arXiv:2304.06645v1 [cs.FL] 13 Apr 2023

时间窗口时序逻辑的鲁棒性度量与监测器

Ahmad Ahmad[1], Cristian-Ioan Vasile[2],Roberto Tron[1],和 Calin Belta[1]

摘要—时序逻辑（TL）已广泛用于对信息物理系统中可解释的任务进行形式化。近年来，时间窗口时序逻辑（TWTL）被提出作为一种用于动力系统的规范语言。具体而言，它能够轻松表达机器人任务，并支持对这类系统的控制策略进行高效的、基于自动机的验证与综合。本文为该逻辑定义了两种定量语义及相应的两种监测算法，可实时量化离散时间系统的轨迹对公式的满足程度。我们通过数值示例展示了这些新语义及其运行时监测器。

I. 引言

时序逻辑（TL）[1]已广泛用于为信息物理系统制定高层次、表达力强的规范。人们已采用形式化验证与综合算法，根据时序逻辑规范分析和控制这类系统。特别是，线性时序逻辑（LTL）[2]已用于描述规划问题 [3], [4], [5], [6] 中的任务，以及离散时间系统 [7]的形式化综合问题。LTL 公式可转换为自动机，用以编码任务满足的进展情况。通常会将自动机理论工具与系统的有限抽象结合使用，以生成能够保证任务满足的策略，或证明任务无法满足 [3], [7], [8], [9]。其他方法则通过由规范自动机引导的基于采样的规划算法，克服部分可扩展性问题；例如， [5], [6]中的作者采用 RRT* [10] 作为规划算法，而 [11], [12] 中的作者采用 RRG [10] 作为规划算法。

信号时序逻辑（STL）[13],度量时序逻辑（MTL）[14]，和时间窗口时序逻辑（TWTL）[15], 与线性时序逻辑不同，可以表达带有明确具体时间约束的规范，例如，执行任务 A 在时间 t_1 至 t_2 之间；紧接着，花费 t_5 个时间单位，在时间 t_3 至 t_4 之间执行任务 B；并且在所有时间都不执行任务。

STL 和 MTL 的语义均定义在实时信号上。两者都具有定量语义，即鲁棒性，用于量化信号对公式的满足度 [16], [17]。大多数现有研究利用 STL 和 MTL 进行规范描述，并通过最大化鲁棒性来寻找控制器，从而生成系统运行轨迹，使系统能够鲁棒地满足这些规范 [18], [19], [17], [20], [21]。文献 [22]研究了如何使用 RRT*为语法上协安全的 LTL 进行规划；除任务规范外，还使用片段 STL 表达其他空间要求，并将其鲁棒性作为 RRT 的最优性准则*。文献 [23], 中，作者为时间关键系统综合控制器，并量化了一种需要优化的时序鲁棒性度量。传统的鲁棒性指标不可微，且主要由信号的一个值决定，也就是说，它会“掩盖”信号的大部分内容。文献 [24],的作者针对这些问题，为 STL 引入了算术几何平均（AGM）鲁棒性度量。

与 STL、MTL 和其他具体时间时序逻辑相比，TWTL 有几个优点。首先，其语法和语义能够以高效且明确的方式表达串行任务。这在许多应用中都很重要，尤其是在机器人学领域 [15]。其次，TWTL 公式可以高效地转换为自动机。转换算法的复杂度与公式的时间界限无关 [15]。因此，这种逻辑适用于基于自动机的综合和规划问题（参见 [25]中的规划应用）。然而，TWTL 缺少用于衡量公式满足或违反程度的定量语义。在本研究中，我们修改了 TWTL 的语法，使其可以定义在系统输出空间的谓词区域上。我们定义了鲁棒性度量，以量化 TWTL 公式的满足度，并受 [24], 启发，将鲁棒性定义扩展为利用 AGM 鲁棒性的定义。这使得规划和综合问题成为可能，我们计划在后续工作中对此进行研究。

我们的贡献总结如下。首先，我们调整 STL 的“传统”定量语义，以定义一种可靠鲁棒性度量（第 III-A 节）。其次，受 AGM-STL 鲁棒性 [24], 的启发，我们为 TWTL 引入了一种 AGM 鲁棒性度量，适用于广泛的应用（第 III-B 节）。第三，给定系统的部分运行轨迹，即长度小于 TWTL 公式的时间范围的运行轨迹（见定义 2.1），我们调整 STL 鲁棒性区间语义 [26] ，以监测 TWTL 鲁棒性（第 IV 节）。第四，我们引入了类似的区间语义，用于在运行时监测 AGM 鲁棒性。最后，我们通过数值示例验证所提出的鲁棒性度量及其监测器（第 V 节）。

[1] Ahmad Ahmad、Roberto Tron 和 Calin Belta（{ahmadgh,tron,cbelta}@bu.edu）就职于美国马萨诸塞州波士顿市波士顿大学系统工程系，邮编 02215。[2] Cristian Vasile（cvr519@lehigh.edu）就职于美国宾夕法尼亚州伯利恒市利哈伊大学机械工程与力学系，邮编 18015。

II. 预备知识

A. 动力系统

考虑如下形式的离散时间非线性系统

$$\begin{aligned} x_{t+\Delta t} &= f(x_t),\ t = t_0, t_0+\Delta t, t_0+2\Delta t \dots \\ o_t &= l(x_t), \end{aligned} \tag{1}$$

其中，$x \in X \subset \mathbb{R}^d$ 是取值于集合 X的状态，$\mathbb{R}^d$ 是 d维欧几里得空间，$\Delta t \in \mathbb{R}_{>0}$，且$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$。$o_t$ 是系统在时间 t的可观测输出，而 $l(.) : X \to 2^{\Pi}$ 是一个标记函数，其中 Π 是原子命题（任务）的集合，2^{Π} 是其幂集。

系统(1)的状态轨迹是满足其动力学的一系列状态 $\mathbf{x} := x_{t_0} x_{t_0+\Delta t} x_{t_0+2\Delta t} \dots$。在本文中，如果 $o := l(x) \in A$，则原子命题 $\pi_A \in \Pi$ 在状态 $x \in X$ 取布尔值 $\top$；其中 $A := \{o | h(o) > \sigma\}$，$h : 2^{\Pi} \to \mathbb{R}^d$，$\sigma \in \mathbb{R}^d$，否则为 $\bot$。$\mathbf{x}$生成一个词 $\mathbf{o} = o_{t_0} o_{t_0+\Delta t} o_{t_0+2\Delta t} \dots\dots$。对于$t_1$，$t_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$；$t_2 := t_1 + n_t \Delta t$; 其中 $n_t \in \mathbb{N}_{\geq 0}$，相应的系统轨迹和生成的词分别记为：$\mathbf{x}_{t_1,t_2} := x_{t_1} x_{t_1+\Delta t} \dots x_{t_2}$以及$\mathbf{o}_{t_1,t_2} := o_{t_1} o_{t_1+\Delta t} \dots o_{t_2}$。对于 $t \in [t_1, t_2]$，$\mathbf{x}_{t_1,t_2}(t) = x_t$，且$\mathbf{o}_{t_1,t_2}(t) := o_t$。

B. 时间窗口时序逻辑

我们修改了 TWTL 语法 [15]，使原子命题定义在谓词区域上。TWTL 语法归纳定义如下:

$$\phi ::= H^d \pi_A | H^d \neg \pi_A | \phi_1 \wedge \phi_2 | \phi_1 \vee \phi_2 | \neg \phi | \phi_1 \cdot \phi_2 | [\phi]^{[a,b]} \tag{2}$$

其中，$\pi_A \in \Pi$ 是定义在谓词区域 A上的原子命题；$\neg$、$\wedge$和 $\vee$ 分别表示布尔值运算符中的否定、合取和析取；H^d 是保持 运算符；$\cdot$ 是连接 运算符；$[]^{[a,b]}$ 是 *Within* 运算符，其中 $d, a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$和 $a \geq b$。

在词 $\mathbf{o}_{t_1,t_2}$ 上的布尔语义递归定义如下:

$$\begin{aligned} &\mathbf{o}_{t_1,t_2} \models H^d \pi_A \Leftrightarrow o_t \in A,\ \forall t \in [t_1, t_2] \wedge (t_2 - t_1 \geq d\Delta t) \\ &\mathbf{o}_{t_1,t_2} \models H^d \neg \pi_A \Leftrightarrow o_t \notin A,\ \forall t \in [t_1, t_2] \wedge (t_2 - t_1 \geq d\Delta t) \\ &\mathbf{o}_{t_1,t_2} \models \phi_1 \wedge \phi_2 \Leftrightarrow (\mathbf{o}_{t_1,t_2} \models \phi_1) \wedge (\mathbf{o}_{t_1,t_2} \models \phi_2) \\ &\mathbf{o}_{t_1,t_2} \models \phi_1 \vee \phi_2 \Leftrightarrow (\mathbf{o}_{t_1,t_2} \models \phi_1) \vee (\mathbf{o}_{t_1,t_2} \models \phi_2) \\ &\mathbf{o}_{t_1,t_2} \models \neg \phi \Leftrightarrow \mathbf{o}_{t_1,t_2} \not\models \phi \\ &\mathbf{o}_{t_1,t_2} \models \phi_1 \cdot \phi_2 \Leftrightarrow \exists t = \underset{t \in [t_1,t_2]}{\arg\min} \{\mathbf{o}_{t_1,t} \models \phi_1\} \\ &\qquad \wedge (\mathbf{o}_{t+\Delta t,t_2} \models \phi_2) \\ &\mathbf{o}_{t_1,t_2} \models [\phi]^{[a,b]} \Leftrightarrow \exists t \geq t_1 + a \text{ s.t. } \mathbf{o}_{t,t_1+b} \models \phi \\ &\qquad \wedge (t_2 - t_1 \geq b) \end{aligned} \tag{3}$$

定义*2.1*（*TWTL* 时间范围 *[15]*）：给定 ϕ，时间范围递归定义如下。

$$||\phi|| := \begin{cases} \max(||\phi_1||, ||\phi_2||); & \text{if } \phi \in \{\phi_1 \wedge \phi_2, \phi_1 \vee \phi_2\} \\ ||\phi_1||; & \text{if } \phi = \neg \phi_1 \\ ||\phi_1|| + ||\phi_2|| + \Delta t; & \text{if } \phi = \phi_1 \cdot \phi_2 \\ d\Delta t; & \text{if } \phi = H^d \pi_A \\ b; & \text{if } \phi = [\phi_1]^{[a,b]} \end{cases} \tag{4}$$

III. TWTL 定量语义

受 STL 鲁棒性 [16] 及其 AGM 版本 [24],的启发，我们为 TWTL 公式设计了鲁棒性度量，以推理 TWTL 任务的满足度。

A. *TWTL* 鲁棒性

定义 *3.1*：（TWTL 鲁棒性）给定一个 TWTL 公式 ϕ 和系统 (1) 的输出词 $\mathbf{o}_{t_1,t_2}$，我们递归地将时刻 0 处的鲁棒度定义为 $\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi)$，如下所示:

$$\begin{aligned} &\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, H^d \pi_A) := \begin{cases} \min\limits_{t \in [t_1, d+t_1]} h(o_t) & ; (t_2 - t_1 \geq d\Delta t) \\ \rho_{\bot} & ; \text{otherwise} \end{cases} \\ &\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi_1 \wedge \phi_2) := \min\{\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi_1), \rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi_2)\} \\ &\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi_1 \vee \phi_2) := \max\{\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi_1), \rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi_2)\} \\ &\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \neg \phi) = -\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi) \\ &\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi_1 \cdot \phi_2) := \\ &\quad \max_{t \in [t_1,t_2)} \{\min\{\rho(\mathbf{o}_{t_1,t}, \phi_1), \rho(\mathbf{o}_{t+1,t_2}, \phi_2)\}\} \\ &\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, [\phi]^{[a,b]}) := \begin{cases} \max\limits_{t \geq t_1 + a} \{\rho(\mathbf{o}_{t,t_1+b}, \phi)\}; (t_2 - t_1 \geq b) \\ \rho_{\bot};\ \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned} \tag{5}$$

其中，$\rho_{\bot}$ 表示一个较大的负值，表示布尔值 $\bot$ 的鲁棒性。

对于 $\mathbf{o}_{t_1,t_2}$ 和 ϕ，鲁棒性值 $\rho(\mathbf{o}_{t+1,t_2}, \phi)$ 表示$\mathbf{o}_{t_1,t_2}$ 距离任务谓词区域的决策边界有多远。$\rho(\mathbf{o}_{t+1,t_2}, \phi)$ 为正值意味着任务满足布尔值，其中该值越大，$\rho(\mathbf{o}_{t+1,t_2}, \phi)$ 满足任务的鲁棒性越强。对于任务违反的负鲁棒性，也可以作类似解释。

引理 *3.1*：TWTL 鲁棒性 (5) 是可靠的，即正（负）鲁棒性值意味着布尔满足（违反）。

证明：我们通过对公式 ϕ 进行结构归纳来证明其可靠性。TWTL 的基本情形是保持情形，证明如下。

保持：首先，如果 $t_2 - t_1 < d\Delta t$ 那么 $\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, H^d \pi_A) = \rho_{\bot} < 0$，这意味着 $\mathbf{o}_{t_1,t_2} \not\models \phi$。其次，如果 $t_2 - t_1 \geq d\Delta t$，令 $\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, H^d \pi_A) > 0$。假设存在 $t' \in [t_1, t_1 + d\Delta t]$，使得 $\rho(\mathbf{o}_{t'}, \pi_A) < 0$，那么我们得到 $\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, H^d \pi_A) = \min\limits_{t \in [t_1, t_1+d\Delta t]} h(o_t) < 0$，这是一个矛盾，则 $\mathbf{o}_{t_1,t_2} \models H^d \pi_A$。第三，若 $t_2 - t_1 \geq d\Delta t$，令 $\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, H^d \pi_A) < 0$。假设对于所有 $t' \in [t_1, t_1 +$

$d\Delta t]$ 使得 $\rho(\mathbf{o}_{t'}, \pi_A) > 0$ 则 $\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, H^d\pi_A) = \min_{t\in[t_1,t_1+\Delta t]} h(o_t) > 0$，这与矛盾相矛盾，则 $\mathbf{o}_{t_1,t_2} \models H^d\pi_A$。

然后我们有以下内容。 g 归纳情形：
合取：令 $\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi_1 \wedge \phi_2) > 0$。假设一个或两个 $\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi_i) < 0, i = 1, 2$，那么 $\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi_1 \wedge \phi_2) = \min\{\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi_1) \rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi_2)\} < 0$，这就是一个矛盾。然后通过归纳法 $\mathbf{o}_{t_1,t_2} \models \phi_1 \wedge \phi_2$。在 $\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi_1 \wedge \phi_2) < 0$ 的情况下。假设 $\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi_i) > 0, i = 1, 2$，那么 $\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi_1 \wedge \phi_2) = \min\{\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi_1) \rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi_2)\} > 0$，这就是一个矛- 盾。然后通过归纳法 $\mathbf{o}_{t_1,t_2} \not\models \phi_1 \wedge \phi_2$。

析取：与合取 情形类似。
否定：设 $\phi = \neg\varphi$ 和 $\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi) > 0$。我们得到$\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \varphi) < 0$，根据归纳假设$\mathbf{o}_{t_1,t_2} \not\models \varphi$；因此，$\mathbf{o}_{t_1,t_2} \models \phi$。类似地，如果 $\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi) > 0$ 我们得到 $\mathbf{o}_{t_1,t_2} \models \varphi$；因此，$\mathbf{o}_{t_1,t_2} \not\models \phi$。

Within: 与保持情况类似。
连接：鉴于假设 TWTL的语言是无歧义的 [15]，，我们对连接运算符的语法进行如下修改。

$$\mathbf{o}_{t_1,t_2} \models \phi_1 \cdot \phi_2 \Leftrightarrow \bigvee_{t\in[t_1,t_2]} \mathbf{o}_{t_1,t} \models \phi_1 \wedge \mathbf{o}_{t+\Delta t,t_2} \models \phi_2 \quad (6)$$

因此，$\rho(\mathbf{o}_{t_1,\ t_2},\ \phi_1 \cdot \phi_2)$ 的可靠性直接由鲁棒性在析取和合取情况下的可靠性得出。

■

示例*3.1*：考虑一个 TWTL 公式 $\phi = [H^6\pi_A]^{[0,10]}$，其中 $A = \{o \mid o \geq 4\}$，其含义为：“在时间 0 到时间 10 之间，在 π_A 中保持 6 个时间步”；以及三个输出词 $\mathbf{o}_1$，$\mathbf{o}_2$ 和 $\mathbf{o}_3$，，它们分别在图 1 左上方的图中以蓝色、绿色和红色轨迹表示。可以看出，$\mathbf{o}_1$ 和$\mathbf{o}_2$ 满足任务规范，其中 $\rho(\mathbf{o}_1, \phi) = \rho(\mathbf{o}_2, \phi) = 0.099$，而$\mathbf{o}_2$ 违反了任务，其中 $\rho(\mathbf{o}_2, \phi) = -2$。

B. TWTL 算术几何平均鲁棒性

TWTL 鲁棒性（定义 3.1）考虑了系统输出词中的关键点，这是保证鲁棒性可靠性所必需的（见引理 3.1）。然而，正如示例 3.2 所示，它可能是一种非常悲观的鲁棒性度量。例如，鲁棒性 $\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, H^d\pi_A)$ 的计算主要由谓词函数 $h(\cdot)$ 在系统词$\mathbf{o}$上的最小赋值决定。此外，由于其计算涉及 min 和 max，因此得到的度量并不平滑，这使得启发式方法和基于梯度的方法难以通过最大化整体任务的鲁棒性来求解。

为此，我们对 AGM 鲁棒性 [24]的概念进行调整，以定义适用于 TWTL 的 AGM 鲁棒性度量 η。如下文所示，η 有助于缓解 TWTL 鲁棒性 ρ 的一些不足，并为 TWTL 提供一种更乐观、平滑且可靠的鲁棒性度量。

考虑函数 $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，并令 $[F]_+\colon = \begin{cases} F & F > 0 \\ 0 & \end{cases}$；；否则和，$[F] = -[-F]_+ \quad F = [F]_+ +$

其中$[F]$。我们分别将 $r_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, N$ 的析取和合取的 AGM 函数定义如下。

$$\mathrm{AGM}_\vee(r_1, \ldots, r_N) := \begin{cases} -\sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N}(1 - r_i)} + 1; \\ \text{if } \forall i \in \{1, \ldots, N\}, r_i < 0 \\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[r_i]_+; \quad \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

$$\mathrm{AGM}_\wedge(r_1, \ldots, r_N) := \begin{cases} \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N}(1 + r_i)} - 1; \\ \text{if } \forall i \in \{1, \ldots, N\}, r_i > 0 \\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[r_i]_-; \quad \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

定义 *3.2*（归一化 *TWTL* 公式）：给定语法 (2)，归一化 TWTL 公式 ϕ 表示为定义在归一化原子命题 $\pi_{A_{\mathrm{norm}}}$上的公式，其中 $A_{\mathrm{norm}} := \{o \mid h_{\mathrm{norm}}(o) > \sigma_n\}$，$h_{\mathrm{norm}} :2^\Pi \to [-1, 1]^d$，且 $\sigma_{\mathrm{norm}} \in [-1, 1]$。

在论文余下部分中，除非另有明确说明，我们假设所有 TWTL 公式均已归一化。

定义 *3.3*：（TWTL 算术-几何平均鲁棒性）给定一个规范化的 TWTL 公式 ϕ，我们递归地使用（7）和（8）定义输出词 $\mathbf{o}_{t_1,\ t_2}$ 相对于 ϕ 的 AGM 鲁棒性。

$$\begin{aligned} &\eta(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \top) := +1 \\ &\eta(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \bot) := -1 \\ &\eta(\mathbf{o}_t, \pi_A) := \frac{1}{2}(h(\mathbf{o}_t) - \sigma_n) \\ &\eta(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi_1 \wedge \phi_2) := \mathrm{AGM}_\wedge(\eta(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi_1), \eta(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi_2)) \\ &\eta(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi_1 \vee \phi_1) := \mathrm{AGM}_\vee(\eta(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi_1), \eta(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi_2)) \\ &\eta(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \neg\phi) := -\eta(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &\eta(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, H^d\pi_A) := \begin{cases} \mathrm{AGM}_\wedge(\eta(\mathbf{o}_t, \pi_A) | t \in [t_1, t_1 + d\Delta t]); \text{ if } (t_2 - t_1) \geq d \\ -1; \text{ otherwise} \end{cases} \\ &\eta(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, [\phi]^{[a,b]}]) := \begin{cases} \mathrm{AGM}_\vee(\eta(\mathbf{o}_{t,t_1+b}, \phi) | t \in [t_1 + a, t_1 + b]); \text{ if } (t_2 - t_1) \geq b \\ -1; \text{ otherwise} \end{cases} \\ &\eta(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi_1.\phi_2) := \mathrm{AGM}_\vee(\mathrm{AGM}_\wedge(\eta(\mathbf{o}_{t_1,t}, \phi_1), \eta(\mathbf{o}_{t+\Delta t,t_2}, \phi_2)) | t \in [t_1, t_2)) \end{aligned} \quad (10)$$

定理 *3.1*：定义 3.3 中的 TWTL AGM 鲁棒性是可靠的。形式化地，我们有

$$\eta(\mathbf{o}_{t_1,t_2},\phi)>0 \Leftrightarrow \rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2},\phi)>0 \implies \mathbf{o}_{t_1,t_2}\models\phi$$
$$\eta(\mathbf{o}_{t_1,t_2},\phi)<0 \Leftrightarrow \rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2},\phi)<0 \implies \mathbf{o}_{t_1,t_2}\not\models\phi$$

证明公式 ϕ 上鲁棒性的结构归纳是完备且可靠的。TWTL 的基本情形是 保持 情形，证明如下。

保持：首先，若 $t_2-t_1<d\Delta t$，则 $\eta(\mathbf{o}_{t_1,t_2},H^d\pi_A)=-1$，这意味着 $\mathbf{o}_{t_1,t_2}\not\models\phi$。其次，若 $t_2-t_1\geq d\Delta t$，令 $\eta(\mathbf{o}_{t_1,t_2},H^d\pi_A)>0$。假设存在 $t'\in[t_1,t_1+d\Delta t]$，使得 $\eta(\mathbf{o}_{t'},\pi_A)<0$，则根据 (8) 可得 $\eta(\mathbf{o}_{t_1,t_2},H^d\pi_A)=\frac{1}{|[t_1,t_2]|}\sum_{t'\in[t_1,t_1+d\Delta t]}[\eta(\mathbf{o}_{t'},\pi_A)]<0$，这构成了一个矛盾，然后 $\mathbf{o}_{t_1,t_2}\models H^d\pi_A$. 第三，若 $t_2-t_1\geq d$，let $\eta(\mathbf{o}_{t_1,t_2},H^d\pi_A)<0$. 假设对于所有 $t'\in[t_1,t_1+d\Delta t]$ 使得 $\eta(\mathbf{o}_{t'},\pi_A)>0$然后根据 (7) 可得 $\eta(\mathbf{o}_{t_1,t_2},H^d\pi_A)=\sqrt[|[t_1,t_1+d\Delta t]|]{\prod_{t'\in[t_1,t_1+d\Delta t]}(1+\eta(\mathbf{o}_t,\pi_A)}-1>0$，即一个矛盾，然后 $\mathbf{o}_{t_1,t_2}\not\models H^d\pi_A$。

于是我们有以下归纳情形：
案例 $\top$、$\bot$ 和 π_A，以及合取、析取和否定案例的可靠性，可直接由 [24]中的定理 2 得出。

Within：与保持案例类似。
连接：根据布尔语义 (6)，$\eta(\mathbf{o}_{t_1,t_2},\phi_1\cdot\phi_2)$ 的可靠性可直接由析取和合取案例中 AGM 鲁棒性的可靠性得出。

■

示例 3.2：（续）考虑示例 3.1 中相同的公式和词。$\eta(\mathbf{o}1,\phi)=0.061$, $\eta(\mathbf{o}2,\phi)=0.010$，与其 ρ 值不同，AGM 鲁棒性度量η 会奖励满足赋值更多的词，而不是由最关键的赋值主导，同时也保留了可靠性。词 $\mathbf{o}_1$（图 1 左上图中的蓝色轨迹）有更多能够对满足公式作出鲁棒贡献的赋值。在 $\rho(\mathbf{o}1,\phi)$中，轨迹上接近导致任务违反的4^{th} 点主导了鲁棒性计算。即使我们假设 4^{th} 为 2（这会导致违反任务），其 η 值也会是 -0.35，高于对应的 ρ 值 -2。η 的计算考虑到了轨迹具有有望对满足任务作出贡献的赋值这一事实。另一方面，对于 $\mathbf{o}_3$（同一图中的红色轨迹），$\eta(\mathbf{o}3,\phi)=-0.61$ 高于 $\rho(\mathbf{o}3,\phi)=-2$，是更现实的违反度量，因为 $\mathbf{o}_3$ 的一些赋值接近于对满足任务作出贡献。

IV. 运行时鲁棒性监测

对于时间范围短于 TL 规范时间范围的系统运行轨迹，运行时验证技术被引入作为轻量级算法，用于监测给定此类部分运行轨迹时的满足情况，关于不同 TL 的监测综述见 [27]。通常会采用不同技术来执行监测任务，[28] 中的工作使用了一种重写技术来监测 TWTL 的布尔满足性。在 [26],中，作者引入了区间语义来监测 STL 规范的鲁棒度。该技术考虑部分运行轨迹，并利用该运行轨迹的所有可能补全集合，计算可能的最佳和最差鲁棒度。

在本文中，我们对[26]中的 STL 鲁棒性监测器进行了定制，以编码鲁棒性区间 $[\rho]$，从而监测 TWTL 鲁棒性。同样地，我们引入 AGM 鲁棒性区间 $[\eta]$，以监测 AGM 鲁棒性。我们的监测器是可靠的，这意味着在任意时间步，正确的（AGM）鲁棒性都属于运行时监测器生成的区间。

下面给出一些我们在 TWTL 区间语义中使用的初步定义。

定义 4.1（前缀、补全）：考虑时间范围 $||\phi||$ 以及输出词 $\mathbf{o}_{t_1,t'}$ 和 $\mathbf{o}_{t_1,t_2}$，其中$t'<||\phi||$ 且 $t_2\geq||\phi||$。如果 $\forall t\in[t_1,t']$，则称 $\mathbf{o}_{t_1,t'}$ 是 $\mathbf{o}_{t_1,t_2}$ 的前缀，即 $\mathbf{o}_{t_1,t_2}(t)=\mathbf{o}_{t_1,t'}(t)$；相应地，我们将前缀的所有可能补全集定义为$\mathfrak{C}:=\{\mathbf{o}_{t_1,t_2}\mid \mathbf{o}_{t_1,t'}\text{ 是 }\mathbf{o}_{t_1,t_2}\}$ 的前缀

定义 *4.2*（区间语义上的运算）：考虑以下区间集合 $\mathbf{I}:=\{I_i\}_{i=1}^N$，其中 $I_i:=[I_i,I_i]$ 且 $I_i\leq I_i$。我们在$\mathbf{I}$ 上定义以下运算

$$\begin{aligned}\mathbf{AGM}_\vee(\mathbf{I}) &:= [\mathrm{AGM}_\vee(\underline{I}_1,\ldots,\underline{I}_N),\mathrm{AGM}_\vee(\bar{I}_1,\ldots,\bar{I}_N)],\\ \mathbf{AGM}_\wedge(\mathbf{I}) &:= [\mathrm{AGM}_\wedge(\underline{I}_1,\ldots,\underline{I}_N),\mathrm{AGM}_\wedge(\bar{I}_1,\ldots,\bar{I}_N)].\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{max}(\mathbf{I}) &:= [\max(\underline{I}_1,\ldots,\underline{I}_N),\max(\bar{I}_1,\ldots,\bar{I}_N)],\\ \mathbf{min}(\mathbf{I}) &:= [\min(\underline{I}_1,\ldots,\underline{I}_N),\min(\bar{I}_1,\ldots,\bar{I}_N)].\end{aligned} \tag{12}$$

单点区间 $[I,I]$ 记作 $\{I\}$。

在介绍 $[\rho]$ 和 $[\eta]$的递归定义之前，我们先介绍以下定义。

定义 *4.3*：（区间集合的紧凑表示）给定词 $\mathbf{o}_{t_1,\ t'}$、$\mathbf{o}_{t,\ t'}$、$t\in[t_a,t_b]$以及公式 ϕ和 ϕ_i、$i=1,\ \ldots,N$，对于 $[\rho]$和 $[\eta]$，我们将以下集合表示记作：

$$\begin{aligned}[.]^{i=1,\ldots,N}(\mathbf{o}_{t_1,t'},\phi_i) &= \{[.](\mathbf{o}_{t_1,t'},\phi_1),\ldots,[.](\mathbf{o}_{t_1,t'},\phi_N)\},\\ [.]_{t_a:t_b}(\mathbf{o}_{t,t'},\phi) &= \{[.](\mathbf{o}_{t_a,t'},\phi_1),\ldots,[.](\mathbf{o}_{t_b,t'},\phi)\},\end{aligned} \tag{13}$$

其中 $[.](\mathbf{o}_{\mathbf{t_1},\mathbf{t_2}},\phi)$ 是下文定义的区间语义。

考虑一个时间范围为 $||\phi||$的 TWTL 公式 ϕ。给定部分词 $\mathbf{o}_{t_1,t'}$，其中 $t'\leq||\phi||$，为在时间 t'监测鲁棒性 ρ，我们递归地定义鲁棒性区间$[\rho]$ 如下。

$$[\rho](\mathbf{o}_{t_1,t_2}, H^d\pi_A) := \begin{cases} \{\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, H^d\pi_A)\}; (t_2 - t_1 \geq d) \\ [\rho_\perp, \min_{t\in[t_1,d+t_1]} h(o_t)]; \text{否则} \end{cases}$$

$[\rho](\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi_1 \wedge \phi_2)$:= **最小值**$([\rho](\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi_1)\ [\rho](\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi_2))$

$[\rho](\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi_1 \vee \phi_2)$:= **最大值**$([\rho](\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi_1)\ [\rho](\mathbf{o}_{t_1,t_2}, \phi_2))$

$[\rho](\mathbf{o}_{t_1,\ t_2},\ \phi_1 \cdot \phi_2) :=$

最大最小 g$(\mathbf{o}_{t\in[t_1,t_2)}\ ([\rho](\ _{t_1,t}, \phi_1), [\rho](\ _{t+1,t_2}, \phi_2)))$

$$[\rho](\mathbf{o}_{t_1,t_2}, [\phi]^{[a,b]}) := \begin{cases} \{\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, [\phi]^{[a,b]}\}; \ (t_2 - t_1 \geq b) \\ [\max_{t\geq t_1+a} \{\rho(\mathbf{o}_{t,t_1+b}, \phi)\}, \rho_\top]; \\ \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\bar{\eta} := \begin{cases} \sqrt[d+1]{\prod_{t\in[t_1,t']}(1+\eta(\mathbf{o}_t,\pi_A))(1+\eta_{\max})^{|[t',d]|}} - 1; & \text{if } \forall t \in [t_1,t'], \eta(\mathbf{o}_t,\pi_A) > 0 \wedge (t'-t_1) < d \\ \frac{1}{d+1}\sum_{t\in[t_1,t']}[\eta(\mathbf{o}_t,\pi_A)]_-; & \text{if } \exists t \in [t_1,t'], \eta(\mathbf{o}_t,\pi_A) < 0 \wedge (t'-t_1) < d \\ \eta(\mathbf{o}_{t_1,t'}, H^d\pi_A); & \text{If } (t'-t_1) \geq d \end{cases} \tag{14}$$

$$\underline{\eta} := \begin{cases} \frac{|(t',d]|}{|[t_1,d]|}\eta_{\min}; & \text{if } \forall t \in [t_1,t'], \eta(\mathbf{o}_t,\pi_A) > 0 \wedge (t'-t_1) < d \\ \frac{1}{d+1}\left(\sum_{t\in[t_1,t']}[\eta(\mathbf{o}_t,\pi_A)]_- + |[t',d]|\eta_{\min}\right); & \text{if } \exists t \in [t_1,t'], \eta(\mathbf{o}_t,\pi_A) < 0 \wedge (t'-t_1) < d \\ \eta(\mathbf{o}_{t_1,t'}, H^d\pi_A); & \text{If } (t'-t_1) \geq d \end{cases}$$

$$[\eta](\mathbf{o}_{t_1,t'}, [\phi]^{[a,b]}, t') := \begin{cases} \{\eta(\mathbf{o}_{t_1,t'}, [\phi]^{[a,b]})\}; & \text{if } (t'-t_1) \geq b \\ \mathbf{AGM}_\vee([\eta](\mathbf{o}_{t,t_1+b}, \phi)_{t_1+a:t_2}); & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$[\eta](\mathbf{o}_{t_1,t'}, \phi_1.\phi_2, t') := \mathbf{AGM}_\vee(\mathbf{AGM}_\wedge([\eta](\mathbf{o}_{t_1,t'-\Delta t}, \phi_1), [\eta](\mathbf{o}_{t',t'}, \phi_2)), \ldots, \mathbf{AGM}_\wedge([\eta](\mathbf{o}_{t_1,t_1}, \phi_1), [\eta](\mathbf{o}_{t_1+\Delta t,t'}, \phi_2))) \tag{16}$$

考虑相同的规范和词，对于监测AGM鲁棒性 η 在时间 t'，我们递归地定义鲁棒性区间 $[\eta]$，使用 (15),(16)。

$$\begin{aligned} [\eta](\mathbf{o}_{t_1,t'}, \phi_1 \wedge \phi_2, t') &:= \mathbf{AGM}_\wedge([\eta](\mathbf{o}_{t_1,t'}, \phi_i)^{i=1,2}) \\ [\eta](\mathbf{o}_{t_1,t'}, \phi_1 \vee \phi_2, t') &:= \mathbf{AGM}_\vee([\eta](\mathbf{o}_{t_1,t'}, \phi_i)^{i=1,2}) \\ [\eta](\mathbf{o}_{t_1,t'}, H^d\pi_A, t') &:= [\underline{\eta}, \bar{\eta}] \end{aligned} \tag{15}$$

定理4.1：考虑一个 TWTL 公式 ϕ 和一个部分词 $\mathbf{o}_{t_1,\ t'}$，那么对于任意可能的补全词$\mathbf{o}_{t_1,\ t_2} \in \mathfrak{C}$，$\rho(\mathbf{o}_{t_1,\ t_2},\ H^d\pi_A) \in [\rho](\mathbf{o}_{t_1,\ t'},\ H^d\pi_A)$ 且$\eta(\mathbf{o}_{t_1,\ t_2},\ H^d\pi_A) \in [\eta](\mathbf{o}_{t_1,\ t'},\ H^d\pi_A)$。

证明：**首先**，我们通过对公式 ϕ进行结构归纳，证明对于任意 $\mathbf{o}_{t_1,\ t_2} \in \mathfrak{C}$，$\rho(\mathbf{o}_{t_1,\ t_2},\ H^d\pi_A) \in [\rho](\mathbf{o}_{t_1,\ t'},\ H^d\pi_A)$。TWTL 的基础情形是保持 情形，证明如下。

保持：我们通过矛盾证明以下情形。给定部分词 $\mathbf{o}_{t_1,t'}$，对于任意可能的补全 $\mathbf{o}_{t_1,t_2} \in \mathfrak{C}$，假设 $\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, H^d\pi_A) \notin [\rho](\mathbf{o}_{t_1,t'}, H^d\pi_A)$。首先，若 $t' - t_1 \geq d$，根据 (14)，$[\rho](\mathbf{o}_{t_1,t'}, H^d\pi_A) = \{\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, H^d\pi_A\}$，这与假设矛盾。因此，$\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, H^d\pi_A) \in [\rho](\mathbf{o}_{t_1,t'}, H^d\pi_A)$。其次，若 $t' - t_1 < d$，根据 (14)，$[\rho](\mathbf{o}_{t_1,t'}, H^d\pi_A) = [\rho_\perp, \text{最小值}_{t\in[t_1,d+t_1]} h(o_t)]$，则由定义 3.1，$\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, H^d\pi_A) > \rho_\perp$ 且$\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, H^d\pi_A) \leq$ 最小值$_{t\in[t_1,d+t_1]} h(o_t)$，这与假设矛盾。因此，$\rho(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, H^d\pi_A) \in [\rho](\mathbf{o}_{t_1,t'}, H^d\pi_A)$。

由此得到以下归纳情形：

Within：与保持 情形的证明类似。

合取/析取：可靠性由区间算术（12）的性质可得。

连接：根据布尔语义 (6)，连接的可靠性可直接由合取/析取 情形的可靠性得出。

其次，我们通过对公式 ϕ 进行结构归纳，证明对于任意$\mathbf{o}_{t_1,\ t_2} \in \mathfrak{C}$,$\eta(\mathbf{o}_{t_1,\ t_2},\ H^d\pi_A) \in [\eta](\mathbf{o}_{t_1,\ t'},\ H^d\pi_A)$。TWTL 的基本情形是保持 情形，证明如下。

保持：我们通过反证法证明以下情形。给定部分词 $\mathbf{o}_{t_1,t'}$，对于任意可能的补全 $\mathbf{o}_{t_1,t_2} \in \mathfrak{C}$，假设 $\eta(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, H^d\pi_A) \notin [\eta](\mathbf{o}_{t_1,t'}, H^d\pi_A)$。首先，若 $t' - t_1 \geq d$，由 (16) 可得 $[\eta](\mathbf{o}_{t_1,t'}, H^d\pi_A) = \{\eta(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, H^d\pi_A)\}$，这与假设矛盾。因此，$\eta(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, H^d\pi_A) \notin [\eta](\mathbf{o}_{t_1,t'}, H^d\pi_A)$。其次，若 $\forall t \in [t_1,t'], \eta(\mathbf{o}_t, \pi_A) > 0 \wedge (t' - t_1) < d$，由 (16) 可得 $[\eta](\mathbf{o}$

$$_{t_1\ t'} = , , \left[\frac{|\ t'\ d]|}{|[t_1,d]|}\eta_{\min}\ \sqrt[d+1]{\prod_{t\in[t_1,t']} 1+\eta\ _t\ \pi_A\ \ 1+\eta_{\max}\ ^{|[t',d]|} - 1}\right]$$

$H^d\pi_A)$ (, , ((o ,))( ) 。然后根据定义 3.3，$\eta(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, H^d\pi_A) \in [\eta](\mathbf{o}_{t_1,t'}, H^d\pi_A)$，这与假设矛盾。因此，$\eta(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, H^d\pi_A) \notin [\eta](\mathbf{o}_{t_1,t'}, H^d\pi_A)$。第三，若 $\exists t \in [t_1,t'], \eta(\mathbf{o}_t, \pi_A) < 0 \wedge (t' - t_1) < d$，由 (16) 可得 $[\eta](\mathbf{o}$

$$_{t_1\ t'} = , , H^d\pi_A) \left[\frac{1}{d+1}\left(\sum_{t\in[t_1,t']}[\eta\ _t\ \pi_A\ ] + |[t',d]|\eta_{\min}\right)\ \ {}^{1}_{d+1}\sum_{t\in[t_1,t']}[\eta\ _t\ \pi_A\ ]\right]$$

(o ,), (o ,)。然后根据定义 3.3，$\eta(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, H^d\pi_A) \in [\eta](\mathbf{o}_{t_1,t'}, H^d\pi_A)$，这与假设矛盾。因此，$\eta(\mathbf{o}_{t_1,t_2}, H^d\pi_A) \notin [\eta](\mathbf{o}_{t_1,t'}, H^d\pi_A)$。

于是我们得到以下归纳情形：
Within： 与保持 情况类似。
合取/析取： 可靠性由区间算术 11 的性质得出。

连接： 根据布尔语义 (6)，其可靠性可直接由合取/析取情况的可靠性得出。 ■

引理 4.1：（鲁棒性区间的收敛）给定一个 TWTL 公式 ϕ 和词 o_{t_1,t_2}，其中 $t_2 \geq ||\phi||$；以及部分词 $o_{t_1,t_1'}$ 和 $o_{t_1,t_2'}$，其中 $t_1' < t_2' < t_2$，以下集合包含关系成立： $[\rho](o_{t_1,t_1'}) \subseteq [\rho](o_{t_1,t_2'})$ 和 $[\eta](o_{t_1,t_1'}) \subseteq [\eta](o_{t_1,t_2'})$。对于 $||\phi|| \leq t' \leq t_2$，鲁棒性区间收敛到一个单点，该点即为真实的鲁棒性值，也就是说， $[\rho](o_{t_1,t'}) = \{\rho(o_{t_1,t_2})\}$ 和$[\eta](o_{t_1,t'}) = \{\eta(o_{t_1,t_2})\}$。

例 4.1：（续）给定时间范围为 $||\phi|| = 10$ 的 TWTL 非规范化公式 $\phi = [H^6\pi_A]^{[0,10]}$，我们通过观察 o_1, o_2, 和 o_3 的部分词的鲁棒性区间 $[\rho]$ 和 $[\eta]$，来展示所提出的运行时监测器（见图 1 左上图）。考虑时间序列 $\tau = \{0, \ldots, 10\}$。对于每个部分词，我们在每个 $t \in \tau$ 处计算 $[\rho]$和 $[\eta]$，此时部分词 $o_1(t)$、$o_2(t)$ 和 $o_3(t)$ 逐渐可用。o_1, o_2，和 o_3 的区间$[\rho]$ 和 $[\eta]$ 的变化分别如图 1 右上、左下和右下图所示，其中 $[\rho]$ 的变化以带三角形的虚线表示，而 $[\eta]$ 的变化以带圆形的实线表示。注意，随着部分词增长，区间会逐渐收紧；最终，当 $t' = ||\phi||$时， $[\rho]$和 $[\eta]$ 分别收敛到真实的 ρ 和 η 值。在此示例中，我们考虑 $\rho_\top = 10$ 和 $\rho_\bot = -10$; 可以注意到，由于在计算 η时使用了 AGM， $[\eta]$ 的变化比 $[\rho]$的变化更加平滑。请注意，我们在计算 η 鲁棒性值之前会对 TWTL 公式进行规范化。因此，在图 1 中，η 保持在 $[-1, 1]$ 以内。

V. 数值示例案例研究

我们通过监测 ρ 和 η，展示所提出的鲁棒性语义在一个简单平面机器人系统预先计算的运行轨迹上的应用。假设这些运行轨迹的时间步长 Δt 为 1。我们考虑一个带有截止时间和安全要求的简单顺序导航任务。在以下未归一化的 TWTL 公式中，我们对该任务进行编码，其含义为：在时间0 和 8内，访问区域 A 并停留其中 3 个时间步；紧接着，在时间 0 和 10内，访问区域 B 并停留其中4 个时间步；紧接着，在时间

0和11，到访区域 C 并在那里停留3 个时间步；并且在整个执行过程中避免进入区域 O。平面区域的示意图见图 2 左图 $A, B, C,$ 和 O。

$$\phi = \left([H^4\pi_A]^{[0,8]} \cdot [H^4\pi_B]^{[0,10]} \cdot [H^3\pi_C]^{[0,11]}\right) \wedge H^{50}\neg\pi_O \tag{17}$$

原子命题 π_A， π_B， π_C 和 π_O 是定义在 $xy-$平面上的谓词区域；其中 $A := \{(x, y) | 1 \leq x \leq 4 \wedge 1 \leq y \leq 4\}$， $B := \{(x, y) | 8 \leq x \leq 11 \wedge 3 \leq y \leq\}$， $C := \{(x, y) | 1 \leq x \leq 4 \wedge 9 \leq y \leq 12\}$，以及 $O := \{(x, y) | 5 \leq x \leq 7 \wedge 5 \leq x \leq 7\}$。

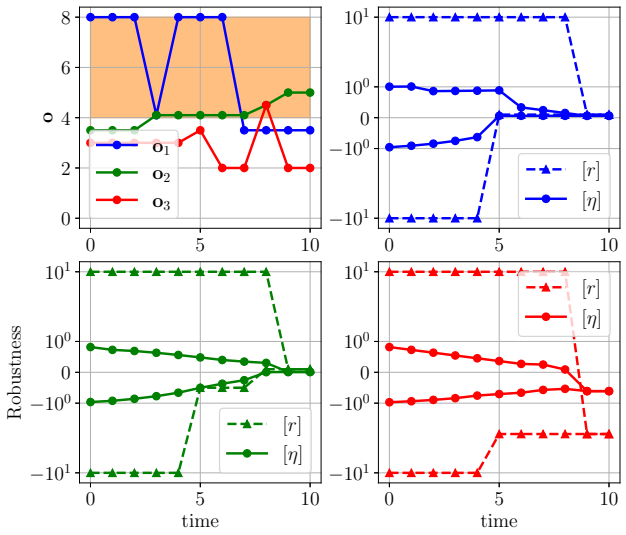


图 1. TWTL 鲁棒性与监测器示意图。（左上）词 o_1, o_2, 和 o_3 关于时间的赋值示意。词 o_1, o_2 （左下）以及 o_3 对应的 $[\rho]$ （带三角形的虚线）和 $[\eta]$ （带圆形的实线）的演变，分别显示在右上、左下和右下图中。

我们监测机器人的两次运行，o_1 和 o_2,, 它们分别显示为图 2 左图中的蓝色和绿色轨迹。o_1 和 o_2 的鲁棒性分别为 $\rho(o1, \phi)$ =0.4 和 $\rho(o2, \phi) = 0.3$，而它们的 AGM 鲁棒性分别为 $\eta(o1, \phi) = 0.00076$ 和 $\eta(o2, \phi) = 0.00015$。为在运行时监测鲁棒性度量，考虑时间序列 τ ={$2, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 42$}。对于每个部分词，当部分词 $o_1(t)$ 和 $o_2(t)$ 可用时，我们在每个 $t \in \tau$ 处计算 $[\rho]$ 和 $[\eta]$。o_1, 和 o_2 在每个 $t \in \tau$ 处的区间 $[\rho]$ 和 $[\eta]$ 的取值分别显示在图 2 的中图和右图中，其中 $[\rho]$ 以虚线和三角形表示， $[\eta]$ 以实线和圆形表示。

请注意， $[\eta]$ 的监测收敛比 $[\rho]$的收敛更加平滑，这在某些应用中会更有用。在未来的工作中，我们将考虑针对 TWTL任务的增量规划，并需要使用运行时监测器作为启发式方法，以最大限度地提高任务的满足度。我们发现，在规划应用中以最大化 η 为目标能够生成更平滑的路径；关于规划应用中监测的具体细节，将留待未来工作探讨。

VI. 结论与未来工作

鉴于时间窗口时序逻辑作为动力系统规范语言的丰富表达能力，我们引入两种定量语义来衡量 TWTL公式的鲁棒性。第一种度量称为 TWTL 鲁棒性，我们根据运行轨迹中的最关键值，引入系统运行轨迹与公式满足判定边界之间的距离度量。第二种度量称为 AGMTWTL鲁棒性，我们依据若干规则，使用系统运行轨迹值的算术平均数和几何平均数，通过另一种距离度量来量化满足度；这些规则保证了该度量的可靠性

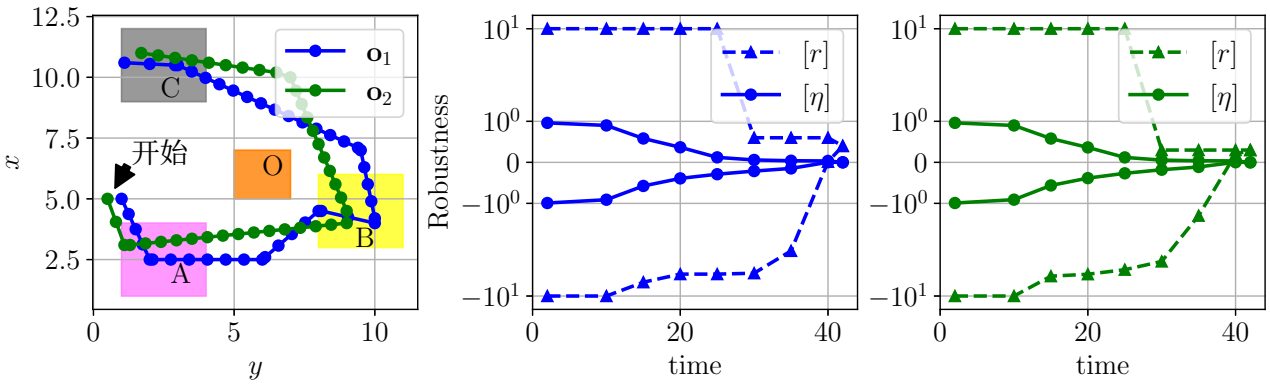


图 2. 展示对预计算的平面机器人运行轨迹的 TWTL 鲁棒性和 AGM TWTL 鲁棒性进行监测，以检验它们是否满足公式 (17)。平面环境中的词 $\mathbf{o}_1$ 和$\mathbf{o}_1$, 分别显示为左图中的蓝色和绿色轨迹。中图和右图分别展示了每个$\mathbf{o}_1$, 和$\mathbf{o}_2$ 对应的区间 $[\rho]$ 和 $[\eta]$ 的取值，其中 $[\rho]$ 以带三角形的虚线表示，而 $[\eta]$ 以带圆形的实线表示。

。在规划应用中，AGM TWTL 鲁棒性相比第一种度量具有一项关键优势：它会对有助于公式满足的值给予更高的奖励，而 TWTL 鲁棒性则由最关键的值主导。我们计划在未来的后续工作中展示这一优势。针对系统的部分运行轨迹，我们开发了运行时监测器，以给出定量语义的区间界限。我们通过监测预计算的平面机器人运行轨迹相对于若干 TWTL 规范的 TWTL 鲁棒性和 AGM TWTL 鲁棒性，展示所引入的定量语义。

参考文献

[1] C. Baier 和 J.-P. Katoen，《模型检测原理》。麻省理工学院出版社，2008年。[2] A. Pnueli，“程序的时序逻辑”，载于第*18*届计算机科学基础年度研讨会（*SFCS 1977*）。IEEE，1977年，第 46–57 页。[3] E. Plaku 和 S. Karaman，“基于时序逻辑规范的运动规划：进展与挑战”，《人工智能通讯》，第 29 卷，第 1 期，第 151–162 页，2016年。[4] H. Kress-Gazit、M. Lahijanian 和 V. Raman，“机器人综合：机器人行为的保证与反馈”，《控制、机器人与自主系统年度评论》，第 1 卷，236，2018年 211pp. – 。[5] X. Luo、Y. Kantaros 和 M. M. Zavlanos，“一种用于多机器人时序逻辑最优控制综合的无抽象方法”，《IEEE 机器人学汇刊》，第 37 卷，第 5 期，第 1487–1507 页，2021年。[6] Y. Kantaros 和 M. M. Zavlanos，“Stylus*：面向大规模多机器人系统的时序逻辑最优控制综合算法”，《国际机器人研究杂志》，第 39 卷，第 7 期，第 812–836 页，2020年。[7] C. Belta、B. Yordanov 和 E. A. Gol，《离散时间动力系统的形式化方法》。施普林格，2017年，第 15 卷。[8] X. Li、C.-I. Vasile 和 C. Belta，“基于时序逻辑奖励的强化学习”，载于*2017*年 *IEEE/RSJ* 智能机器人与系统国际会议（*IROS*）。IEEE，2017年，第 3834–3839 页。[9] D. Gundana 和 H. Kress-Gazit，“面向单机器人和多机器人任务的基于事件的信号时序逻辑综合”，《IEEE 机器人与自动化快报》，第 6 卷，第 2 期，第 3687–3694 页，2021 年。[10] S. Karaman 和 E. Frazzoli，“用于最优运动规划的基于采样的算法”，《国际机器人研究杂志》，第 30 卷，第 7 期，第 846–894 页，2011 年。 [在线]。网址：https://doi.org/ 10 1177 0278364911406761 。/ K. [11] Grover、F. dos Santos Barbosa、J. Tumova 和 J. Kretınsky，“面向未知环境中 SCLTL 任务的语义抽象引导运动规划”，载于机器人学：科学与系统，2021年。

[12] C. I. Vasile、X. Li 和 C. Belta，“基于反应式采样的路径规划与时序逻辑规范”，《国际机器人研究杂志》，第 39 卷，第 8 期，第 1002–1028 页，2020年。

[ ] 10 1177 0278364920918919 在线 [13] 获取：https://doi.org/ 。 / O. Maler 和 D. Nickovic，“连续信号时序性质的监测”，载于形式化技术、定时系统与容错系统的建模和分析：关于定时系统形式化建模与分析（*FORMATS 2004*）以及实时和容错系统形式化技术（*FTRTFT 2004*）的联合国际会议，法国格勒诺布尔，*2004*年*9*月*22–24*日，论文集。施普林格，2004年，第 152–166 页。[14] R. Koymans，“使用度量时序逻辑规范实时性质”，实时系统，第 2 卷，第 4 期，第 255–299 页，1990年。[15] C.-I. Vasile、D. Aksaray 和 C. Belta，“时间窗口时序逻辑”，理论计算机科学，第 691 卷，第 27–54 页，2017年。[16] A. Donz´e 和 O. Maler，“实值信号上的时序逻辑鲁棒满足”，载于定时系统的形式化建模与分析：第八届国际会议，*FORMATS 2010*，奥地利克洛斯特新堡，*2010*年*9*月*8–10*日，论文集 *8*。施普林格，2010年，第 92–106 页。[17] G. E. Fainekos 和 G. J. Pappas，“连续时间信号时序逻辑规范的鲁棒性”，理论计算机科学，第 410 卷，第 42 期，第 4262–4291 页，2009年。[18] D. Aksaray、A. Jones、Z. Kong、M. Schwager 和 C. Belta，“用于鲁棒满足信号时序逻辑规范的 Q 学习”，载于*2016*年 *IEEE* 第 *55* 届决策与控制会议（*CDC*）。IEEE，2016年，第 6565–6570 页。[19] S. Sadraddini 和 C. Belta，“鲁棒时序逻辑模型预测控制”，载于*2015*年第*53*届阿勒顿通信、控制与计算年会（*Allerton*），2015年，第 772–779 页。[20] C.-I. Vasile、V. Raman 和 S. Karaman，“面向时序逻辑规范的最大满足控制器采样综合”，载于*2017*年 *IEEE/RSJ* 智能机器人与系统国际会议（*IROS*），2017年，第 3840–3847 页。[21] K. Leung、N. Ar´echiga 和 M. Pavone，“穿越信号时序逻辑规范的反向传播：将逻辑结构融入基于梯度的方法”，《国际机器人研究杂志》，第 02783649221082115 页，2020年。[22] J. Karlsson、F. S. Barbosa 和 J. Tumova，“具有时序逻辑任务和空间偏好的基于采样的运动规划”，*IFAC- PapersOnLine*，第 53 卷，第 2 期，第 15 537–15 543 页，2020年。[23] A. Rodionova、L. Lindemann、M. Morari 和 G. J. Pappas，“ 面向 STL 规范的时间鲁棒控制 ”，载于 *2021* 年第 *60* 届 *IEEE* 决策与控制会议（*CDC*），2021年，第 572–579 页。[24] N. Mehdipour、C.-I. Vasile 和 C. Belta，“从信号时序逻辑规范进行控制的算术-几何平均鲁棒性”，载于*2019*年美国控制会议（*ACC*）。IEEE，2019年，第 1690–1695 页。[25] F. Penedo、C.-I. Vasile 和 C. Belta，“使用时序松弛的语言引导采样规划”，载于机器人学算法基础 *XII*。施普林格，2020年，第 128–143 页。

[26] J. V. Deshmukh、A. Donz´e、S. Ghosh、X. Jin、G. Juniwal 和 S. A. Seshia，“信号时序逻辑的鲁棒在线监测”，系统设计中的形式化方法，第 51 卷，第 1 期，第 5–30 页，2017年。[27] E. Bartocci、J. Deshmukh、A. Donz´e、G. Fainekos、O. Maler、D. Ni˘ckovi´c 和 S. Sankaranarayanan，“信息物理系统的基于规范的监测：理论、工具与应用综述”，运行时验证讲座：入门与进阶主题，第 135–175 页，2018年。[28] E. Bonnah 和 K. A. Hoque，“时间窗口时序逻辑的运行时监测”，*IEEE* 机器人与自动化快报，第 7 卷，第 3 期，第 5888–5895 页，2022年。