(k)}]} &= \mathrm{Diff}_{[\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)}]} = \mathrm{Diff}_{[\mathcal{G}]}\,,\\
\mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G},\mathcal{A}^{(k)}] &= \mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)}] = \mathrm{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]\,,\\
\big(\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{\nabla|k}\big)_{[\mathcal{G},\mathcal{A}^{(k)}]} &= \big(\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{\nabla|k}\big)_{[\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)}]} = \big(\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{\nabla|k}\big)_{[\mathcal{G}]}
\end{aligned}$$

（使用定义 6.1 和 6.4 中引入的记号）。 ◁

13. 带有n阶 gerbe 联络的k-gerbe 在M上的堆的同伦类型

有了在任意流形M 上构造带联络的高阶 gerbe 的模空间 ∞-(预)叠，我们便可以探究这些模叠的整体性质，一个有趣的问题是计算它们的同伦类型。我们借助第 8.3 节中的函子$S\colon \mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art}) \to \mathcal{S}$ 及其由左 Quillen 函子$S_Q\colon \mathcal{H} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ (8.32)给出的表示来实现这一点。

定理 13.1。 设 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 $k \in \{0, \ldots, n\}$。态射 $p_0^k\colon \mathbb{G}\mathrm{rb}^{n,M}_{\nabla|}{}_{,k} \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}\mathrm{rb}^{n,M}$ 属于 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$，它遗忘所有联络数据，是 ∞-拓扑斯 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$中的一个主 ∞-丛。其结构∞-群由一个单纯形 $\mathbb{R}$-模在 $\mathcal{H}$ 中表示（比较引理 *8.35*）。

证明。 映射 p_0^k 由投射纤维化单纯预层之间的 Kan 纤维化 $p_0^k\colon \mathrm{Grb}^{n,M}_{\nabla|}{}_{,k} \to \mathrm{Grb}^{k,M}$ 表示。它是 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中的有效满态射，因为根据推论 12.5，它在每个笛卡尔空间 $c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$ 上诱导的连通分支映射是满射（甚至是同构）。表示态射 $p_0^k\colon \mathrm{Grb}^{n,M}_{\nabla|}{}_{,k} \to \mathrm{Grb}^{n,M}$ 的定义域是一个单纯群预层的扭子，该预层由 Dold-Kan 构造从以下对象得到

$$\big(\Omega^{k,v} \xleftarrow{\mathrm{d}} \Omega^{k-1,v} \xleftarrow{\mathrm{d}} \cdots \xleftarrow{\mathrm{d}} \Omega^{1,v}\big)$$

（这是平凡 n-gerbe $\mathcal{G}$ 上光滑的 k-联络族所成的单纯预层；另见第 10.3 节）。从该链复形出现在短正合列 (12.3) 中这一事实，也显然可知扭子性质。因此，这些数据表示 ∞-topos $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中的一个主 ∞-丛：只需验证 $\mathrm{Grb}^{n,M}_{\nabla|}{}_{,k}$ 关于结构群作用的同伦商与 $\mathrm{Grb}^{n,M}$ 弱等价；但这由 [61, 定理 3.91]. □ 得出。

备注 13.2。 定理 13.1 清楚地表明，给定的n-gerbe 上的联络构成一个仿射空间，其底空间是定义在M上的微分形式构成的 Baez-Crans 型 [3] 高阶向量空间。这是对经典规范理论中这样一个事实的范畴化：给定主丛上的联络构成一个仿射空间，其底空间是取值于伴随丛的 1-形式向量空间。◁

推论 13.3。 设 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 $k \in \{0, \ldots, n\}$。态射

$$S(p_0^k)\colon S\big(\mathbb{G}\mathrm{rb}^{n,M}_{\nabla|k}\big) \longrightarrow S\big(\mathbb{G}\mathrm{rb}^{n,M}\big)$$

in $\mathcal{S}$ 是一个等价。

证明。 函子 $S\colon \mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art}) \to \mathcal{S}$ 将任意群对象 $\mathbb{H}$ in $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 的主 ∞-丛映射为主 ∞-丛 over $S\mathbb{H}$ in $\mathcal{S}$。因此，态射 $S(\mathbb{G}\mathrm{rb}^{n,M}_{\nabla|}{}_{,k}) \longrightarrow S(\mathbb{G}\mathrm{rb}^{n,M})$ in $\mathcal{S}$ 的纤维由S作用于结构群得到；不过，根据引理 8.35，后者等价于 $\Delta^0 \in \mathcal{S}$。□

注记 13.4. 空间 $S\big(\mathbb{G}\mathrm{rb}^{n,M}_{\nabla|}{}_{,k}\big)$ 可描述为带有k联络的n-gerbe 在M 上的空间，以及它们之间的相容；其中联络仅在相容的纤维方向上定义（也就是说，不存在沿相容方向的平行移动）。◁

我们共 计算具有n阶联络的n-gerbe 的底层空间的同伦群 a
流形 M:

定理 13.5. 对于每个 $n \in \mathbb{N}_0$、$k \in \{0, \ldots, n+1\}$ 和 $i \in \mathbb{N}_0$，都存在典范同构 s

$$\pi_i\big(S\mathbb{G}\mathrm{rb}^{n,M}_{\nabla|k}\big) \cong \mathrm{H}^{n+2-i}(M;\mathbb{Z})\,,$$

且 $\pi_i = 0$ 否则。

证明。 由推论 13.3，我们可以将注意力限制在$k = 0$的情形。存在一个等价

$$\mathrm{Grb}^{n,M} \simeq \big(\mathrm{B}^{n+1}\mathrm{U}(1)\big)^{\underline{M}}$$

在 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中（这可通过使用 $\mathcal{H}$ 来呈现 ∞-范畴 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$，并选择由良好开覆盖给出的 M 的 Čech分解作为 M的余纤维替换来证明）。此外，根据光滑冈原理 [67, 定理 3.3.53]（另见 [8, 定理 1.1] 和 [21, 定理 B，推论 6.4.8]），存在空间之间的弱等价

$$S\Big(\mathrm{B}^{n+1}\mathrm{U}(1)\big)^{\underline{M}}\Big) \simeq \big(S\mathrm{B}^{n+1}\mathrm{U}(1)\big)^{S\underline{M}}.$$

利用 S 与余极限可交换（它本身就是一个 ∞-范畴余极限函子，见命题 8.36），以及 SM 与流形 M 的底层空间典范等价这一事实（例如参见 [14,定理 4.15]），我们得到一个复合弱等价

$$S\big(\mathrm{Grb}^{n,M}\big) \simeq \mathcal{S}\big(M, B^{n+1}\mathrm{U}(1)\big)\,.$$

注意，这个空间有一个典范基点，它对应于n阶平凡$\mathcal{T}$ gerbe，定义在M上。这个空间的第i个同伦群中某个元素的代表元是一个带基点空间之间的映射

$$(\mathbb{S}^i, *) \longrightarrow \big(\mathcal{S}\big(M, B^{n+1}\mathrm{U}(1)\big), \mathcal{T}\big)\,,$$

由于 $\mathrm{B}^{n+1}\mathrm{U}(1)$ 是一个 Eilenberg-MacLane 空间$K(\mathbb{Z},n+2)$，因此我们也可以将其等价地描述为一个映射

$$f\colon \mathbb{S}^i \times M \longrightarrow K(\mathbb{Z}, n+2)$$

其沿包含 $\iota\colon \{*\}\times M \hookrightarrow \mathbb{S}^i \times M$的限制在 $\mathrm{H}^{n+2}(M;\mathbb{Z})$ 中代表零类。也就是说，存在一个典范群同构

$$\pi_i\big(\mathcal{S}\big(M, B^{n+1}\mathrm{U}(1)\big)\big) \simeq \big\{x \in \mathrm{H}^{n+2}(\mathbb{S}^i \times M;\mathbb{Z}) \,\big|\, \iota^* x = 0 \in \mathrm{H}^{n+2}(M;\mathbb{Z})\big\}\,.$$

由于 $\mathrm{H}^k(\mathbb{S}^i;\mathbb{Z})$ 在每个次数上都是有限生成自由的，上同调中的 Künneth 定理（例如参见 [44, 定理 3.16]）给出了一个典范同构

$$\mathrm{H}^{n+2}(\mathbb{S}^i \times M;\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{r+s=n+2} \mathrm{H}^r(\mathbb{S}^i;\mathbb{Z}) \otimes \mathrm{H}^s(M;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{H}^{n+2-i}(M;\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{H}^{n+2}(M;\mathbb{Z})\,.$$

在此同构下，沿 $\iota\colon \{*\} \times M \hookrightarrow \mathbb{S}^i \times M$的限制对应于到 $\mathrm{H}^{n+2}(M;\mathbb{Z})$ 的投影。因此，我们得到一个典范群同构

$$\pi_i\big(S\big(\mathbb{G}\mathrm{rb}^{n,M}\big)\big) \cong \mathrm{H}^{n+2-i}(M;\mathbb{Z})\,,$$

对每个 $i \in \mathbb{N}_0$，正如所述。 □

14. 涉及高阶 U(1) 联络的模空间 ∞-(预)叠示例

本节介绍并分析场论中出现的各种模空间 ∞-叠，这些场论涉及高阶 U(1) 联络。我们先从给定 n-gerbe 在M上带有k-联络的联络的基本模空间 ∞-叠开始，然后再讨论例如高阶 Maxwell 以及 Einstein–Maxwell 模空间 ∞-叠。

14.1. 模空间 k-联络在 n-gerbe 上。 在上一小节中，我们考察了固定n-gerbe 上高阶 U(1) 联络的光滑族的叠。在这里，我们纳入对称性作用，并考察固定n-gerbe 上高阶 U(1) 联络的模空间 叠。为此，回顾第 8 节中关于高阶几何结构的模空间 ∞-预叠及其通过左纤维化进行表示的记号。我们采用以下一般设定：考虑如下选择

$$\mathrm{Sol}^{\mathcal{D}} = \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} = \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k}, \qquad \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}} = \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|l},$$

其中 $l \le k \in \{0, \dots, n+1\}$，典范投影 $\mathrm{p}^k_l\colon \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k} \to \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|l}$ 是态射 $\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} \to \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}$。设 $G \in \mathrm{Grb}^{n,M}(\mathbb{R}^0)$ 是 M 上的一个 n-丛。此外，考虑一个具有约化纤维的左纤维化 $Q \to N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$，以及一个态射 $\phi \in \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}(Q, N\mathbf{B}\mathcal{D}[G]^{\mathrm{op}})$（回顾定义 7.19 及其后的讨论，这些数据给出了一个作用 $\Phi\colon \Gamma \to \mathrm{Diff}^{\mathcal{G}}(M)$，即一个光滑 ∞-群通过微分同胚作用于 M，并保持 G 在 $\mathrm{Grb}^{n,M}(\mathbb{R}^0)$ 中的同构类$[G]$）。我们将考虑的大多数例子都是对以下模叠的修改：

定义 14.1。 在上述设定中，考虑通过拉回得到的、位于$N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 上的左纤维化

$$\begin{array}{ccc} \int \mathrm{Mdl}_{k,\phi}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(l)}) & \longrightarrow & \int \left(\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{\nabla|k}\right)^{[\mathcal{G}]} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{BSYM}^{\mathrm{rev}}_{\phi}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(k)}) & \longrightarrow & \int \left(\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}[\mathcal{G}]}_{\nabla|l}\right)^{[\mathcal{G}]} \end{array}$$

带有 l-联络 $(G, A^{(l)})$ 的 n-丛上 k-联络的 ∞-预堆 $\mathbb{M}\mathrm{dl}_{k,\Phi}(G, A^{(l)})$，模掉提升作用 ϕ 的 $(G, A^{(l)})$ 对称性作用（其中 $0 \le l \le k \le n+1$），是由左纤维化 $\int \mathrm{Mdl}_{k,\phi}(G, A^{(l)}) \to N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 表示的 $N\mathcal{C}\mathrm{art}$ 上的 ∞-预堆。

注记 14.2。 根据推论 9.15，只要 ϕ 编码了群层在M上的作用，模空间 ∞-预堆 $\mathbb{M}\mathrm{dl}_{k,\Phi}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})$ 就是关于笛卡尔空间良好开覆盖的 ∞-堆。◁

注记 14.3。 对于 $l = 0$ 且 $k = n+1$，我们得到固定于n-丛 $\mathcal{G}$（定义在M 上）的联络模掉提升 ϕ 的对称性高阶光滑群后的模空间 ∞-预堆 $\mathbb{M}\mathrm{dl}_{n+1,\Phi}(\mathcal{G})$。同时， $\mathbb{M}\mathrm{dl}_{n+1,\Phi}(\mathcal{G})$ 也可以视为由$\mathcal{G}$表示的整数余循环的微分精化的模空间 ∞-预堆。◁

注释 14.4. 对于选择 $Q = \mathbf{B}\mathcal{D}[G]^{\mathrm{op}}$ and ϕ the identity on $\mathbf{B}\mathcal{D}[G]^{\mathrm{op}}$， ∞-堆 $\mathbb{M}\mathrm{dl}_{k,\mathrm{id}}(G)$ 是 G 上 k-联络的模空间 ∞-堆，并且要对 G 的高阶对称群的作用取商。若选择 $Q = N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ and $\phi = \mathrm{Ne}_M$（对应于平凡群在 M 上的作用），则得到模空间 ∞-堆 $\mathbb{M}\mathrm{dl}_{k,\mathrm{Ne}_M}(G)$，它是 M 上 k-联络的模空间，并且要对 G 的高阶自同构群的作用取商，也就是说，要对 G 的高阶规范群的作用取商。/

稍微修改这个例子，我们便得到固定的$\mathcal{G}$上的平坦联络模叠 $\mathbb{M}\mathrm{dl}_{\flat,\Phi}$，其中$n$-gerbe $\mathcal{G}$ 位于M上：它们由以下选择得到

$$\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} = \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla}, \qquad \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}} = \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|l}, \qquad \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}} = \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\flat},$$

其中 $\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\flat} \subset \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla}$，是由那些联络的曲率（逐纤维）$n+2$-形式恒为零的$n$-gerbe 构成的完整单纯子预层（注意，这确实按照定义 8.4 的含义定义了一个解预层）。设 $(\mathcal{G},\ \mathcal{A}^{(l)})$ 是 M 上带有 l-联络的 n-gerbe。

定义 14.5. 在上述设定中，考虑在$N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 之上的左纤维化，它由拉回得到

$$\begin{array}{ccc} \int \mathrm{Mdl}_{\flat,\phi}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)}) & \longrightarrow & \int \big(\mathrm{Grb}_{\flat}^{n,\mathcal{D}[\mathcal{G}]}\big)^{[\mathcal{G}]} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{BSYM}_{\phi}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)}) & \longrightarrow & \int \big(\mathrm{Grb}_{\nabla|l}^{n,\mathcal{D}[\mathcal{G}]}\big)^{[\mathcal{G}]} \end{array}$$

∞-预层 $\mathbb{M}\mathrm{dl}_{\flat,\Phi}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})$ 上平坦联络的$(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})$，模去提升作用的$(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})$对称性作用后，得到一个由左纤维化$\int \mathrm{Mdl}^{\flat,\phi}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)}) \longrightarrow N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$呈现于$N\mathcal{C}\mathrm{art}$上的 ∞-预层 ϕ 。

定理 8.30 表明，我们可以用 ∞ 种等价方式分析任意给定n-丛上的$n+1$-联络的模空间预层：我们可以将联络数据的任意部分保持固定（只要不固定整个联络）。这会改变我们仍可变动的联络数据部分（包括其态射和高阶态射），但这些变化会由固定数据的光滑高阶对称性的同步变化来补偿。准确的陈述如下：

定理 14.6. 设$(G, A^{(k)})$ 是 M 上带有 k-联络的 n-丛，并设$(G, A^{(l)})$ 表示其底层带有 l-联络的 n-丛，其中 $0 \leq l \leq k \leq n \in \mathbb{N}_0$。存在典范等价

$$\mathbb{M}\mathrm{dl}_{n+1,\Phi}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(k)}) \simeq \mathbb{M}\mathrm{dl}_{n+1,\Phi}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)}) \qquad \textit{and} \qquad \mathbb{M}\mathrm{dl}_{\flat,\Phi}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(k)}) \simeq \mathbb{M}\mathrm{dl}_{\flat,\Phi}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})\,.$$

证明。 我们只需验证定理 8.30 适用，也就是说，投影态射

$$\textstyle\int p_l^k \colon \int \mathrm{Grb}_{\nabla|k}^{n,\mathcal{D}} \longrightarrow \int \mathrm{Grb}_{\nabla|l}^{n,\mathcal{D}}$$

是逐对象 π_0-同构。这一点我们已在命题 12.1 中证明。 □

例 14.7。 令 $(\mathcal{G},0)$ 为平凡的 n-gerbe，并赋予零 n-联络，即对所有 $i = 1,\dots,n$，$A_i = 0$ 。存在一个等价

$$\mathbb{M}\mathrm{dl}_{\flat,Ne_M}(\mathcal{G},0) \simeq \Omega^{n+1,v}_{\mathrm{cl}} /\!\!/ \mathbb{G}\mathrm{rb}_{\nabla}^{n-1,M} \colon N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\,,$$

其中作用通过曲率给出，即 $(B,(\mathcal{G}',\mathcal{A}')) \longmapsto B + \mathrm{curv}(\mathcal{G}',\mathcal{A}')$。对于任意其他带有$n$-联络 $(\mathcal{G},\mathcal{A})$ 的 n-gerbe，仍存在一个等价

$$\mathbb{M}\mathrm{dl}_{\flat,Ne_M}(\mathcal{G},\mathcal{A}) \simeq \Omega^{n+1,v}_{\mathrm{cl}} /\!\!/ \mathbb{G}\mathrm{rb}_{\nabla}^{n-1,M} \colon N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\,,$$

但这不再是规范的（相反，$\mathbb{M}\mathrm{dl}^{\flat,Ne_M}(\mathcal{G},\mathcal{A})$ 是 $\mathbb{M}\mathrm{dl}^{\flat,Ne_M}(\mathcal{G},0)$ 上的一个扭子，其群结构由 $(n+1)$-形式的加法给出）。特别地，取 π_0 in $\mathcal{F}\mathrm{un}(N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}},\mathcal{S})$，我们得到连通分支预层

$$\pi_0\big(\mathbb{M}\mathrm{dl}_{\flat,Ne_M}(\mathcal{G},\mathcal{A})\big) \simeq \frac{\Omega^{n+1,v}_{\mathrm{cl}}}{\Omega^{n+1,v}_{\mathrm{cl},\mathbb{Z}}} \simeq \frac{\mathrm{H}^{n+1}(M;\mathbb{R})}{\mathrm{H}^{n+1}(M;\mathbb{Z})}\,, \tag{14.8}$$

在此，这些群通过将相应的系数群视为 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 上的群值预层，从而成为 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 上的预层。对于 $n = 0$，光滑环面 (14.8) 通常被视为给定线丛上平坦联络的模空间。在 [58] 中，这个环面也曾在 gerbe 上的联络这一语境下，对 $n = 1$ 出现。

然而，在 π_0 in $\mathcal{F}\mathrm{un}(N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}},\mathcal{S})$ 中取商会消除所有高阶结构，并产生一个以 $\mathcal{S}\mathrm{et}$ 为值的预层，定义在 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 上。例如，这一过程会妨碍解族的粘合能力（可以对 (14.8) 进行层化以强制粘合，但这样便无法再描述平坦联络族；特别是，无法恢复任何规范作用）。此外，若我们只处理截断 (14.8)，下文备注 11.15 和备注 14.9 中的构造便会失效。

相反，模空间的拓扑完整地编码在其底层空间$S(\mathbb{M}\mathrm{dl}_{\flat,Ne_M}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(n)}))\in\mathcal{S}$中（其中$S$是第 7 节中的函子$S\colon \mathcal{F}\mathrm{un}(N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}},\mathcal{S})\to\mathcal{S}$）。回顾命题 8.36，存在一个典范等价

$$S\simeq \operatorname*{colim}_{N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}$$

在S与用于$N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$-形图表的$\infty$-范畴余极限函子之间。注意，$\pi_0\circ S$与$S\circ\pi_0$之间并不存在等价（一者产生集合，另一者产生空间）。根据推论 13.3、命题 8.39 和定理 13.5，我们有

$$S\big(\mathbb{M}\mathrm{dl}_{\flat,Ne_M}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(n)})\big)\simeq \mathrm{B}S(\mathbb{G}\mathfrak{r}\mathfrak{b}^{n-1,M}),$$

尤其是

$$\pi_i S\big(\mathbb{M}\mathrm{dl}_{\flat,Ne_M}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(n)})\big)\cong\begin{cases}\mathrm{H}^{n+2-i}(M;\mathbb{Z}), & i=1,\dots,n+2,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

此外，$\mathbb{M}\mathrm{dl}_{\flat,Ne_M}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(n)})$的同伦类型并不特定于使用$n$-联络：如果$k<n$，且$\mathcal{A}^{(k)}$表示$\mathcal{A}^{(n)}$底下的$k$-联络，那么由定理 8.30 可知

$$\mathbb{M}\mathrm{dl}_{\flat,Ne_M}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(n)})\simeq\mathbb{M}\mathrm{dl}_{\flat,Ne_M}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(k)})\simeq\mathbb{M}\mathrm{dl}_{\flat,Ne_M}(\mathcal{G}).$$

这为研究给定n-gerbe 上带有k-联络的平坦联络模叠提供了n种不同的方法。◁

备注14.9。我们可以使用目标为M的光滑映射来检验模叠的高阶结构：对于M上的固定 n-gerbe 及其 n-联络（$\mathcal{G}$，$\mathcal{A}^{(n)}$），备注 11.15 中群对象的平行移动态射会诱导出态射

$$U_{(-)}(\Sigma^{(n+1-p)},\sigma)\colon \pi_p\mathbb{M}\mathrm{dl}_{n+1,Ne_M}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(n)})\longrightarrow U(1)$$

（其中同伦群是在$\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$中形成的）。

利用高维平行移动还可以提取额外的信息：再举一个例子，令$LM=\mathcal{M}\mathrm{fd}(\mathbb{S}^1,M)$表示$M$的自由环空间。对于普通的 U(1)-丛$P\to M$，平行移动诱导出一个映射$\mathrm{Con}(P)\to \mathrm{U}(1)^{LM}$，其中内部 Hom 是在$\mathcal{H}$中取的。由平行移动的规范不变性，该映射进一步下降为一个光滑映射

$$\mathrm{hol}\colon \mathrm{Con}(P)/\mathrm{Aut}(P)\longrightarrow \mathrm{U}(1)^{LM}.$$

这个映射在高阶 U(1)-规范理论中也有类似形式，但其结构丰富得多：令$(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(1)})$为$M$上带 1-联络的 1-上纤维丛。1-丛上联络的平行移动等价于其转移线丛 [10, 第 4 节.4]。将我们的结果与 [76] 相结合，我们得到一个光滑模叠之间的态射

$$\mathrm{hol}\colon \tau_{\le 1}\mathbb{M}\mathrm{dl}_{2,Ne_M}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(1)})\longrightarrow \mathrm{HLB}_{\nabla,fus}(LM)\tag{14.10}$$

从模叠$\mathbb{M}\mathrm{dl}2,_{Ne_M}(\mathrm{G},\mathrm{A}^{(1)})$的 1-截断（在$\mathcal{P}(\mathrm{N}\mathcal{C}\mathrm{art})$中）到 LM 上带有表面联络的厄米融合线丛所构成的光滑群胚的映射（详情参见 [76]）。特别地，LM 上底层线丛的同构类由$(\mathrm{G},\mathrm{A}^{(1)})$固定，但右侧的联络数据所检测到的不仅仅是$\pi_0\mathbb{M}\mathrm{dl}2,_{Ne_M}(\mathrm{G},\mathrm{A}^{(1)})$，它还将$\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathrm{G},\mathrm{A}^{(1)})$中规范变换的同构类映射为右侧 U(1) 联络的规范变换（这是由转移构造的函子性所致）。例如，该平行移动映射可限制到麦克斯韦方程解的模空间，因此也可用于检验这些模叠。更一般地，通过将 (14.10) 的目标替换为 M 上函子性场论的光滑群胚，应该有可能获得更多信息—— [16,17] 中的结果为此提供了明确的证据——并为带有 n-联络的固定 n-丛寻找类似的映射。最后，根据定理 14.6，平行移动映射 (14.10) 等价地提取了关于$\mathbb{M}\mathrm{dl}2,_{Ne_M}(\mathrm{G})$的等价信息，即固定的 1-丛簇$\mathcal{G}$上 2-联络的高阶模叠。/

14.2. **高阶规范理论示例**。 现在我们介绍若干模空间 ∞-堆，它们出现于涉及高阶 U(1) 联络的场论中。设 $\dim(M) = d$。对于 $r,s \in \mathbb{N}_0$ 满足 $r + s = d$，令 $\mathrm{Met}^{\mathcal{D}}_{r,s}\colon \mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 为（单纯常值）单纯预层，它将 $c \in \mathrm{B}\mathcal{D}$ 映为 M 上的符号差为 (r,s) 的伪黎曼度量的光滑族；等价地，这些是 $c \times M$ 上的逐纤维度量。$\mathrm{Met}_{r,s}$ 在 $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 中的态射上的作用，是通过沿微分同胚拉回度量给出的。

记号 14.11. 我们引入以下记号（更多详情请参见 [15]）：设 (M,g) 为一个伪黎曼流形。

- ∇_g 是与 g 对应的 Levi-Civita 联络，
- Ric_g 是其 Ricci 曲率，
- $*_g\colon \Omega^p(M) \to \Omega^{d-p}(M)$ 是与 g 对应的 Hodge 星算子，其中 $d = \dim(M)$ 且 $p \in \{0,\dots,d\}$，

- $\langle -,-\rangle_g : \Omega^p(M) \times \Omega^p(M) \to C^\infty(M)$ 是由下式定义的配对

$$\alpha \wedge *_g \beta = \langle \alpha, \beta\rangle_g \,\mathrm{vol}_g\,,$$

  其中 vol_g 是 g 的黎曼体积形式，
- $\mathrm{d}^*_g : \Omega^{p+1}(M) \to \Omega^p(M)$ 是与 g 相关的 de Rham 余微分（即 $\mathrm{d}^*_g = (-1)^{pd} *_g \mathrm{d}\, *_g$），
- $\Delta_g := (\mathrm{d} + \mathrm{d}^*_g)^2 : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ 是 (M,g) 上的拉普拉斯算子，
- 我们定义一个双线性映射

$$(-) \bullet_g (-)\colon \Omega^p(M) \times \Omega^p(M) \longrightarrow \Gamma(T^\vee M \odot T^\vee M)\,,$$
$$(\alpha \bullet_g \beta)(X_1, X_2) := \frac{1}{2}\big(\langle \iota_{X_1}\alpha, \iota_{X_2}\beta\rangle_g + \langle \iota_{X_2}\alpha, \iota_{X_1}\beta\rangle_g\big)$$

- $\sharp_g : \Omega^*(M) \to \Gamma(\mathrm{V}\ {}^*TM)$ 和 $\flat_g : \Gamma(\mathrm{V}\ {}^*TM) \to \Omega^*(M)$ 是与 g 相关的音乐同构，

- 对于 $p \geq q$，我们设

$$\iota^g_{(-)}(-)\colon \Omega^q(M) \times \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p-q}(M)\,, \qquad \iota^g_\eta \omega := \iota_{\sharp_g \eta}\omega\,,$$

- 我们定义映射

$$|-|^2_g\colon \Omega^p(M) \to C^\infty(M)\,, \qquad |\alpha|^2_g := \langle \alpha, \alpha\rangle_g\,.$$

最后请注意，上述每个对象都可以直接调整为乘积上的纤维对象 $c \times M$，其在 c 上的纤维均赋有（伪）黎曼度量的光滑族。◁

例 14.12。 考虑带联络以及符号差为 (r,s) 的度量的 n-gerbe 构型，这些构型由以下选择编码

$$\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} = \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla} \times \mathrm{Met}^{\mathcal{D}}_{r,s}\,.$$

对于笛卡尔空间 c，$\mathrm{Grb}^{n\ \mathcal{D}}_{\nabla\ ,}(c) \times \mathrm{Met}^{\mathcal{D}}_{r\ ,s}(c)$ 中的一个单形是三元组 $(\mathcal{G},\mathcal{A},g)$，其中 $(\mathcal{G},\mathcal{A})$ 是 M 上由 c 参数化的 n-gerbe 及其联络的光滑族，而 g 是切丛 TM 上符号差为 (r,s) 的非退化度量的光滑族。这个构型预层带有若干自然的射影纤维化，因此也有若干自然的 $\mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}$ 选择；其中包括典范投影态射

$$\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} = \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla} \times \mathrm{Met}^{\mathcal{D}}_{r,s} \longrightarrow \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k} \times \mathrm{Met}^{\mathcal{D}}_{r,s} =: \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}} \qquad \text{and} \tag{14.13}$$
$$\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} = \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla} \times \mathrm{Met}^{\mathcal{D}}_{r,s} \longrightarrow \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k} =: \mathrm{Fix}'^{\mathcal{D}}\,,$$

对于任意 $0 \leq k \leq n$。

三种重要的解预层选择如下：

（1）次数为n 真空麦克斯韦解在M 上的单纯预层是完整的单纯子预层

$$\mathrm{Sol}^{\mathcal{D}}_{Mw} \subset \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla} \times \mathrm{Met}_{r,s}$$

on 那些满足高阶（真空条件的、在M 上的带联络和度量的n-gerbe
）麦克斯韦方程
克斯韦方程

$$\mathrm{d}^{*}_{g}\mathrm{curv}(\mathcal{G},\mathcal{A}) = 0\,. \tag{14.14}$$

这确实按照定义 8.4 定义了一个解子预层，因为在M 上具有联络的等价n-gerbe具有相同的曲率（n+2）形式，而且高阶麦克斯韦方程（14.14）中的所有项都与M的微分同胚相容。采用上述 $\mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}$ 选择，我们的形式体系生成固定n-gerbe上的联络模叠，其中带有k-联络（$\mathcal{G},\mathcal{A}^{(k)}$），并且相对于$M$上的固定度量$g$ 满足高阶麦克斯韦方程。这些解按照固定n-gerbe上带k-联络（$\mathcal{G},\mathcal{A}^{(k)}$）的对称性作用取商；这些对称性提升了（$M,g$）的等距变换。改用 $\mathrm{Fix}'^{\mathcal{D}}$，我们得到由一对（$\mathcal{A},g$）构成的模叠，其中$\mathcal{A}$ 是固定n-gerbe $\mathcal{G}$ 在M 上的联络，而g 是一个符号差为（r,s）的度量；二者共同满足方程（14.14）。此处，解按照n-gerbe的对称性作用取商，而这些对称性可能会改变度量g。

(2) Th e 度n 爱因斯坦-麦克斯韦解在M 上的单纯预层是完整的单纯 l
su b-预层

$$\mathrm{Sol}^{n,\mathcal{D}}_{\mathrm{EM}} \subset \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla} \times \mathrm{Met}^{\mathcal{D}}_{r,s}$$

在满足（纤维wise）爱因斯坦–麦克斯韦方程的那些单形（$\mathcal{G},\mathcal{A},g$）上

$$\mathrm{Ric}^{g} - \frac{1}{2}s^{g} = \frac{\kappa}{2}\left|\mathrm{curv}(\mathcal{G},\mathcal{A})\right|^{2}_{g} - \kappa\big(\mathrm{curv}(\mathcal{G},\mathcal{A}) \bullet_{g} \mathrm{curv}(\mathcal{G},\mathcal{A})\big)\,,$$
$$\mathrm{d}^{*}_{g}\mathrm{curv}(\mathcal{G},\mathcal{A}) = 0\,,$$

其中 $\kappa \in \{-1,1\}$ 是一个常数。出于与上文第（1）点相同的原因，这定义了定义8.4意义下的解子预层。对于（14.13）中的选择 $\mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}$，我们的形式体系给出固定$n$-gerbe上的联络模堆，其带有$k$-联络（$\mathcal{G},\mathcal{A}^{(k)}$），并满足固定度量$g$ 下的爱因斯坦–麦克斯韦方程，其中M。此处的对称性由M 上的带k-联络的n-gerbe之间的等价，以及伪黎曼流形（M,g）的等距变换生成。相比之下，选择 $\mathrm{Fix}'^{\mathcal{D}}$ 会产生对（$\mathcal{A},g$）的模叠，其中包含M 上的度量g ，以及M上固定n-gerbe带k-联络（$\mathcal{G},\mathcal{A}^{(k)}$）的一个联络，并对（$\mathcal{G},\mathcal{A}^{(k)}$）的对称性取商。

(3) 假 设 $d = 2n + 4$。关于度量和次数为-n （反）自对偶的单纯预层 l
U(1)瞬子 在 M 上的全单纯子预层

$$\mathrm{Sol}^{n,\mathcal{D}}_{\mathrm{inst}} \subset \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla} \times \mathrm{Met}^{\mathcal{D}}_{r,s}$$

由满足方程的那些单形（$\mathcal{G}$， $\mathcal{A}$， g）构成

$$*_{g}\mathrm{curv}(\mathcal{G},\mathcal{A}) = \pm\mathrm{curv}(\mathcal{G},\mathcal{A})$$

即相对于该度量的（反）自对偶方程。根据我们对 $\mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}$ 或 $\mathrm{Fix}'^{\mathcal{D}}$ 的选择，可以考虑固定n-gerbe及k-联络、且度量固定的此类构型的模空间（对仅提升等距变换的对称性取商）；也可以考虑固定n-gerbe及k-联络、允许度量变化，并对n-gerbe及k-联络的对称性取商。◁

例 14.15。我们再来考察以下几个例子：

(1) 考虑构型预层

$$\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} = \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}} \times \mathrm{Grb}^{d-n-4,\mathcal{D}} \times \mathrm{Met}^{\mathcal{D}}_{r,s}$$

以及解预层

$$\mathrm{Sol}^{\mathcal{D}}_{\mathrm{SD}} \subset \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}} \times \mathrm{Grb}^{d-n-4,\mathcal{D}} \times \mathrm{Met}^{\mathcal{D}}_{r,s}$$

定义为由满足以下条件的那些单纯形组成的完整单纯子预层（$\mathcal{G},\mathcal{A},\mathcal{G}',\mathcal{A}',g$）：（$\mathcal{G},\mathcal{A}$）和（$\mathcal{G}',\mathcal{A}'$）的场强满足庞加莱对偶，或电磁对偶，即：

$$*_{g,v}\,\mathrm{curv}(\mathcal{G},\mathcal{A}) = \mathrm{curv}(\mathcal{G}',\mathcal{A}')$$

这些解是 [5] 中微分上同调相关论述所依据的高阶几何对象。

（2）另一个例子是高阶 U(1)-BF 理论（例如参见 [50]）：设 M 是一个闭的定向d维流形。这里我们设

$$\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}_{BF;p,q} = \mathrm{Grb}^{p,\mathcal{D}}_{\nabla} \times \mathrm{Grb}^{q,\mathcal{D}}_{\nabla} \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}_{BF;p,q} = \mathrm{Grb}^{p,\mathcal{D}}_{\nabla|k} \times \mathrm{Grb}^{q,\mathcal{D}}_{\nabla|l}\,,$$

其中 $p+q = \dim(M)-1$，$k \in \{0,\dots,p\}$，且 $l \in \{0,\dots,q\}$。解子预层 $\mathrm{Sol}^{\mathcal{D}}_{BF;p,q} \subset \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}_{BF;p,q}$ 通过对作用泛函取极值来指定

$$\begin{aligned} S_{BF;p,q}\colon \mathrm{Grb}^{p,\mathcal{D}}_{\nabla} \times \mathrm{Grb}^{q,\mathcal{D}}_{\nabla} &\longrightarrow \pi_M^*\mathrm{U}(1)\,,\\ \big((\mathcal{G},\mathcal{A}),(\mathcal{G}',\mathcal{A}')\big) &\longmapsto \mathrm{hol}\big(M;(\mathcal{G},\mathcal{A})\cup(\mathcal{G}',\mathcal{A}')\big)\,, \end{aligned}$$

其中

$$\mathrm{hol}(M;-)\colon \pi_0\mathrm{Grb}^{d+1,\mathcal{D}}_{\nabla} \longrightarrow \mathrm{U}(1)$$

表示带联络的（$d+1$）-gerbe 绕闭合定向d维流形M的高维全纯，且

$$\cup\colon \mathrm{Grb}^{p,\mathcal{D}}_{\nabla} \times \mathrm{Grb}^{q,\mathcal{D}}_{\nabla} \longrightarrow \mathrm{Grb}^{p+q+2,\mathcal{D}}_{\nabla}$$

由 Čech-Deligne 上循环上的 Beilinson-Deligne 杯积诱导（例如参见 [9,命题 1.5.8]）。

（3）设 $2p = \dim(M)-1$ 且 $k \in \{0,\dots,p\}$。将前一个例子修改为具有 e

$$\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}_{BF;p,q} = \mathrm{Grb}^{p,\mathcal{D}}_{\nabla} \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}_{BF;p,q} = \mathrm{Grb}^{p,\mathcal{D}}_{\nabla|k}\,,$$

其作用泛函为

$$S_{CS}\colon \mathrm{Grb}^{p,\mathcal{D}}_{\nabla} \longrightarrow \pi_M^*\mathrm{U}(1)\,, \qquad (\mathcal{G},\mathcal{A}) \longmapsto \mathrm{hol}\big(M;(\mathcal{G},\mathcal{A})\cup(\mathcal{G},\mathcal{A})\big)\,,$$

我们便得到闭合定向d维流形M上的高阶 U(1)-Chern-Simons 理论。 ◁

我们 更仔细地考察例 14.12(1)中的情形：特别是，考虑如下选择 s

$$\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} = \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla} \times \mathrm{Met}^{\mathcal{D}}_{0,d} \longrightarrow \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k} \times \mathrm{Met}^{\mathcal{D}}_{0,d} =: \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}$$

以及解子预层 $\mathrm{Sol}^{\mathcal{D}}_{Mw} \subset \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}$。也就是说，我们研究固定的$n$-gerbe上带有$k$-联络（$\mathcal{G},\mathcal{A}^{(k)}$）的麦克斯韦联络的模叠，并固定$M$上的黎曼度量$g$，再对（$\mathcal{G},\mathcal{A}^{(k)}$）的对称性作用取商，其中这些对称性提升了黎曼流形（M,g）的等距变换。

注 14.16。关于1-丛上的麦克斯韦方程解的研究见 [58]。据我们所知，这是迄今唯一一篇考察高阶联络模空间的参考文献。然而，它并未考虑贯穿其理论的高阶结构。◁

首先，我们有 [58,第3节1]的如下推广：

定理 14.17. 设 M 是一个紧流形。假设 M 配备了黎曼度量 g 和一个带有 k-联络的 n-丛$(G,A^{(k)})$。存在一个解满足(14.14) 中的高阶真空麦克斯韦方程，其作用于$(G,A^{(k)})$；也就是说，存在 $A^{(k)}$ 在 G 上到完全联络的一个扩张 A，使得

$$\mathrm{d}^*_g\,\mathrm{curv}(\mathcal{G},\mathcal{A}) = 0\,.$$

证明. 根据霍奇分解定理（例如参见 [27]），M 上的一个 $(n+2)$-形式H 满足 $\mathrm{d}H = 0$且 $\mathrm{d}_g^* H = 0$，当且仅当它是调和的，即 $\Delta_g H = 0$。作为霍奇分解定理的进一步推论，存在 M 上一个调和的 $(n+2)$-形式，其德拉姆上同调类与 $\mathrm{H}^{n+2}(M;\mathbb{Z})$ 在典范态射 $\mathrm{H}^{n+2}(M;\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^{n+2}(M;\mathbb{R})$ 下的像 $[\mathcal{G}] \in$ 相同。

设 $\mathrm{U} = \{\mathrm{U}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 M 的一个良好开覆盖，并假设 $(\mathrm{G}, \mathrm{A}^{(k)})$ 关于此覆盖由上循环数据 $(\mathrm{g}, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_k)$ 表示（其中 $\mathrm{k} \leq \mathrm{n}$）。我们声称，在 $(\mathrm{G}, \mathrm{A}^{(k)})$ 上存在一个联络 A，使得 $\mathrm{curv}(\mathrm{G}, \mathrm{A}) = \mathrm{H}$。根据上述论证，给出这样的联络即可完成证明。为此，取 A' 为 $(\mathrm{G}, \mathrm{A}^{(k)})$ 上的任意联络（注意 A' 具有形式 $(\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_k, \mathrm{A}'_{k+1}, \ldots, \mathrm{A}'_{n+1})$，其中 $\mathrm{A}'^{(k)} = (\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_k) = \mathrm{A}^{(k)}$由输入数据 $(\mathrm{G}, \mathrm{A}^{(k)})$ 固定）。那么，$\mathrm{curv}(\mathrm{G}, \mathrm{A}')$ 和 H 都代表 G 在德拉姆上同调中的类；因此，存在一个 $\eta \in \Omega^{n+1}(\mathrm{M})$，使得 $\mathrm{d}\eta = \mathrm{H} - \mathrm{curv}(\mathrm{G}, \mathrm{A}')$。我们定义 $\mathrm{A}_i := \mathrm{A}'_i$，其中 $\mathrm{i} = \mathrm{k}+1, \ldots, \mathrm{n}$，并且 $\mathrm{A}_{n+1} = \mathrm{A}'_{n+1} + \delta\eta$，其中 δ是切赫微分。于是，$\delta\mathrm{A}_{n+1} = \delta\mathrm{A}'_{n+1}$，因此 A 确实是 $(\mathrm{G}, \mathrm{A}^{(k)})$ 上的一个联络。此外，我们有

$$\delta\mathrm{curv}(\mathcal{G}, \mathcal{A}) = \mathrm{d}A_{n+1} = \mathrm{d}A'_{n+1} + \mathrm{d}\delta\eta = \delta(\mathrm{curv}(\mathcal{G}, \mathcal{A}') + \mathrm{d}\eta) = \delta H\,.$$

由于 $\delta\colon \Omega^*(M) \to \Omega^*(\check{\mathrm{C}}_0\mathcal{U})$ 是单射，我们可推出 $\mathrm{curv}(\mathcal{G}, \mathcal{A}) = H$。 □

设 $\mathbb{M}\mathrm{dl}_{Mw}((\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(k)}), g)$ 表示固定的n-gerbe（其上带有k-联络）上高阶麦克斯韦解的 ∞-预堆，并且这里采用M上的任意符号差（r,s）的固定伪黎曼度量g 。

定理 14.18. 模空间 ∞-堆 $\mathbb{M}\mathrm{dl}_{Mw,Ne_M}((G, A^{(k)}), g)$ 的底层空间等价于$\mathrm{B}\mathbb{G}\mathrm{rb}^{n-1,M}$的底层空间。特别地，

$$\pi_i S\big(\mathbb{M}\mathrm{dl}_{Mw,Ne_M}((\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(k)}), g)\big) \simeq \mathrm{H}^{n+2-i}(M;\mathbb{Z})\,, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n+1\,,$$

所有其他同伦群均为平凡群。

证明。 解预层 Sol^M_{Mw} 是一个单纯 $\mathbb{R}$-模预层上的仿射对象，该预层由以下对象经 Dold-Kan 构造得到

$$\big(\ker(\mathrm{d}_g^*\mathrm{d}\colon \Omega^{n+1,v} \to \Omega^{n+1,v}) \xleftarrow{\mathrm{d}} \Omega^{n,v} \xleftarrow{\mathrm{d}} \cdots \xleftarrow{\mathrm{d}} \Omega^{1,v}\big)$$

因此，根据引理 8.35，其底层空间是可缩的。由命题 8.39 可知，我们有一个等价

$$\mathbb{M}\mathrm{dl}_{Mw,Ne_M}\big((\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(k)}), g\big) \simeq \mathrm{B}\mathbb{A}\mathrm{ut}\big((\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(k)}), g\big)) \simeq \mathrm{B}\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(k)})\,.$$

最后，该断言由典范等价 $\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(k)}) \simeq \mathbb{G}\mathrm{rb}^{n-1\,M}_{\nabla|\,,k}$ （作为光滑高阶阿贝尔群）以及推论 13.3 得出。
□

此外，若 $\mathbb{\Gamma}$ 是一个光滑的 ∞-群，通过等距变换作用于 (M,g)，并保持 n-gerbe $\mathcal{G}$ 的等价类不变（参见第 8.4.2 节中的形式体系），则结合推论 8.44 和定理 14.18 可得

定理 14.19。 设 $\mathbb{\Gamma}$ 是一个作用于 M 的光滑 ∞-群，其作用由态射 $\phi\colon Q \to \mathrm{B}\mathcal{D}[G, g]^{\mathrm{op}}$ 给出，该态射是 $N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 上的左纤维化之间的态射。那么，同伦群（零次时为基点集）存在一个长正合列

$$\cdots \longrightarrow \pi_r S(\mathbb{H}) \longrightarrow \mathrm{H}^{n+2-r}(M;\mathbb{Z}) \longrightarrow \pi_r S\big(\mathbb{M}\mathrm{dl}_{Mw,\Phi}((\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(k)}), g)\big) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \pi_{r-1} S(\mathbb{H}) \longrightarrow \mathrm{H}^{n+1-r}(M;\mathbb{Z}) \longrightarrow \pi_{r-1} S\big(\mathbb{M}\mathrm{dl}_{Mw,\Phi}((\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(k)}), g)\big) \longrightarrow \cdots$$

此外，应用定理 8.30 可得以下结果：

定理 14.20。 设 $\mathbb{\Gamma}$ 是一个作用于 M 的光滑 ∞-群，其作用由态射 $\phi: Q \to \mathrm{B}\mathcal{D}[G,g]^{\mathrm{op}}$ 给出，该态射是 $N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 上左纤维化之间的态射。此外，设 $0 \leq l < k \leq n$，并令 $A^{(l)}$表示由遗忘 $A^{(k)}$ 的最高形式次数得到的 G 上的 l-联络。那么，存在以下 ∞-预层之间的典范等价：

$$\mathbb{M}\mathrm{dl}_{Mw,\Phi}\big((\mathcal{G},\mathcal{A}^{(k)}),g\big) \simeq \mathbb{M}\mathrm{dl}_{Mw,\Phi}\big((\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)}),g\big)\,,$$
$$\mathbb{M}\mathrm{dl}_{Mw,\Phi}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(k)}) \simeq \mathbb{M}\mathrm{dl}_{Mw,\Phi}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(l)})\,.$$

如果 $\mathbb{\Gamma} = H$ 是普通群（而非高阶群）的层，那么这些模空间 ∞-预堆甚至是 ∞-叠。

证明。 这两个等价都由定理 8.30 得出；注意，根据推论 12.5，其中每个态射

$$\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k} \times \mathrm{Met}^{\mathcal{D}}_{r,s} \longrightarrow \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|l} \times \mathrm{Met}^{\mathcal{D}}_{r,s} \qquad \text{and}$$
$$\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|k} \longrightarrow \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla|l}$$

都是 0-连通的。最后一个断言由推论 9.15 立即得出（容易看出，解预层是该推论所要求的同伦层，因为场方程只涉及 $(\mathcal{G},\mathcal{A})$ 的曲率）。□

注 14.21。 定理 14.18、14.19 和 14.20 的类似版本也适用于例 14.12 和 14.15 中的其他模空间 ∞-(预)叠。◁

我们以一个例子结束本节，该例编码了高阶群在高阶麦克斯韦解的单纯预层上的作用；一个截断版本也见于 [34, 第 4 节。1]:

例 14.22. 定义完整的单纯子预层

$$\mathrm{tr}\,\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla} \subset \mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla}$$

其所有顶点 $(\mathcal{G},\mathcal{A})$ 的底层 n-gerbe 均由一个恒等于 1 的 U(1) 值切赫上循环给出，且其联络具有如下形式 $\mathcal{A} = (A_1,\dots,A_{n+1}) = (0,\dots,0,\delta\rho)$，其中 ρ 是 M 上某个全局定义的 $(n+1)$-形式的光滑族。我们将这些对象记为 $(\mathcal{G},\rho)$。$\mathrm{tr}\,\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla}$，中从 $(\mathcal{G},\rho_0)$ 到 $(\mathcal{G},\rho_1)$ 的态射 $\to$，等同于一个带联络的 $(n-1)$-gerbe $(\mathcal{G}',\mathcal{A}')$，满足

$$\rho_1 - \rho_0 = \mathrm{curv}(\mathcal{G}',\mathcal{A}')\,.$$

令

$$\mathrm{tr}\,\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla,1\flat} \subset \mathrm{tr}\,\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla}$$

表示通过要求 1-单形 $(\mathcal{G}',\mathcal{A}')$ 为带联络的平坦 $(n-1)$-gerbe 的光滑族而定义的进一步单纯子集。我们置

$$\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} := \mathrm{Met}^{\mathcal{D}}_{r,s} \times \Big((\mathrm{tr}\,\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla})_{(\mathcal{F},0)/} \underset{\mathrm{tr}\,\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla}}{\times} \mathrm{tr}\,\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla,1\flat}\Big)\,.$$

我们可以将其视为如下高阶作用群胚（或同伦商）的一个模型：

$$\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} \simeq \mathrm{Met}^{\mathcal{D}}_{r,s} \times \big(\mathrm{Grb}^{n-1,\mathcal{D}}_{\nabla} /\!\!/ \mathrm{Grb}^{n-1,\mathcal{D}}_{\flat}\big)$$

平坦（$n-1$）-gerbe 通过 $\mathrm{Grb}^{n-1,\mathcal{D}}_{\nabla}$，中的乘积，作用于$M$ 上的所有带联络的（$n-1$）-gerbe。以上面这种较为复杂的方式写出 $\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}$ 的好处是，更容易看出该态射

$$\begin{aligned}\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} &= \mathrm{Met}^{\mathcal{D}}_{r,s} \times \Big((\mathrm{tr}\,\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla})_{(\mathcal{F},0)/} \underset{\mathrm{tr}\,\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla}}{\times} \mathrm{tr}\,\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla,1\flat}\Big) \qquad (14.23)\\ &\longrightarrow \mathrm{Met}^{\mathcal{D}}_{r,s} \times \big(\Omega^{d-n-1,v,\mathcal{D}} \times \big(\{\mathcal{F}\} /\!\!/ \mathrm{Grb}^{n-1,\mathcal{D}}_{\flat}\big)\big) =: \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}\end{aligned}$$

是一个射影纤维化。我们更详细地描述这个态射：首先，单纯预层$\{\mathcal{F}\}//\mathrm{Grb}^{n-1,\mathcal{D}}_{\flat}$，对每个$k > 0$，都与 $\mathrm{tr}\,\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla,1\flat}$，具有相同的$k$-单形；而在每个$c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$ 上，

它只有一个顶点。我们可以将其理解为一个无联络的平凡n-gerbe 的 Kan 复形，不过仍像之前一样给高阶单形赋予联络。于是，在单纯层级$k > 0$中，态射 (14.23) 的第二个分量与典范投影一致

$$\mathrm{Met}^{\mathcal{D}}_{r,s} \times \left((\mathrm{tr}\,\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla})_{(\mathcal{F},0)/} \underset{\mathrm{tr}\,\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla}}{\times} \mathrm{tr}\,\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla,1\flat} \right) \longrightarrow \mathrm{Met}^{\mathcal{D}}_{r,s} \times \mathrm{tr}\,\mathrm{Grb}^{n,\mathcal{D}}_{\nabla,1\flat} .$$

在顶点上，该态射的作用为

$$\left(g,\, (\mathcal{G}', \mathcal{A}') \colon (\mathcal{F},0) \to (\mathcal{F},\rho)\right) \longmapsto \left(g,\, \mathrm{d}^*_g\rho,\, \{\mathcal{F}\}\right) .$$

容易看出，态射 (14.23) 具有角提升性质，因此它是一个 Kan 纤维化。我们进一步定义

$$\mathrm{Sol}^{\mathcal{D}} = \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} .$$

于是，(14.23) 的纤维描述了给定非齐次性 $j = \mathrm{d}^*_g\rho$ 下高阶麦克斯韦解的光滑族。这一设定以光滑高群作用的形式，编码了平坦高阶 U(1) 联络对麦克斯韦方程解的作用，例如 [34,第 4 节1]，中所研究的情形。◁

15. Higher U(1)-gauge theory and a new String group model

接下来，我们简要介绍我们的结果在弦群（如 [70] 中所定义）上的一个应用。这里我们将使用光滑 ∞-群的形式体系，即 ∞-范畴 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中的群对象，以及在这一设定下的弦群扩张概念，该概念由 [13] 引入（特别参见 [13,定义 4.1、4.2]）。设 H 为紧致、单连通的简单李群。那么，H 的光滑弦群扩张是一个扩张

$$A \longrightarrow \widehat{H} \longrightarrow H$$

群对象于 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中（见 [60, 定义 4.26] 和 [13, 定理 3.48]），函子 $S\colon \mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art}) \to \mathcal{S}$ 将其映射为 $\mathcal{S}$ 中的普通弦群扩张。我们回顾一下 1-gerbe 上 k- 联络的以下标准术语：

定义 15.1. 设 $\mathcal{G} \in \mathrm{Grb}^1(M)$ 是流形 M 上的一个 1-gerbe。$\mathcal{G}$ 上的联络结构 是一个 1-联络 $\mathcal{A}^{(1)}$。1-gerbe 与其上的联络结构这一对 $(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(1)})$ 的曲率形式 是由局部定义的 2-形式组成的族，它将 $\mathcal{A}^{(1)}$ 完备为 $\mathcal{G}$ 上的完全联络。换言之，1-gerbe 上的联络由联络结构和相容的曲率形式构成。

令 $L\colon H \to \mathrm{Diff}(H)$ 表示 H 通过左乘在自身上的作用。令 $\mathcal{G}_{bas} \in \mathrm{Grb}^1(M)$ 表示其基本gerbe [59]；这是一个在 $\mathrm{H}^3(H;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ 中的类为生成元的 gerbe。此外，$\mathcal{G}_{bas}$ 带有一个典范联络 [59]；我们将此联络记为 $\mathcal{A}_{bas}$，并将其底层联络结构记为 $\mathcal{A}^{(1)}_{bas}$。

在 [28], Fiorenza、Rogers 和 Schreiber 构造了一个光滑 String 群模型；在我们的形式体系中，它与如下扩张一致

$$\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G}_{bas}, \mathcal{A}_{bas}) \longrightarrow \mathbb{S}\mathrm{tring}^{(2)}(H) := \mathbb{S}\mathrm{ym}_L(\mathcal{G}_{bas}, \mathcal{A}_{bas}) \longrightarrow H$$

由定理 7.23 得到的 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中群对象的扩张。这是以 BU(1) 为核、以 H 为商的扩张。[10] 曾猜想该扩张，[13] 则证明了它同样是一个光滑 String 群模型。

$$\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G}_{bas}) \longrightarrow \mathbb{S}\mathrm{tring}^{(0)}(H) := \mathbb{S}\mathrm{ym}_L(\mathcal{G}_{bas}) \longrightarrow H$$

根据推论 7.23，它是 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中作为群对象的 H 的扩张，其核为光滑 2-群 $\mathbf{B}(\mathbb{G}\mathrm{rb}^{0,M}) \simeq \mathbf{B}(H^{\mathrm{U}(1)})$；这里的等价利用了 $\mathrm{H}^2(H;\mathbb{Z}) = 0$。$\mathbf{B}(\mathrm{U}(1)^H)$ 的底层空间进一步具有 BU(1) 的同伦类型，因为 $\pi_1(H) \simeq 0$；详见 [10,13]。

这里我们关注中间情形，即该扩张

$$\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G}_{bas}, \mathcal{A}^{(1)}_{bas}) \longrightarrow \mathbb{S}\mathrm{tring}^{(1)}(H) := \mathbb{S}\mathrm{ym}_L(\mathcal{G}_{bas}, \mathcal{A}^{(1)}_{bas}) \longrightarrow H ,$$

在此情形下，我们固定基本gerbe，但只固定其联络结构，而非其完全联络。存在一个典范等价

$$\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G}_{bas},\mathcal{A}^{(1)}_{bas}) \simeq \mathbb{G}\mathrm{rb}^{0,H}_{\nabla}\,,$$

它是 H 上带联络的 U(1)-丛的光滑 ∞-群（不过请注意，H 上的每个 U(1)-丛都是可平凡化的）。由 H 是 2-连通的事实（因此 H 上的每个 U(1)-丛都是可平凡化的）以及推论 13.3，我们由此得到

$$S\big(\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G}_{bas},\mathcal{A}^{(1)}_{bas})\big) \simeq S\mathbb{G}\mathrm{rb}^{0,H}_{\nabla} \simeq S\mathbb{G}\mathrm{rb}^{0,H} \simeq \mathrm{BU}(1)\,.$$

也就是说，它具有 String 群扩张中纤维所需的正确同伦类型。

我们验证 $\mathbb{S}\mathrm{tring}^{(1)}(H)$ 确实具有作为 H 的 String 群扩张所需的正确同伦类型：首先，典范遗忘映射 $p^1_0\colon \mathbb{G}\mathrm{rb}^{1,\mathcal{D}}_{\nabla|1} \longrightarrow \mathbb{G}\mathrm{rb}^{1,\mathcal{D}}$ 诱导出光滑 ∞-群的一个典范态射

$$q'\colon \mathbb{S}\mathrm{tring}^{(1)}(H) = \mathbb{S}\mathrm{ym}_L(\mathcal{G}_{bas},\mathcal{A}^{(1)}_{bas}) \longrightarrow \mathbb{S}\mathrm{ym}_L(\mathcal{G}_{bas}) = \mathbb{S}\mathrm{tring}^{(0)}(H)\,.$$

推论 15.2。 典范遗忘映射 q' 在 $\mathbb{S}\mathrm{tring}^{(1)}(H)$ 和 $\mathbb{S}\mathrm{tring}^{(0)}(H)$ 的底层空间之间诱导出一个等价。

证明。 这可直接将推论 8.40 应用于如下情形得出：

$$\mathrm{Sol}^{\mathcal{D}} = \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} = \mathrm{Grb}^{1,\mathcal{D}}_{\nabla}\,, \qquad \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}_0 = \mathrm{Grb}^{1,\mathcal{D}}_{\nabla|1} \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}_1 = \mathrm{Grb}^{1,\mathcal{D}}_{\nabla|0}\,,$$

其中典范态射 $p_l^k\,\mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}_0 \to \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}_1$会遗忘 gerbe 联络的曲率形式（另见定理 13.1 和推论 13.3）。□

因此，要证明 $\mathbb{S}\mathrm{tring}^{(1)}(H) \to H$ 确实是一个弦群扩张，接下来只需检验态射

$$S\big(\mathbb{S}\mathrm{tring}^{(1)}(H)\big) \longrightarrow H$$

在 $\mathbb{S}$ represents 中代表 $\mathrm{H}^3(H;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$的一个生成元。然而，我们有一个交换三角形 le

$$\begin{array}{ccc} S\big(\mathbb{S}\mathrm{tring}^{(1)}(H)\big) & \xrightarrow{Sq'} & S\big(\mathbb{S}\mathrm{tring}^{(0)}(H)\big) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & H & \end{array}$$

其中水平态射是一个等价。由于右侧的对角态射代表 $\mathrm{H}^3(H;\mathbb{Z})$ 的一个生成元（因为我们知道 $\mathbb{S}\mathrm{tring}^{(0)}(H)$ 是一个 String 群模型），因此左侧的态射也代表 $\mathrm{H}^3(H;\mathbb{Z})$ 的一个生成元。事实上，如果$\mathcal{A}^{(1)}$ 是 任意 G上的一个$_{bas}$1-联络，同样的论证也完全成立。这就构造出了一整族高阶光滑 String 群模型：

定理 15.3。 对于任意 *1*-联络 $A^{(1)}$，群对象的扩张

$$\mathbb{A}\mathrm{ut}(\mathcal{G}_{bas},\mathcal{A}^{(1)}) \longrightarrow \mathbb{S}\mathrm{tring}^{(1)}(H) := \mathbb{S}\mathrm{ym}_L(\mathcal{G}_{bas},\mathcal{A}^{(1)}) \longrightarrow H$$

in $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 是 H 的弦群的一个模型。

证明。 定理 15.3 之前的论证证明了$\mathcal{A}^{(1)}$ =$\mathcal{A}^{(1)}{}_{bas}$的情形。一般情形则由定理 14.6 和 8.39 得出。□

16. NSNS 超引力解的模空间与 gerbe 联络

在本节中，我们构造M上 NSNS 超引力解的高模堆。请注意，同一形式体系可直接应用于 gerbe 上的广义里奇孤子，而超引力 NSNS 解是其中一个特定类别。我们不要求 B 场在拓扑上平凡。本节关注的要点是 B 场的数学结构：它通常被描述为M上某个 gerbe 上的联络，或M上某个恰当 Courant 代数丛的各向同性分裂。我们通过在本文的框架下给出恰当 Courant 代数丛的单纯预层描述，比较这两种观点，并将 Hitchin 的广义切丛构造改造为一个映射：从带联络结构（分别地，带曲率形式）的 gerbe 单纯预层映至带各向同性分裂（分别地）的恰当 Courant 代数丛单纯预层。M 上的恰当 Courant 代数丛群胚可视为集合 $\mathrm{H}^3(M;\mathbb{R})$的一种范畴化。我们的单纯模型还将 $\mathrm{H}^3(M;\mathbb{R})$上的阿贝尔群结构范畴化。

我们指出，在两种图景中，NSNS 超引力的场构型并不等价。在第一种图景中，它们构成一个真正的群胚，而在第二种图景中，它们构成一个集合。不过，我们回顾一下，与带联络结构的 gerbe 相关联的广义切丛，是其作为主2-丛的 Atiyah代数丛。利用这一事实并运用电荷量子化，我们能够将定理 8.30 应用于这一问题，并得出解的高阶模叠是等价的。

16.1. **恰当 Courant 代数丛的单纯预层**。考虑单纯预层

$$\mathrm{ECA} := \Gamma \circ \Omega^{2,v}_{\mathrm{cl}}[-1]\colon \mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}{}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}$$

它将一个对象 $(\hat{c} \to c) \in \mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ 映射为由链复形的 Dold-Kan 构造得到的单纯集合

$$\mathrm{b}\Omega^{2,v}_{\mathrm{cl}} = \Omega^{2,v}_{\mathrm{cl}}[-1] = \left(0 \longleftarrow \Omega^{2,v}_{\mathrm{cl}} \longleftarrow 0\right).$$

这里 $\Omega^{2,v}_{\mathrm{cl}}$ 位于次数一，并表示 $\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ 上 $\hat{c}$ 的二次竖直微分形式层；这些形式在竖直德拉姆微分 d^v 下是闭的。函子 ECA 在态射上的作用就是对微分形式作拉回。

存在一个定义在 $\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ 上的典范单纯预层态射

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{bb}_{\nabla}\mathrm{U}(1) & = & (0 & \longleftarrow & \Omega^{1,v} & \xleftarrow{\mathrm{d}^v \log} & \mathrm{U}(1) & \longleftarrow & 0) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{d}^v} & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{b}\Omega^{2,v}_{\mathrm{cl}} & = & (0 & \longleftarrow & \Omega^{2,v}_{\mathrm{cl}} & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0)
\end{array} \tag{16.1}$$

第3.1节中的形式体系给出了一个单纯预层

$$\widetilde{\mathrm{ECA}}^{\mathcal{D}} := \check{C}^{\mathcal{D}*}\mathrm{ECA}\colon (\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}, \qquad \widetilde{\mathrm{ECA}}^{\mathcal{D}}(c, \hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}) = \underline{\mathcal{H}_{\mathrm{fam}}}\left(\check{\mathrm{C}}(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}), \mathrm{ECA}\right).$$

我们可以描述单纯集合 $\widetilde{\mathrm{ECA}}^{\mathcal{D}}(c, \hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U})$，其具体形式如下：它是由以下内容构成的群胚的脉络

- 对象为 2-形式 $F \in \Omega^{2,v}(c, \check{\mathrm{C}}_1 \hat{\mathcal{U}})$，这些形式在竖直切赫微分和德拉姆微分下封闭。
- 态射 $F_0 \to F_1$ 由竖直闭 2-形式 $b \in \Omega^{2,v}(\check{\mathrm{C}}_0\hat{\mathcal{U}})$ 给出，其竖直切赫微分满足 $\delta_v b = F_1 - F_0$。

下文中，我们常常会稍微滥用记号，通过其所对应的群胚来讨论 $\widetilde{\mathrm{ECA}}^{\mathcal{D}}(c, \hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U})$，因为它是该群胚的脉络。

引理 16.2. 函子

$$\Omega^{2,v}_{\mathrm{cl}}[-1]\colon \mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}{}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}\mathrm{h}_{\geq 0}$$

满足沿 τ_{fam}-覆盖的下降。因此，对象 $\mathrm{ECA} \in \mathcal{H}_{\mathrm{fam}}$ 在 $\mathcal{H}^{loc}_{\mathrm{fam}}$中是纤维化的。

证明。 设 $(\hat{}\mathcal{U} \to \mathcal{U})$ 是 $(\hat{}c \to c)$ 在 $\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ 中的一个覆盖。我们需要证明典范态射

$$\Omega^{2,v}_{\mathrm{cl}}[-1](\hat{c} \to c) \longrightarrow \mathrm{holim}_{\Delta}\Big(\Omega^{2,v}_{\mathrm{cl}}[-1]\big(\check{C}(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U})\big)\Big)$$

是一个拟同构。该同伦极限由每个次数上的切赫分解所给出的双复形的截断全链复形来建模。具体而言，这是一个两项链复形

$$\Omega^{2,v}_{\mathrm{cl}}\big(\check{C}_0(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U})\big) \xrightarrow{\delta} \ker\Big(\delta\colon \Omega^{2,v}_{\mathrm{cl}}\big(\check{C}_1(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U})\big) \longrightarrow \Omega^{2,v}_{\mathrm{cl}}\big(\check{C}_2(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U})\big)\Big)\,, \tag{16.3}$$

其中第二项位于零次。注意，该链复形仅取决于笛卡尔空间 $\hat{}\mathcal{U}$ $\hat{}c$的覆盖。我们很容易看出，其第一同调群为 $\Omega^{2,v}_{2,\mathrm{cl}}(\hat{}c \to c)$，因此只需证明其零次同调消失。我们对此进行明确验证：设 ω 是一个零循环。由于它是 Čech闭的，存在某个 $\eta \in \Omega^{2,v}(\check{C}_0(\hat{}\mathcal{U} \to \mathcal{U}))$，使得 $\delta\eta = \omega$。然而，一般而言，这个 η 并非 d^v-闭。为使其 d^v-闭，首先注意到

$$\delta \mathrm{d}^v \eta = \mathrm{d}^v \delta \eta = 0\,,$$

根据我们对 ω的假设。因此，存在某个（唯一的） $\alpha \in \Omega^{3,v}(\hat{}c \to c)$，使得 $\delta\alpha = \mathrm{d}^v\eta$ (其中我们令 $(\delta\alpha)_a := \alpha_{|\hat{}U_a}$)。注意，该映射

$$\delta\colon \Omega^{p,v}(\hat{c} \to c) \longrightarrow \Omega^{p,v}\big(\check{C}_0(\hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U})\big)$$

对每个$p \in \mathbb{N}_0$都是单射。结合恒等态射

$$\delta \mathrm{d}^v \alpha = \mathrm{d}^v \delta \alpha = \mathrm{d}^v \mathrm{d}^v \eta = 0$$

我们推得，在 $(\hat{}c \to c)$ 上处处有 $\mathrm{d}^v\alpha = 0$。在 $\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ 中，经过同构后，对象 $(\hat{}c \to c)$ 具有典范投影映射 $(c \times d \to c)$ 的形式，其中$c,d \in \mathcal{C}\mathrm{art}$。因此，根据庞加莱引理的族版本（以$c$为参数），我们可找到某个 $\beta \in \Omega^{2,v}(\hat{}c \to c)$，使其满足 $\mathrm{d}^v\beta = \alpha$。于是， $\eta' := \eta - \delta\beta$ 是 $\Omega^{2,v}_{2,\mathrm{cl}}(\check{C}_0(\hat{}U \to \mathcal{U}))$ 中的一个元素，如所需。□

引理16.4。 函子 $\widetilde{\mathrm{ECA}}^{\mathcal{D}}\colon (\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}$ 限制后，在每个 $c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$ 上方的纤维上都是本质常值函子$(\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}})^{\mathrm{op}}_{|c} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}$。

证明。 这是由引理 4.5 的应用得出的。 □

我们定义一个函子

$$\mathrm{ECA}^{\mathcal{D}}\colon \mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}\,, \qquad \mathrm{ECA}^{\mathcal{D}} := \mathrm{Lan}_{\omega^{\mathcal{D}}} \widetilde{\mathrm{ECA}}^{\mathcal{D}}$$

（另见定义10.12）；根据命题 4.6，它是投射纤维化的，并且带有一个态射

$$\mathrm{AtCA}^{\mathcal{D}}\colon \mathrm{Grb}^{1,\mathcal{D}}_{\nabla|1} \longrightarrow \mathrm{ECA}^{\mathcal{D}}$$

位于 $\mathrm{Fun}(\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta})$ 中，该态射由 (16.1) 诱导。我们称这个态射为与具有联络结构的 *gerbe* 相关联的 *Atiyah–Courant*代数丛，其中联络结构定义在M上。下文将进一步阐述这种解释。

接下来，我们考虑 Hitchin 构造的广义切丛 [46, 第 2 节3]（另见 [47,第 7] 节）。原本，这一构造根据具有联络结构的 gerbe 的局部转移数据，生成一个恰当 Courant 代数丛。

注记 16.5。 可以对 Hitchin 的广义切丛构造稍作推广，使其以 $\widetilde{\mathrm{ECA}}^{\mathcal{D}}$ 的截面为输入；该构造实际上并不依赖于具有联络结构的 gerbe 的选择，而仅依赖于局部定义的闭 2-形式集合，这些形式是联络结构的 de Rham 微分（Hitchin 已指出，他的构造中所涉及的 2-形式，其关键性质是闭性，而非它们源自 gerbe 上的联络结构 [46, 第 544] 页）。◁

We s先回顾流形上恰当 Courant 代数丛的一般定义 M:

定义 16.6. M 上的 Courant 代数丛是一个四元组 (E, h–, –i, ⋄, ρ)，由向量丛 E 及其态射 ρ: E → TM（称为锚映射）、E 上光滑、非退化、对称的双线性配对 h–, –i，以及 Dorfman 括号构成。Dorfman 括号是 E 的截面上的反对称双线性映射 ⋄: Γ(M; E) × Γ(M; E) → Γ(M; E)。这些数据满足：对于任意 a、b、c ∈ Γ(M; E) 以及 f ∈ C∞(M)，都有以下恒等态射

(1)（雅可比恒等式）a ⋄ (b ⋄ c) = (a ⋄ b) ⋄ c + b ⋄ (a ⋄ c)，(2)（ρ 保持括号） ρ(a ⋄ b) = [ρ(a), ρ(b)], 右端使用 M 上向量场的李括号，(3)（导子性质）a ⋄ (fb) = f(a ⋄ b) + df(ρ(a)) · b，(4)（括号与配对的相容性）ιρ(a)dhb, ci = ha ⋄ b, ci + hb, a ⋄ ci，(5)（反对称性的失效）a ⋄ b + b ⋄ a = Dha, bi，其中 D : C∞(M) → Γ(M; E) 是如下定义的微分算子

$$D = \sharp_E \circ \rho^\vee \circ \mathrm{d}\,.$$

这里，$\sharp_E$: $E^\vee \to E$ 是由 E 上的非退化配对$\langle -, - \rangle$ 诱导的音乐同构，而 $\rho^\vee$: $T^\vee M \to E^\vee$ 是向量丛态射 ρ: $E \to TM$的对偶。

M 上的 Courant 代数丛（$E, \langle -, - \rangle, \diamond, \rho$）称为恰当 的，如果序列

$$0 \longrightarrow T^\vee M \xrightarrow{\sharp_E \circ \rho^\vee} E \xrightarrow{\rho} TM \longrightarrow 0$$

M 上的向量丛序列是恰当的。

定义 16.7. 设 (E0, h–, –i0, ⋄0, ρ0) 和 (E1, h–, –i1, ⋄1, ρ1) 是 M 上的两个恰当 Courant 代数丛。恰当 Courant 代数丛 (E0, h–, –i0, ⋄0, ρ0) → (E1, h–, –i1, ⋄1, ρ1) 之间的同构是一个向量丛同构 ψ: E0 → E1，它保持配对和 Dorfman 括号。

由此可知，ψ 也交织锚映射 [37, p. 14]。注意，对于每个$c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$，这可以直接推广为定义在$M$上的一族恰当 Courant 代数丛，其参数为$c$：这是一个向量丛$E \to c \times M$，其数据与上文相同，只是在定义 16.6 中，我们将处处出现的德拉姆微分替换为垂直德拉姆微分 d^v，对$T^\vee M$ 和TM也作类似处理。

此外，注意，如果$f \in \mathrm{Diff}(M)$，且（$E, \langle -, - \rangle, \diamond, \rho$)是$M$上的一个恰当 Courant 代数丛，那么我们便在拉回丛f^*E上得到一个规范的 Courant 代数丛结构；我们将这个由此得到的恰当 Courant 代数丛记为

$$f^*(E, \langle -, - \rangle, \diamond, \rho) = (f^*E, f^*\langle -, - \rangle, f^*\diamond, f_*^{-1} \circ \rho)\,.$$

注记 16.8。 总之，我们得到一个伪函子

$$\mathcal{EGA}\colon \mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{G}\mathrm{pd}\,,$$

它将每个对象$c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$映射到$M$上以$c$为参数的一族恰当 Courant 代数丛所构成的群胚。◁

Hitchin 广义切丛构造的改编形式如下：$\widetilde{\mathrm{ECA}}^{\mathcal{D}}$(c, ˆU → U) 中的每个对象 F 都是 M 上一个光滑族恰当 Courant 代数丛的下降数据：对于覆盖 ˆU 中 c×M 的每个片 $\hat{U}_\alpha$，考虑向量丛 $T^v \hat{U}_\alpha \oplus T^{v,\vee} \hat{U}_\alpha$，也就是片 $\hat{U}_\alpha$ 上垂直切丛与余切丛的直和。对于每个 x ∈ $\hat{U}_\alpha$，令 (x0,x1) ∈ c×M 为其在包含映射 $\hat{U}_\alpha$,ˇ c×M 下的像。这便典范地将垂直切空间 $T^v_{|x} \hat{U}_\alpha$ 与 $T_{|x_1}M$ 等同，垂直余切空间 $T^{v\,\vee}_{|}$, x ˆU$_\alpha$ 与 $T^\vee_{|x_1}M$ 也同样如此。给定一点 y ∈ $\hat{U}_b$，满足 $y_0 = x_0 \in c$ 且 $y_1 = x_1 \in M$，我们将每一对 $X + \xi \in T^v_{|x} \hat{U}_\alpha \oplus T^{v\,\vee}_{|}$, x ˆU$_\alpha$ 与以下一对等同

$$X + \xi + \iota_X F_{ab} \quad \in T^v_{|y} \hat{U}_b \oplus T^{v,\vee}_{|y} \hat{U}_b\,.$$

这定义了 c×M 上的向量丛 $E(F)$。它构成向量丛的一个短正合列

$$0 \longrightarrow T^{v,\vee}M \longrightarrow E(F) \longrightarrow T^v M \longrightarrow 0$$

在 c×M 上。借助 1-形式与切向量之间的典范配对以及标准 Courant 括号（利用 c×M 上的垂直向量场和 ˆU$_a$ 上的垂直向量场分别对 c×M 和 ˆU$_a$ 上向量场的李括号封闭这一性质），我们在 M 上的每个向量丛 E(F)$_{|(x_0,-)}$ 上都得到一个恰当 Courant 代数丛的结构。该结构关于 $x_0 \in M$ 光滑变化，其意义是：c×M 上 E(F) 的两个光滑截面的配对和括号分别是 c×M 上的光滑函数和 E(F) 的光滑截面。类似地，每个态射 b : $F_0 \to F_1$ in $\widetilde{\mathrm{ECA}}^{\mathcal{D}}$(c, ˆU → U) 都通过所谓的 B 场变换 e^b，诱导出 c×M 上向量丛 $E(F_0) \to E(F_1)$ 的一个向量丛同构；相对于覆盖 ˆU，它写作

$$X + \xi \longmapsto X + \xi + \iota_X b_a \,.$$

这甚至是恰当 Courant 代数丛的同构（在c上的每个纤维上）。

因此，我们描述了一个态射

$$\widetilde{\mathrm{ECA}} \longrightarrow \pi_M^* \mathcal{BGA}$$

伪函子 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}} \to \mathcal{G}\mathrm{pd}$，在其对 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$ 的每个对象（c,ˆ$\mathcal{U} \to \mathcal{U}$）所赋予的内容这一层级上。对态射的扩展是直接的（使用沿光滑映射的向量丛拉回）。考虑 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$ 中形如（$\mathbb{R}^0$, ˆ$\mathcal{U} \to \mathbb{R}^0$）的一个对象；换句话说，ˆ$\mathcal{U}$ 只是M的一个良好开覆盖。

注16.9. 映射 ˇCˆ$\mathcal{U} \to \Gamma \mathrm{b}\Omega^2_{M\,\mathrm{cl}} = \mathrm{B}\Omega^2_{M\,\mathrm{cl}}$ 等价地说，是M 上结构群为光滑群 $\Omega^2_{M\,\mathrm{cl}}$ 的主丛（或扭子）的过渡数据。上述构造的丛E 于是是 $\Omega^2_{M\,\mathrm{cl}}$在 $\Gamma(-; T^vM) \oplus \Omega^{1,M}$ 上的作用所对应的关联丛；这里的对象是M上的向量场与 1-形式构成的层。◁

在这种情况下，众所周知，上述构造能够得到 $M \cong \mathbb{R}^0 \times M$ 上所有恰当 Courant 代数丛，模去保纤维同构（即模去 B 场变换；例如参见 [37,Thm.2.19]）。为方便起见，我们给出一个非标准论证来证明这一事实：令$\mathcal{BGA}(\mathbb{R}^0)$ 表示 M上恰当 Courant 代数丛及其同构所构成的群胚。

引理 16.10. 广义切丛的构造

$$\mathrm{ECA}^{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^0) \simeq \widetilde{\mathrm{ECA}}^{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^0, \hat{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}^0) \longrightarrow \mathcal{BGA}(\mathbb{R}^0)$$

是一个群胚等价。

证明。 这由与良好开覆盖 (ˆ$U \to \mathcal{U}$) 的 ($c \times M \to M$) 相关的 $\Omega^2_{v\,\mathrm{cl}}[-1]$ 的 Čech 复形的计算得到；它具有与 (16.3) 中相同的显式描述。特别地，其第一同调群与 M 上的闭 2-形式群一致，而后者也与 M 上任意恰当 Courant 代数丛的自同构规范同构（例如参见， [37,命题 2.15]）。根据引理 16.2 的证明，我们还看到，$\Omega^2_{v\,\mathrm{cl}}[-1]$ 的 Čech 复形的第一同调群与 $\mathrm{H}^3(M;\mathbb{R})$ 一致，而根据 Ševera 关于 M 上恰当 Courant 代数丛的 Ševera 分类（参见例如 [37, 定理 2.19]；注意，这也适用于底流形的微分同胚取为平凡的情形），它与 M 上恰当 Courant 代数丛的同构类集合规范同构。因此，（广义）广义切丛构造是全忠实且本质满的。□

注记 16.11。 流形M 上的恰当 Courant 代数丛的同构类与 $\mathrm{H}^3(M;\mathbb{R})$ 存在典范双射。单纯预层 $\mathrm{ECA}^M = Ne^*_M \mathrm{ECA}^{\mathcal{D}}$: $\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ of exact Courant algebroids on a manifold M及其同构的底层空间（依定义 8.33 的意义）根据引理 8.35 是可缩的。这与 $\mathrm{Grb}^{1,M}$ 的情形（见定理 13.5）形成鲜明对比。理解这一差异的一种方式是，gerbe 由整数 上同调分类，其系数群具有离散拓扑；而实上同调用于分类恰当 Courant 代数丛，其系数群为实数轴，并且在光滑意义下是可缩的

。另一种略有不同但相关的观点是：将 gerbe 视为由取值于 U(1) 的上同调分类；此时，上同调群也继承了光滑结构，但与此同时，它们还从 U(1) 继承了非平凡拓扑，这阻止了此处的可缩性。◁

用 $\Omega^{2,v\,\mathrm{cl}}_{}{}^{[-1]}$ 描述精确 Courant 代数丛，具有以下良好的结构性质：根据 Ševera 分类，M上的精确 Courant 代数丛的同构类与 $\mathrm{H}^3(M;\mathbb{R})$的元素构成双射，而后者具有典范的阿贝尔群结构。因此，一个自然的问题是：这一阿贝尔群结构是否体现了精确 Courant 代数丛自身的某种相应结构？也就是说，M 上的精确 Courant 代数丛群胚是否存在一种辫单幺结构，能够将 $\mathrm{H}^3(M;\mathbb{R})$上的阿贝尔群结构范畴化？以下观察是通过 Dold-Kan 构造，从一个由 $\mathbb{R}$-模预层构成的复形构造 $\widetilde{\mathrm{ECA}}^{\mathcal{D}}$ 的结果；它对我们的问题给出了肯定的回答：

—

引理 16.12。对于每个对象 $(c, \hat{U} \to U) \in \mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}$，群胚 $\widetilde{\mathrm{ECA}}^{\mathcal{D}}(c, \hat{U} \to U)$ 在竖直微分形式的加法运算下构成严格对称幺半群。特别地，$\widetilde{\mathrm{ECA}}^{\mathcal{D}}(c, \hat{U} \to U)$ 的脉络是一个单纯阿贝尔群。

注记 16.13. 如果我们将范围限制为相对于 M 的一个良好开覆盖 $\{\mathrm{U}_a\}_{a\in\Lambda}$ 定义的恰当 Courant 代数丛群胚，则对称幺半结构具有以下形式：设 $\{\mathrm{F}_{ab} \in \Omega^2_{\mathrm{cl}}(\mathrm{U}_{ab})\}_{a,b\in\Lambda}$ 和 $\{\mathrm{F}'_{ab} \in \Omega^2_{\mathrm{cl}}(\mathrm{U}_{ab})\}_{a,b\in\Lambda}$ 是 M 上取值于 Ω^2,的两个切赫 1-余循环，它们分别表示 M 上的两个恰当 Courant 代数丛。这些恰当 Courant 代数丛的幺半乘积由余循环 $\{\mathrm{F}_{ab} + \mathrm{F}'_{ab} \in \Omega^2_{\mathrm{cl}}(\mathrm{U}_{ab})\}_{a,b\in\Lambda}$表示。类似地，设 $\{\omega_a \in \Omega^1_{\mathrm{cl}}(\mathrm{U}_a)\}_{a\in\Lambda}$和 $\{\omega'_a \in \Omega^1_{\mathrm{cl}}(\mathrm{U}_a)\}_{a\in\Lambda}$ 是定义上述恰当 Courant 代数丛之间 B 场变换 e^{ω} 和 $\mathrm{e}^{\omega'}$ 的局部 2-形式集合。这些态射的幺半乘积为 $\{\omega_a + \omega'_a \in \Omega^1_{\mathrm{cl}}(\mathrm{U}_a)\}_{a\in\Lambda}$，它表示 B 场变换 $\mathrm{e}^{\omega+\omega'}$。 /

定理 16.14. 该态射

$$\mathrm{AtCA}^{\mathcal{D}} \colon \mathrm{Grb}^{1,\mathcal{D}}_{\nabla|1} \longrightarrow \mathrm{ECA}^{\mathcal{D}}$$

在 $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 上的单纯预层之间与群结构相容；也就是说，它甚至是 $\mathrm{B}\mathcal{D}$上的单纯阿贝尔群预层之间的态射。此外，将范围限制为覆盖 M 上恒等态射的那些态射后，该构造将$\mathrm{H}^3(M;\mathbb{Z})$到$\mathrm{H}^3(M;\mathbb{R})$的包含范畴化：我们有一个阿贝尔群的交换方块

$$\begin{array}{ccc} \pi_0\big(\mathrm{Grb}^{1,M}_{\nabla|1}(\mathbb{R}^0)\big) & \xrightarrow{\pi_0(\mathrm{AtCA})_{|\mathbb{R}^0}} & \pi_0\big(\mathrm{ECA}^{M}(\mathbb{R}^0)\big) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{DD}}_{\cong} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \check{\mathrm{S}}\mathrm{C}}_{\cong} \\ \mathrm{H}^3(M;\mathbb{Z}) & \hookrightarrow & \mathrm{H}^3(M;\mathbb{R}) \end{array}$$

这里，左侧的竖直态射取带联络结构的 *gerbe* 的 *Dixmier-Douady* 类（注意，该类与联络结构无关），右侧的竖直态射取精确 *Courant* 代数丛的 *Ševera* 类。

证明。容易验证，$\mathrm{Grb}^{1,\mathcal{D}}_{\nabla|1}$,和 $\mathrm{ECA}^{\mathcal{D}}$ 定义中的余极限构造与阿贝尔群结构相容（滤过余极限保持有限积）。第二个断言随即由 1-gerbe 和精确 Courant 代数丛的 Dixmier-Douady 类和 Ševera 类的定义分别得出。□

16.2. **各向同性分裂与广义度量的光滑族**。现在，我们将各向同性分裂和广义度量纳入对M上恰当 Courant 代数丛光滑族的局部描述中。

定义 **命题 16.15**。具有各向同性分裂的恰当 *Courant* 代数丛的单纯预层 g,

$$\mathrm{ECA}_{\nabla}\colon \mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}\,,$$

是链复形预层的 Dold-Kan 构造

$$\left(\Omega^{2,v} \hookleftarrow \Omega^{2,v}_{\mathrm{cl}}\right)\colon \mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}} \longrightarrow \mathcal{C}\mathrm{h}_{\geq 0}\,,$$

其中 $\Omega^{2,\,v}$ 位于零次项。

注记 16.16。 注意，链复形 $\Omega_{2,\,\mathrm{cl}}^{\,v}$ ，$\to\Omega^{2,\,v}$ 是如下同伦拉回

$$\begin{array}{ccc} \left(\Omega^{2,v} \hookleftarrow \Omega^{2,v}_{\mathrm{cl}}\right) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{b}\Omega^{2,v}_{\mathrm{cl}} & \hookrightarrow & \mathrm{b}\Omega^{2,v} \end{array}$$

该同伦拉回方块所对应的余跨度中的每个顶点都满足关于 τ_{fam}-覆盖的同伦下降（论证类似于引理 16.2 的证明）。因此，链复形预层 $(\Omega^{2,\,v} \hookleftarrow \Omega_{2,\,\mathrm{cl}}^{\,v})$ 以及 ECA_{∇} 也满足关于 τ_{fam}-覆盖的同伦下降。 ◁

由此我们得到一个单纯预层

$$\widetilde{\mathrm{ECA}}^{\mathcal{D}}_{\nabla}\colon \mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}(M)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}$$

通过逐对象应用 Dold-Kan 构造，再应用构造 4.4，与 ECA_{∇} 相关联；这在投影 $\varpi^{\mathcal{D}}\colon \mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}(M) \to \mathrm{B}\mathcal{D}$ 的每个纤维上再次限制为本质常值函子 $\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}(M)^{\mathrm{op}}_{|c} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}$ （根据引理 4.5）。因此，我们得到一个性质良好的左 Kan 延拓

$$\mathrm{ECA}^{\mathcal{D}}_{\nabla}\colon \mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}\,.$$

例 1 **6.17.** $\mathrm{ECA}_{\nabla}(c)$中的一个顶点，对于$c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$，由一个良好开覆盖 $(\hat{}\mathcal{U} \to U)$ 的$\mathcal{C}^{\infty}$-M一个2-形式 $F \in \Omega_{2,\,\mathrm{cl}}^{\,v}(\check{C}_1\,\hat{}\mathcal{U})$和一个 2-形式$B \in \Omega^{2,v}(\check{C}_0\,\hat{}\mathcal{U})$给出，并满足

$$\delta B = F \qquad (\text{as well as} \quad \delta F = 0 \quad \text{and} \quad \mathrm{d}^{v} F = 0)\,.$$

在 $Ne^{*}_{M}\mathrm{ECA}_{\nabla}(c)$ 中，一个 1-单形 $(F_0, B_0) \to (F_1, B_1)$ 是一个 2-形式 $b \in \Omega_{2,\,\mathrm{cl}}^{\,v}(\check{C}_0\,\hat{}\mathcal{U})$（必要时先对良好开覆盖作细化），满足

$$b = B_1 - B_0\,.$$

从几何上看，b 是一个 B 场变换，它保持精确 Courant 代数丛的各向同性分裂不变。所有高阶单形都是平凡的；也就是说，$Ne^{*}_{M}\mathrm{ECA}_{\nabla}(c)$ 实际上是一个被提升为单纯集合的集合 （注意，在 $\mathrm{ECA}_{\nabla}(c)$ 中，仍然存在非平凡的 1-单形，它们源自底流形 M 的微分同胚的作用）。◁

存在一个典范的交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{b}^{2}_{\nabla}\mathrm{U}(1) & \longrightarrow & \left(\Omega^{2,\,v} \hookleftarrow \Omega_{2,\,v\,\mathrm{cl}}\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{bb}_{\nabla}\mathrm{U}(1) & \longrightarrow & \mathrm{b}\Omega^{2,v}_{\mathrm{cl}} \end{array}$$

在 $\mathcal{C}\mathrm{art}_{\mathrm{fam}}$ 上的链复形预层层级。顶部态射写作

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{bb}_{\nabla}\mathrm{U}(1) & = & \left(\Omega^{2,v} & \longleftarrow & \Omega^{1,v} \xleftarrow{\mathrm{d}^{v}\log} \mathrm{U}(1) & \longleftarrow & 0\right) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{d}^{v}} & & \downarrow \\ \mathrm{b}\Omega^{2,v}_{\mathrm{cl}} & = & \left(\Omega^{2,v} & \longleftarrow & \Omega^{2,v}_{\mathrm{cl}} & \longleftarrow & 0 \longleftarrow 0\right) \end{array}$$

这导出了一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Grb}^{1,\mathcal{D}}_{\nabla} & \xrightarrow{\mathrm{AtCA}_{\nabla}} & \mathrm{ECA}^{\mathcal{D}}_{\nabla} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Grb}^{1,\mathcal{D}}_{\nabla|1} & \xrightarrow[\mathrm{AtCA}]{} & \mathrm{ECA}^{\mathcal{D}} \end{array} \tag{16.18}$$

在 $\mathrm{Fun}(\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta})$ 中，其中垂直态射会遗忘（部分）联络数据 a.

引理 16.19。 方形(16.18) 在 $\mathrm{Fun}(\mathrm{B}\mathcal{D}$ 中是笛卡尔的且同伦笛卡尔的 $^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}$等$_{\Delta}$).

证明。 回忆一下，我们可以将所涉及的单纯预层的值计算为对 $c\times M \to c$ 的良好开覆盖的细化取严格滤过余极限（命题 4.6），并且它们将每个细化映为弱等价（引理 4.5）。方形是笛卡尔的这一事实可以通过在覆盖（$\hat{}\mathcal{U} \to \mathcal{U}$） $\in \mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}(M)$ 上直接求值看出。该方形也是同伦笛卡尔的：首先，在每个覆盖上，底层余跨度的顶点都是 Kan 复形，且右侧的垂直态射是 Kan 纤维化（它是 Γ 下 $\mathrm{Fun}(\mathrm{GCov}^{\mathcal{D}}, \mathcal{C}\mathrm{h}_{\geq 0})$ 中某个射影纤维化的像）。因此，相对于每个良好开覆盖，该方形都是同伦笛卡尔的。最后，Kan 纤维化在滤过余极限下稳定，因此整个方形 (16.18) 也是一个同伦拉回。□

备注 16.20。 方形（16.18）是笛卡尔的这一事实尤其蕴含了以下众所周知的双射：一方面，具有联络结构的 gerbe 上的曲率形式；另一方面，与该 gerbe 相关联的恰当 Courant 代数丛的各向同性分裂（例如参见 [46, 命题 1]证明的结尾）。◁

定义 16.21。 具有 广义度量的恰当 *Courant* 代数丛的单纯预层是乘积

$$\mathrm{GMet}^{\mathcal{D}} := \mathrm{Met}^{\mathcal{D}}_{0,d} \times \mathrm{ECA}^{\mathcal{D}}_{\nabla} \qquad \in \mathrm{Fun}(\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta}) .$$

备注 16.22。 这里我们使用了如下事实：恰当 Courant 代数丛M 上的广义度量与M 上的黎曼度量和该恰当 Courant 代数丛的各向同性分裂组成的有序对之间存在双射 [37, 命题 2.40]。◁

备注 16.23。 考虑以下选择

$$\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}} := \mathrm{GMet}^{\mathcal{D}} , \qquad \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}} := \mathrm{ECA}^{\mathcal{D}}$$

以及投影态射 $p\colon \mathrm{GMet}^{\mathcal{D}} \to \mathrm{ECA}^{\mathcal{D}}$。对于$\mathcal{E} \in \mathrm{ECA}^{M}(\mathbb{R}^0)$，即$M$上的一个恰当 Courant 代数丛，我们得到一个光滑但在此情形下并非高阶的对称群，它由左纤维化 $\mathrm{SYM}^{\mathrm{rev}}(\mathcal{E}) \to N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$给出。该群在预层 $\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{et}$ 上具有规范作用；该预层编码了$\mathcal{E}$上广义度量的光滑族。这是函子点版本的设定，Rubio 和 Tipler 在 [66] 中据此证明了切片定理。◁

16.3. **比较积分 NSNS 超引力解的模叠**。 引理 16.19 体现了以下（众所周知的 [46]）事实：考虑流形 M上的带联络结构的丛（$\mathcal{G}$，$\mathcal{A}^{(1)}$），并令 $\mathrm{AtCA}(\mathcal{G}$，$\mathcal{A}^{(1)})$ 表示其在M上的关联精确 Courant algebroid。于是，$\mathrm{AtCA}(\mathcal{G}$，$\mathcal{A}^{(1)})$ 的各向同性分裂与（$\mathcal{G}$，$\mathcal{A}^{(1)}$）的曲率形式之间存在典范双射。（$\mathcal{G}$，$\mathcal{A}^{(1)}$）的曲率形式以及 $\mathrm{AtCA}(\mathcal{G}$，$\mathcal{A}^{(1)})$ 的各向同性分裂都不具有高阶结构；二者均构成集合。因此，人们或许会认为，关于带联络结构的 gerbe 的曲率形式与精确 Courant 代数丛的各向同性分裂的讨论完全等价，只要二者都存在（即精确 Courant 代数丛的 Ševera 类属于 $\mathrm{H}^3(M;\mathbb{Z})$ 在 $\mathrm{H}^3(M;\mathbb{R})$ 中的像）。

虽然这在构型层面成立，但在模空间层面却不成立：具体而言，ECA^{M} 中 $\mathrm{AtCA}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(1)})$ 的自同构构成一个群，而 $\mathrm{Grb}^{1\,M}_{\nabla|1}$ 中 $(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(1)})$ 的自同构构成一个2-群。由于自同构层面存在这种差异，导出的

AtCA($\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(1)}$) 的各向同性分裂对自同构取商，以及 ($\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(1)}$) 的曲率形式对自同构取商，所得商确实不同。例如，在对象同构类层面，前者将相差一个闭 2-形式的各向同性分裂视为相同，而后者将相差一个具有整数周期的闭 2-形式的曲率形式视为相同。在第一种情况下，这些都是同伦商中的态射；而在第二种情况下，还存在源自带联络的 U(1) 丛态射的 2-态射。最后，这种差异不仅存在于对自同构取商时，也延续到了对更一般的对称群取商时。

在讨论模空间而非构型时，研究带有联络结构的 gerbe 上的曲率形式模空间，还是研究 Courant 代数丛上的各向同性分裂，会产生至关重要的差异，尽管底层的构型 之间存在典范双射。

从弦理论和函子场论的角度来看，考虑整数情形尤为理想，即 Ševera 类属于映射 $H^3(M;\mathbb{Z}) \to H^3(M;\mathbb{R})$ [16,17,37,52]的像的情形。这一整性条件确保 σ-模型中的 Wess-Zumino-Witten 项作用泛函定义良好（另见 [37, 第 17, 18]页）。此外，超引力可以看作弦理论的低能极限，在该理论中，荷（尤其是 B 场的荷）是量子化的（例如参见 [2,24,30,31,72]）。因此，整性条件在这一极限中仍然成立。

下文将聚焦于 NSNS 超引力。事实上，NSNS 超引力中的 B 场有三种可能的几何描述：

(1) gerbe$\mathcal{G}$上的一个联络，(2a) 带有联络结构（即曲率形式）的 gerbe ($\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(1)}$)上的一个联络，(2b) 恰当 Courant 代数丛的一个各向同性分裂；根据电荷量子化，我们可以假设其形式为 AtCA($\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(1)}$)。

注 16.24。 通常，在设定 (2b) 中，超引力的 B 场会与黎曼度量结合，形成 Courant 代数丛上的一个广义度量 。例如，这有利于描述和计算超引力与弦理论中的 T 对偶 [37, 第 10] 章。然而，恰当 Courant 代数丛上的广义度量与由黎曼度量g （定义在M 上）和一个各向同性分裂 σ [37, （命题 2.38、2.40]）构成的配对之间存在典范双射。◁

根据上述讨论，模型 (2a) 和 (2b) 中的构型之间存在典范双射。然而，对称性——因而这些构型所得到的模叠——取决于我们所考虑的底层几何。此外，由于给定 gerbe 上的联络构成一个真正的群胚（第 10.3 节）——更准确地说，是作为投影 $\mathrm{Grb}^1_\nabla{}^M \to {}'\mathrm{Grb}^{1,M}$ 的纤维给出的 1-截断单纯预层——模型 (1) 中的构型不可能与模型 (2a) 或 (2b) 中的构型等价。这带来了一个实质性问题：

问题 16.25：对于上同调类 $H^3(M;\mathbb{Z})$ 固定的情形，NSNS超引力B场的正确模叠是什么？ ◁

由于 B 场是 NSNS 超引力场内容的组成部分，这直接引出了：

问题 16.26：对于上同调类 $H^3(M;\mathbb{Z})$ 固定的情形，NSNS 超引力解的正确模叠是什么？ ◁

与带有联络结构的 gerbe ($\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(1)}$) 相关联的恰当 Courant 代数丛 AtCA($\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(1)}$) 有一种重要的几何诠释：可以将 ($\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(1)}$) 视为 $\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art})$ 中的范畴化主丛，其底空间为 M ，结构群为（由群对象表示的）$\mathbf{B}_\nabla U(1) \in \mathrm{Grp}(\mathcal{P}(N\mathcal{C}\mathrm{art}))$。于是，Courant 代数丛 AtCA($\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(1)}$) 就是该 $\mathbf{B}_\nabla U(1)$-主丛的范畴化 *Atiyah* 代数丛 [23]。

鉴于 t 这一背景，取恰当 Courant 代数丛各向同性分裂的商 d AtCA($\mathcal{G}$, $\mathcal{A}^{(1)}$) 对恰当 Courant 代数丛 的对称性取商，类似于对 Atiyah 代数丛取分裂（一个向量丛）的情形（a s

主丛 P 的 Atiyah 代数丛 $\mathrm{At}(P)$，再对 Atiyah 代数丛的对称性取商。这并非规范理论的核心商空间：尽管 Atiyah 代数丛 $\mathrm{At}(P)$ 的（向量丛）分裂与主丛 P上的联络一一对应，但 $\mathrm{At}(P)$ 的自同构不同于 P 的规范变换。这正类似于这样一种情况：在设定 (2a) 和 (2b) 中，构型虽然一一对应，但对称性不同，因此模叠也不同。

根据与经典规范理论的这一类比，我们认为，在情形 (2a) 和 (2b) 中，带联络结构的 gerbe 是基本对象，相关的对称性属于带联络结构的 gerbe，而非其关联的正合 Courant 代数丛[13]。然而，对于问题 16.25，我们仍有两种可能的答案：

(1) 设$\mathcal{G}$ 是一个 gerbe，它呈现 $\mathrm{H}^3(M;\mathbb{Z})$ 中所需的类。该类的 B 场模叠是$\mathcal{G}$ 上联络的模叠，再对$\mathcal{G}$的对称性取商。(2) 设 $(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(1)})$ 是一个带联络结构的 gerbe，它呈现 $\mathrm{H}^3(M;\,\mathbb{Z})$ 中所需的类。该类的 B 场模叠是 $(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(1)})$ 上曲率形式的模叠（等价地，是 $\mathrm{AtCA}(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(1)})$ 的各向同性分裂），再对 $(\mathcal{G},\,\mathcal{A}^{(1)})$ 的对称性取商。

请注意，这两种设定中的构型与对称性彼此并不等价。更形式化地说，在第 8 节的设定中，我们因此要寻求由以下选择产生的模空间 ∞-叠：

$$\mathrm{Sol}_B^{\mathcal{D}} = \mathrm{Conf}_B^{\mathcal{D}} := \mathrm{Grb}_{\nabla}^{1,\mathcal{D}}\,, \qquad \mathrm{Fix}_0^{\mathcal{D}} := \mathrm{Grb}_{\nabla|1}^{1,\mathcal{D}}\,, \qquad \mathrm{Fix}_1^{\mathcal{D}} := \mathrm{Grb}^{1,\mathcal{D}}\,.$$

态射 $\mathrm{Fix}_0^{\mathcal{D}} \to \mathrm{Fix}_1^{\mathcal{D}}$是典范投影，它遗忘了$M$上光滑 1-gerbe 族的联络结构光滑族。我们将由此得到的 B 场模空间 ∞-叠记为

$$\mathbb{M}\mathrm{dl}_B(\mathcal{G}) \qquad \text{and} \qquad \mathbb{M}\mathrm{dl}_B(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(1)})\,,$$

分别。现在，作为推论 12.5 和定理 8.30 的直接推论，我们得到问题 16.25 的如下解答：

定理 16.27. 存在模空间 ∞-叠的典范等价，

$$\mathbb{M}\mathrm{dl}_B(\mathcal{G}) \simeq \mathbb{M}\mathrm{dl}_B(\mathcal{G},\mathcal{A}^{(1)})\,.$$

接下来，我们将这些论证扩展到对 NSNS 超引力解的研究以及问题 16.26 的解决：我们考虑构型预层

$$\mathrm{Conf}_{NS}^{\mathcal{D}} = \mathrm{Grb}_{\nabla}^{1,\mathcal{D}} \times \mathrm{Met}_{0,d}^{\mathcal{D}} \times \Omega_{\mathrm{cl}}^{1,v,\mathcal{D}} \qquad \in \mathrm{Fun}(\mathrm{B}\mathcal{D}^{\mathrm{op}},\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta})\,.$$

定义 16.28. M 上的一个积分 *NSNS* 超引力解是一个三元组 $((\mathcal{G},\ \mathcal{A}),\ g,\ \varphi)$，由$M$上的一个带联络的 1-丛 $(\mathcal{G},\ \mathcal{A})$、$M$ 上的一个黎曼度量g 以及M上的一个闭 1-形式 φ 构成，并满足方程

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}^g + \nabla^g\varphi - \frac{1}{4}\mathrm{curv}(\mathcal{G},\mathcal{A}) \bullet_g \mathrm{curv}(\mathcal{G},\mathcal{A}) &= 0\,, \\ \mathrm{d}_g^*\mathrm{curv}(\mathcal{G},\mathcal{A}) + \iota_\varphi^g\mathrm{curv}(\mathcal{G},\mathcal{A}) &= 0\,, \\ \mathrm{d}_g^*\varphi + |\varphi|_g^2 - \left|\mathrm{curv}(\mathcal{G},\mathcal{A})\right|_g^2 &= \lambda\,, \end{aligned} \tag{16.29}$$

其中，$\lambda \in \mathbb{R}$ 是解的层级。

注记 16.30。对于 M 上每个带联络结构的 1-丛 $(\mathcal{G},\ \mathcal{A}^{(1)})$，曲率形式 A_2，、M 上的黎曼度量 g 以及 M 上的闭 1-形式 φ 所构成的三元组 $(A_2,g,\ \varphi)$，与恰当 Courant 代数丛 $\mathrm{AtCA}(\mathcal{G},\ \mathcal{A}^{(1)})$ 上的一对广义度量以及与该广义度量相对应的闭散度算子之间存在典范双射（参见 [37, 命题 2.53], 该命题之后的段落，以及 [37, 定义 3.40]）。进一步将 φ 限制为恰当 1-形式，即可恢复标准的

[13]这是一个独立而有趣的几何问题，即研究后一个商空间，但我们不会在本文中讨论这一问题 r.

II 型弦理论中的低能有效作用量的玻色子扇区（参见 [37, 定义 3.49] 以及该定义之后的讨论）。◁

引理 16.31. 方程(16.29) 定义了一个解子预层（参见定义 *8*。 *4)*

$$\mathrm{Sol}^{\mathcal{D}}_{NS} \hookrightarrow \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}_{NS}\,.$$

证明。 令 $c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$。单纯集合 $\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}_{NS}(c)$ 中位于同一连通分支的任意一对顶点具有以下性质：度量的光滑族、闭 1-形式的光滑族 φ，以及与带联络的 1-丛底层族相关联的（逐纤维）曲率 3-形式的光滑族，在 M 上仅相差一个沿 M 上微分同胚的光滑族的拉回。然而，若三元组 (H, g, φ) 由 3-形式H的一个光滑c-参数族、黎曼度量g 和 M 上的闭 1-形式 φ 构成，则它在层级 $\lambda \in \mathbb{R}$ 满足方程 (16.29)，当且仅当对每个光滑族$f\colon c \to \mathrm{Diff}(M)$（其中各项都是 M 上的微分同胚），三元组 $(f^*H, f^*g, f^*\varphi)$ 都在层级 $\lambda \in \mathbb{R}$ 满足方程 (16.29)。

因此，对于任意 $c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$ 以及 $\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}_{NS}(c)$ 中的任意 1-单形，其源是定义在M 上的 NSNS 超引力解的光滑族，当且仅当其靶也是如此。因此，$\mathrm{Sol}^{\mathcal{D}}_{NS}(c) \hookrightarrow \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}_{NS}(c)$ 的包含是若干连通分支的不交并的包含。□

接续本小节开头的讨论，在定义 16.28 中，我们将 NSNS 超引力 B 场设定为定义在一个 1-丛上。在讨论问题 16.26 之前，我们先简要说明这一设定与定义在恰当 Courant 代数丛上（而非 gerbe 上）的 NSNS 超引力解之间的关系。

定义 16.32。 定义在M 上的一个*NSNS 超引力解* 是一个恰当 Courant 代数丛$\mathcal{E}$，配备一个广义度量$\mathcal{G}$ 和一个闭 1-形式 φ，并且满足以下方程

$$\mathrm{Ric}^g + \nabla^g\varphi - \frac{1}{4}H \bullet_g H = 0\,, \qquad \mathrm{d}^*_g H + \iota_\varphi H = 0\,, \qquad \mathrm{d}^*_g\varphi + |\varphi|^2_g = |H|^2_g + \lambda\,,$$

其中， $\lambda \in \mathbb{R}$ 是解的层级，g 是由$\mathcal{G}$典范确定的黎曼度量，而H 是由$\mathcal{G}$ 典范确定的分裂所定义的$\mathcal{E}$ 的 Ševera 类的优选代表 [37, 命题 2.40]。

注记 16.33。 在 gerbe 上定义 NSNS 超引力的运动方程，可以完全用广义曲率算子 [22,36,37]来表达。不过，就本文目的而言，前述表述已足够。◁

因此，我们定义

$$\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}_{GRic} := \mathrm{GMet}^{\mathcal{D}}_{0,d} \times \Omega^{1,v,\mathcal{D}}_{\mathrm{cl}} = \mathrm{Met}^{\mathcal{D}}_{0,d} \times \mathrm{ECA}^{\mathcal{D}}_{\nabla} \times \Omega^{1,v,\mathcal{D}}_{\mathrm{cl}}\,,$$

并令 $\mathrm{Sol}^{\mathcal{D}}_{GRic} \subset \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}_{GRic}$ 表示由满足定义 16.32 意义下、在M 上的 NSNS 超引力解之光滑族的顶点构成的完整单纯子预层。根据与引理 16.31 证明类似的论证，这确实是一个解子预层。定义 16.28 意义下M 上的整 NSNS 超引力解与 NSNS 超引力解之间的密切关系，在以下命题中显而易见；该命题是引理 16.19 的直接推论：

P命题 16.34. 在 $\mathrm{B}\mathcal{D}$ 上有如下单纯预层的交换图：

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Sol}^{\mathcal{D}}_{NS} & \xrightarrow{\mathrm{AtCA}_\nabla \times \text{标识}} & \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}}_{GRic} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}_{NS} & \xrightarrow[\mathrm{AtCA}_\nabla \times \text{标识}]{} & \mathrm{Conf}^{\mathcal{D}}_{GRic} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Grb}^1_{\nabla|1}{}^{\mathcal{D}} & \xrightarrow[\mathrm{AtCA}]{} & \mathrm{ECA}^{\mathcal{D}}
\end{array}$$

（略微滥用一下记号，顶端的态射使用的是态射 AtCA_∇ 在 (16.18) 中到单纯子预层 $\mathrm{Sol}^{\mathcal{D}}_{NS}$ 的限制。）此图中的每个方块都是笛卡尔且同伦笛卡尔的。

根据上述讨论，表述 NSNS 超引力解的模问题有两种有效方式。它们恰好对应以下两种固定数据的选择：我们将其设定为

$$\mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}_{NS,0} \coloneqq \mathrm{Grb}^{1,\mathcal{D}}_{\nabla|1}\,, \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}_{NS,1} \coloneqq \mathrm{Grb}^{1,\mathcal{D}}_{\nabla}\,.$$

设 $(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(1)}) \in \mathrm{Grb}^{1\,M}_{\nabla|1,}(\mathbb{R}^0)$。对于每个具有约化纤维的左纤维化 $Q \to N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$，以及每个态射 $\phi\colon Q \to N\mathbf{B}\mathcal{D}[\mathcal{G}]^{\mathrm{op}}$，由此我们得到两个模空间 ∞-叠（见定义 8.27），

$$\mathbb{M}\mathrm{dl}_{NS,0;\Phi}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(1)}) \qquad \text{and} \qquad \mathbb{M}\mathrm{dl}_{NS,1;\Phi}(\mathcal{G}) \qquad \in \mathcal{F}\mathrm{un}(N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$$

来自态射

$$\phi^* \textstyle\int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}}_{NS} \longrightarrow \phi^* \int \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}_{NS,0} \qquad \text{and} \qquad \phi^* \int \mathrm{Sol}^{\mathcal{D}}_{NS} \longrightarrow \phi^* \int \mathrm{Fix}^{\mathcal{D}}_{NS,1}\,,$$

分别地。模空间 ∞-预堆 $\mathbb{M}\mathrm{dl}_{NS,0;\Phi}(\mathrm{G}, \mathrm{A}^{(1)})$ 描述了固定的 M 上带 1-联络的 gerbe 对 $(\mathrm{G}, \mathrm{A}^{(1)})$ 上的 NSNS 超引力解，模去提升了由左纤维化 $\mathrm{Q} \to \mathrm{N}\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}$ 所描述的 M 上作用的 $(\mathrm{G}, \mathrm{A}^{(1)})$ 的光滑 ∞-群对称性。模空间 ∞-堆 $\mathbb{M}\mathrm{dl}_{NS,1;\Phi}(\mathrm{G})$ 描述了固定的 M 上 gerbe G 上的积分 NSNS 超引力解，模去 G 的类似对称性。等价地，它描述了特定恰当 Courant 代数丛 $\mathrm{AtCA}(\mathrm{G}, \mathrm{A}^{(1)})$ 上的 NSNS 超引力解，但模去的是底层带联络结构的 gerbe $(\mathrm{G}, \mathrm{A}^{(1)})$ 的对称性，而非恰当 Courant 代数丛的对称性。作为我们主定理（定理 8.30）的一个应用，我们现在得到以下等价结果，它尤其解决了问题 16.26：

定理 16.35. 对于 M 上每个带有联络结构的 *gerbe* $(G, A^{(1)}) \in \mathrm{Grb}^{1\,M}_{\nabla|1,}(\mathbb{R}^0)$，都存在一个模空间 ∞-预堆的典范等价

$$\mathbb{M}\mathrm{dl}_{NS,0;\Phi}(\mathcal{G}, \mathcal{A}^{(1)}) \simeq \mathbb{M}\mathrm{dl}_{NS,1;\Phi}(\mathcal{G})\,.$$

此外，若 $H\colon \mathcal{C}art^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}et$ 是一个群层，且 $\phi'\colon H \to \mathcal{D}iff^{\mathcal{G}}(H)$ 是群层的态射，令 $\phi\colon N\textstyle\int BH \to B\mathcal{D}[G]$ 为 $\mathcal{S}et_{\Delta/N\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}}$ 中诱导的态射。那么，$\mathbb{M}dl_{NS,0;\Phi}(G, A^{(1)})$ 和 $\mathbb{M}dl_{NS,1;\Phi}(G)$ 都是 ∞-叠在 $\mathcal{C}art$ 上；也就是说，它们满足相对于笛卡尔空间良好开覆盖的下降。

证明. 定理 8.30 适用，因为典范投影 $\mathrm{Fix}_{NS,1} \to \mathrm{Fix}_{NS,0}$ 是一个射影纤维化，并且在每个笛卡尔空间上诱导连通分支的双射（由命题 12.5 得出）。这证明了第一个断言。第二个断言由定理 9.15 立即得出。□

也就是说，对于整数 Ševera 类的 NSNS 超引力解，我们可以等价地通过固定 1-丛上的联络来研究，或者通过与同一 1-丛相关联的恰当 Courant 代数丛的各向同性分裂来研究，其中联络结构可任意选择；但在此过程中，必须除去底层 1-丛（分别带有 1-联络）的对称性。

第3. 部分　附录

附录 A. 单纯预层的整直化

令 $\mathcal{C}$ 为一个小范畴。本附录回顾 [12,45] 中的一些结果，这些结果使我们能够在一范畴函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$、左纤维化 $X \to N\mathcal{C}$ 以及 ∞-函子 $\mathbb{F}\colon N\mathcal{C} \to \mathcal{S}$之间转换，其中函子从 $\mathcal{C}$ 的脉络映至空间的 ∞-范畴 $\mathcal{S}$（或者等价地，映至 ∞-群胚）。根据以下著名结果，这三种对象可以视为同一数学结构的不同体现。请注意，关于从单纯范畴出发的函子的这些结果，也已在 [57]中得到证明。

定理 A.1. [20,定理 7.8.9，推论 7.9。9] 以下∞-范畴之间存在典范等价：

(1) ∞-范畴 $\mathcal{F}\mathrm{un}(N\mathcal{C},\mathcal{S})$ 的 ∞-函子 $N\mathcal{C}\to\mathcal{S}$，*(2)* 函子范畴 $\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta)$ 在逐对象弱同伦等价下的 ∞-范畴局部化，以及 *(3)* 切片范畴 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}}$ 在协变弱等价下的 ∞-范畴局部化。

本文频繁使用这三种模型中的每一种来表示取值于 $\mathcal{S}$ 的 ∞-函子。因此，能够在这些模型之间转换既有必要，也大有裨益。这里我们回顾有助于实现这一点的函子及其一些主要性质。我们不详细介绍这些函子的构造，因为正文中用到的只是函子的存在性及其性质。有关这些函子构造的详细信息，请参阅 [12,20,57]（下文将列出更详细的参考文献）。从函子 $\mathcal{C}\to\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 同伦地转换到脉络$N\mathcal{C}$ 上的单纯集合，可借助以下定理实现：

定理 A.2. [45, 定理 C] 存在一个 *Quillen* 等价

$$r_{\mathcal{C}!}:\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}}\rightleftarrows\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta):r^*_{\mathcal{C}}$$

介于覆盖范畴 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}}$ 上的协变模型结构与函子范畴 $\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta)$上的投射模型结构之间。

定义 A.3. 我们将右伴随函子 $r^*_{\mathcal{C}}\colon \mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta)\longrightarrow\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}}$称为整直函子（针对范畴 $\mathcal{C}$）。

整直函子 $r^*_{\mathcal{C}}$ 具有良好的技术性质：

引理 A.4. [12, 引理 2.22] 函子 $r^*_{\mathcal{C}}$ 将$\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta)$ 中的单射余纤维化（即单纯集合的逐对象单态射）映为 $\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{C}}$ 中的协变余纤维化（即 $N\mathcal{C}$上的单纯集合单态射）。

由于$r^*_{\mathcal{C}}$ 可通过有限极限构造，我们还有：

引理 A.5. [12, 推论 2.21] 严格化函子 $r^*_{\mathcal{C}}$ 与滤过余极限相交换。

严格化与指标范畴 $\mathcal{C}$ 的变化相容，具体如下：这一点已在 [57, 注 3.2.5.7] 中指出（关于当前语境下的证明，见 [12, 引理 2.23]）。

引理 A.6. 对于每个小范畴之间的函子 $\psi\colon\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 以及每个函子 $F\in\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta)$，存在一个单纯集合的典范笛卡儿方块

$$\begin{array}{ccc} r^*_{\mathcal{D}}(\psi^*F) & \longrightarrow & r^*_{\mathcal{C}}F \\ \downarrow & & \downarrow \\ N\mathcal{D} & \xrightarrow[N\psi]{} & N\mathcal{C} \end{array}$$

这诱导出函子之间的自然同构[14] $\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta)\to\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/N\mathcal{D}}$,

$$r^*_{\mathcal{C}}\circ\psi^*\cong(N\psi)^*\circ r^*_{\mathcal{C}}\,.$$

令 $\mathcal{K}\mathrm{an}\subset\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 表示 Kan 复形上的全子范畴。通过组合这些函子

$$r^*_{[n]\times\mathcal{C}}\colon\mathrm{Fun}\big([n]\times\mathcal{C},\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta\big)\longrightarrow\mathcal{S}\mathrm{et}_{\Delta/(\Delta^n\times N\mathcal{C})}\,,$$

[14]对于沿 $N\psi$拉回的任意给定选择，这一点均成立；如有必要，应作出相应选择，以使沿此态射拉回的运算成为函子（正如为使（余）极限的构造成为函子而作出选择一样）。

对于 $n \in \mathbb{N}_0$，并使用 [20, 第 5], 章中介绍的空间 ∞-范畴 $\mathcal{S}$ 的模型，可以构造一个显式的 ∞-函子 [12, 定理 3.11]

$$\gamma_{\mathcal{C}} \colon N\mathcal{F}\mathrm{un}(\mathcal{C}, \mathcal{K}\mathrm{an}) \longrightarrow \mathcal{F}\mathrm{un}(N\mathcal{C}, \mathcal{S})$$

它提供了一种将严格函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 转化为 ∞-函子 $N\mathcal{C} \to \mathcal{S}$ 的具体方法。以下定理揭示了这一构造的同伦论意义：

定理 A.7. [12, 定理 4.8] 函子 $\gamma_{\mathcal{C}}$: $N\mathcal{F}\mathrm{un}(\mathcal{C}, \mathcal{K}\mathrm{an}) \to \mathcal{F}\mathrm{un}(N\mathcal{C}, \mathcal{S})$ 将 $\mathcal{F}\mathrm{un}(N\mathcal{C}, \mathcal{S})$ 表述为 $N\mathcal{F}\mathrm{un}(\mathcal{C}, \mathcal{K}\mathrm{an})$ 在逐对象弱同伦等价处的 ∞-范畴局部化。

最后，严格化函子 $r^*_{\mathcal{C}}$ 与局部化函子 $\gamma_{\mathcal{C}}$ 之间的关系，可由以下观察阐明：

定理 A.8. [12, 推论 3.13] 设 $F \in \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{K}\mathrm{an})$。由 ∞-函子 $\gamma_{\mathcal{C}}(F) \colon N\mathcal{C} \to \mathcal{S}$ 分类的左纤维化，与严格化 $r^*_{\mathcal{C}}F \to N\mathcal{C}$ 一致。

这精确地表明，(1-)函子 $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{K}\mathrm{an}$、左纤维化 $r^*_{\mathcal{C}}F \to N\mathcal{C}$ 与同伦相干的 ∞-函子 $\gamma^*_{\mathcal{C}}F \colon N\mathcal{C} \to \mathcal{S}$，在定理 A.1 中的等价关系下彼此对应。

附录 B. DOLD-KAN 对应与带 k-联络的 n-GERBE

B.1. **Dold-Kan 对应**。在本附录中，为方便读者，我们概述流形上带 k-联络的 n-gerbe 的 $(n+1)$-群胚的标准构造。该构造通过 Deligne 复形的 Čech 分解进行（更多细节请参见 [29, 68] ）。在正文中，我们进一步扩展这一构造，以描述固定流形 M 上带 k-联络的 n-gerbe 的光滑族，这些族受微分同胚群 $\mathrm{Diff}(M)$ 经由拉回所给出的光滑作用。

令 $\mathcal{M}\mathrm{fd}$ 表示光滑流形及光滑映射所构成的范畴。令 $\mathcal{C}\mathrm{art} \subset \mathcal{M}\mathrm{fd}$ 表示由对象子集 $\{c \in \mathcal{M}\mathrm{fd} \mid \exists\, n \in \mathbb{N}_0 \colon c \cong \mathbb{R}^n\}$ 上的对象构成的全子范畴，也就是说，由那些与 $\mathbb{R}^n$ for 任意 $n \in \mathbb{N}_0$ 微分同胚的流形构成。我们考虑 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 上的阿贝尔群层的 Deligne 复形[15]，它是如下给出的链复形

$$\mathrm{b}^k_\nabla \mathrm{U}(1) = \left(\Omega^k \xleftarrow{\mathrm{d}} \cdots \xleftarrow{\mathrm{d}} \Omega^1 \xleftarrow{\mathrm{d}\log} \mathrm{U}(1)\right),$$

其中 Ω^k 位于零次。我们还定义移位后的复形

$$\mathrm{b}^l \mathrm{b}^k_\nabla \mathrm{U}(1) = \mathrm{b}^k_\nabla \mathrm{U}(1)[-l]. \tag{B.1}$$

特别地，我们有 $\mathrm{b}^l(\mathrm{b}^k_\nabla \mathrm{U}(1))_l = \Omega^k$。

我们回顾一下，非负分次阿贝尔群链复形的范畴 $\mathcal{C}\mathrm{h}_{\geq 0}$ 带有模型结构；其弱等价为拟同构，而其纤维化为在每个正次数上均为满射的链复形态射（例如参见 [42, p. 157]）。单纯阿贝尔群的范畴 $\mathcal{A}\mathrm{b}_\Delta$ 带有沿遗忘函子 $\mathcal{A}\mathrm{b}_\Delta \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 右传递得到的模型结构。这里，$\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 是赋予 Kan–Quillen 模型结构的单纯集合范畴，而遗忘函子 $\mathcal{A}\mathrm{b}_\Delta \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 是右 Quillen 函子。我们回顾以下定理 [64, Sec. II.4]:

定理 B.2. （*Dold-Kan* 对应）存在 *Quillen* 等价

$$N : \mathcal{A}\mathrm{b}_\Delta \rightleftarrows \mathcal{C}\mathrm{h}_{\geq 0} : \Gamma \qquad \textit{and} \qquad \Gamma : \mathcal{C}\mathrm{h}_{\geq 0} \rightleftarrows \mathcal{A}\mathrm{b}_\Delta : N.$$

N 和 Γ 都是同伦的，即保弱等价。

[15] 在 [9, 3§] Deligne 复形则定义为与之拟同构的链复形 $\Omega^k \leftarrow \cdots \leftarrow \Omega^1 \leftarrow \Omega^0 \hookleftarrow \mathbb{Z}$；我们遵循例如 [29] 中的约定。

为方便读者，我们更详细地说明这个函子（完整论述请参阅 [42, 第 III 节。2], [77, 第 8 节。4]; 此处遵循 [56,第 1.2 节。3]中的约定）：给定一个链复形 $C \in \mathcal{C}\mathrm{h}_{\geq 0}$ 和 $t \in \mathbb{N}_0$，令

$$(\Gamma C)_r := \bigoplus_{\varphi\colon [r]\twoheadrightarrow[t]} C_t\,,$$

其中直和遍历所有满射 $\varphi\colon [r] \twoheadrightarrow [t]$ in $\mathbb{\Delta}$。为了使集合 $\{(\Gamma C)_r \mid r \in \mathbb{N}_0\}$成为单纯集合，考虑一个态射 $\theta\colon [s] \to [r]$ in $\mathbb{\Delta}$。与之关联的映射为

$$(\Gamma C)(\theta)\colon (\Gamma C)_r \to (\Gamma C)_s$$

描述如下：设 $\varphi\colon [r] \twoheadrightarrow [t]$ 是 $\mathbb{\Delta}$ 中的一个满射。接下来，我们需要给出一个态射

$$(\Gamma C)(\theta;\varphi)\colon C_t \longrightarrow \bigoplus_{\psi\colon [s]\twoheadrightarrow[u]} C_u = (\Gamma C)_s\,.$$

Let

$$\begin{array}{ccc} [s] & \xrightarrow{\theta} & [r] \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ [v] & \xhookrightarrow[\iota]{} & [t] \end{array}$$

是复合态射 $\varphi\circ\theta$ 的唯一分解，其中先是一个满态射 π，后接一个单态射 ι。现在我们区分三种情况：

(1) 若 ι 是恒等态射（即若 $[v] = [t]$），则令 $(\Gamma C)(\theta;\varphi)$ 为典范包含

$$C_t \hookrightarrow \bigoplus_{\psi\colon [s]\twoheadrightarrow[u]} C_u$$

作为由 $\pi = \varphi\circ\theta\colon [s] \twoheadrightarrow [v] = [t]$ 标记的直和项。

(2) 若 $\iota = \partial_0\colon [t-1] \hookrightarrow [t]$ 是标准的余单纯余面映射（命中除$i \in [t]$之外的每个$i = 0$），则映射 $(\Gamma C)(\theta;\varphi)$ 是以下映射的复合：

$$C_t \xrightarrow{\partial_C} C_{t-1} \longrightarrow \bigoplus_{\psi\colon [s]\twoheadrightarrow[u]} C_u\,,$$

其中第一个映射是链复形C的微分，第二个映射则是将C_t作为由 $\pi\colon [s] \twoheadrightarrow [t-1]$标记的直和项包含进去的映射。

(3) 若 $\iota\colon [v] \hookrightarrow [t]$ 是任意其他映射，则映射

$$(\Gamma C)(\theta;\varphi)\colon C_t \longrightarrow \bigoplus_{\psi\colon [s]\twoheadrightarrow[u]} C_u$$

是零映射。

最后，如果 $(\Gamma C)(\theta)$ 的定义域中的两个直和项映射到其余域中的同一个直和项，我们就使用余域上的阿贝尔群结构将它们的贡献相加。

备注 B.3。由于我们遵循 [56, 第 1.2 节中的约定，3], 此处与链复形 ΓC 相关联的单纯集合，是 [77] 中所构造单纯集合的对偶 单纯集合。注意，$\mathcal{S}\mathrm{et}_{\mathbb{\Delta}}$ 的自等价 $K \mapsto K^{\mathrm{op}}$ 保持 Kan 纤维化、余纤维化和弱同伦等价不变，因此引入这一对偶并不影响 Dold-Kan 对应是一个双侧 Quillen 等价这一事实。

◁

例 B.4。 设 $C \in \mathcal{C}\mathrm{h}_{\geq 0}$ 是一个由阿贝尔群构成的非负分次链复形。我们有如下同一：

$$
\begin{aligned}
(\Gamma C)_0 &= \underbrace{C_0}_{\text{标识}_{[0]}}, \\
(\Gamma C)_1 &= \underbrace{C_0}_{[1]\twoheadrightarrow[0]} \oplus \underbrace{C_1}_{\text{标识}_{[1]}}, \\
(\Gamma C)_2 &= \underbrace{C_0}_{[2]\twoheadrightarrow[0]} \oplus \underbrace{C_1}_{\sigma_1\colon\,[2]\twoheadrightarrow[1]} \oplus \underbrace{C_1}_{\sigma_2\colon\,[2]\twoheadrightarrow[1]} \oplus \underbrace{C_2}_{\mathrm{id}_{[2]}}, \quad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

现在可以明确验证，

$$
\begin{aligned}
d_0\colon (\Gamma C)_1 \to (\Gamma C)_0\,, &\qquad d_1(x_0, x_{01}) = x_0 \\
d_0\colon (\Gamma C)_1 \to (\Gamma C)_0\,, &\qquad d_0(x_0, x_{01}) = x_0 + \partial_C x_{01}\,, \\
s_0\colon (\Gamma C)_0 \to (\Gamma C)_1\,, &\qquad s_0(x_0) = (x_0, 0)\,, \\
d_2\colon (\Gamma C)_2 \to (\Gamma C)_1\,, &\qquad d_2(x_0, x_{01}, x'_{12}, x_{012}) = (x_0, x_{01})\,, \\
d_1\colon (\Gamma C)_2 \to (\Gamma C)_1\,, &\qquad d_1(x_0, x_{01}, x'_{12}, x_{012}) = (x_0, x_{01} + x'_{12})\,, \\
d_0\colon (\Gamma C)_2 \to (\Gamma C)_1\,, &\qquad d_0(x_0, x_{01}, x'_{12}, x_{012}) = (x_0 + \partial_C x_{01}, x'_{12} + \partial_C x_{012})\,.
\end{aligned}
$$

C_0 中的元素因此成为 ΓC的顶点。一个 1-单形是$x \in C_0$和$x_{01} \in C_1$的有序对 (x_0,x_{01})；将该有序对 (x_0,x_{01}) 视为 ΓC中的一条边，其源为x_0, ，目标为$x_0 +\partial_C x_{01}$。有了对顶点和 1-单形的这种理解，结合上面对其面的计算，我们也可以类似地理解 ΓC中的一个 2-单形 $(x_0,x_{01},x'_{12},x_{012})$。◁

B.2. **带联络的高阶 U(1)-丛：通过单纯预层**。 现在，我们可以将 Dold-Kan 对应与 Deligne 复形的切赫分解结合起来，从而定义流形上带有 n-gerbe 和 k-联络的 Kan 复形。函子范畴 $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}\mathrm{h}_{\geq 0})$ 和 $\mathcal{H} := \mathrm{Fun}(\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta)$ 带有投射模型结构 [4] (因为 $\mathcal{C}\mathrm{h}_{\geq 0}$ 由 [51, 定理 2.3.11] 可组合)。根据 [41，命题 5.6.2], ，模型范畴 $\mathcal{A}\mathrm{b}_\Delta$ 是余纤维生成的。因此，$\mathrm{Fun}(\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}\mathrm{b}_\Delta)$ 也带有投射模型结构。稍微滥用一下记号，我们有：

推论 B.5. 逐对象应用函子 N 和 Γ 会产生 *Quillen* 等价

$$
\begin{aligned}
N : \mathrm{Fun}(\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}\mathrm{b}_\Delta) &\rightleftarrows \mathrm{Fun}(\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}\mathrm{h}_{\geq 0}) : \Gamma\,, \\
\Gamma : \mathrm{Fun}(\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}\mathrm{h}_{\geq 0}) &\rightleftarrows \mathrm{Fun}(\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}\mathrm{b}_\Delta) : N\,.
\end{aligned}
$$

N 和 Γ 都是同伦的，即保持弱等价。

类似地，自由-遗忘伴随会诱导一个 Quillen 伴随

$$
\mathcal{H} \rightleftarrows \mathrm{Fun}(\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}\mathrm{b}_\Delta)\,.
$$

回顾 (B.1) 中的链复形预层 $\mathrm{b}^l\mathrm{b}^k_\nabla\mathrm{U}(1)$。

定义 B.6. 对于每个 $l,k \in NN_0$, ，我们通过如下设定，在 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 上定义一个单纯预层 $\mathfrak{g}$

$$
\mathrm{B}^l\mathrm{B}^k_\nabla\mathrm{U}(1) := \Gamma\left(\mathrm{b}^l\mathrm{b}^k_\nabla\mathrm{U}(1)\right)
$$

（此处未显示遗忘函子 $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}\mathrm{b}_\Delta) \to \mathcal{H}$）。

范畴 $\mathcal{C}\mathrm{art}$ 带有一个格罗滕迪克覆盖：它由良好开覆盖诱导，也就是说，开覆盖满足每个局部片的有限交集要么为空，要么仍是笛卡尔空间。我们考虑 $\mathcal{H}$ 上的局部 投射模型结构 $\mathcal{H}^{loc}$，它是将 $\mathcal{H}$ 在笛卡尔空间的良好开覆盖的 Čech 神经处作左 Bousfield 局部化所得。定义 B.6 中的单纯预层是 $\mathcal{H}^{loc}$ 中的纤维对象。也就是说，它们是投射纤维化的，并且满足关于良好开覆盖的同伦下降性质。投射纤维性由构造保证

（单纯群是 Kan 复形 [42,引理 I.3.4]），而同伦下降性质可以通过层上同调论证看出（例如，参见 [29], 或 [11, 命题 2.50、推论 2.51]，其中有相关综述）。

定义 B.7. 任意流形 M 的**良好开覆盖**是一个开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，使得$M$ 中各局部片的有限交集为空或为笛卡尔空间。

给定M的一个良好开覆盖 $\mathcal{U}$，我们将其 Čech 神经 $\check{C}\mathcal{U}$ 视为一个对象 $\check{C}\mathcal{U} \in \mathcal{H}$（通过在每个单纯次数中构造相应的可表预层）。由于它在每个次数上都是可表预层的余积，因此它在 $\mathcal{H}$ 中是余纤维的，进而在 $\mathcal{H}^{loc}$中也是如此。这两个模型范畴都是单纯的。我们用 $\mathcal{C}(-,-)$ 表示单纯富化范畴 $\mathcal{C}$ 中的单纯态射函子。

定义 B.8. 给定一个余纤维对象 $X \in \mathcal{H}$ 以及 $n \in \mathbb{N}_0$，$k \in \{0,\dots,n+1\}$，我们作如下定义：

(1) 我们令
$$\mathrm{Grb}^n_{\nabla|k}(X) := \underline{\mathcal{H}}\big(X, \mathbf{B}^{n+1-k}\mathbf{B}^k_\nabla \mathrm{U}(1)\big)$$
并将其称为X 上带有 k-联络的 n-丛的 *Kan* 复形。
(2) 当$k = n+1$时，我们也将 $\mathrm{Grb}^n_\nabla(X)$ 记作 $\mathrm{Grb}^n_{\nabla|n+1}(X)$，并将其称为$X$ 上带有（完整）联络的 n-丛的 *Kan* 复形 。(3) 当$k = 0$时，我们也将 $\mathrm{Grb}^n(X)$ 记作 $\mathrm{Grb}^n_{\nabla|0}(X)$，并将其称为 n-丛的 *Kan* 复形X（无联络）。

备注 B.9。 如果$Y \in \mathcal{H}^{loc}$ 不是余纤维的，我们可以选择一个余纤维替换$X \to Y$（在 $\mathcal{H}^{loc}$ 中），并将 $\mathrm{Grb}^n_{\nabla|k}(X)$ 理解为 Definition B.8 意义下 n- 丛在 Y 上的 k- 联络 Kan 复形。不过请注意，这个 Kan 复形只在弱等价意义下定义；由Y 的不同余纤维替换得到的 Kan 复形一般只能通过 $\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 中的弱等价之字形相联系。◁

注 B.10. 特别地，这适用于流形：给定$M \in \mathcal{M}\mathrm{fd}$，我们考虑（单纯常值）单纯预层
$$\underline{M}\colon \mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta\,, \qquad c \mapsto \mathcal{M}\mathrm{fd}(c, M)\,.$$
这一构造给出了一个全忠实函子
$$\mathcal{M}\mathrm{fd} \hookrightarrow \mathcal{H}\,.$$
给定$\mathcal{U}$ 在M上的良好开覆盖，典范态射 $\check{\mathrm{C}}\mathcal{U} \to M$ 是模型范畴 $\mathcal{H}^{loc}$ 中的$\underline{M}$的一个余纤维替换（但在 $\mathcal{H}$ 中并非如此）。因此，根据定义 B.8 和注 B.9，我们得到M 上带有k-联络的n-gerbe 的 Kan 复形：
$$\mathrm{Grb}^n_{\nabla|k}(\check{C}\mathcal{U}) = \underline{\mathcal{H}}\big(\check{C}\mathcal{U}, \mathbf{B}^{n+1-k}\mathbf{B}^k_\nabla \mathrm{U}(1)\big)\,.$$
在M 上的任意两个良好开覆盖$\mathcal{U}$ 都会产生同伦范畴 $\mathrm{Ho}(\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta)$ 中同构的 Kan 复形。◁

最后，对于M的一个良好开覆盖$\mathcal{U}$，我们显式计算 Kan 复形 $\mathrm{Grb}^n_{\nabla|k}(\check{C}\mathcal{U})$。为此，我们给出以下（众所周知的）引理：令 $\mathrm{c}_{\Delta^{\mathrm{op}}}\colon \mathcal{S}\mathrm{et} \to \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 表示将集合映射到其单纯常值单纯集的函子。这诱导出一个函子 $\mathrm{c}_{\Delta^{\mathrm{op}}}\colon \mathrm{Fun}(\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}\mathrm{et}) \to \mathcal{H}$。

引理 B.11。 设 $X \in \mathcal{H}$ 满足：对每个 $m \in \mathbb{N}_0$，单纯常值单纯预层 $\mathrm{c}_{\Delta^{\mathrm{op}}} X_m$ 在 $\mathcal{H}$ 中是余纤维的。由 X 可得图表 $\mathrm{c}_{\Delta^{\mathrm{op}}} X\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{H}$, $[m] \mapsto \mathrm{c}_{\Delta^{\mathrm{op}}} X_m$。在 $\mathrm{Ho}\,\mathcal{H}$ 中存在一个典范同构，
$$\mathrm{hocolim}_{\Delta^{\mathrm{op}}}(\mathrm{c}_{\Delta^{\mathrm{op}}} X) \cong X\,.$$
为方便读者，我们给出一个简短的证明。

证明。只需证明这一点对同伦余极限的任意模型都成立。由于 $\mathrm{c}_{\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}}}\colon \mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{H}$ 的取值为余纤维对象，因此由 [65, 推论 5.1.3]

$$\operatorname{hocolim}_{\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}}} X_\bullet \simeq B(*, \mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}}, \mathrm{c}_{\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}}} X),$$

其中 $B(-,\ -,\ -)$ 表示 Bar 构造 [65, 第 4 节]。由于余极限和极限在 $\mathcal{H} = \mathrm{Fun}(\mathcal{C}\mathrm{art}^{\mathrm{op}},\ \mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta)$ 中是逐点计算的，且 Bar 构造与在任意 $c \in \mathcal{C}\mathrm{art}$ 上的求值相交换，因此我们有一个自然弱等价

$$(\operatorname{hocolim}_{\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}}} \mathrm{c}_{\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}}} X)(c) \simeq \operatorname{hocolim}_{\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}}} \big(\mathrm{c}_{\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}}} X(c)\big).$$

现在，右侧的同伦余极限是在 $\mathcal{S}\mathrm{et}_\Delta$ 中取的，在那里它由对角线计算 [48,推论 18.77]。□

给定流形 M 的良好开覆盖 $\mathcal{U}$，现在我们可以按如下方式计算 $\mathrm{Grb}^n_{\nabla|k}(\check{C}\mathcal{U})$，精确到典范弱等价：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Grb}^n_{\nabla|k}(\check{\mathcal{C}}\mathcal{U}) &= \underline{\mathcal{H}}\big(\check{\mathcal{C}}\mathcal{U}, \mathrm{B}^{n+1-k}\mathrm{B}^k_\nabla \mathrm{U}(1)\big)\\
&\simeq \underline{\mathcal{H}}\big(\operatorname{hocolim}_{\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}}} \mathrm{c}_{\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}}} \check{\mathcal{C}}\mathcal{U}, \mathrm{B}^{n+1-k}\mathrm{B}^k_\nabla \mathrm{U}(1)\big)\\
&\cong \operatorname{holim}_{\mathbb{\Delta}} \underline{\mathcal{H}}\big(\mathrm{c}_{\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}}} \check{\mathcal{C}}\mathcal{U}, \mathrm{B}^{n+1-k}\mathrm{B}^k_\nabla \mathrm{U}(1)\big)\\
&\cong \operatorname{holim}_{[i]\in\mathbb{\Delta}} \big(\mathrm{B}^{n+1-k}\mathrm{B}^k_\nabla \mathrm{U}(1)\big)(\check{\mathcal{C}}_i\mathcal{U}).
\end{aligned}$$

这里我们使用了简写记号

$$\big(\mathrm{B}^{n+1-k}\mathrm{B}^k_\nabla \mathrm{U}(1)\big)(\check{\mathcal{C}}_i\mathcal{U}) \coloneqq \prod_{a_0,\dots,a_i\in\Lambda} \big(\mathrm{B}^{n+1-k}\mathrm{B}^k_\nabla \mathrm{U}(1)\big)(U_{a_0\cdots a_i}),$$

其中 $U_{a_0\cdots a_i} = U_{a_0} \cap \cdots \cap U_{a_i}$ 表示 $a_0, \dots, a_i \in \Lambda$。我们进一步计算

$$\begin{aligned}
\operatorname{holim}_{[i]\in\mathbb{\Delta}} \big(\mathrm{B}^{n+1-k}\mathrm{B}^k_\nabla \mathrm{U}(1)\big)(\check{\mathcal{C}}_i\mathcal{U}) &= \operatorname{holim}_{[i]\in\mathbb{\Delta}} \big(\Gamma \mathrm{b}^{n+1-k}\mathrm{b}^k_\nabla \mathrm{U}(1)\big)(\check{\mathcal{C}}_i\mathcal{U})\\
&\cong \Gamma \operatorname{holim}_{[i]\in\mathbb{\Delta}} \big(\mathrm{b}^{n+1-k}\mathrm{b}^k_\nabla \mathrm{U}(1)\big)(\check{\mathcal{C}}_i\mathcal{U}),
\end{aligned}$$

这里我们用到了 Γ 是一个右 Quillen 函子，并且现在在 $\mathcal{C}\mathrm{h}_{\geq 0}$中计算 Γ 下的同伦极限。最后，例如在 [7,第 B.1] 节中给出了该同伦极限的显式公式。我们得到

$$\operatorname{holim}_{[i]\in\mathbb{\Delta}} \big(\mathrm{B}^{n+1-k}\mathrm{B}^k_\nabla \mathrm{U}(1)\big)(\check{\mathcal{C}}_i\mathcal{U}) \simeq \tau_{\geq 0}\, \mathrm{Tot}^\times \big(\big(\mathrm{b}^{n+1-k}\mathrm{b}^k_\nabla \mathrm{U}(1)\big)(\check{\mathcal{C}}\mathcal{U})\big), \tag{B.12}$$

由 $(\mathrm{b}^{n+1-k}\mathrm{b}^k_\nabla \mathrm{U}(1))(\check{C}\mathcal{U})$ 的总体（乘积）复形截断至非负次数所得的复形。注意，在由 $\check{C}\mathcal{U}$ 的单纯结构诱导的双复形分次中，我们对 Čech 脉络 $\check{C}\mathcal{U}$ 中的单纯次数 i 取负，即赋予次数 $-i$。因此，所得总体复形在正次数和负次数上都有非零项，但经过截断 $\tau_{\geq 0}$ 后，我们再次得到一个非负分次的链复形。

例 B.13. 考虑流形M的一个良好开覆盖$\mathcal{U}$。根据例 B.4，$\mathrm{Grb}^n_{\nabla|k}(\check{C}\mathcal{U})$ 中的一个顶点等同于元组 $(g, A_1, \dots, A_k)$，其中$g\colon \check{C}_{n+1}\mathcal{U} \to \mathrm{U}(1)$，且$A_i \in \Omega^i(\check{C}_{n+1-i}\mathcal{U})$，对于$i \in \{1, \dots, k\}$，满足

$$\begin{aligned}
\delta g &= 0,\\
(-1)^{n+1}\mathrm{d}\log g + \delta A_1 &= 0,\\
(-1)^n \mathrm{d}A_1 + \delta A_2 &= 0,\\
&\vdots\\
(-1)^{n-k+2}\mathrm{d}A_{k-1} + \delta A_k &= 0.
\end{aligned}$$

类似地，1-单形是一个二元组 $((g, A_1, \dots, A_k), (h, C_1, \dots, C_{k-1}))$，其中 $(g, A_1, \dots, A_k)$ 是上述顶点，$h\colon \check{\mathrm{C}}_n\mathcal{U} \to \mathrm{U}(1)$ 是任意光滑函数，而 $C_i \in \Omega^i(\check{\mathrm{C}}_{n-i}\mathcal{U})$ 是任意 i-形式，其中 $i = 1, \dots, k-1$。

这个 1-单形的源顶点是元组 $(g, A_1, \dots, A_k)$，根据例 B.4，其目标顶点为

$$
\begin{aligned}
&(g \cdot \delta h,\\
&A_1 + (-1)^n \mathrm{d}\log h + \delta C_1,\\
&A_2 + (-1)^{n-1}\mathrm{d}C_1 + \delta C_2,\\
&\vdots\\
&A_{k-1} + (-1)^{n-k+2}\mathrm{d}C_{k-2} + \delta C_{k-1},\\
&A_k + (-1)^{n-k+1} C_{k-1})\,.
\end{aligned}
$$

高阶顶点以类似的方式由显式公式 (B.12) 以及例 B.4 中的计算得出。◁

参考文献

[1] A. Amabel、A. Debray 和 P. Haine，微分上同调，arXiv:2109.12250v2。[2] F. Apruzzi、F. Bonetti、I. G. Extebarria、S. S. Hosseini 和 S. Schäfert-Nameki，弦理论中的对称性拓扑场论，arXiv:2112.02092v3。[3] J. C. Baez 和 A. S. Crans，高维代数 VI：李 2-代数，《范畴理论与应用》12（2004），492–538。[4] C. Barwick，关于左、右模型范畴以及左、右 Bousfield 局部化，《同调、同伦与应用》12（2010），245–320。[5] C. Becker、M. Benini、A. Schenkel 和 R. J. Szabo，具有紧支撑的 Cheeger-Simons 微分特征标与 Pontryagin 对偶，《分析与几何通讯》27（2019），1473–1522。[6] M. Benini、A. Schenkel 和 U. Schreiber，洛伦兹流形上的杨-米尔斯场堆，《数学物理通讯》378（2020），185–218。[7] M. Benini、A. Schenkel 和 R. J. Szabo，阿贝尔规范理论中的同伦余极限与全局可观测量，《数学物理快报》105（2015），1193–1222。[8] D. Berwick-Evans、P. Boavida de Brito 和 D. Pavlov，无穷层的分类空间，arXiv:1912.10544v2。[9] J. L. Brylinski，环空间、特征类与几何量子化，1993 年版重印，现代 Birkhäuser 经典著作（2008），Birkhäuser，xvi+300 页。[10] S. Bunk、L. Müller 和 R. J. Szabo，光滑 2-群扩张与丛 gerbe 的对称性，《数学物理通讯》384（2021），1829–1911。[11] S. Bunk，几何、场论与量子化中的 gerbe，《复流形》8（2021），150–182，广义几何专辑。[12] S. Bunk，单纯集合图表的 ∞范畴局部化函子，arXiv:2207.14608v1。[13] S. Bunk，主 ∞丛与光滑 String 群模型，《数学年刊》，即将发表，arXiv:2008.12263v3。[14] S. Bunk，光滑空间的 $\mathbb{R}$-局部同伦论，《同伦与相关结构杂志》，即将发表，arXiv:2008.12263v3。[15] S. Bunk 和 C. S. Shahbazi，爱因斯坦-杨-米尔斯系统的局部模空间，准备中。[16] S. Bunk 和 K. Waldorf，由 B 场与 D 膜构造的光滑开闭函子场论，《同伦与相关结构杂志》16（2021），75–153。[17] S. Bunk 和 K. Waldorf，D 膜的转移，《理论与数学物理进展》25（2021），1095–1198。[18] U. Bunke、T. Nikolaus 和 M. Völkl，作为谱层的微分上同调，《同伦与相关结构杂志》11（2016），1–66。[19] U. Bunke，作为 Pfaffian 线丛平凡化的 String 结构，《数学物理通讯》307（2011），675–712。[20] D. C. Cisinski，高阶范畴与同伦代数，剑桥高等数学研究180（2019），剑桥大学出版社，xviii+430 页。[21] A. Clough，一种适用于几何拓扑的范畴，博士论文，德克萨斯大学奥斯汀分校，网址：https://adrianclough.github.io/Official_version.pdf。[22] A. Coimbra、C. Strickland-Constable 和 D. Waldram，超引力即广义几何 I：II 型理论，《高能物理杂志》11（2011），091。[23] B. Collier，Dixmier-Douady gerbe 的无穷小对称性，arXiv:1108.1525v1。[24] J. Distler、D. S. Freed 和 G. W. Moore，自旋结构与超弦，《微分几何综述》15，国际出版社，马萨诸塞州萨默维尔，2011。[25] D. Dugger，组合模型范畴具有表示，《数学进展》164（2001），177–201。[26] D. Dugger、S. Hollander 和 D. C. Isaksen，超覆盖与单纯预层，《剑桥哲学学会数学论文集》136（2004)。

[27] J. Ebert，阿蒂亚-辛格指标定理讲义，网址：https://ivv5hpp.uni-muenster.de/u/ jeber_02/skripten/mainfile.pdf，访问日期：10/02/23。[28] D. Fiorenza、C. L. Rogers 和 U. Schreiber，几何预量子化中的高阶 U(1)-gerbe 联络，《数学物理评论》26（2016），1650012，72。[29] D. Fiorenza、U. Schreiber 和 J. D. Stasheff，微分特征类的切赫余循环——一种 ∞-李理论构造，《理论与数学物理进展》16（2012），149–250。[30] D. S. Freed，狄拉克荷量子化与广义微分上同调，《微分几何综述》7，129–194，国际出版社，马萨诸塞州萨默维尔，2000。[31] D. S. Freed、G. W. Moore 和 G. Segal，通量的不确定性，《数学物理通讯》271（2007），247–274。[32] D. S. Freed、G. W. Moore 和 G. Segal，海森堡群与非交换通量，《物理年鉴》322（2007），236–285。[33] D. S. Freed、G. W. Moore 和 C. Teleman，量子场论中的拓扑对称性，arXiv:2209.07471v2。[34] D. Gaiotto、A. Kapustin、N. Seiberg 和 B. Willett，广义全局对称性，《高能物理杂志》（2015），172，前置页+61 页。[35] P. Gajer，德利涅上同调的几何，《数学发明》127（1997），155–207。[36] M. Garcia-Fernandez，无挠广义联络与异质超引力，《数学物理通讯》332（2014）第1期，89–115。[37] M. Garcia-Fernandez 和 J. Streets，《广义里奇流》，大学讲座丛书76，美国数学学会，普罗维登斯（罗得岛州），（2021）vi+248 页。[38] M. Garcia-Fernandez、R. Gonzales Molina，Hull-Strominger系统上的 Futaki 不变量与丘成桐猜想，arXiv:2303.05274v1。[39] M. Garcia-Fernandez、R. Rubio 和 C. Tipler，全纯弦代数胚，《美国数学会汇刊》373（2020），7347–7382。[40] M. Garcia-Fernandez，Strominger系统讲义，《数学论丛》24（2016），7–61。[41] W. D. Gillam，代数与代数几何中的单纯形方法，网址：http://www.math.boun.edu.tr/instructors/ wdgillam/simplicialalgebra.pdf。[42] P. G. Goerss 和 J. F. Jardine，单纯形同伦论，1999 年版重印，现代 Birkhäuser 经典著作，Birkhäuser 出版社，巴塞尔（2009），xvi+510 页。[43] M. Gualtieri，广义复几何，博士论文，牛津大学，2003，ArXiv:math/0401221v1。[44] A. Hatcher，代数拓扑，剑桥大学出版社，剑桥（2002），xii+544 页。[45] G. Heuts 和 I. Moerdijk，左纤维化与同伦余极限 I，《数学杂志》279（2015），723–744。[46] N. Hitchin，括号、形式与不变泛函，《亚洲数学杂志》10（2006），541–560。[47] N. Hitchin，广义卡拉比-丘流形，《数学季刊》54（2003），281–308。[48] P. S. Hirschhorn，模型范畴及其局部化，数学调查与专著99，美国数学学会，普罗维登斯（罗得岛州）（2003），xvi+457 页。[49] M. J. Hopkins 和 I. M. Singer，几何、拓扑与 M理论中的二次函数，《微分几何杂志》70（2005），329–452。[50] E. Høssjer、P. Matheiu 和 F. Thuillier，广义阿贝尔 Turaev-Viro 与 U(1) BF理论，ArXiv:2302.09191v1。[51] M. Hovey，模型范畴，数学调查与专著63（1999），美国数学学会，普罗维登斯（罗得岛州），xii+209。[52] A. Kapustin，拓扑非平凡 B 场中的 D 膜，《理论与数学物理进展》4（2000），127–154。[53] T. P. Killingback，世界面反常与环几何，《核物理 B》288（1987），578–588。[54] A. Kriegl 和 P. W. Michor，整体分析的便利框架，数学调查与专著53（1997），美国数学学会，普罗维登斯（罗得岛州），x+618。[55] J. M. Lee，光滑流形导论，第二版，数学研究生教材218，Springer，纽约（2013），xvi+708 页。[56] J. Lurie，高阶代数，网址：https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf，2017年9月18日版本。[57] J. Lurie，高阶托扑斯理论，数学年刊研究丛书170，普林斯顿大学出版社，普林斯顿（新泽西州）（2009），xviii+925 页。[58] V. Mathai 和 D. Roberts，丛 gerbe 的杨 - 米尔斯理论，《物理学杂志 A 》 39 （ 2006 ），6039–6044。[59] E. Meinrenken，紧致单李群上的基本 gerbe，《数学教学》49（2003），307–333。[60] T. Nikolaus、U. Schreiber 和 D. Stevenson，主 ∞丛：一般理论。《同伦与相关结构杂志》10（2015），749–801。[61] T. Nikolaus、U. Schreiber 和 D. Stevenson，主 ∞丛：表示。《同伦与相关结构杂志》10（2015），565–622。[62] Y.-G. Oh、H. L. Tanaka，同伦相干作用的光滑构造，《代数与几何拓扑》，即将发表，arXiv:2003.06033v3。[63] D. Pavlov，微分拓扑空间与光滑集合上的射影模型结构及光滑冈原理，ArXiv:2210.12845v1。[64] D. Quillen，同伦代数，数学讲义43，Springer，柏林-纽约（1967），iv+156页。

[65] E. Riehl，《范畴同伦论》，新数学专著，24。剑桥大学出版社，剑桥，2014。xviii+352 页。[66] R. Rubio 和 C. Tipler，《*Courant* 代数丛的自同构李群与广义度量的模空间》，Rev. Mat. Iberoam. 36 (2020)，485–536。[67] H. Sati 和 U. Schreiber，《等变主 ∞-丛》，arXiv:2112.13654v3。[68] U. Schreiber，《内聚 ∞-*topos* 中的微分上同调》，https://ncatlab.org/schreiber/files/dcct170811. pdf，访问于 01/23。[69] E. Sharpe，《量子场论中广义全局对称性的札记》，Fortschr. Phys.**63** (2015)，659–682。[70] S. Stolz，《关于正里奇曲率与 *Witten* 属的一个猜想》，Math. Ann. **304** (1996)，785–800。[71] J. Simons 和 D. Sullivan，《普通微分上同调的公理化刻画》，J. Topol. **1** (2008)，45–56。[72] R. J. Szabo，《广义微分上同调中的高阶阿贝尔规范理论量子化》，载于第七届国际数学物理大会论文集 (2012)，65 页。[73] C. Voisin，《霍奇理论与复代数几何。*I*》，剑桥高等数学研究，76。剑桥大学出版社，剑桥，2002。x+322 页。[74] K. Waldorf，《弦联络与陈-西蒙斯理论》，Trans. Am. Math. Soc. **365**(2013)，4393–4432。[75] K. Waldorf，《共形场论中丛 *gerbe* 与韦斯-祖米诺项的代数结构》，博士论文，汉堡大学 (2007)，可在 https://ediss.sub.uni-hamburg.de/handle/ediss/1949 查阅。[76] K. Waldorf，《向环空间的转移及其逆，*II*：带联络的 *gerbe* 与融合丛》。，Asian J. Math.**20** (2016)，59–115。[77] C.A. Weibel，《同调代数导论》，剑桥高等数学研究 **38**，剑桥大学出版社，剑桥，(1994)，xiv+450 页。

牛津大学数学研究所，英国电子邮箱地址：severin.bunk@maths.ox.ac.uk

西班牙国立远程教育大学马德里校区数学系电子邮箱地址：cshahbazi@mat.uned.es

德意志联邦共和国汉堡大学数学系。电子邮箱地址：
carlos.shahbazi@uni-hamburg.de