arXiv:2304.06656v2 [cs.DS] 3 Oct 2023

改进的 A 相对可生存网络设计的近似算法

Michael Dinitz*约翰·霍普金斯大学
mdinitz@cs.jhu.edu

Ama Koranteng†约翰·霍普金斯大学
akorant1@jhu.edu

Guy Kortsarz 罗格斯大学卡姆登分校
guyk@camden.rutgers.edu

Zeev Nutov 以色列开放大学nutov@openu.ac.il

2023年10月4日

摘要

网络设计中最重要且研究最深入的情形之一是边连通性要求。这包括诸如最小 k-边连通生成子图问题这样的统一需求，也包括诸如可生存网络设计问题（SND）这样的非统一需求。在 [Dinitz、Koranteng、Kortsarz于 APPROX '22], 发表的一篇近期论文中，作者指出，这些问题表述的一个缺陷是：对于存在小割的图，我们无法考虑其容错性，尽管这类图仍可能容纳一些较大的故障集。为解决这一问题，他们在相对容错的概念下引入了这些问题的新变体。简而言之，这种要求并非如经典情形那样，要求两个节点在故障数量有限时保持连通，而是要求两个节点在故障数量有限且故障发生后仍在底层图中连通时保持连通。

定义中看似微小的变化，使问题变得复杂得多，因此 [Dinitz, Koranteng, Kortsarz 在 APPROX '22] 上的结果相当有限。对于具有非均匀需求的相对可生存网络设计问题（RSND），他们仅在只有一个连通性要求为 3 的需求时，才能给出非平凡结果——一个非最优的 $27/4$-近似。我们从两个重要方面加强了这一结果：我们给出了 RSND 的 2-近似，其中所有要求均不超过 3；对于具有任意值 k的单一需求的 RSND，我们给出了 $2^{O(k^2)}$-近似。为实现这些结果，我们首先利用最小割的"仙人掌表示"，将问题无损归约为标准 SND。其次，我们扩展 [Dinitz, Koranteng, Kortsarz 在 APPROX '22] 中的技术，证明了一个更一般、更复杂的结构定理，并据此设计了一种递归近似算法。

*部分研究经费由美国国家科学基金会（NSF）CCF-1909111 和 CCF-2228995 项目资助。

†部分经费由美国国家科学基金会研究生研究奖学金和美国国家科学基金会 CCF-1909111 项目资助

1 引言

容错一直是近似算法研究的核心课题，尤其是在网络设计问题中，因为我们研究的图代表着可能发生故障的物理对象（通信链路、运输链路等）。在这些场景下，我们自然会要求所构建的对象具备容错能力。“容错”的确切定义因场景而异，但一种常见的表述是边容错，通常体现为边连通性。通俗地说，这类保证的形式是：“即使最多有 k 条边发生故障，我希望保持连通的那些节点仍然连通。”例如，考虑下面这个经典的容错问题。

定义 1. 在可生存网络设计问题（SND，有时也称为广义斯坦纳网络）中，给定一个边加权图 G 和需求 $\{(s_i, t_i, k_i)\}_{i\in[\ell]}$，我们的目标是找到 G 的最小权重子图 H，使得对于每个 $i \in [\ell]$，s_i 和 t_i 之间至少存在 k_i 条边不相交路径。换言之，对于每个 $i \in [\ell]$，如果失效的边少于 k_i 条，那么即使发生故障，s_i 和 t_i 在 H 中仍然连通。

可生存网络设计问题已得到广泛研究（参见 $[16, 24, 26, 31]$ 中的示例）；值得注意的是，Jain 在一篇开创性论文 [26]中为该问题提出了一个 2-近似算法。除 SND 外，边容错也在许多相关的网络设计背景下得到研究，k-边连通生成子图、容错群斯坦纳树、容错伸展子图和容错最短路径问题只是其中几个例子（示例见 $[4, 16, 19, 27]$）。这些以及其他经典容错问题，包括可生存网络设计问题，都属于绝对容错问题——如果最多k 个对象发生故障，剩余的图应能按预期运行。这不同于 [17], 中提出的更强容错概念，称为相对容错。相对容错所作的保证并非绝对的（“如果至多 k 条边发生故障，网络仍能正常运行”），而是相对于底层图或系统而言（“如果至多 k 条边发生故障，子图在故障后仍能像原图一样正常运行”）。

因此，相对容错是绝对容错的一种自然推广：如果输入图具有所需的连通性，那么相对容错和绝对容错的定义是等价的。然而，如果输入图不具备所要求的连通性，相对容错仍允许我们返回一个具有有意义且非平凡保证的解，而绝对容错则迫使我们什么也不返回。由此，相对容错克服了绝对容错的一项重大弱点。

这种相对容错定义受到近期一系列关于图拉伸器和模拟器的相对容错概念的研究启发 [5–10, 12, 18, 19]。在这些情形下，目标通常是找到存在性界并设计实现这些界的算法，而非进行优化。相比之下，在 [17], 中，他们从优化和近似算法的角度出发。借助这种网络设计中的容错概念，[17] 的作者定义了可生存网络设计问题的相对版本。

定义 2。在相对可生存网络设计问题（RSND）中，给定一个图$G = (V, E)$，其边权重为 $w : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，以及需求 $\{(s_i, t_i, k_i)\}_{i\in[\ell]}$。可行解是 G 的一个子图 H，满足对于所有 $i \in [\ell]$ 和 $F \subseteq E$，若 $|F| < k_i$，且 $G \setminus F$ 中存在一条从s_i 到 t_i 的路径，则 $H \setminus F$ 中也存在一条从 s_i 到 t_i 的路径。我们的目标是找到权重最小的可行解。

注意，如果对于每个 $i \in [\ell]$，s_i 和 t_i 在 G 中都是 k_i-连通的，那么 RSND 与 SND 完全相同。如果在 G 中存在某个 $i \in [\ell]$，使得 s_i 和 t_i 不是 k_i-连通的，那么尽管 SND 没有解，RSND 却存在有意义的解。我们注意到，我们实现的容错

实际上比给定数值“少一”（定义中采用的是严格不等式）。这与相关的相对容错文献中的处理方式存在“差一”之处（参见 [12] 中的定义），但这样能更清晰地体现与传统 SND 表述之间的联系。

近期有一些工作研究了 Adjiashvili [1–3,11,14]提出的相关网络设计模型。在该模型中，E 被划分为“安全”边和“不安全”边。非正式地说，在 Flex-SNDP 问题中，给定一个图 $G = (V, E)$，其边具有成本，并给定函数 $p, q\colon V \times V \to \mathbb{Z}^+$。我们必须返回一个最小成本子图，使得对于每个顶点对 u, v，在删除至多 $q(u, v)$ 条不安全边的任意子集后，它们仍然 $p(u, v)$-连通。与 RSND 类似，Flex-SNDP 是 SND 的一种自然推广。然而，它属于绝对容错问题，因为它不考虑输入图的底层连通性。目前尚无适用于一般 Flex-SNDP 的多项式时间近似算法，不过近期已有一些关于若干特殊情形的研究 [3, 11, 13, 14]。

结果见 [17]。尽管相对容错是容错的一种自然且有前景的推广，但 [17] 给出的 RSND 问题结果相当有限。除针对所有需求均相同这一特殊情形的 2-近似算法外，[17] 只能为一些最简单的 RSND 特殊情形提供算法。首先，他们为所有需求均为 $\{0, 1, 2\}$ 的 RSND 特殊情形（也称为 2-RSND 问题）给出了一个极其简单的 2-近似算法。该算法源于这样一个观察：只有当存在一个大小为 1 的割将顶点需求对分隔开时，相对需求为 2 与绝对需求为 2 才有所不同。大小为 1 的割很容易处理，因此可以简单直接地归约到 SND。

大小为二或更大的割明显更难分析，因此 2-RSND 算法无法扩展到更大的需求。由于割结构更加复杂，[17]只能在仅存在单个需求且其值为 3 时处理值为 3 的需求（并分析它们之间大小为二的割），这也称为 SD-3-RSND 问题。尽管这是 RSND 的一个极其受限的特殊情形，[17] 给出的算法和分析仍然相当复杂，依赖于一种精细的图分解，其中涉及“重要分隔集”（这是固定参数可处理性 [29]中的一个概念）。此外，该算法对该问题仅达到了 $27/4$-近似，远未达到人们可能期望的 2-近似（甚至精确算法）。

[17] 取得的有限成果表明，尽管相对容错是一个颇具吸引力的概念，但将其应用于可生存网络设计问题会显著改变问题的结构，使得分析问题并为其开发算法变得困难。例如，虽然 [17] 对 SD-3-RSND 只能给出 $27/4$- 近似，但对应的 SND 问题却存在一个精确的多项式时间算法（通过简单归约到最小费用流问题即可得到）。因此，人们可能会担心，相对容错的定义是否本身就过于困难，而 [17]取得的成果之所以有限，恰恰是因为即使在稍微更一般的情形下也无计可施。

1.1 我们的结果与技术

在本文中，我们通过为 [17] 中所研究情形的推广提供改进的界，来缓解这一担忧。具体而言，我们研究 SD-3-RSND 问题的两个自然推广（ [17] 为该问题提供了一个 $27/4$-近似）。首先，不再局限于只有一个值至多为 3 的需求，我们能否处理任意数量的至多为 3 的需求？其次，在单需求情形下，不再仅处理至多为 3 的需求，我们能否将其推广到任意值?

1.1.1 3-RSND

我们首先研究所有需求均至多为 3、但此类需求数量可以任意的问题。我们将其称为 3-RSND 问题。注意，如前所述，对于这一情形此前没有任何结果；最相关的结果是，当只有一个此类需求 [17] 时，可达到一个 27/4-近似。我们证明如下定理。

定理 1.1。 *3-RSND* 问题存在一种多项式时间*2*-近似算法。

为证明该定理，我们采用了与 [17] 中完全不同的技术。最值得注意的是，我们使用了输入图的全局最小割（在本例中为 2-割）的仙人掌表示 。全局最小割的仙人掌表示已得到深入研究，并已应用于许多场景（示例见 [20,21,25,28,30]）。虽然对于更一般的连通性值也可以定义并构造仙人掌表示，但在我们的情形中，可以通过收缩具有特定连通性性质的连通分量来构造它。由此得到所谓的仙人掌图，从较高层面看，它是一个“环构成的树”：构造中的任意两个环至多共享一个分量。这个仙人掌图的结构足够简单，因此我们可以将原问题归约为每个收缩分量中的一个更简单问题。也就是说，我们能够证明仙人掌中的某些部分实际上是“必选的”，而另一些部分则无关紧要，因此剩下的唯一问题就是如何处理每个仙人掌顶点（即每个分量）“内部”的情况。这种归约使每个分量内部的连通性需求变得更加复杂，但幸运的是，我们可以保证该分量内部特殊顶点之间具有 3-连通性。因此，我们可以使用 Jain的2-近似算法来求解 SND [26]，而无需考虑需求的相对性质。

1.1.2 SD-k-RSND

我们的第二项改进与前者相互独立：我们不再允许有更多个至多为 3 的需求，而是仍然只考虑单个需求，但允许它是一般常数 k，而不是 3。我们称之为 SD-k-RSND 问题。与前文讨论的 3-RSND 问题一样，目前尚无关于该问题的已知结果。我们证明以下定理：

定理 1.2。 存在一个针对 *SD-k-RSND* 问题的多项式时间 $2^{O(k^2)}$-近似算法。

为证明这一点，我们扩展了 [17] 用于 $k=3$ 情形的技术。他们构造了一条由 2-分隔集组成的“链”（即大小为 2 且同时是重要分隔集的割），使得链中每个分量的入边界分隔集与出边界分隔集之间都不存在 2-割。随后，他们利用这一结构刻画任意可行解限制在该分量内时的连通性要求。为扩展这一技术，我们使用大小至多为 $k-1$ 的重要分隔集，谨慎地构造一个链的层次结构 。该层次结构包含 $k-1$ 层嵌套分量，因此对于层次结构第 i 层中的每个分量，其入边界分隔集与出边界分隔集之间都不存在大小至多为 i 的割。构造这种层次结构有多种方法，但我们证明，其中一种特定构造能使层次结构具备若干有用但微妙的性质，这些性质既适用于同一层内，也适用于不同层之间。借助这些性质，我们可以刻画任意可行解限制在层次结构中某个分量内时复杂的连通性要求。得到这一结构定理后，我们通过递归算法近似求出层次结构中每个分量的最优解。

1.1.3 k-边故障容忍子图的简化

k 边故障容忍子图问题（k-EFTS）是 RSND 的特殊情形，其中所有需求都相同：任意两个节点之间的需求恰好为 k。 k-EFTS 的一个 2-近似

最近， [17] 通过一个略显复杂的证明给出了 EFTS 的 2-近似；具体而言，他们定义了一种称为局部弱超模性的新性质，并利用它证明，在相对情形下，Jain 的迭代舍入仍能达到相同的界。在附录 D 中，我们对该证明进行了简化。事实证明，实际上并不需要局部弱超模性，采用更经典的$\mathcal{F}$-超模性概念就足够了。这样一来，我们便能以更黑箱的方式归约到先前的工作。

2 预备知识

我们将考虑 RSND 的以下特殊情形（定义 2）：

- k-Relative Survivable Network Design 问题（k-RSND）是 RSND 的特殊情形，其中 $r(s,\ t) \leq k$ 对所有 $s,\ t \in V$ 均成立。本文考虑情形 $k = 3$，即 3-RSND 问题。

- Single Demand k-Relative Survivable Network Design 问题（SD-k-RSND）是 RSND 的特殊情形，其中 $r(s,\ t) = k$ 仅对一个顶点对 $s,\ t \in V$ 成立，且其他任何顶点对均无需求（等价地，其他所有需求均为 0）。对于任意 k，我们考虑完整的 SD-k-RSND 问题。

- k-Edge-Fault-Tolerant-Subgraph问题（k-EFTS）是 RSND 的特殊情形，其中 $r(s,\ t) = k$ 对所有 $s,\ t \in V$ 均成立。

对于所列出的每一种 RSND 问题变体，我们都将使用以下记号和定义。设 $G = (V, E)$ 为一个（多重）图，且 H 是 G 的一个生成子图（或边子集）。对于 $A \subseteq V$，令 $\delta_H(A)$ 表示 H 中恰有一个端点位于 A 内的边集，并令$d_H(A) = |\delta_H(A)|$ 表示其边数。此外，令 $G[A]$ 表示由顶点集 A 在 G 中诱导的子图。令 $s, t \in V$。我们称 A 为一个 st-集，当且仅当 $s \in A$ 且 $t \notin A$；称 $\delta_G(A)$（或$\delta_E(A)$）为 G 的一个 st-割（由 A 诱导）。若一个 st-割 $\delta_G(A)$（或一个 st-集 A）是 G-极小的，则 $\delta_G(A)$ 不包含 G 的其他 st-割。假设 G 连通，不难看出， $\delta_G(A)$ 是 G-极小的，当且仅当 $G[A]$ 和 $G[V \setminus A]$ 都连通。还可以看出，若一个 st-割 $X \subseteq E$ 是G-极小的，则对于某个 $A \subseteq V$，有 $X = \delta_G(A)$。最后，令 $\lambda_G(s, t)$ 表示 G 中最小 st-割的大小。

根据 [17], 定理 17，我们不妨假设任意 RSND 实例的输入图 G 都是 2-边连通的（我们称之为“2-连通”）。

3 3-RSND（及 SD-3-RSND）的 2-近似

给定一个 RSND 实例，如果顶点对 $s,\ t$ 的 k**需求为** $r(s,\ t) = k$，我们就称其为k-需求。如果最小 st-割的大小小于 k，即 $\lambda_G(s,\ t) < k$，则称该k-需求为**相对**需求。若 $\lambda_G(s,\ t) \geq k$，则称 k-需求为**普通**需求。回顾一下， SD-3-RSND 只有一个需求 st，且它是 3-需求。任何大小为 2 st的割或 2-st-割中的边都必须属于任意一个可行解，因此我们称这些边为**强制边**。因此，不妨假设这些边的成本为 0。

3.1 概述

我们首先概述本节中的定理和证明。为了证明定理 1.1，我们将证明可以用一组等价的相对 3-需求，替换单个普通3-需求。更确切地说，我们将证明如下结论。

定理 3.1。 给定一个 SD-3-RSND 实例，存在一个可在多项式时间内计算的普通3-需求集合 D，使得对于任何 $H \subseteq E$，若其包含所有强制边，则 H 是一个可行的SD-3-RSND 解，当且仅当 H 满足 D中的所有需求。

该定理将 SD-3-RSND 归约为普通 3-SND 问题（即 SND 的一个特殊情形，其中所有需求至多为 3）。事实上，这也为我们提供了一个从3-RSND 到 3-SND的无损归约：给定一个 3-RSND 实例，我们将所有 3-需求的强制边纳入解中，把每个相对 3-需求替换为一组等价的普通需求，从而得到一个等价的普通 3-SND 实例。由于 SND 的近似比为 2，这个从 3-RSND 到 3-SND 的归约意味着定理 1.1。

我们还将证明， SD-3-RSND 与某些特殊情形的 3-SND 的实例在近似意义下等价。在定义这一特殊情形之前，我们必须先给出一个定义。如果对于所有顶点对 $u, v \in R$， $\lambda_H(u, v) \geq k$，则顶点子集 R 是图 H 中的 k-**边连通子集** 。由于关系 $\{(u, v) \in V \times V$：没有 $(k-1)$-割分离 u, $v\}$ 具有传递性，因此这等价于要求，对于构成 R 上一棵树的顶点对 u, v， $\lambda_H(u, v) \geq k$。我们将证明， SD-3-RSND与以下问题的特殊实例在近似意义下等价：

4-Subset 3-EC输入： 一个图 $J = (V', E')$，其边具有成本，并且有一个包含至多 4 个终端的集合 $R \subseteq V'$。输出： 一个 J的最小成本子图 H，使得 R 在 H中是 3-边连通的。

更具体地说，我们将证明以下结论。

定理 3.2。 设 s 和 t 是 $J = (V', E')$中的顶点，其中 J 是一个 4-Subset 3-EC实例的输入图。 SD-3-RSND 存在近似比 ρ，当且仅当具有以下性质的 4-Subset 3-EC (A,B) 存在近似比 ρ:

(A) $d_J(s) = d_J(t) = 2$，且 R是 s, t 的邻居集合。

(B) 若对于某个 st-集合 A，有 $d_J(A) = 2$，则 $A = \{s\}$ 或 $A = V' \setminus \{t\}$成立。也就是说，若 F 是 J的一个包含2 条边的集合，且 $J \setminus F$不存在 st-路径，则 $F = \delta_J(s)$ 或 $F = \delta_J(t)$成立。

一般的 4-Subset 3-EC 问题的近似比为 2，因为它是 SND 的一个特例。然而，目前尚不清楚 4-Subset 3-EC 是否属于 P 或者是 NP难。据我们所知，即使是 3-Subset 2-EC ，其复杂性状态也尚无定论。 4-Subset 3-EC 和 3-Subset 2-EC 问题都与 SND 的一个特例有关，即需求总和有常数上界的情形。这个特例已有研究；例如， [15] 和 [22] 都研究了这一问题及相关问题。尽管如此， 4-Subset 3-EC 问题目前已知的最佳近似算法只能达到 2-近似。因此，我们针对 3-RSND 给出的 2-近似已是所能期望的最佳结果。本节余下部分将证明定理 3.2、3.1 和 1.1。所有省略的证明均见附录 A。

3.2 仙人掌表示与定义

我们首先给出一些定义，并描述仙人掌表示。关系 $\{(u, v) \in V \times V$：不存在能分离 $u, v\}$ 的 $(k-1)$-割，是一种等价关系，我们将其等价类称为 k-**类**。我们通过收缩输入图 G 的每个非平凡 3-类（即至少包含 2 个节点的 3-类），构造一张**仙人掌图** $\mathcal{G}$。注意，由于 G 是 2-连通的， $\mathcal{G}$ 是一张连通图，其中任意两个环至多有一个公共节点；示例见图 1(a)。下文中，我们将每个 3-类视为 $\mathcal{G}$ 中相应的节点。属于 $\mathcal{G}$ 同一环的边对，就是 G 的 2-割。

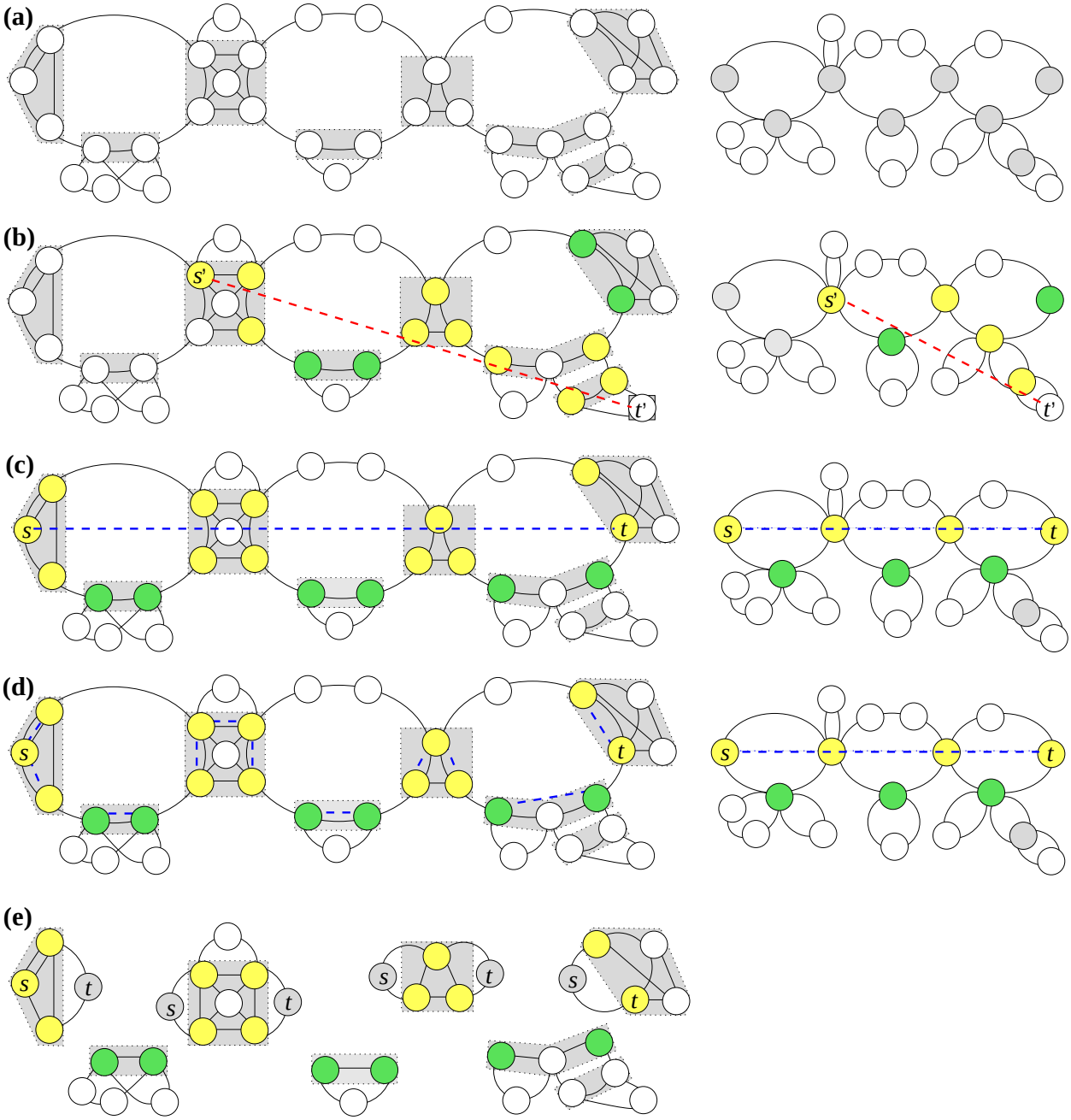


图1：（a）3-类（以灰色区域表示）以及 $\mathcal{G}$ G的仙人掌图；（b）3-需求 $s't'$ （红色虚线）以及与 $s't'$相关的3-类的附着节点，其中中心类的附着节点为黄色，非中心类的附着节点为绿色；（c）3-需求 st （蓝色虚线）以及与 st相关的3-类的附着节点；（d）一组等价于相对3-需求 st的普通3-需求。（e）关于3-需求 st的连通分量。

我们假设顶点对 st 是相对 3-需求（否则我们得到一个 SD-3-SND 实例，该实例可以在多项式时间内精确求解）。我们称 $\mathcal{G}$ 的 st-**环链** 由 $\mathcal{G}$ 中包含 2-st-割的所有环（及其节点）组成。我们称这些环上的节点或 3-类为 st-**相关**。注意，$\mathcal{G}$ 中属于 st-环链的边集就是强制边。我们还称一个 st-相关的 3-类为**中心的**，如果它包含 s 或 t，或者属于 st-环链中的两个环。此外，一个 st-相关 3-类的**附着节点** 是该 3-类中满足以下条件之一的节点：它们是 s 或 t，或者是属于 st-环链中某个环的边（即**附着边**）的端点。由于 G 是 2-连通的，非中心的 3-类中的附着节点数恰好为 2，而中心的 3-类中的附着节点数介于 2 和 4 之间；见图 1(b、c)。

3.3 定理 3.2、3.1 和 1.1 的证明

对于定理 3.2 和 3.1 的证明，我们为每个与 st 相关的 3-类 C 关联一个特定的图 G_C，称为 C 的**分量**，构造方法如下（见图 1(e)）：

- 如果 C 是非中心的 3-类，那么，在从 G 中移除 C 的两条附着边后，包含 C 的连通分量就是所求分量。
- 如果 C 是中心的 3-类，那么移除 C 的附着边后，至少会得到一个、至多会得到两个不包含 C 的连通分量——其中一个包含 s，另一个（若存在）包含 t。我们通过将包含 s 的连通分量收缩为节点 s，并将包含 t 的连通分量收缩为节点 t，从 G 得到 G_C。

现在，我们对中心分量 G_C 进行修改，使其满足定理 3.2 中的性质 (A,B)。考虑某个中心的 3-类 C 及其分量 $J = G_C$。如果 J 不包含原始节点 s 或 t，那么它已具备性质 (A,B)，无需修改。如果 J 包含原始节点 s，那么我们将 s 重命名为 s'，添加一个新节点 s，并用两条零成本边将新的 s 连接到 s'。这样得到的 J 现在具备性质 (A,B)。如果 J 包含原始节点 t，也可以进行类似的变换。

下面的引理同时涉及非中心分量和这些经过修改的中心分量；在该引理中，我们证明，对于 H 要成为可行的 SD-3-RSND 解，必须且只需在每个分量内满足某些连通性性质。注意，若对于任意满足 $|F| \leq 2$的 $F \subseteq E$，以下条件均成立，则子图 H 是 SD-3-RSND 的可行解：如果 $G \setminus F$ 中存在一条 st-路径，那么 $H \setminus F$中也存在一条 st-路径。

引理 3.3。设 H 是 G的一个子图，并假设 H 包含所有强制边。当且仅当对每个分量 J，以下条件均成立时，子图H 才是可行的 SD-3-RSND 解（见图 *1(e)*）。

(i) 如果 J 是一个非中心分量，那么 $H[J]$ 包含两条边不相交的 uv-路径，其中 u 和v 是 J 的两个附着节点。(ii) 如果 J 是一个中心分量，那么 $H[J]$ 是J 中的 SD-3-RSND 实例的一个可行解（需求为 $r(s,\ t)\ = 3$）。

假设对于中心分量中出现的特殊 SD-3-RSND 实例，我们可以实现近似比 α。那么，通过将三类边集 H 纳入我们的解中，我们可以为一般的 SD-3-RSND 实现近似比 α。

1. 强制边。

2. 每个 st 相关的非中心分量的附着节点之间的一组最小成本的 2 条边不相交路径。

3. 每个 st-相关中心分量中的 α-近似解。

请注意，步骤 1、2 中选取的边不会给近似比带来任何成本，因为根据引理 3.3，我们实际上选取的是最优解的一部分。因此，我们得到 SD-3-RSND 的可近似性等价于中心分量中出现的那些特殊实例的可近似性。接下来我们将证明，这些来自中心分量的特殊实例实际上是具有定理 3.2 中性质 (A,B) 的 4-Subset 3-EC 实例，从而证明定理 3.2。我们只考虑具有 4 个附着节点的中心分量；具有 3 个或 2 个附着节点的其他情况类似。

在下文中，设 $\mathcal{I}$ 是一个具有性质 (A,B) 的 SD-3-RSND 实例，其输入图为 J（与我们的中心分量中的情形相同）。设 $R = \{x, y, z, w\}$，其中 x，y 是 s 的邻居，且 z，w 是 t 的邻居；再设 H 是 J 的一个子图，其中包含四条强制边 sx，sy，zt 和 wt。现在我们证明，H 是 $\mathcal{I}$ 的可行解，当且仅当 R 在 H 中是 3-连通的。引理 3.4 给出了“仅当”方向，而引理 3.5 给出了“如果”方向。

引理 3.4。 如果子图 H 是实例 $\mathcal{I}$ 的可行解，那么 $R = \{x, y, z, w\}$ 是 H 中的一个 *3*-边连通子集。

引理 3.5。 如果 $R = \{x, y, z, w\}$ 是子图 H 中的一个 *3*-边连通子集，那么 H 是实例 $\mathcal{I}$ 的可行解。

根据引理 3.4 和 3.5，H 是 $\mathcal{I}$ 的可行解，当且仅当 H 包含所有强制边，且 R 是一个 3-边连通子集——也就是说，R 在 H中构成 4-Subset 3-EC的可行解。结合引理 3.3，这意味着 SD-3-RSND 的近似性等价于具有性质 (A,B) 的 4-Subset 3-EC 的近似性，从而完成定理 3.2 的证明。

定理 3.1 的证明 我们将证明，单个相对 3-需求 st 可以在多项式时间内替换为一个等价的普通 3-需求森林，其中的树覆盖 st相关 3-类的附着节点集合；见图 1(d)。回顾一下，根据引理 3.3 以及引理 3.4、3.5，对于每个 st相关 3-类 C，子图 H 是针对 3-需求 st 的可行 SD-3-RSND 解，当且仅当满足以下条件：

(i) 如果 C 是中心的，那么 C 的附着节点集合 R_C 是 H中的 3-连通子集。

(ii) 如果 C 是非中心的，那么 $H[C]$ 包含 2 条边不相交的 uv-路径，其中 u 和 v 是 C的附着节点。

第一个条件等价于满足 R_C 上的一个 3-需求团。[1] 对于第二个条件，考虑一个带有附着节点 u、v 的非中心 st-相关 3-类 C。可以看出，如果 H 包含所有强制边并满足 (i,ii)，那么 H 中边不相交的 uv-路径数量恰好比它们在 $H[C]$ 中的数量多 1——新增的那条路径（存在于 H 中但不存在于 $H[C]$ 中）沿着包含 C 的仙人掌图中的环延伸，而且这样的路径恰好只有一条。因此，需求 $r(u, v) = 3$ 等价于要求在 R_C 中存在从 u 到 v 的两条边不相交路径（此外还要包含所有强制边）。

[1]回顾一下，由于关系 $\{(u, v) \in V \times V$：没有 2-割分离 u，$v\}$ 是传递的，因此这等价于在 R_C上具有一棵 3-需求树。

因此，我们可以通过将单个相对 3-需求 st 替换为一组 3-需求 D，得到一个等价的 3-SND 实例；这组需求在每个 st-相关 3-类 C 的附着节点集合 R_C 上构成一个团（或者等价地说，一棵树）。这些新需求可以在多项式时间内计算出来，并且它们都是普通 3-需求，因为每个 R_C 都是 G 中的一个 3-边连通子集。定理 3.1 的证明至此完成。

定理 1.1 的证明 最后，我们在下述定理中给出一个针对 3-RSND 的 2-近似。我们将 3-RSND 实例中的每个需求都视为一个独立的 SD-3-RSND 实例，分别求解每个 SD-3-RSND 实例，并将每个解中的边加入输出。

4 SD-k-RSND

我们针对任意常数 k，给出一种递归的 $2^{O(k^2)}$-近似算法，用于求解 SD-k-RSND（定理 1.2）。该算法是对 [17] 中 SD-3-RSND 算法的推广。从整体上看，其主要思路是利用重要分隔集的层次结构对输入图进行划分，证明一个刻画层次结构中各分量所需连通性保证的结构定理，然后通过多种子程序实现这些保证：一个加权st 最短路径算法、递归的 SD-k-RSND 近似算法，以及一个最小费用流算法。

4.1 分层链分解

本节定义重要分隔集，并介绍如何利用它们构造 k-链的分层分解 G。

定义 3. 设 X 和 Y 是图 G的顶点集。G 的一个(X，Y)-分隔集 是边集 S，使得在 $G \setminus S$中，任意顶点 $x \in X$ 与任意顶点 $y \in Y$之间都不存在路径。若一个(X，Y)-分隔集 S的任何真子集 $S' \subset S$都不是(X，Y)-分隔集，则称该分隔集为极小。如果 $X = \{x\}$ 和$Y = \{y\}$，则称 S 是一个(x，y)-分隔集。

在 [17], 中，作者给出了以下定义。

定义 4（ [17]的定义 20）。 设 S 是图 G的一个(X，Y)-分隔集，并设 R 为在 $G \setminus S$中从 X 可达的顶点。若 S 是极小的，且不存在(X，Y)-分隔集 S' 满足 $|S'| \leq |S|$ 和 $R' \subset R$，则称 S 为一个重要的(X，Y)-分隔集；其中 R' 是在 $G \setminus S'$中从 X 可达的顶点集。

在 [17], 第 4.1 节中，作者介绍了如何构造图 G^2 的“$s-t$ 2-链”。这里，我们以类似的方式定义 G 的 (X，Y) h-链，其中 X 和 Y 是顶点集，$h > 0$ 是整数。我们将使用大小为 h 的重要分隔集来划分该图，而不是使用大小为 2 的重要分隔集。示例见图 2。

首先，如果 G 中不存在大小为 h 的重要（X,Y）-分隔集，那么 G 的（X,Y） h-链就是 G，问题也就解决了（该链只有一个分量，即 G，且没有分隔集）。如果存在这样的重要分隔集，我们首先在 G 中找到一个大小为 h 的重要（X,Y）-分隔集 S_0^h，并令 R_0^h 为从 $G \setminus S_0^h$ 中任意顶点 $x \in X$ 可达的顶点集合。令 $V^h{}_{(0,r)}$ 为 R_0^h 中与 S_0^h 相邻的顶点，并令 $V^h{}_{(1,\ell)}$ 为 $V \setminus R_0^h$ 中与 S_0^h 相邻的节点。然后我们继续

[2]请注意，本节给出的所有基于分隔符的链定义均与第 3 节中的基于仙人掌图的链定义无关。

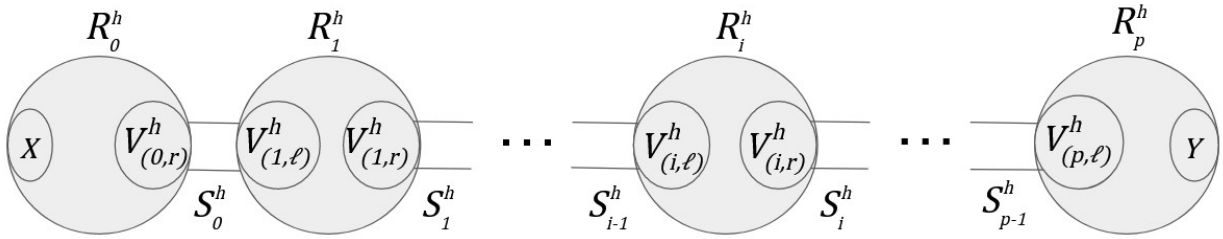


图 2：图 G 的一个 h-链，其中 $h = 2$。

递归进行。给定 $V^h(i,\ell)$，如果 $G \setminus (\cup_{j=0}^{i-1} R_j^h)$ 中不存在大小为 h 的重要（$V^h(i,\ell)\, Y$）-分隔集，那么链就结束。否则，令 S_i^h 为这样的分隔集，令 R_i^h 为在（$G \setminus (\cup_{j=0}^{i-1} R_j^h)$）$\setminus S_i^h$ 中从 $V^h(i,\ell)$ 可达的节点，令 $V^h(i,r)$ 为 R_i^h 中与 S_i^h 相邻的节点，并令 $V^h(i+1,\ell)$ 为 $V \setminus (\cup_{j=0}^{i} R_j^h)$ 中与 S_i^h 相邻的节点。该过程完成后，我们得到（X, Y） h-链，它由分量 R_0^h、.....、R_p^h 以及这些分量之间的重要分隔集 S_0^h、.....、S_{p-1}^h 组成。见图 2。

接下来注意到，根据 [17], 的引理 17，只要 h 是常数，就能在多项式时间内找到一个大小为 h 的重要 (X, Y)-分隔集。

引理 4.1 （ [17] 的引理 17）。设 $d \geq 0$。如果存在大小为 d 的重要 (X, Y)-分隔集，则可在时间 $4^d \cdot n^{O(1)}$ 内找到，其中 $n = |V|$。

构造分层 k-链分解。现在我们描述如何构造 G 的分层 k-链分解。我们首先创建 G 的 (s,t) 2-链。我们称 (s,t) 2-链的每个分量为分层链分解中的一个*2-连通分量*，并称 G 为该分解的*1-连通分量*。我们还称 G 为每个 2-连通分量的父连通分量。

接下来我们通过归纳继续。令 R_i^h 为层次化 k-链分解中的一个 h-分量。若 $h = k-1$，则分解完成。否则，构造 R_i^h 的 $(V^h(i,\ell)V^h(i,r))$ $(h+1)$-链。$(h+1)$-链由 $(h+1)$-分量组成。分量 R_i^h 是这些 $(h+1)$-分量的父分量（而这些 $(h+1)$-分量是 R_i^h 的子连通分量）。注意，顶点集 $V^h(i,\ell)$ 也位于 R_i^h 中第一个 $(h+1)$-分量内，而 $V^h(i,r)$ 位于 R_i^h 中最后一个 $(h+1)$-分量内。此过程完成后，我们便得到 G 的层次化 k-链分解。

所有 h-分量的集合可以按如下方式排序：包含 s 的 h-分量是第一个分量，而包含 t 的 h-分量是最后一个分量。所有其他 h-分量分别通过一个左侧重要分隔集和一个右侧重要分隔集，与左侧邻接连通分量 h 和右侧邻接连通分量 h 相邻。注意，在这一层次化分解中，h-分量 R_i^h 不存在大小为 h 或更小的 $(V^h(i,\ell)V^h(i,r))$-分隔集。

4.2 结构定理

预备知识。我们称子图 H 满足输入图G 上的 RSND 需求（X，Y，d），若满足以下条件：如果在 $G \setminus F$中存在一条路径，其一端顶点属于 X，另一端顶点属于Y，且其中 F是一个至多包含 $d-1$ 条边的集合，那么在 $H \setminus F$中也存在一条路径，其一端顶点属于 X，另一端顶点属于 Y。下文中，如果 $V^h(i,\ell) = \{s\}$，则我们将 S_{i-1}^h 视为空集。同样，如果 $V_{(i,r)}^h = \{t\}$，则 S_i^h为空集。

固定一个 h-分量 R_i^h，并令 X 为满足 $X \subseteq V_{(i,\ell)}^h$的顶点集。我们称 S_X 为 S_{i-1}^h 中与 X中的顶点关联的边集。同样，若 Y为满足 $Y \subseteq V_{(i,r)}^h$的顶点集，则称 S_Y 为 S_i^h中与 Y中的顶点关联的边集。我们还用 S 表示分层链分解中某个重要分隔集所包含的所有边。令 H 为 G的子图。我们还称 $G_i^h = G[R_i^h]$ 为 G 中由顶点集R_i^h诱导的子图，并称 $H_i^h = H[R_i^h]$ 为 H 中由 R_i^h诱导的子图。

现在，我们可以利用分层链构造给出一个刻画可行解的结构引理。该引理指出，当且仅当在 G 的分层 k-链分解中， S 中的所有边都属于 H，并且对于分解中的每个分量 R_i^h， $V_{(i,\ell)}^h$ 中的顶点组与 $V_{(i,r)}^h$ 中的顶点组之间在 H_i^h中满足特定的连通性要求时， H 的子图 G 才是 SD-k-RSND 的可行解。

定理 4.2（结构定理）。 当且仅当 S 中的所有边都包含在 H中，并且对于输入图 G的分层 k-链分解中的每个 h-分量R_i^h ，子图H_i^h满足以下条件时，子图 H 才是 *SD-k-RSND* 的可行解：

1. H_i^h是带有需求的子图 G_i^h 上的 *RSND* 可行解

$$\Big\{(X, Y, d) \ : \ X \subseteq V_{(i,\ell)}^h,\ Y \subseteq V_{(i,r)}^h,\ (X, Y) \neq \big(V_{(i,\ell)}^h, V_{(i,r)}^h\big),\\ d = \max(0, k + |S_X| + |S_Y| - |S_{i-1}^h| - |S_i^h|)\Big\}.$$

2. H_i^h是带有需求的子图 G_i^h 上的 *RSND* 可行解

$$\left(V_{(i,\ell)}^h, V_{(i,r)}^h, h+1\right).$$

3. H_i^h是带有需求的子图 G_i^h 上的 *RSND* 可行解

$$\left(V_{(i,\ell)}^h, V_{(i,r)}^h, k-1\right).$$

这个结构定理的证明冗长而复杂，详见附录 B。这里我们对证明作一个高度概括。为证明“仅当”方向，我们首先假设给定了某个可行解 H。然后，对于定理 4.2 中的每一条性质，我们都假设其不成立，并通过找到一个故障集 $F \subseteq E$ with $|F| < k$ 来导出矛盾：在 $G \setminus F$ 中存在一条从 s 到 t 的路径，但在 $H \setminus F$ 中不存在。构造这样的 F 的具体方式取决于我们正在分析定理 4.2 中的哪条性质。

为证明“若”方向，我们假设 H 满足定理 4.2 的条件，并考虑一个故障集 $F \subseteq E$，其中 $|F| < k$，且 s 和 t 在 $G \setminus F$ 中连通。我们希望证明 s 和 t 在 $H \setminus F$ 中连通。我们分析分层链分解中的一个特殊“故障子链”，它具有若干特定性质，包括包含 F 中的所有边。我们证明，该子链末端至少有一个顶点 v 在 $H \setminus F$ 中可从 s 到达（我们还证明 t 在 $H \setminus F$ 中可从 v 到达，以完成证明）。具体而言，我们分两种情况讨论。在情况 1 中， F 中的所有故障边都位于分层链分解中的同一个（$k-1$）层级分量内；这种情况下，该分量就是故障子链。在情况 2 中，存在某个层级 h，使得 F 未完全包含在单个 h 层级分量中；但在层级 $h-1$， F 完全包含在单个（$h-1$）层级分量 C 中。这种情况下，故障子链是 C 中所有 h 层级分量的集合。

对于情况 1，我们证明，由于层次结构中的所有分量都满足定理 4.2 的性质 2，因此 $H \setminus F$ 中必定存在一条 st 路径。情况 2 中，F 相对于层次结构的结构更为复杂。因此，我们必须证明故障子链中各分量的若干关键特征。结合这些特征以及定理 4.2 的性质 1 和性质 3，我们通过一项技术性很强的归纳证明，证明故障子链末端至少有一个顶点可从 s 在 $H \setminus F$ 中到达，因此 t 也可从 s 在 $H \setminus F$ 中到达。

4.3 算法与分析

4.3.1 算法

现在，我们可以利用定理 4.2（结构定理），为 SD-k-RSND 给出一个 $2^{O(k^2)}$-近似算法。给定一个图 $G=(V,E)$，其边权重为 $w\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，且只有一个需求 $\{(s,t,k)\}$，我们首先按照第 4.1 节所述，在多项式时间内构造其层次化 k-链分解。我们在每个分量中运行一组算法，以满足定理 4.2 中所述的 RSND 需求。我们的解 H 包括这些算法各自的输出，以及 S，即层次化 k-链分解中所有分隔集内的边的集合。下面我们将介绍在层次化 k-链分解的每个分量上运行的算法。固定分解中的一个分量R_i^h，并令 $X \subseteq V^h{}_{(i,\ell)}$、$Y \subseteq V^h{}_{(i,r)}$ 和 $d=\max(0, k+|S_X|+|S_Y|-|S_{i-1}|-|S_i|)$:

- **基本情形（最短 st 路径）**。对于每个满足 $d=1$ 的 X，Y 对，将 X 中的顶点收缩，并将 Y 中的顶点收缩，分别创建超级节点 x 和 y。我们首先在多项式时间内检查 x 和 y 在 $G_i^h = G[R_i^h]$ 中是否连通。如果连通，则在 G_i^h 上创建一个加权最短路径问题实例（用时为多项式时间），并将 x 和 y 作为源节点和目标节点。对于每条边 $e \in E$（R_i^h），将 e 的权重设为 w（e）。在此实例上运行多项式时间加权最短路径算法（例如 Dijkstra 算法），并将该算法输出中的所有边加入 H。

- **递归步骤**。对于每个满足 $1 < d < k$ 的 X，Y 对，我们在 G_i^h 上创建一个 SD-d-RSND 实例。将 X 中的顶点收缩，并将 Y 中的顶点收缩，分别创建超级节点 x 和 y。对于每条边 $e \in E$（R_i^h），将 e 的成本设为 w（e）。RSND 需求集合就是 {（x，y，d）}。在此实例上运行递归的多项式时间 SD-d-RSND 算法，其中 $d < k$。将该算法输出中的所有边加入 H。

- **最终递归步骤**。现在，我们在 G_i^h 上创建一个 SD-($k-1$)-RSND 实例。将 $V^h{}_{(i,\ell)}$ 中的顶点收缩，并将 $V^h{}_{(i,r)}$ 中的顶点收缩，分别创建超级节点 v_ℓ 和 v_r。对于每条边 $e \in E(R_i^h)$，将 e 的成本设为 $w(e)$。RSND 需求集合仅为 $\{(v_\ell, v_r, k-1)\}$。在此实例上运行递归 SD-($k-1$)-RSND 算法。将算法输出中的所有边添加到 H。

- **最小费用流**。最后，我们在 G_i^h 上构造一个最小费用流问题的实例。将 $V^h{}_{(i,\ell)}$ 中的顶点收缩，并将 $V^h{}_{(i,r)}$ 中的顶点收缩，分别生成超级节点 v_ℓ 和v_r。令 v_ℓ 为源节点，v_r 为汇节点。对于每条边 $e \in E(R_i^h)$，将 e 的容量设为 1，并将 e 的成本设为 $w(e)$。要求最小流量为 $h+1$，并在该实例上运行多项式时间最小费用流算法。由于所有容量均为整数，该算法将返回整数流，因此我们将所有流量非零的边加入 H。

4.3.2 分析

以下引理基本上可直接由定理 4.2（结构定理）和该算法的描述得出。该引理的证明见附录 C。

引理 4.3. 令 H 为第 *4.3.1* 节中给出的算法的输出。子图 H 是 *SD-k-RSND* 问题的可行解。

在下一个引理中，我们给出 SD-k-RSND 算法的近似比。令 H^*表示最优解；对于任意边集 $A \subseteq E$，令 $w(A) = \sum_{e \in A} w(e)$。下一个引理可由合并算法中各个子程序的近似比并求解递推式得出。

引理 4.4. $w(H) \leq 2^{O(k^2)} * w(H^*)$.

证明. 固定 G的层次 k-链分解中的第 h 层。令 $H_i^h = H[R_i^h]$, $G_i^h = G[R_i^h]$，并令$H_i^{h*} = H^*[R_i^h]$ 为最优解中由R_i^h诱导的子图。令 $d = \max(0, k + |S_X| + |S_Y| - |S_{i-1}^h| - |S_i^h|)$。我们还令$W_i^h{}_{,X,Y}$表示在 G_i^h上运行加权st 最短路径算法所返回的H_i^h的子图，该算法针对收缩后的顶点子集 $X \subseteq V^h(i,\ell)$和 $Y \subseteq V_{(i,r)}^h$ 运行，且满足 $d = 1$。此外，令$D_i^h{}_{,X,Y}$ 表示在 G_i^h上运行 SD-d-RSND 算法所返回的 H_i^h 的子图，该算法针对收缩后的 $X \subseteq V_{(i,\ell)}^h$ 和收缩后的 $Y \subseteq V_{(i,r)}^h$ 运行，且满足 $1 < d < k-1$。令$D_i^h{}_{,\ell,r}$ 表示在 G_i^h 上运行 SD-$(k-1)$-RSND 算法所返回的 H_i^h的子图，该算法针对收缩后的 $V^h(i,\ell)$和收缩后的 $V^h(i,r)$运行，需求为 $k-1$。我们还令 M_i^h表示在 G_i^h上运行最小费用流算法所返回的H_i^h的子图，该算法针对收缩后的 $V_{(i,\ell)}^h$ 和收缩后的 $V^h(i,r)$运行。

类似地，令 $W_i^{h*}{}_{,X,Y}$ 为加权 st 最短路径实例在 G_i^h 上、针对收缩后的 $X \subseteq V^h(i,\ell)$ 和收缩后的 $Y \subseteq V_{(i,r)}^h$ 的最优解，其中 $d = 1$；令 $D_i^{h*}{}_{,X,Y}$ 为 SD-d-RSND 实例在 G_i^h 上、针对收缩后的 $X \subseteq V^h(i,\ell)$ 和收缩后的 $Y \subseteq V_{(i,r)}^h$ 的最优解，其中 $1 < d < k$；令 $D_{i}^{h*}{}_{\ell,,r}$ 为 SD-$(k-1)$-RSND 实例在 G_i^h 上、针对收缩后的 $V^h(i,\ell)$ 和收缩后的 $V^h(i,r)$、需求为 $k-1$ 的最优解；令 M_i^{h*} 为 G_i^h 上最小费用流实例的最优解。

对于每个满足 $d = 1$ 的 X, Y 对，子图 $W_{i,X,Y}^h$ 由精确算法给出。子图M_i^h 也由精确算法给出。令 $T(j)$ 为我们的单需求 RSND 算法在需求为 (s,t,j) 时的近似比。对于每个满足 $1 < d < k$ 的 X, Y 对，子图 $D_{i,X,Y}^h$ 由我们的单需求 RSND 算法给出，该算法是一个 $T(d)$-近似算法。子图 $D_{i,\ell,r}^h$ 也由我们的算法给出；在这种情况下，该算法是一个 $T(k-1)$-近似算法。因此，对于层次化 k-链分解中的每个分量 H_i^h，有如下结论：

$$w(W_{i,X,Y}^h) = w(W_{i,X,Y}^{h*}) \qquad \forall X, Y \text{ s.t. } d = 1 \tag{1}$$

$$w(D_{i,X,Y}^h) \leq T(d) \cdot w(D_{i,X,Y}^{h*}) \qquad \forall X, Y \text{ s.t. } 1 < d < k \tag{2}$$

$$w(D_{i,\ell,r}^h) \leq T(k-1) \cdot w(D_{i,\ell,r}^{h*}) \tag{3}$$

$$w(M_i^h) = w(M_i^{h*}). \tag{4}$$

对 a 求和 $V_{(i,\ell)}^h$ 和 $V^h(i,r)$ 的所有子集，根据表达式 (1) 和 (2) 可得：

$$\sum_{(X,Y):d=1} w(W_{i,X,Y}^h) = \sum_{(X,Y):d=1} w(W_{i,X,Y}^{h*})$$

$$\sum_{(X,Y):1<d<k} w(D_{i,X,Y}^h) \leq \sum_{(X,Y):1<d<k} T(d) \cdot w(D_{i,X,Y}^{h*}).$$

对于层次化 k-链分解的每一层 h ，我们将 h-分量的集合记为R_0^h， R_1^h， $\dots R_{p_h}^h$。对层次化 k-链分解中的所有分量求和，可得:

$$\sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h}\sum_{(X,Y):d=1} w(W_{i,X,Y}^h) = \sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h}\sum_{(X,Y):d=1} w(W_{i,X,Y}^{h*}) \tag{5}$$

$$\sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h}\sum_{(X,Y):1<d<k} w(D_{i,X,Y}^h) \le \sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h}\sum_{(X,Y):1<d<k} T(d)\cdot w(D_{i,X,Y}^{h*}) \tag{6}$$

$$\sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h} w(D_{i,\ell,r}^h) \le T(k-1)\cdot\sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h} w(D_{i,\ell,r}^{h*}) \tag{7}$$

$$\sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h} w(M_i^h) = \sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h} w(M_i^{h*}). \tag{8}$$

我们还有

$$w(H_i^h) \le \sum_{(X,Y):d=1} w(W_{i,X,Y}^h) + \sum_{(X,Y):1<d<k} w(D_{i,X,Y}^h) + w(D_{i,\ell,r}^h) + w(M_i^h). \tag{9}$$

对层次化 k-链分解中的所有连通分量求不等式 (9) 的和，再代入表达式 (5) 至 (8)，可得:

$$\begin{aligned}\sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h} w(H_i^h) \le{}& \sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h}\sum_{(X,Y):d=1} w(W_{i,X,Y}^h) + \sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h}\sum_{(X,Y):1<d<k} w(D_{i,X,Y}^h)\\ &+ \sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h} w(D_{i,\ell,r}^h) + \sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h} w(M_i^h) \qquad (10)\\ \le{}& \sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h}\sum_{(X,Y):d=1} w(W_{i,X,Y}^{h*}) + \sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h}\sum_{(X,Y):1<d<k} T(d)\cdot w(D_{i,X,Y}^{h*})\\ &+ T(k-1)\cdot\sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h} w(D_{i,\ell,r}^{h*}) + \sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h} w(M_i^{h*}). \qquad (11)\end{aligned}$$

最优子图 H^* 是一个可行解，因此根据定理 4.2，该定理陈述中的每个 RSND 需求都必须在子图 H_i^{h*} 中得到满足，对所有 h， i 均如此。为了使该定理陈述中的所有 RSND 需求都在子图 H_i^{h*} 中得到满足，边集 $E(H_i^{h*})$ 必须是我们在 G_i^h 上创建的加权 st 最短路径、SD-k-RSND 和最小费用流实例各自的可行解。因此， H_i^{h*} 的成本必须至少等于这些实例各自最优解的成本。我们有

$$\begin{aligned} w(W_{i,X,Y}^{h*}) &\le w(H_i^{h*}) && \forall X,\ Y \text{使得 } d=1\\ w(D_{i,X,Y}^{h*}) &\le w(H_i^{h*}) && \forall X,\ Y \text{使得 } 1<d<k\\ w(D_{i,\ell,r}^{h*}) &\le w(H_i^{h*})\\ w(M_i^{h*}) &\le w(H_i^{h*}). \end{aligned}$$

设 $C(j)$ 表示满足以下条件的 X，Y 对数：$X \subseteq V_{(i,\ell)}$, $Y \subseteq V_{(i,r)}$, $(X,\ Y) \neq (V_{(i,\ell)},\ V_{(i,r)})$，且 $j = \max(0,\ k + |S_X| + |S_Y| - |S_{i-1}| - |S_i|)$。对 $V_{(i,\ell)}$ 和 $V_{(i,r)}$ 的子集以及层次化 k-链分解中的所有分量求和，可得：

$$\sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h}\sum_{(X,Y):d=1} w(W_{i,X,Y}^{h*}) \leq \sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h} C(1)\cdot w(H_i^{h*}) \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h}\sum_{(X,Y):1<d<k} T(d)\cdot w(D_{i,X,Y}^{h*}) &\leq \sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h}\sum_{(X,Y):1<d<k} T(d)\cdot w(H_i^{h*}) \\ &\leq \sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h}\sum_{j=2}^{k-1} C(j)\cdot T(j)\cdot w(H_i^{h*}) \end{aligned} \tag{13}$$

$$\sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h} w(D_{i,\ell,r}^{h*}) \leq \sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h} w(H_i^{h*}) \tag{14}$$

$$\sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h} w(M_i^{h*}) \leq \sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h} w(H_i^{h*}). \tag{15}$$

将不等式 (12) 到 (15) 代入不等式 (11)，得到如下结果：

$$\begin{aligned}\sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h} w(H_i^h) &\leq C(1)\sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h} w(H_i^{h*}) + \sum_{j=2}^{k-1} C(j)T(j)\cdot\sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h} w(H_i^{h*}) + T(k-1)\sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h} w(H_i^{h*}) \\ &\quad + \sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h} w(H_i^{h*}) \\ &= \left[C(1) + \sum_{j=2}^{k-1} C(j)T(j) + T(k-1) + 1\right]\sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h} w(H_i^{h*})\end{aligned}$$

现在，我们考虑层次化k-链分解中的重要分隔集，或分量间的边。令 S 表示该分解的分隔集，并令 S^* 表示最优解中包含的这些分隔集里的边。边集 S 包含在 H中。根据定理 4.2，任何可行解都必须包含该分解中所有分量间的边。因此，我们有 $S = S^*$，并得到如下结果：

$$\begin{aligned}w(H) &= \sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h} w(H_i^h) + w(S) \\ &\leq \left[C(1) + \sum_{j=2}^{k-1} C(j)T(j) + T(k-1) + 1\right]\sum_{h=2}^{k-1}\sum_{i=0}^{p_h} w(H_i^{h*}) + w(S^*) \\ &= \left[C(1) + \sum_{j=2}^{k-1} C(j)T(j) + T(k-1) + 1\right] w(H^*).\end{aligned}$$

因此，需求为 k 时 SD-k-RSND 算法的近似比上界由

以下递推关系给出：

$$\begin{aligned} T(k) &\leq C(1) + \sum_{j=2}^{k-1} C(j)T(j) + T(k-1) + 1 \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} C(j)T(j) + T(k-1) + 1 \\ &\leq \sum_{j=1}^{k-1} C(j)T(k-1) + T(k-1) + 1 \end{aligned}$$

基本情形为 $T(1) = 1$ （回想一下，使用加权 st 最短路径算法可以精确求解满足 $k = 1$ 的 SD-k-RSND 问题）。

首先，注意到，顶点集的配对至多有 $2^{2(k-1)}$ 个 X，Y使得 $X \subseteq V^h_{(i,\ \ell)}$且 $Y \subseteq V^h_{(i,r)}$，因此我们有 $\sum_{j=1}^{k-1} C(j) \leq 2^{2(k-1)}$。由此可得：

$$\begin{aligned} T(k) &\leq T(k-1) \sum_{j=1}^{k-1} C(j) + T(k-1) + 1 \\ &\leq T(k-1) \cdot 2^{2(k-1)} + T(k-1) + 1 \\ &= (2^{2(k-1)} + 1)T(k-1) + 1. \end{aligned}$$

通过求解递推关系，我们得到如下结果

$$\begin{aligned} T(k) &= O\left(\prod_{x=1}^{k-1} 2^{2(k-x)}\right) \\ &= O\left(2^{\sum_{j=1}^{k} 2j}\right) \\ &= O\left(2^{k(k+1)}\right) \\ &= 2^{O(k^2)}. \end{aligned}$$

因此，我们有 $w(H) \leq 2^{O(k^2)} \cdot w(H^*)$。 □

定理 1.2 可由引理 4.3 和引理 4.4，以及该算法在多项式时间内运行这一观察直接推出。

参考文献

[1] David Adjiashvili、Felix Hommelsheim 和 Moritz M¨uhlenthaler。灵活图连通性：近似 1-连通性与 2-连通性之间的网络设计问题，2020。arXiv:1910. 13297。[2] David Adjiashvili、Felix Hommelsheim、Moritz M¨uhlenthaler 和 Oliver Schaudt。容错边不相交路径——超越统一故障，2020。arXiv:2009.05382。[3] Ishan Bansal、Joseph Cheriyan、Logan Grout 和 Sharat Ibrahimpur。通过将原始-对偶方法推广到不可交叉函数之外，改进近似算法，2022。arXiv:2209.11209。[4] Davide Bil`o、Luciano Gual`a、Stefano Leucci 和 Guido Proietti。多边故障容错近似最短路径树，2016。网址：https://arxiv.org/abs/1601.04169，数字对象标识符：10.48550/ARXIV.1601.04169。[5] Greg Bodwin、Michael Dinitz 和 Yasamin Nazari。顶点容错模拟器。载于 Mark Braverman 编，第 *13* 届理论计算机科学创新会议（*ITCS 2022*），第 215 卷，*LIPIcs*，第 25:1–25:22 页。德国施洛斯达格施图尔：莱布尼茨信息学中心，2022。数字对象标识符：10.4230/LIPIcs.ITCS.2022.25。[6] Greg Bodwin、Michael Dinitz 和 Yasamin Nazari。彻底失败：模拟器可免费容忍多项式数量的边故障。载于第 *14* 届理论计算机科学创新会议（*ITCS 2023*），2023。[7] Greg Bodwin、Michael Dinitz、Merav Parter 和 Virginia Vassilevska Williams。最优顶点容错伸展子图（适用于固定伸展度）。载于 Artur Czumaj 编，第二十九届 *ACM-SIAM* 离散算法年度研讨会论文集（*SODA 2018*），美国路易斯安那州新奥尔良，*2018* 年 *1* 月 *7–10* 日，第 1884–1900 页。SIAM，2018。[8] Greg Bodwin、Michael Dinitz 和 Caleb Robelle。多项式时间内的最优顶点容错伸展子图。载于第三十二届 *ACM-SIAM* 离散算法年度研讨会论文集（*SODA 2021*），2021。[9] Greg Bodwin、Michael Dinitz 和 Caleb Robelle。多项式时间内的最优顶点容错伸展子图。载于 Joseph (Seffi) Naor 和 Niv Buchbinder 编，*2022* 年 *ACM-SIAM* 离散算法研讨会论文集（*SODA 2022*），第 2924–2938 页。SIAM，2022。数字对象标识符：10.1137/1.9781611976465.174。[10] Greg Bodwin 和 Shyamal Patel。顶点容错伸展子图的一个简单但最优的解。载于*2019* 年 *ACM* 分布式计算原理研讨会论文集，PODC ’19，第 541–543 页，美国纽约州纽约市，2019。计算机协会。数字对象标识符：10.1145/3293611.3331588。[11] Sylvia Boyd、Joseph Cheriyan、Arash Haddadan 和 Sharat Ibrahimpur。灵活图连通性的近似算法，2022。arXiv:2202.13298。[12] Shiri Chechik、Michael Langberg、David Peleg 和 Liam Roditty。一般图的容错伸展子图。*SIAM* 计算杂志，39(7):3403–3423，2010。[13] Chandra Chekuri 和 Rhea Jain。通过基于 r¨acke 树的舍入近似灵活图连通性，2022。arXiv:2211.08324。

[14] Chandra Chekuri 和 Rhea Jain。灵活网络设计的基于增广的近似算法，2022。arXiv:2209.12273。[15] J. Cheriyan、B. Laekhanukit、G. Naves 和 A. Vetta。根化斯坦纳网络的近似。*ACM* 算法汇刊，11(2):8:1–8:22，2014。[16] Joseph Cheriyan 和 Ramakrishna Thurimella。通过匹配近似最小规模 k-连通生成子图。*SIAM* 计算杂志，30(2):528–560，2000。数字对象标识符：10.1137/S009753979833920X。[17] M. Dinitz、A. Koranteng 和 G. Kortsarz。相对可生存网络设计。发表于*APPROX-RANDOM*，第245卷，页码41:1–41:19，2022。[18] Michael Dinitz 和 Robert Krauthgamer。容错伸展子图：更优且更简单。发表于第*30*届 *ACM* 分布式计算原理年会论文集，*PODC 2011*，美国加利福尼亚州圣何塞，*2011*年*6*月*6*日至*8*日，页码169–178，2011。[19] Michael Dinitz 和 Caleb Robelle。高效而简单的容错伸展子图算法。发表于 Yuval Emek 和 Christian Cachin 编，*PODC '20*：*ACM* 分布式计算原理研讨会，页码493–500。ACM，2020。数字对象标识符：10.1145/3382734.3405735。[20] Ye Dinitz 和 Jeffery Westbrook。在线维护图中的 4-边连通类别。*Algorithmica*，20:242–276，1998。[21] Yefim Dinitz 和 Zeev Nutov。图中最小割和最小+ 1边割系统的二层仙人掌模型及其增量维护。发表于第*27*届 *ACM* 计算理论年会论文集，页码509–518，1995。[22] A. E. Feldmann、A. Mukherjee 和 E. J. van Leeuwen。可生存网络设计问题的参数化复杂度。发表于*SOSA*，页码37–56，2022。[23] Harold N. Gabow 和 Suzanne R. Gallagher。最小 k-边连通生成子图的迭代舍入算法。*SIAM* 计算杂志，41(1):61–103，2012。数字对象标识符：10.1137/080732572。[24] Harold N. Gabow、Michel X. Goemans、 ́Eva Tardos 和 David P. Williamson。通过线性规划舍入近似最小k-边连通生成子图。*Networks*，53(4):345–357，2009。[25] Monika Rauch Henzinger。点连通性的静态 2-近似算法，以及边连通性和点连通性的增量近似算法。算法杂志，24(1):194–220，1997。[26] Kamal Jain。广义斯坦纳网络问题的 2-因子近似算法。*Combinatorica*，21(1):39–60，2001。数字对象标识符：10.1007/s004930170004。[27] Rohit Khandekar、Guy Kortsarz 和 Zeev Nutov。容错群斯坦纳问题的近似。理论计算机科学，416:55–64，2012。[28] On-Hei Solomon Lo、Jens M. Schmidt 和 Mikkel Thorup。所有非平凡最小割的紧凑仙人掌表示。离散应用数学，303:296–304，2021。[29] D ́aniel Marx。重要分隔集与参数化算法。发表于国际计算机科学图论概念研讨会，页码5–10。施普林格，2011。

[30] Johannes A. La Poutre。图的 2-边连通和 3-边连通分量的维护 II。*SIAM* 计算杂志，29(5):1521–1549，2000。[31] David P. Williamson、MichelX. Goemans、Milena Mihail 和 Vijay V. Vazirani。广义斯坦纳网络问题的原始-对偶近似算法。*Combinatorica*，15(3):435–454，1995。数字对象标识符：10.1007/BF01299747。

A 第 3 节的证明（3-RSND）

首先，我们必须证明任意 RSND 需求都可以表示为一组割覆盖约束 .

引理 A.1. 若 *RSND* 需求 $r(s,t) = k$ 由子图 H 满足，当且仅当对于任意G-极小 st-集 A, $d_H(A) \geq \min\{k, d_G(A)\}$

证明。 首先证明“仅当”方向。假设需求 $r(s,t) = k$ 由子图 H满足，但反设存在某个 G-极小 st-集 A，使得 $d_H(A) < \min\{k, d_G(A)\}$。那么， $F = \delta_H(A)$ 是一个大小至多为 $k-1$的故障集，使得 $G \setminus F$ 中存在一条 st-路径（因为 $G[A]$和 $G[V \setminus A]$ 连通，且 $|\delta_G(A) \setminus F| \geq 1$），但不存在 $H \setminus F$中的 st-路径。这与 H的可行性矛盾。

现在我们证明“如果”方向。假设对于任意 G-极小 st-集 A， $d_H(A) \geq \min\{k, d_G(A)\}$。然而，为了导出矛盾，假设 H 不满足要求 $r(s,t) = k$。那么存在一个 H-极小 st-割 $X \subseteq E$，其中 $|X| < k$，使得 s、t 在 $H \setminus X$ 中不连通，但在 $G \setminus X$中连通。边集 X 是 H-极小的，因此对于某个顶点集 A，有 $X = \delta_H(A)$。注意， $\delta_G(A)$ 是一个 G-极小 st-集，且 $d_G(A) > d_H(A)$。根据我们的假设，有 $d_H(A) \geq \min\{k, d_G(A)\}$。这是矛盾，因为我们有 $d_H(A) < k$，以及 $d_H(A) < d_G(A)$。 □

引理 3.3 的证明。首先假设 H 是一个可行的 SD-3-RSND解。我们将证明 (i) 和 (ii) 均成立。反设对于某个非中心分量 J，(i) 不成立。令 $H' = H[J]$。令 u和 v为 J的附着节点，并且不失一般性地假设，在 G中，任意（简单） st-路径都经过 u 后再经过 v，如图 1(a) 所示。于是，存在一个 J-极小 uv-割 $\delta_{H'}(A_J)$，使得 $d_{H'}(A_J) \leq 1$（回想一下， H'不包含其对应 3-类的任何附着边）。令 A 为 A_J 与环链中所有位于某条（简单） us-路径上且不包含 v的分量的并集。可以看出，$d_H(A) = d_{H'}(A_J) + 1 \leq 2$。由于 u和 v在 G中是 3-连通的（它们属于同一个 3-类），且 A 是一个 uv-集，因此 $d_G(A) \geq 3$。不难看出， $G[A]$ 和 $G[V \setminus A]$ 均连通，因此 $\delta_G(A)$ 是一个 G-极小 st-割。这意味着， $F = \delta_H(A)$ 是一个大小至多为 2 的故障集，使得在 $G \setminus F$中存在一条 st路径，但在 $H \setminus F$中不存在 st路径。这与 H的可行性矛盾。

现在假设对于某个中心分量 J，条件 (ii) 不成立。那么必定存在一个 J-极小 st-割， $\delta_{H'}(A_J)$，使得 $d_{H'}(A_J) < \min\{3, d_J(A_J)\}$（由引理 A.1）。令 A 为 A_J 与仙人掌链中先于 J 的所有环的分量的并。注意， $d_H(A) = d_{H'}(A_J)$，且 $d_G(A) = d_J(A_J)$。由此得到 $d_H(A) < \min\{3, d_G(A)\}$，这与 H 的可行性矛盾。

现在假设 H 满足 (i,ii)。我们将证明 H 是一个可行的 SD-3-RSND 解。设 $F \subseteq E$ 满足： $G \setminus F$ 有一条 st-路径，而 $H \setminus F$ 没有 st-路径。可以看出，由于 F 不能包含同一仙人掌链环上的两条边，因此 F 的大小至少为 3；于是，如果在 $G \setminus F$ 中存在一条用于 $|F| \leq 2$ 的 st 路径，那么在 $H \setminus F$ 中也存在一条 st 路径。

□

引理 A.2. 子图 H 是实例 $\mathcal{I}$ 的可行解，当且仅当对于任意满足 $d_H(A) = 2$、 $\delta_H(A) = \delta_J(s)$ 或 $\delta_H(A) = \delta_J(t)$的 st-集合 A，

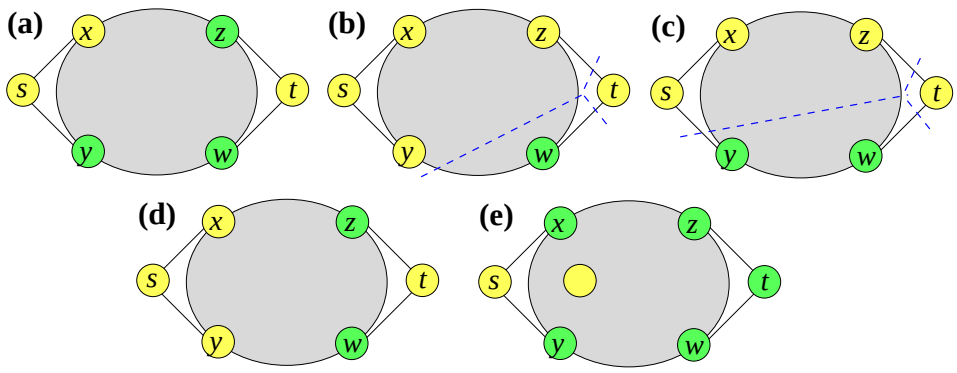


图3：引理3.4、3.5证明示意图。 A 中的节点为黄色， $V \setminus A$ 中的节点为绿色。

证明. 设 H 是 $\mathcal{I}$ 的可行解，且 A 是一个满足 $d_H(A) = 2$的 st-集合。我们将证明，要么 $\delta_H(A) = \delta_J(s)$，要么 $\delta_H(A) = \delta_J(t)$。令 $F = \delta_H(A)$。于是， $H \setminus F$不含 st-路径。由于H 是 $\mathcal{I}$的可行解， $J \setminus F$ 也必定不含 st-路径。分量 J 是 2-连通的，因此$\delta_H(A) = \delta_J(A)$。根据定理 3.2 的性质（B），可得 $\delta_J(A) = \delta_J(s)$ 或 $\delta_J(A) = \delta_J(t)$。

现在假设，对于任意满足 $d_H(A) = 2$ 的 st-集合 A，都有 $\delta_H(A) = \delta_J(s)$ 或 $\delta_H(A) = \delta_J(t)$。我们将证明 H是 $\mathcal{I}$的一个可行解。对于任意满足 $\delta_H(A) \neq \delta_J(s)$ 且 $\delta_H(A) \neq \delta_J(t)$ 的 st-集合 A，都有 $d_H(A) \geq 3$。由于 H包含强制边 sx、sy、zt和 wt，我们还知道 $\delta_H(s) = \delta_J(s)$ 且 $\delta_H(t) = \delta_J(t)$。因此，对于所有满足 A 为 st-集合的 A，都有 $d_H(A) \geq \min\{3, d_J(A)\}$。根据引理 A.1， H 是 $\mathcal{I}$的一个可行解。 □

引理 *3.4* 的证明。 假设 H 是 $\mathcal{I}$ 的一个可行解，但反设 R 不是 H 中的 3-连通子集。于是存在一个顶点集 A，使得 $d_H(A) = 2$ 且 $R \cap A$， $R \setminus A \neq \emptyset$。根据引理 A.2， A 不可能是一个 st-集。因此，不失一般性，假设 s， $t \in A$。现在我们分几种情况讨论，见图 3(a,b,c,d)。

(a) $|R \cap A| = 1$，例如 $R \cap A = \{x\}$；见图 3(a)。那么 $\{sy, tz, tw\} \subseteq \delta_H(A)$，这与 $d_H(A) = 2$ 矛盾。(b) $|R \cap A| = 3$，例如 $R \setminus A = \{w\}$；见图 3(b)。顶点集 $A \setminus \{t\}$ 是一个 st-集，且 $d_H(A \setminus \{t\}) = d_H(A) = 2$，这与 H 是一个可行解矛盾（根据引理 A.2）。(c) $|R \cap A| = 2$ 和 $|R \cap \{x, y\}| = |R \cap \{z, w\}| = 1$，例如 $R \cap A = \{x, z\}$；见图 3(c)。那么 $d_H(A \setminus \{t\}) = d_H(A) = 2$，这与 J 是一个可行解矛盾（根据引理 A.2）。(d) $R \cap A = \{x, y\}$ 或 $R \cap A = \{z, w\}$，例如 $R \cap A = \{x, y\}$；见图 3(d)。那么 $A \setminus \{t\}$ 是一个 st-集，且 $d_H(A \setminus \{t\}) = d_H(A) - 2 = 0$，这与 H 是一个可行解矛盾。

在所有情况下都会得到矛盾，因此引理成立。 □

引理 *3.5* 的证明。 假设 R 是 H中的一个 3-连通子集，但反设 H 不是可行解。根据引理 A.2，存在一个 st-集 A，满足 $d_H(A) = 2$，且 $\delta_H(A) \neq \delta_J(s)$，以及 $\delta_H(A) \neq \delta_J(t)$。由于 R是 H中的一个 3-边连通子集，因此必有$R \cap A = \emptyset$ 或 $R \subset A$。不失一般性，假设 $R \cap A = \emptyset$（见图 3(e)）；否则，我们交换 s和 t的角色。但这样一来， sx， $sy \in \delta_H(A)$，于是得到矛盾：$\delta_H(A) = \{sx, sy\} = \delta_J(s)$。 □

定理 *1.1* 的证明。 我们将 3-RSND 实例归约为一个 SND 实例。令 $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_\ell\}$为输入的 3-RSND 实例中所有 ℓ 顶点需求的集合（其中每个 $d_i \in D$ 对应于形如 **(**x, y, r**)** 的需求，其中 x, y是 G中的顶点，且 $r \leq 3$）。我们将创建一个新的普通需求集合 D'，用来刻画该问题。

首先注意到 G 是 2-连通的，因此输入中的所有 1-需求和 2-需求都是普通需求。我们将它们加入 D'。我们还将输入中的所有普通 3-需求加入 D'。根据定理 3.1，每个相对 3-需求 $d_i \in D$ 都由一组普通 3-需求 D_i刻画。因此，对于每个相对 3-需求 $d_i \in D$，我们将 D_i 中的所有需求加入 D'。需求集 D' 刻画了这个 3-RSND 实例，这意味着该 3-RSND 实例的任何最优解都必须满足 D'。 D' 中的所有需求都是普通需求，因此我们可以在需求为 D'的条件下，对 G 运行 Jain 的 SND 2-近似算法（[26]）。根据定理 3.1，我们只向 D'中添加多项式数量的需求，因此该归约（以及算法）在多项式时间内运行。由此得到一个针对 3-RSND 的 2-近似算法。

□

B 定理 4.2（结构定理）的证明

B.1 输入图 G 的连通性引理

为了证明定理 4.2，我们首先需要一些引理，用来描述 G 与 s 之间以及 h-分量之间的连通性，以及任意 h-分量与 t之间的连通性。我们称层级 h 链为所有 h-分量按顺序排列而成的序列，标记为 R_0^h、.....、R_p^h（其中 $s \in R_0^h$且 $t \in R_p^h$）。注意，尽管层级 h 链中的所有分量都是 h-分量，但每个 h-分量都可能有一个大小小于 h的左分隔集或右分隔集。令 $E(R_i^h)$ 表示两个端点都在分量 R_i^h中的边集。我们将一条层级 h 链中从 G_i^h开始、到 G_j^h结束（其中$i \leq j$）的子链定义为由 $\cup_{k=i}^{j} R_k^h$诱导的 G 的子图。如果 $e \in \cup_{k=i}^{j} E(R_k^h)$ 或 $e \in \cup_{k=i}^{j-1} S_k^h$，则边 e 属于一条从 G_i^h开始、到 G_j^h结束的子链。类似地，我们定义从 H_i^h开始、到 H_j^h结束的子链。我们也可以用顶点集 $V_{(j,r)}^h$ 来定义子链的起点和终点。

引理 B.1. 固定层级 k-链分解中的第 h 层，并考虑一条从 s 开始、以一个 h-分量结束的子链。令 R_i^h 为这个 h-分量。那么，在 G 中，存在一条从 s 到 $V_{(i,r)}^h$ 中每个顶点的路径；这些路径只使用从G_0^h 开始、以 G_i^h 结束的第 h 层子链中的边。

证明. 图 G 是 2-边连通的，因此当 R_i^h 包含 t （也就是说，当 $V_{(i,r)}^h = \{t\}$）时，引理的结论成立。因此我们假设 $t \notin R_i^h$。首先我们将证明，对于每个满足 $t \notin R_j^h$的 h-分量R_j^h，在 G 中存在一条从 V^h（j,ℓ）到 V^h（j,r）中每个顶点的路径。固定这样一个 h-分量 R_j^h，并假设分量 R_m^{h-1}是层级 k-链分解中 R_j^h 的父分量。反设在 G 中不存在从 $V_{(j,\ell)}^h$ 到顶点 $v \in V_{(j,r)}^h$的路径。令 S_v 为 S_j^h 中与 v相接的边集。那么， $S_j^h \setminus S_v$ 是一个大小严格小于 $|S_j^h|$的（V^h（j,ℓ）V^{h-1}（m,r））-分隔集。这意味着 S_j^h 不是极小的，因此不是重要分隔集，矛盾。

我们已经证明，在每个 h-分量 R_j^h 中，只要满足 $t \notin R_j^h$，就存在一条位于 G 中的路径，从 $V^h{}_{(j,\ \ell)}$ 通往 $V_{(j,r)}^h$ 中的每个顶点。因此，对于每个分量 R_i^h，都存在一条位于 G 中的路径，从 s 通往 $V_{(i,r)}^h$ 中的每个顶点，且仅使用该子链内的边。这可通过对层级为 h 、起于 R_0^h 且止于 R_i^h 的子链中分量的数量进行归纳证明。 □

我们现在 g 给出一个类似的引理，用于描述任意 h-分量之间的连通性，以及 t.

引理 B.2. 固定层级 h 的层次化 k-链分解，并考虑一条从 h-连通分量开始、以 t结束的子链。令 R_i^h 为该 h-连通分量。那么，在 G中，从 $V_{(i,\ell)}^h$ 中的每个顶点到 t都存在一条路径；这些路径仅使用层级 h 子链内的边，该子链从 G_i^h 开始，到 G_p^h结束。

证明。图 G 是 2-边连通的，因此当 R_i^h 包含 s （也就是说，当 $V_{(i,\ell)}^h = \{s\}$）时，引理的陈述成立。因此，我们假设 $s \notin R_i^h$。首先，我们将证明，对于每个满足 $s \notin R_j^h$ 的 h-分量R_j^h，图 G 中存在一条路径，连接 V^h（j，ℓ）中的每个顶点与 V^h（j，r）。固定这样一个 h-分量 R_j^h，并假设分量 R_m^{h-1}是分层 k-链分解中 R_j^h 的父分量。为导出矛盾，假设图 G 中不存在从顶点 $v \in V_{(j,\ell)}^h$ 到 V^h（j，r）的路径。令 S_v 为图 S_{j-1}^h 中与 v关联的边集。那么， $S_{j-1}^h \setminus S_v$ 是一个大小严格小于 $|S_{j-1}^h|$的（V^h（$j-1$，ℓ）V^{h-1}（m，r））-分隔集。这意味着 S_{j-1}^h 不是极小的，因此不是重要分隔集，从而产生矛盾。

我们已经证明，对于每个满足 $s \notin R_j^h$的 h-连通分量 R_j^h，在 G 中，从 $V_{(j,\ell)}^h$ 中的每个顶点到 V^h $_{(j,r)}$都存在一条路径。因此，对于每个连通分量 R_i^h，在 G 中都存在一条从 $V^h{}_{(i,\ell)}$ 到 t的路径，且仅使用该子链内的边。这可以通过对层级 h 链中的连通分量数量进行归纳证明得出，该链从 R_i^h 开始，到 R_p^h结束。 □

B.2 仅当

现在我们可以证明，定理 4.2 中陈述的性质对于任何可行解都是必要的。令性质 1 表示定理 4.2 中给出的第一个需求集，即集合$\{(X, Y, d) :\ X \subseteq V^h{}_{(i,\ell)}\ Y \subseteq V^h{}_{(i,r)}, (X, Y) \neq (V^h{}_{(i,\ell)}\, V^h{}_{(i,r)})$ $d = \max(0, k + |S_X| + |S_Y| - |S_{i-1}^h| - |S_i^h|)\}$。令性质 2 表示并集中需求 $(V^h{}_{(i,\ell)} V^h{}_{(i,r)} h + 1)$，性质 3 表示需求 $(V^h{}_{(i,\ell)}\, V^h{}_{(i,r)} k - 1)$。

重要分隔集。假设子图 H 是一个可行解，但为导出矛盾，假设在层级 h 的分层 k-链分解中，存在一个重要分隔集 S_i^h，使得边 $e \in S_i^h$ 不属于 H。那么，边集 $E' = S_i^h \setminus \{e\}$ 的大小至多为 $k-2$，它在 H 中分隔了 s 和 t，但在 G 中没有。根据引理 B.1 和 B.2，在 $G \setminus E'$ 中，存在一条从 s 到 $V_{(i,r)}^h$ 中每个顶点的路径，也存在一条从 $V_{(i+1,\ell)}^h$ 中每个顶点到 t 的路径。边 e 与 V^h（i、r）中的一个顶点以及 $V_{(i+1,\ell)}^h$ 中的一个顶点相接。因此，综合上述结果，在 $G \setminus E'$ 中存在一条从 s 到 t 的路径。然而，在 H 中，不存在从 V^h（i、r）到 V^h（$i+1$、ℓ）的路径，因此在 $H \setminus E'$ 中也不存在从 s 到 t 的路径。这与 H 是一个可行解的假设相矛盾。

性质 1。现在假设 H 是可行的，但为导出矛盾，假设性质 1 中至少有一个 RSND 需求在子图 H_i^h 中未得到满足。具体而言，固定子图 H_i^h，令 X 和 Y 为顶点集，使得 $X \subseteq V^h{}_{(i,\ell)}$，$Y \subseteq V^h{}_{(i,r)}$，且 $(X, Y) \neq (V^h{}_{(i,\ell)} V^h{}_{(i,r)})$，并令 $d = \max(0, k + |S_X| + |S_Y| - |S_{i-1}^h| - |S_i^h|)$。假设 RSND 需求 (X, Y, d) 在 H_i^h 中未得到满足。也就是说，存在一个故障集 F_i，满足 $|F_i| < d$，使得在 $G_i^h \setminus F_i$ 中存在一条从 X 到 Y 的路径，但在 $H_i^h \setminus F_i$ 中不存在一条从 X 到 Y 的路径。由于我们假设 RSND 需求 (X, Y, d) 在 H_i^h 中未得到满足，因此可以假设 $d > 0$ （因为需求为 0 时总是得到满足）。因此，我们假设 $d = k + |S_X| + |S_Y| - |S_{i-1}^h| - |S_i^h| > 0$。

现在我们证明，存在一个故障集 F，其中包含 $|F| < k$，使得 s 和 t 在$G \setminus F$中连通，但在 $H \setminus F$中不连通。令 $F = (S_{i-1}^h \setminus S_X) \cup (S_i^h \setminus S_Y) \cup F_i$。根据引理 B.1，并且由于 S_X 中的所有边仍然存在于 $G \setminus F$ 中，因此在 $G \setminus F$中存在一条从 s到 X中每个顶点的路径，该路径使用

仅使用层级为 h 的链中 G_i^h之前的边。从 X 到 Y在 $G_i^h \setminus F_i$ 中（以及在 $G_i^h \setminus F$中）存在一条路径。根据引理 B.2，并且由于 S_Y中的所有边仍然存在于 $G \setminus F$中，因此我们还可知，在 $G \setminus F$中存在一条从 Y中的每个顶点到 t的路径，该路径仅使用层级为 h的链中 G_i^h之后的边。综上，在 $G \setminus F$中存在一条从 s 到 t 的路径。注意，由于 X和 Y在 $H \setminus F$中不连通，因此 $H \setminus F$中不存在 st路径。现在我们给出 F大小的一个上界：

$$\begin{aligned}|F| &\leq (|S_{i-1}^h| - |S_X|) + (|S_i^h| - |S_Y|) + (d-1) \\ &= |S_{i-1}^h| - |S_X| + |S_i^h| - |S_Y| + k + |S_X| + |S_Y| - |S_{i-1}^h| - |S_i^h| - 1 \\ &= k - 1.\end{aligned}$$

我们已经证明了 $|F| \leq k-1$。因此，我们对 F 的构造与 H 可行这一假设矛盾，所以集合 $\{(X, Y, d) : X \subseteq V^h_{(i,\ell)}\ Y \subseteq V^h_{(i,r)} \cdot (X,Y) \neq (V^h_{(i,\ell)}\ V^h_{(i,r)})\ d = \max(0, k + |S_X| + |S_Y| - |S_{i-1}^h| - |S_i^h|)\}$ 上的所有 RSND 需求，在所有可行解中都由 G_i^h 上的 H_i^h 满足。

性质 2。现在，假设 H 可行，但反设性质 2 中的 RSND 需求 $(V^h_{(i,\ell)}, V^h_{(i,r)}, h+1)$ 在固定子图 H_i^h 中未得到满足。也就是说，存在一个满足 $|F_i| < h+1 \leq k$ 的故障集 F_i，使得在 $G_i^h \setminus F_i$ 中存在一条从 $V^h_{(i,\ell)}$ 到 $V^h_{(i,r)}$ 的路径，但在 $H_i^h \setminus F_i$ 中不存在从 $V^h_{(i,\ell)}$ 到 $V^h_{(i,r)}$ 的路径。根据引理 B.1，在 $G \setminus F_i$ 中存在一条从 s 到 $V^h_{(i,\ell)}$ 中每个顶点的路径，且只使用层级 h 的链中位于 G_i^h 之前的边。在 $G_i^h \setminus F_i$ 中，存在一条从 $V^h_{(i,\ell)}$ 中至少一个顶点到 $V^h_{(i,r)}$ 中某个顶点的路径。根据引理 B.2，在 $G \setminus F_i$ 中存在一条从 $V^h_{(i,r)}$ 中每个顶点到 t 的路径，且只使用层级 h 的链中位于 G_i^h 之后的边。综合起来，在 $G \setminus F$ 中存在一条从 s 到 t 的路径。然而，在 $H_i^h \setminus F_i$ 中不存在从 $V^h_{(i,\ell)}$ 到 $V^h_{(i,r)}$ 的路径，因此在 $H \setminus F_i$ 中不存在 st 路径。这与 H 可行这一假设矛盾，因此， G_i^h 上的 RSND 需求 $(V^h_{(i,\ell)}, V^h_{(i,r)}, h+1)$ 必须在所有可行解中由 H_i^h 满足。

性质 3。最后，假设 H 是可行的，但为导出矛盾，假设性质 3 中的 RSND 需求（V^h（i，ℓ）V^h（i，r）$k-1$）在固定子图 H_i^h 中未得到满足。那么存在一个故障集 F_i，其中 $|F_i| < k-1$，使得在 $G_i^h \setminus F_i$ 中存在一条从 V^h（i，ℓ）到 V^h（i，r）的路径，但在 $H_i^h \setminus F_i$ 中不存在从 $V^h_{(i,\ell)}$ 到 $V^h_{(i,r)}$ 的路径。根据引理 B.1 和 B.2，在 $G \setminus F_i$ 中存在一条从 s 到 t 的路径。然而，在 $H_i^h \setminus F_i$ 中不存在从 $V^h_{(i,\ell)}$ 到 $V^h_{(i,r)}$ 的路径，因此在 $H \setminus F_i$ 中不存在 st 路径。这与 H 可行的假设相矛盾，因此，在所有可行解中， G_i^h 上的 RSND 需求（V^h（i，ℓ）V^h（i，r）$k-1$）必须在 H_i^h 中得到满足。

B.3 如果

现在我们证明定理 4.2 中陈述的性质是充分的。在本节中，我们令H 为 G 的一个子图，使得 S 中的所有边都在 H 中，并且定理 4.2 陈述中的所有 RSND 需求对于所有子图 H_i^h均得到满足。对于所有满足 $|F| < k$的可能故障集合 $F \subseteq E$，我们将证明：如果 s 和 t 在 $G \setminus F$中连通，那么它们在 $H \setminus F$中也必然连通。下文中，固定 $F \subseteq E$ 为一个满足 $|F| < k$的故障集。

B.3.1 子图H的连通性引理

我们首先给出 H 中连通性的引理 B.1 和 B.2 的等价版本。以下引理描述了 s 与任意 h-分量之间，以及任意 h-分量

与 t 之间的连通性。

引理B.3. 设 H 是 G的一个子图，并假设定理 *4.2*陈述中的所有性质均由每个子图 H_i^h满足。固定层级 k-链分解中的第 h 层，并固定第 h 层链中的一个子图 H_i^h。那么，在 H中，存在一条从 s 到$V_{(i,r)}^h$中每个顶点的路径；这些路径只使用以 H_0^h 为起点、以 H_i^h为终点的第 h 层子链中的边。

证明。 首先我们证明，对于任意子图 H_j^h，从顶点集 $V_{(j,\ell)}^h$ 到每个顶点 $v \in V^h{}_{(j,r)}$ 都存在非零 RSND 需求，且该需求在 H_j^h中得到满足。也就是说，对于所有 $v \in V^h{}_{(j,r)}$，RSND 需求$\left(V^h{}_{(j,\ell)}\right.$ $\left.v, d\right)$ 在 G_j^h上的 $d > 0$ 在 H_j^h中得到满足。这意味着在H_j^h中存在一条从 $V_{(j,\ell)}^h$ 到 v 的路径，因为在 G_j^h中存在一条从 $V^h{}_{(j,\ell)}$ 到 v 的路径（由引理 B.1 得出）。

我们分两种情况讨论：如果 $\{v\} = V^h{}_{(j,\ r)}$，那么$\left(V^h{}_{(j,\ \ell)}\right.$ v，$\left.h+1\right.$ 上的 RSND 需求是一个在 H_j^h 中得到满足的非零需求。现在设 $\{v\} \neq V_{(j,r)}^h$。为证明从 $X = V^h{}_{(j,\ \ell)}$ 到 $Y = \{v\}$ 的非零 RSND 需求在 H_j^h 中得到满足，我们将$|S_X| = |S_{j-1}^h|$ 和 $|S_Y| \geq 1$ 代入公式 $d = \max(0,$ $k + |S_X| + |S_Y| - |S_{j-1}^h| - |S_j^h|)$。我们代入 $|S_Y| \geq 1$，因为 v 至少与 S_j^h 中的一条边相邻:

$$
\begin{aligned}
d &= \max(0, k + |S_X| + |S_Y| - |S_{j-1}^h| - |S_j^h|) \\
&\geq k + |S_X| + |S_Y| - |S_{j-1}^h| - |S_j^h| \\
&\geq k + |S_{j-1}^h| + 1 - |S_{j-1}^h| - |S_j^h| \\
&= k + 1 - |S_j^h| \\
&> 0. && (|S_j^h| \leq k-1)
\end{aligned}
$$

我们已经证明，从 $V_{(j,\ell)}^h$ 到 $V_{(j,r)}^h$ 中的每个顶点都存在一个正的 RSND 需求。根据引理 B.1，在子图 G_j^h 中，从 $V^h{}_{(j,\ \ell)}$ 到 $V^h{}_{(j,\ r)}$ 中的每个顶点都存在一条路径。因此，在 H_j^h 中，从 $V_{(j,\ell)}^h$ 到 $V_{(j,r)}^h$中的每个顶点都必然存在一条路径。这还意味着，在 H 中，$V_{(i,r)}^h$ 中的每个顶点都可以从 s到达，并且只使用从 H_0^h 到 H_i^h 的子链内的边。对此可以通过对从 H_0^h 开始并在 H_i^h 结束的 h 层子链中所包含的分量数量进行归纳证明。

□

我们现在给出一个类似的引理，描述任意 h-分量与 t.

引理B.4. 设 H 是 G 的一个子图，并假设定理 *4.2* 陈述中的所有性质都由每个子图 H_i^h 满足。固定层级分解中 h 层的层级 k-链，并固定该层链中的一个子图 H_i^h。那么，在 H 中，$V_{(i,\ell)}^h$ 中的每个顶点都存在一条通往 t 的路径；这些路径只使用从 H_i^h 开始并在 H_p^h 结束的 h 层子链内的边。

证明。 首先，我们证明对于所有 $v \in V^h{}_{(j,\ell)}$，带有 $d > 0$ on G_j^h 的 RSND 需求 $\left(v, V^h{}_{(j,r)} d\right)$ 在 H_j^h 中得到满足。这意味着在 H_j^h 中存在一条从 v 到 $V_{(j,r)}^h$ 的路径，因为在 G_j^h 中存在一条从 v 到$V_{(j,r)}^h$ 的路径（由引理 B.2 得出）。

我们分两种情况讨论：如果 $\{v\} = V^h{}_{(j,\ \ell)}$，那么 $\left(v,\ V^h{}_{(j,\ r)}\ h+1\right)$ 在 G_j^h 上是一个在 H_j^h 中得到满足的非零 RSND 需求。为证明从 $X = \{v\}$ 到 $Y = V_{(j,r)}^h$、在 G_j^h 上的非零 RSND 需求在 H_j^h 中得到满足，我们将$|S_X| \geq 1$ 和 $|S_Y| = |S_j^h|$ 代入公式 $d = \max(0,\ k + |S_X| +$

$|S_Y| - |S_{j-1}^h| - |S_j^h|)$ ：

$$\begin{aligned} d &= \max(0, k + |S_X| + |S_Y| - |S_{j-1}^h| - |S_j^h|) \\ &\geq k + |S_X| + |S_Y| - |S_{j-1}^h| - |S_j^h| \\ &\geq k + 1 + |S_j^h| - |S_{j-1}^h| - |S_j^h| \\ &= k + 1 - |S_{j-1}^h| \\ &> 0. \qquad (|S_{j-1}^h| \leq k-1) \end{aligned}$$

我们已经证明，从 $V_{(j,\ell)}^h$ 中的每个顶点到 $V_{(j,r)}^h$ 都存在正的 RSND 需求。根据引理 B.2，在子图 G_j^h 中，从 $V^h{}_{(j,\ \ell)}$ 中的每个顶点到 $V^h{}_{(j,\ r)}$ 都存在一条路径。因此，在 H_j^h 中，从 $V_{(j,\ell)}^h$ 中的每个顶点到 $V_{(j,r)}^h$ 都必定存在一条路径。这也意味着，在 H 中，从 $V_{(i,\ell)}^h$ 中的每个顶点到 t 都存在一条路径，且只使用从 H_i^h 到 H_p^h 的子链内的边。对此，可对以 H_i^h 为起点、以 H_p^h 为终点的 h 层子链中的连通分量数量进行归纳证明。

□

B.3.2 通过分层链分解分析故障集

如果边 e 满足 $e \in E(R_i^h)$，则称它位于分层 k-链分解中的子图 G_i^h 内。也就是说，若一条边的两个端点都在子图 G_i^h 中，则该边位于子图 G_i^h 内。G_i^h 的左分隔集或右分隔集中的边不视为位于 G_i^h 内。现在，我们考虑分层 k-链分解中边故障的位置的两种情况。在 **情况 1** 中，F 中的所有故障边都位于分解中同一个 $(k-1)$-连通分量内。在 **情况 2** 中，存在某个层级 h，使得 F 中的边并非都位于同一个 h-连通分量内，但在层级 $h-1$，F 中的边都位于同一个 $(h-1)$-连通分量内。

情况 1. 我们首先考虑情况 1，这种情况简单得多，并证明在此情况下，$H \setminus F$ 中存在一条 st 路径。假设当前属于情况 1，令 R_i^{k-1} 为包含所有 F 的 $(k-1)$-分量。

引理 B.5. 假设分层 k-链分解中适用情况 *1*；也就是说， F 中的每条边都位于同一个 $(k-1)$-分量 R_i^{k-1} 内。还假设$G \setminus F$中存在一条 st 路径。那么， $H \setminus F$中存在一条 st 路径。

证明。在 G_i^{k-1} 中，从 V^{k-1} (*i*,*ℓ*) 到 V^{k-1} (*i*,*r*) 至少有 k 条边不相交路径（否则， G_i^{k-1}将存在一个大小至多为 $k-1$ 的 (V^{k-1} (*i*,*ℓ*) V^{k-1} (*i*,*r*))-分隔集，这与分层分解的结构矛盾）。此外，子图 H_i^{k-1} 在 G_i^{k-1} 上满足 RSND 需求（V^{k-1} (*i*,*ℓ*) V^{k-1} (*i*,*r*) $h+1$），其中 $h+1=k$。因此，在 H_i^{k-1} 中，从 V^{k-1} (*i*,*ℓ*) 到 V^{k-1} (*i*,*r*) 也至少有 k 条边不相交路径。由于 F 的大小至多为 $k-1$，$H_i^{k-1} \setminus F$ 中必定存在一条从 V^{k-1} (*i*,*ℓ*) 到V^{k-1} (*i*,*r*) 的路径。根据引理B.3，存在一条从 s 到 V^{k-1} (*i*,*ℓ*) 中每个顶点的路径；根据引理B.4，存在一条从 V^{k-1} (*i*,*r*) 中每个顶点到 t 的路径。结合上述所有路径，即可得到 $H \setminus F$ 中一条从 s 到t 的路径。

□

情况 2。 现在我们来考虑情况 2，它更加复杂。在情况 2 中，存在某个层级 h ，使得 F中的边并非都位于同一个 h-分量内；但在层级 $h-1$， F中的边都位于同一个 $h-1$-分量内。令 R_j^{h-1}为这个（$h-1$）-分量。接下来，我们将重点讨论 G的故障子链。

定义 5。 G 的故障子链 是R_j^{h-1}的（$V^{h-1}{}_{(j,\ \ell)}\ V^{h-1}{}_{(j,\ r)}$） h-链。令 R_0，……， R_p 为故障子链的 h-分量，并令 S_0，……， S_{p-1} 为与故障子链中的分量相邻的重要分隔集。注意，R_j^{h-1}的左分隔集和右分隔集不包含在故障子链中。

我们将证明，移除所有故障后，故障子链中存在一条从 $V_{(0,\ell)}$ 到 $V_{(p,r)}$ 的路径。结合引理 B.3 和 B.4，这足以证明：给定 $G \setminus F$中的一条 st 路径，就存在一条 $H \setminus F$中的 st 路径。

我们先给出一些有用记号和定义。我们将故障子链的前缀子链记为如下形式。令 L_i 为 $\cup_{k=0}^{i} R_k$中的所有顶点。令 L_i^G为 G 中由 L_i诱导的子图，并令 L_i^H为由 L_i诱导的 H 的子图。令 f_i 为 L_i^G中的边故障数量。

令 $i \leq m$。一般而言，如果在 $L_m^G \setminus F$（在 $L_m^H \setminus F$中）中存在一条从 $X \subseteq V_{(i,\ell)}$ 中的某个顶点到 $V_{(m,r)}$ 中与 e关联的顶点的路径，且该路径只使用从 G_i^h到 G_m^h的子链中的边，我们就称故障子链中的边 $e \in S_m$ 可从 $L_m^G \setminus F$中的顶点集 $X \subseteq V_{(i,\ell)}$（在 $L_m^H \setminus F$中）“可达”。注意，即使 $e \in F$， e 也可视为可达。我们还用 S_i^G（S_i^H）表示 S_i 中可从 $V_{(0,\ell)}$ 在 $L_i^G \setminus F$中（在 $L_i^H \setminus F$中）到达的边集。也就是说，如果在 $L_i^G \setminus F$中（在 $L_i^H \setminus F$中）存在一条从 $V_{(0,\ell)}$ 到 $V_{(i,r)}$ 中与e关联的顶点的路径，那么边 e 就属于S_i^G（ S_i^H）。在下一个引理中，我们将证明 S_i^G的大小下界。

引理 B.6 ($|S_i^G|$的下界**)**。 假设 $G \setminus F$ 中存在一条 st 路径。令 L_i^G 为故障子链的一个前缀子链，满足 $i \neq p$，并令 f_i 表示 L_i^G 中边故障的数量。边集 S_i^G 的大小至少为 $h - f_i$。

证明。令 $F_i \subseteq F$ 为子链 L_i^G 中故障边的集合，其中 $i \neq p$。为导出矛盾，假设 $|S_i^G| < h - f_i$。注意，边集 $F_i \cup S_i^G$ 分隔了 $V_{(0,\ell)} = V_{j\,\ell}^{h-1}$**(** **,** **)** 和 $V_{(p,r)} = V_{j\,r}^{h-1}$**(** **,** **)**。然而， $F_i \cup S_i^G$ 的大小至多为 $f_i +$**(**$h - f_i - 1$**)** $= h - 1$。这意味着 $F_i \cup S_i^G$ 是一个大小至多为 $h - 1$ 的 **(**V^{h-1}**(**j**,**ℓ**)** V^{h-1}**(**j**,**r**)** **)**-分隔集。这就产生了矛盾，因为 R_j^{h-1} 是一个 **(**$h - 1$**)**-分量，不可能存在大小不超过 $h - 1$ 的 **(**V^{h-1}**(**j**,**ℓ**)** V^{h-1}**(**j**,**r**)** **)**- 分隔集。因此， S_i^G 的大小至少为 $h - f_i$。

□

对于故障子链中的任意子图 G_i^h，只要满足 $0 < i < p$，我们就给出任意两个顶点集 $X \subseteq V_{(i,\ell)}$ 和 $Y \subseteq V_{(i,r)}$之间边不相交路径数量的下界。

引理 B.7（边不相交路径下界）。 设 R_i 是故障子链中的一个 h-分量，满足 $i \neq 0$ 和 $i \neq p$。设 $X \subseteq V_{(i,\ell)}$ 和 $Y \subseteq V_{(i,r)}$，并设 S_X 和 S_Y 分别是 S_{i-1}和 S_i 中与 X和 Y中的顶点相邻的边。设 $d = \max(0, k + |S_X| +|S_Y| - |S_{i-1}| - |S_i|)$。在子图 G_i^h中，存在至少 $d - k + h$ 条从 X 到 Y的边不相交路径。

证明。 假设为了导出矛盾，从 X 到 Y在子图 G_i^h中至多存在 $d-k+h-1$ 条边不相交路径，其中 $i \neq 0$ 且 $i \neq p$。那么存在一个大小至多为 $d - k + h - 1$ 的边集 E'，使得 X 和 Y 在 $G_i^h \setminus E'$中不连通。令 $E_X = S_{i-1} \setminus S_X$，并令 $E_Y = S_i \setminus S_Y$。注意到 $E' \cup E_X \cup E_Y$分隔了 $V_{(0,\ell)} = V_{j\,\ell}^{h-1}{}_{(,\ )}$ 和 $V_{(p,r)} = V_{j\,r}^{h-1}{}_{(,\ )}$。我们给出 $E' \cup E_X \cup E_Y$中边数的上界：

$$\begin{aligned}
|E' \cup E_X \cup E_Y| &= |E'| + |E_X| + |E_Y| \\
&\leq (d - k + h - 1) + (|S_{i-1}| - |S_X|) + (|S_i| - |S_Y|) \\
&= k + |S_X| + |S_Y| - |S_{i-1}| - |S_i| - k + h - 1 + |S_{i-1}| - |S_X| + |S_i| - |S_Y| \\
&= h - 1.
\end{aligned}$$

我们已经证明， $E' \cup E_X \cup E_Y$是一个大小至多为 $h-1$的 $(V^{h-1}{}_{(j,\ \ell)} V^{h-1}{}_{(j,\ r)})$-分隔集。这是一个矛盾，因为 R_j^{h-1}不可能有大小为 $h-1$ 或更小的 $(V^{h-1}{}_{(j,\ \ell)} V^{h-1}{}_{(j,\ r)})$-分隔集。因此，从 X到 Y至少存在 $d-k+h$ 条边不相交路径。 □

以下引理是证明充分条件的关键。该引理给出了 S_i^H 在 $i \neq p$ 时规模的保证。稍后，我们将利用该引理论证，在移除故障后，故障子链中的 $V_{(p,r)}$ 至少有一个顶点可从 $V_{(0,\ell)}$ 可达。下文中，我们令 $r_i = k-1-f_i$ 表示位于 $(\cup_{k=i}^{p-1} S_k) \cup (\cup_{k=i+1}^{p} E(R_k))$ 中的边故障的最大数量（也就是说，不在 L_i^G 中的边故障的最大数量）。

引理 B.8（关于 S_i^H在 $i \neq p$时的性质）。 假设 $G \setminus F$ 中存在一条 st 路径。令 L_i^G 为满足 $i \neq p$ 的前缀子链，并令 $r_i = k-1-f_i$。那么，以下至少有一项成立：

1. $S_i^H = S_i^G$2.
$|S_i^H| \geq r_i + 1$。

证明。我们 对 i进行归纳证明，其中 R_i 是故障子链的一个分量。

基本情形。 考虑故障子链的 R_0 。我们将证明 $S_0^H = S_0^G$ 或$|S_0^H| \geq r_0 + 1$成立。令 $F_R = F \cap E$（R_0）为两个端点都在 R_0中的故障边集，并令$f_R = |F_R|$。我们用 S_{-1} 表示 $V_{(0,\ell)}$的左分隔集。

利用定理 4.2陈述中给出的 RSND 需求，我们将证明对于某些顶点子集 $Y \subseteq V_{(0,r)}$，存在一个 RSND 需求（$V_{(0,\ell)}, Y, d$），使得 $d > f_R$。利用从 $V_{(0,\ell)}$ 到这些子集 $Y \subseteq V_{(0,r)}$ 的 RSND 需求，我们将证明 $S_0^H = S_0^G$或$|S_0^H| = r_0 + 1$成立。回顾一下，对于顶点集 $Y \subseteq V_{(0,r)}$， S_Y是 S_0 中与 Y 中的顶点关联的边集。我们首先证明，对于所有满足 $|S_Y| \geq h - r_0$的子集 $Y \subseteq V_{(0,r)}$，都存在一个 RSND 需求（$V_{(0,\ell)}, Y, d$），使得 $d > f_R$。如果 $Y = V_{(0,r)}$，那么无论 $|S_Y|$的值如何，RSND 需求（$X, Y, k-1$）在 H_0^h中都得到满足。由于 $f_R \leq k-2$（回顾一下，故障边并非全部位于故障子链中的同一个 h-分量内），因此 RSND 需求（X, Y, f_R+1）在 H_0^h中得到满足。现在我们考虑满足 $Y \neq V_{(0,r)}$的 Y。在这种情况下，令 $Y \subseteq V_{(0,r)}$ 满足 $|S_Y| \geq h - r_0$，并令 $X = V_{(0,\ell)}$。由于故障子链至少由两个 h-分量组成，因此 $|S_0| = h$。将 $|S_X| = |S_{-1}|$、 $|S_Y| \geq h - r_0$和 $|S_0| = h$ 代入 $d = \max(0, k + |S_X| + |S_Y| - |S_{-1}| - |S_0|)$，得到：

$$
\begin{aligned}
d &= \max(0, k + |S_X| + |S_Y| - |S_{-1}| - |S_0|) \\
&\geq k + |S_X| + |S_Y| - |S_{-1}| - |S_0| \\
&\geq k + (h - r_0) - (h) && (|S_X| = |S_{-1}|,\ |S_Y| \geq h - r_0,\ |S_0| = h) \\
&= k - r_0 \\
&= k - k + 1 + f_0 && (r_0 = k - 1 - f_0) \\
&= f_0 + 1 \\
&\geq f_R + 1. && (f_0 \geq f_R)
\end{aligned}
$$

我们有，若$|S_Y| \geq h - r_0$，则 G_0^h 上的 RSND 需求（$V_{(0,\ell)}$， Y， f_R+1）由 H_0^h 满足。现在我们考虑两种情况，并证明在第一种情况下（1）， $|S_0^H| \geq r_0 + 1$；在第二种情况下（2），$S_0^H = S_0^G$。

- （1）首先，假设 $|S_0^G| > r_0$。这意味着 $G_0^h \setminus F_R$ 中 S_0 里从 $V(0,\ell)$ 不可达的边集 $S_0 \setminus S_0^G$，其大小至多为 $|S_0| - r_0 - 1 = h - r_0 - 1$。令 $Y \subseteq V(0,r)$ 满足 $|S_Y| \geq h - r_0$。那么， S_Y 必须至少包含 S_0^G 中的一条边，因此 Y 中至少有一个顶点与 S_0^G 中的一条边相接。由此， $G_0^h \setminus F_R$ 中存在一条从 $V(0,\ell)$ 到 Y 的路径。我们已证明，对于所有满足 $|S_Y| \geq h - r_0$ 的 $Y \subseteq V(0,r)$，$G_0^h \setminus F$ 中都存在一条从 $V(0,\ell)$ 到 Y 的路径。我们还知道， G_0^h 上的 RSND 需求 $\{(V(0,\ell), Y, f_R + 1): Y \subseteq V(0,r)\ |S_Y| \geq h - r_0\}$ 在 H_0^h 中均得到满足。因此，若 $|S_Y| \geq h - r_0$，则在 $H_0^h \setminus F_R$ 中也存在一条从 $V(0,\ell)$ 到集合 $Y \subseteq V(0,r)$ 的路径。

  假设为了导出矛盾， $|S_0^H| < r_0 + 1$。这意味着 $S_0 \setminus S_0^H$的大小至少为 $h - r_0$。在 $H_0^h \setminus F_R$中，$S_0 \setminus S_0^H$从 $V_{(0,\ell)}$ 不可达。然而，由于$|S_0 \setminus S_0^H| \geq h - r_0$，在 $H_0^h \setminus F_R$ 中必定存在一条从 X 到 U的路径，其中 U 是与 $S_0 \setminus S_0^H$中的至少一条边相接的顶点集。这就产生了矛盾，因此 S_0^H的大小至少为 $r_0 + 1$。

- (2) 现在假设$|S_0^G| \leq r_0$。这意味着$S_0 \setminus S_0^G$的大小至少为 $h - r_0$。令 e为 S_0^G中的一条边。此外，令 $E_U \subseteq S_0 \setminus S_0^G$，使得 E_U的大小至少为 $h - r_0 - 1$。令 $S_e = \{e\} \cup E_U$。令 Y_e 为 $V(0,r)$中与 S_e中的至少一条边相接的顶点集，并令 v_e 为 Y_e 中与 e相接的顶点。令 S_{Y_e} 为 S_0中与 Y_e 中的某个顶点相接的边集（注意， $S_e \subseteq S_{Y_e}$）。由于 S_e 的大小至少为 $h - r_0$且 $|S_{Y_e}| \geq |S_e|$，因此 G_0^h 上的 RSND 需求（$V(0,\ell)$ Y_e, $f_R + 1$）在 H_0^h中得到满足。边 e 是 S_e 中唯一一条在 $G_0^h \setminus F_R$中从 $V(0,\ell)$可达的边，这意味着 v_e 是 Y_e 中唯一一个在 $G_0^h \setminus F_R$中从 $V(0,\ell)$可达的顶点。RSND 需求（$V(0,\ell)$ Y_e, $f_R + 1$）在 H_0^h中得到满足。满足此需求的唯一方式是，在 $H_0^h \setminus F_R$中存在一条从 $V(0,\ell)$到 v_e （进而到 e）的路径。将此论证应用于所有 $e \in S_0^G$，在 H_0^h 中必定存在一条从 $V(0,\ell)$到 S_0^G中每条边的路径，因此 $S_0^H = S_0^G$。

我们已经证明，如果 $|S_0^G| \geq r_0 + 1$，那么 $|S_0^H| \geq r_0 + 1$；并且如果 $|S_0^G| \leq r_0$，那么 $S_0^H = S_0^G$。

归纳步骤。现在我们将证明，当 $i \neq p$ 时，如果引理对于 R_{i-1} 成立，那么它对于 R_i 也成立。令 $F_S = F \cap S_{i-1}$ 为 R_i 的左分隔集中的故障边集。令 $F_R = F \cap E(R_i)$、 $f_S = |F_S|$ 和 $f_R = |F_R|$。我们还令 X 为 $V_{(i,\ell)}$ 中至少与 $S_{i-1}^H \setminus F_S$ 中的一条边关联的顶点集。如果在 $G \setminus F$ 中存在一条从 $V_{(0,\ell)}$ 到 v 的路径，并且该路径只使用 $L_{i-1}^G \cup S_{i-1}$ 中的边，则顶点 $v \in V_{(i,\ell)}$ 属于 X。我们还令 S_X 为 S_{i-1} 中与 X 中某个顶点关联的边集。注意， $S_{i-1} \setminus F_S \subseteq S_X$。回顾一下，$f_{i-1}$ 是 L_{i-1}^G 中故障的数量，并且 $r_{i-1} = k - 1 - f_{i-1}$。根据归纳假设，我们分两种情况讨论：(1) $S_{i-1}^H = S_{i-1}^G$，或 (2) $|S_{i-1}^H| \geq r_{i-1} + 1$。

- (1) 首先假设 $S_{i-1}^H = S_{i-1}^G$。与基本情形一样，我们首先证明，对于所有满足 $|S_Y| \geq h - r_i$ 的 $Y \subseteq V(i,r)$，都存在一个 RSND 需求 (X, Y, d)，其中 $d > f_R$，且该需求在 H_i^h 中得到满足。同样，如果 $(X, Y) = (V(i,\ell)\ V(i,r))$，那么 RSND 需求 $(X, Y, f_R + 1)$ 在H_i^h中得到满足。现在考虑满足 $(X, Y) \neq (V(i,\ell)\ V(i,r))$ 的 X和 Y。在这种情况下，令 $Y \subseteq V(i,r)$ 满足 $|S_Y| \geq h - r_i$。由于 $i - 1 \neq p$，根据引理 B.6，我们有 $|S_{i-1}^G| \geq h - f_{i-1}$。因此， $|S_X| \geq |S_{i-1}^H \setminus F_S| = |S_{i-1}^G \setminus F_S| \geq |S_{i-1}^G| - f_S \geq h - f_{i-1} - f_S$。另请注意，由于$0 < i < p$，我们有 $|S_{i-1}| = |S_i| = h$。代入 $|S_X| \geq h - f_{i-1} - f_S$, $|S_Y| \geq h - r_i$,

并将 $|S_{i-1}| = |S_i| = h$ 代入 $d = \max(0, k + |S_X| + |S_Y| - |S_{i-1}| - |S_i|)$，得到如下结果：

$$\begin{aligned}
d &= \max(0, k + |S_X| + |S_Y| - |S_{i-1}| - |S_i|) \\
&\geq k + |S_X| + |S_Y| - |S_{i-1}| - |S_i| \\
&\geq k + (h - f_{i-1} - f_S) + (h - r_i) - |S_{i-1}| - |S_i| && (|S_X| \geq h - f_{i-1} - f_S,\ |S_Y| \geq h - r_i) \\
&= k + h - f_{i-1} - f_S + h - r_i - (h) - (h) && (|S_{i-1}| = |S_i| = h) \\
&= k - f_{i-1} - f_S - r_i \\
&= k - f_{i-1} - f_S - k + 1 + f_{i-1} + f_S + f_R && (r_i = k - 1 - f_{i-1} - f_S - f_R) \\
&= f_R + 1.
\end{aligned}$$

我们已经证明，如果 $Y \subseteq V_{(i,r)}$ 和 $|S_Y| \geq h - r_i$，则 G_i^h 上的 RSND 需求（X，Y，$f_R + 1$）由 H_i^h 满足。其余论证与基本情形完全相同。

- (2) 现在假设 $|S_{i-1}^H| \geq r_{i-1} + 1$。我们首先证明，对于所有满足 $|S_Y| \geq h - r_i$ 的 $Y \subseteq V_{(i,\ r)}$，G_i^h 中从 X 到 Y 至少有 $f_R + 1$ 条边不相交路径。接着，与前一种情形一样，我们将证明，对于所有满足 $|S_Y| \geq h - r_i$ 的 $Y \subseteq V_{(i,\ r)}$，G_i^h 上的 RSND 需求（X，Y，$f_R + 1$）在 H_i^h 中得到满足。由于 $0 < i < p$，根据引理 B.7，在 G_i^h 中，从 $X \subseteq V_{(i,\ \ell)}$ 到 $Y \subseteq V_{(i,\ r)}$ 至少有 $d - k + h$ 条边不相交路径，其中 $d = \max(0, k + |S_X| + |S_Y| - |S_{i-1}| - |S_i|)$。此外，$|S_X| \geq |S_{i-1}^H| - f_S \geq r_{i-1} + 1 - f_S$。将 $|S_X| \geq r_{i-1} + 1 - f_S$、$|S_Y| \geq h - r_i$ 和 $|S_{i-1}| = |S_i| = h$ 代入 $d = \max(0, k + |S_X| + |S_Y| - |S_{i-1}| - |S_i|)$，得到：

$$\begin{aligned}
d - k + h &= \max(0, k + |S_X| + |S_Y| - |S_{i-1}| - |S_i|) - k + h \\
&\geq k + |S_X| + |S_Y| - |S_{i-1}| - |S_i| - k + h \\
&\geq (r_{i-1} + 1 - f_S) + (h - r_i) - |S_{i-1}| - |S_i| + h \\
& && (|S_X| \geq r_{i-1} + 1 - f_S,\ |S_Y| \geq h - r_i) \\
&= r_{i-1} + 1 - f_S + h - r_i - (h) - (h) + h && (|S_{i-1}| = |S_i| = h) \\
&= r_{i-1} + 1 - f_S - r_i \\
&= (r_i + f_R + f_S) + 1 - f_S - r_i && (r_{i-1} = r_i + f_R + f_S) \\
&= f_R + 1.
\end{aligned}$$

我们已经证明，如果 $Y \subseteq V_{(i,r)}$ 和 $|S_Y| \geq h - r_i$，那么 $d - k + h \geq f_R + 1$。这意味着，在 G_i^h 中，如果 $Y \subseteq V_{(i,r)}$ 和 $|S_Y| \geq h - r_i$，则从 X 到 Y 至少有 $f_R + 1$ 条边不相交路径。因此，在 $G_i^h \setminus F_R$ 中，存在一条从 X 到所有 $Y \subseteq V_{(i,r)}$ 的路径，使得 $|S_Y| \geq h - r_i$。与之前一样，如果 $(X,\ Y) = (V_{(i,\ell)},\ V_{(i,r)})$，那么 RSND 需求 $(X,\ Y,\ f_R + 1)$ 在 H_i^h 中得到满足。现在我们证明，当 $(X,\ Y) \neq (V_{(i,\ell)},\ V_{(i,r)})$ 时，这一需求也得到满足：

$$\begin{aligned}
d - k + h \geq f_R + 1 \implies d &\geq f_R + 1 + k - h \\
&\geq f_R + 1. && (k - h > 0)
\end{aligned}$$

因此，若 $Y \subseteq V_{(i,r)}$ 满足 $|S_Y| \geq h - r_i$，则 G_i^h 上的 RSND 需求（X，Y，$f_R + 1$）由 H_i^h 满足。结合在 $G_i^h \setminus F_R$ 中存在一条从 X 到所有满足 $|S_Y| \geq h - r_i$ 的 $Y \subseteq V_{(i,r)}$ 的路径这一事实，可知在 $H_i^h \setminus F_R$ 中存在一条从 X 到所有满足 $|S_Y| \geq h - r_i$ 的 $Y \subseteq V_{(i,r)}$ 的路径。现在，为了导出矛盾，假设 $|S_i^H| \leq r_i$。这意味着 $S_i \setminus S_i^H$ 的大小至少为 $h - r_i$。在 $H_i^h \setminus F_R$ 中，从 X 无法到达集合 $S_i \setminus S_i^H$。然而，由于 $|S_i \setminus S_i^H| \geq h - r_i$，在 $H_i^h \setminus F$ 中必定存在一条从 X 到 U 的路径，其中 U

是与 $S_i \setminus S_i^H$中的至少一条边关联的顶点集合。这就产生了矛盾。因此，我们得到 $|S_i^H| \geq r_i + 1$。

我们已经证明，对于所有满足 $i \neq p$ 的 i， $S_i^H = S_i^G$ 或 $|S_i^H| \geq r_i + 1$ 必有其一。 □

现在我们使用引理 B.8 来证明，故障子链中存在一条路径，从 $V_{(0,r)}$ 到 $V_{(p,r)}$ 中至少一个顶点。证明使用了与引理 B.8 中类似的论证。

引理 B.9。假设 设 $G \setminus F$ 中存在一条 st 路径。从 $V_{(0,r)}$ 到 $V_{(p,r)}$ 存在一条路径，该路径位于 $L_p^H \setminus$ 中 F.

证明。 注意，由于 F 不包含在单个 h-分量中，故障子链至少有两个连通分量，因此分量 R_{p-1} 必然存在。设 $F_S = F \cap S_{p-1}$、 $F_R = F \cap E$（R_p）、 $f_S = |F_S|$和 $f_R = |F_R|$。令 X 为 $V_{(p,\ell)}$ 中与 $S_{p-1}^H \setminus F_S$ 中至少一条边相接的顶点集。此外，令 S_X 为 S_{p-1} 中与 X 中某个顶点相接的边集，并令 S_p 表示 R_p 的右分隔集。根据引理 B.8，以下情况之一成立：(1) $|S_{p-1}^H| = |S_{p-1}^G|$或 (2) $|S_{p-1}^H| \geq r_{p-1} + 1$。

- (1) 首先，假设 $|S_{p-1}^H| = |S_{p-1}^G|$。在 $G \setminus F$ 中存在一条 st 路径；因此，在 $G_p^h \setminus F_R$ 中存在一条从 X 到 V（p，r）的路径。现在我们证明， G_p^h 上的 RSND 需求（X， V（p，r） $f_R + 1$）在 H_p^h 中得到满足。如果 $X = V$（p，ℓ），则 RSND 需求（X， V（p，r） $f_R + 1$）得到满足。现在假设 $X \neq V$（p，ℓ）。根据引理 B.6，我们有 $|S_{p-1}^G| \geq h - f_{p-1}$。因此，我们有 $|S_X| \geq |S_{p-1}^H \setminus F_S| = |S_{p-1}^G \setminus F_S| \geq h - f_{p-1} - f_S$。令 $Y = V$（p，r）。我们将$|S_X| \geq h - f_{p-1} - f_S$、$|S_Y| = |S_p|$和 $|S_{p-1}| = h$ 代入 $d =$max(0， $k+|S_X|+|S_Y|-|S_{p-1}|-|S_p|$)：

$$\begin{aligned}
d &= \max(0, k + |S_X| + |S_Y| - |S_{p-1}| - |S_p|) \\
&\geq k + |S_X| + |S_Y| - |S_{p-1}| - |S_p| \\
&\geq k + (h - f_{p-1} - f_S) - (h) && (|S_X| \geq h - f_{p-1} - f_S,\ |S_Y| = |S_p|,\ |S_{p-1}| = h) \\
&= k - f_{p-1} - f_S \\
&\geq k - k + 1 + f_S + f_R - f_S && (f_{p-1} \leq k - 1 - f_S - f_R) \\
&= f_R + 1.
\end{aligned}$$

我们已经证明， G_p^h上的 RSND 需求（X， $V_{(p,r)}$， $f_R + 1$）在 H_p^h中得到满足。由于 $G_p^h \setminus F_R$中存在一条从 X到 $V_{(p,r)}$的路径，这意味着 $H_p^h \setminus F_R$中也必定存在一条从 X 到 $V_{(p,r)}$的路径。结合引理 B.8，可推出存在一条从 $V_{(0,\ell)}$ 到 $V_{(p,r)}$的路径。

- (2) 现在假设 $|S_{p-1}^H| \geq r_{p-1} + 1$。这意味着 $|S_X| \geq r_{p-1} + 1 - f_S$。我们首先证明，在 G_p^h 中，从 X 到 V（p,r）至少有 $f_R + 1$ 条边不相交路径。反设从 X 到 V（p,r）至多有 f_R 条边不相交路径。那么存在一个大小至多为 f_R 的集合 E'，使得 X 和 V（p,r）在 $G_p^h \setminus E'$ 中不连通。令 $E_X = S_{p-1} \setminus S_X$。注意， $E' \cup E_X$ 分隔了 V(0,ℓ)、 $= V^{h-1}$（j,ℓ）和 V（p,r）与 $= V^{h-1}$（j,r）。我们给出 $E' \cup E_X$ 中边数的一个上界：

$$\begin{aligned}
|E' \cup E_X| &= |E'| + |E_X| \\
&\leq f_R + (|S_{p-1}| - |S_X|) \\
&\leq f_R + h - r_{p-1} - 1 + f_S && (|S_{p-1}| = h,\ \ |S_X| \geq r_{p-1} + 1 - f_S) \\
&\leq f_R + h - f_R - f_S - 1 + f_S && (r_{p-1} \geq f_R + f_S) \\
&= h - 1.
\end{aligned}$$

我们已经证明，$E' \cup E_X$ 是一个大小至多为 $h-1$ 的（$V^{h-1}_{(j,\ell)}$ $V^{h-1}_{(j,r)}$）-分隔集。这就产生了矛盾，因为 R^{h-1}_j 不可能有大小为 $h-1$ 或更小的（$V^{h-1}_{(j,\ell)}$ $V^{h-1}_{(j,r)}$）-分隔集。因此，在 G^h_p 中，从 X 到 $V_{(p,r)}$ 至少有 f_R+1 条边不相交路径。这意味着在 $G^h_p \setminus F_R$ 中，存在一条从 X 到 $V_{(p,r)}$ 的路径。现在我们证明 RSND 需求（$X, V_{(p,r)}, f_R+1$）在 H^h_p 中得到满足。和之前一样，如果 $X = V_{(p,\ell)}$，则该需求得到满足。假设 $X \neq V_{(p,\ell)}$。将 $|S_X| \geq r_{p-1}+1-f_S$、$|S_Y| = |S_p|$ 和 $|S_{p-1}| = h$ 代入 $d = \max(0, k+|S_X|+|S_Y|-|S_{p-1}|-|S_p|)$，得到如下结果：

$$
\begin{aligned}
d &= \max(0, k+|S_X|+|S_Y|-|S_{p-1}|-|S_p|) \\
&\geq k+|S_X|+|S_Y|-|S_{p-1}|-|S_p| \\
&\geq k+(r_{p-1}+1-f_S)-h && (|S_X| \geq r_{p-1}+1-f_S,\ |S_Y|=|S_p|,\ |S_{p-1}|=h) \\
&\geq k+(f_R+f_S)+1-f_S-h && (r_{p-1} \geq f_R+f_S) \\
&= f_R+1+k-h \\
&\geq f_R+1. && (k-h>0)
\end{aligned}
$$

我们已经证明，G^h_p 上的 RSND 需求（X，$V_{(p,r)}$，f_R+1）由 H^h_p 满足。由于 $G^h_p \setminus F_R$ 中存在一条从 X 到 $V_{(p,r)}$ 的路径，这意味着 $H^h_p \setminus F_R$ 中也必定存在一条从 X 到 $V_{(p,r)}$ 的路径。结合引理 B.8，可知存在一条从 $V_{(0,\ell)}$ 到 $V_{(p,r)}$ 的路径。

□

推论 B.10。假设分层 k-链分解中适用情况 *2*；也就是说，存在某个层级 h，使得 F 中的边并非全部位于同一个 h-分量内，但在层级 $h-1$，F 中的边位于单个 $(h-1)$-分量内。假设 $G \setminus F$ 中存在一条 st 路径。那么，$H \setminus F$ 中存在一条 st 路径。

证明。假设 s 和 t 都不在故障子链中。根据引理B.3，$H \setminus F$ 中存在一条从 s 到 $V_{(0,\ell)}$ 中每个顶点的路径，且只使用从 s 开始并在 $V_{(0,\ell)}$ 结束的层级 h 子链中的边。由于 $L^G_p \setminus F$ 中必定存在一条从 $V_{(0,\ell)}$ 到 $V_{(p,r)}$ 的路径，根据引理 B.9，$L^H_p \setminus F$ 中也存在一条从 $V_{(0,\ell)}$ 到 $V_{(p,r)}$ 的路径。最后，根据引理B.4，$H \setminus F$ 中存在一条从 $V_{(p,r)}$ 中每个顶点到 t 的路径，且只使用从 $V_{(p,r)}$ 开始并在 t 结束的层级 h 子链中的边。将上述所有路径合并，可得 $H \setminus F$ 中一条从 s 到 t 的路径。如果 s 或 t 在故障子链中，则通过类似论证可知，$H \setminus F$ 中存在一条 st 路径。 □

结合引理 B.5（情况 1）和推论 B.10（情况 2），我们已经证明：如果 H 满足定理 4.2 中指定的需求集合，那么 H 就是 SD-k-RSND 的可行解。

C 引理 4.3 的证明

引理 4.3 的证明。固定分层 k-链分解中的层级 h。对于每个 i，令 H^h_i 表示由 R^h_i 诱导的 H 的子图，并令 G^h_i 表示由 R^h_i 诱导的 G 的子图。我们将证明 H 满足定理 4.2 中陈述的条件，因此是可行的。根据构造，H 包含 S，也就是包含所有重要分隔集中的边。首先，我们证明 RSND 需求集合 $\{(X,Y,d):\ X \subseteq V^h_{(i,\ell)}\ Y \subseteq V^h_{(i,r)}, (X,Y) \neq (V^h_{(i,\ell)} V^h_{(i,r)})\ d = \max(0, k+|S_X|+|S_Y|-|S^h_{i-1}|-|S^h_i|)\}$ 在 G^h_i 上的需求均由 H^h_i 满足。

令 $X \subseteq V^h_{(i,\ell)}$、$Y \subseteq V^h_{(i,r)}$ 和 $d = \max(0, k+|S_X|+|S_Y|-|S_{i-1}|-|S_i|)$，如定理 4.2 所示。首先，我们证明对于所有满足 $d=1$ 的 X, Y 对，G^h_i 上的 RSND 需求（X, Y, d）均得到满足

在 H_i^h 中。如果 G_i^h 中存在一条从 X 到 Y 的路径，我们就在 H_i^h 中加入一条从 X 到 Y 的路径。因此，需求 $(X, Y, 1)$ 得到满足。

现在我们证明，对于所有满足 $1 < d < k$ 的 X, Y 对，G_i^h 上的 RSND 需求 (X, Y, d) 在 H_i^h 中均得到满足。我们将通过在收缩后的 X 和收缩后的 Y 上运行 SD-d-RSND 算法所选取的所有边都纳入 H_i^h，其需求为 d。因此，需求 (X, Y, d) 得到满足。我们已经证明，若 $d < k$，则 RSND 需求 (X, Y, d) 得到满足。由于所有满足 $(X, Y) \neq (V^h_{(i,\ell)}, V^h_{(i,r)})$ 的 X, Y 对的需求至多为 $k-1$，我们已经证明，需求集合 $\{(X, Y, d) : X \subseteq V^h_{(i,\ell)}, Y \subseteq V^h_{(i,r)}, (X, Y) \neq (V^h_{(i,\ell)}, V^h_{(i,r)}), d = \max(0, k + |S_X| + |S_Y| - |S^h_{i-1}| - |S^h_i|)\}$ 在 G_i^h 上的需求在 H_i^h 中均得到满足。

现在我们证明，$(V^h_{i(,\ell)}, V^h_{(i,r)}, k-1)$ 上的 RSND 需求在 H_i^h中得到满足。我们将通过对收缩后的 $V^h_{(i,\ell)}$ 以及收缩后的$V^h_{(i,r)}$ 运行 SD-$(k-1)$-RSND 算法所选取的所有边都纳入 H_i^h，其需求为 $k-1$。因此，需求 $(V^h_{(i,\ell)}, V^h_{(i,r)}, k-1)$ 得到满足。

最后，我们证明$(V^h_{i(,\ell)}, V^h_{(i,r)}, h+1)$上的 RSND 需求在 H_i^h中得到满足。根据分层 k-链分解的构造，在 G_i^h中，从 $V^h_{(i,\ell)}$ 到 $V^h_{(i,r)}$ 至少存在 $h+1$条边不相交路径。因此，要证明 RSND 需求在 H_i^h中得到满足，只需证明在 H_i^h中，从 $V^h_{(i,\ell)}$到 $V^h_{(i,r)}$ 存在 $h+1$条边不相交路径。在 H_i^h中，我们纳入了通过最小费用流算法从收缩后的 $V^h_{(i,\ell)}$ 到收缩后的 $V^h_{(i,r)}$、流量为 $h+1$时所选取的边。由于在 G_i^h中，从 $V^h_{(i,\ell)}$ 到 $V^h_{(i,r)}$ 存在 $h+1$ 条边不相交路径，因此最小费用流实例必定有可行解，且该算法将返回从 $V^h_{(i,\ell)}$ 到$V^h_{(i,r)}$ 的 $h+1$ 条边不相交路径（即非零流量边的集合）。

□

D k-边故障容忍子图 2-近似的简化

如前所述，[17] 给出了 k-边故障容忍子图的 2-近似。他们指出，尽管由 k-边故障容忍子图定义的“割需求”函数并非弱超模（因此无法以黑盒方式应用 [26] 的算法），但它具有他们称为“局部弱超模性”的性质，足以使用 [26]。然而，这种方法相对复杂，需要对割需求函数进行仔细的分类讨论。我们将在此证明，可以使用更标准的技术，以简单得多的方式获得相同结果。

D.1 弱 $\mathcal{F}$-超模的定义与性质

首先给出一些预备定义。两个集合 A、B **交叉** 当且仅当 $A \cap B \neq \emptyset$ 和 $A \cup B \neq V$；若 $A \setminus B$、$B \setminus A \neq \emptyset$，则称它们**余交叉** 。给定 A、$B \in \mathcal{F}$，我们称 f 满足：

- **超模不等式**当 $f(A) + f(B) \geq f(A \cap B) + f(A \cup B)$。
- **余超模不等式**当 $f(A) + f(B) \geq f(A \setminus B) + f(B \setminus A)$。

集合函数 f 是**对称的** 当 $f(A) = f(V \setminus A)$ 对所有 $A \subseteq V$均成立，且 f 是：

- **交叉超模** 当 f 满足超模不等式，且对满足 A、B 交叉的情形均成立。
- **弱超模** 当 f 对所有 A、$B \subseteq V$均满足超模不等式或余超模不等式。

注意，如果 f 是对称交叉超模且 A，B 余交叉，那么（根据对称性） f 满足余超模不等式。

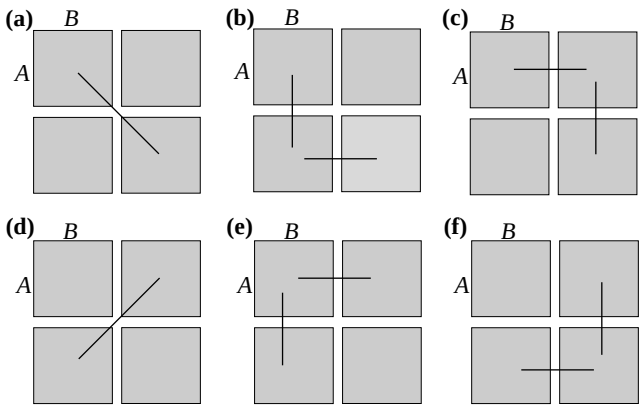


图4：引理 D.1 证明示意图。

给定一个满足 $\emptyset,\ V \notin \mathcal{F}$的集合族 $\mathcal{F}$，我们可能希望考虑 f在 $\mathcal{F}$中各集合上的限制 $f_{\mathcal{F}}$。如果 $f_{\mathcal{F}}$ 是弱超模的，也就是说，对于所有$A,\ B \in \mathcal{F}$ 以下条件至少有一个成立，我们就称 f 是**弱 $\mathcal{F}$-超模**的:

- $A \cap B,\ A \cup B \in \mathcal{F}$和 f 满足超模不等式。
- $A \setminus B,\ B \setminus A \in \mathcal{F}$和 f 满足余超模不等式 .

由 Jain 的结果可知，覆盖弱 $\mathcal{F}$-超模函数的问题具有 2 的近似比（假设我们能够在多项式时间内求解某些线性规划）。

引理 D.1。 设 $G = (V, E)$ 是一个图，设 $I \subseteq E$，且 f 是 $2^V \setminus \{\emptyset, V\}$上的对称交叉超模集合函数。那么，对于 $\mathcal{F} = \{A \subseteq V\colon d_I(A) \geq 1\}$， f是弱 $\mathcal{F}$-超模的。

证明。 设 $A, B \in \mathcal{F}$。那么在 $\delta_I(A)$ 中有一条边，在 $\delta_I(B)$ 中也有一条边。图4展示了这些边（至少一条）所有可能的位置。在情形 (a,b,c) 中， $A \cap B,\ A \cup B \in \mathcal{F}$和$A,\ B$交叉——因此 f满足超模不等式。在情形 (d,e,f) 中， $A \setminus B,\ B \setminus A \in \mathcal{F}$和 $A,\ B$ 余交叉——因此 f 满足余超模不等式。 □

注： 可以证明，如果 f 是对称交叉超模的，且 $\mathcal{F}$ 是**不可交叉**的（$A \cap B$、 $A \cup B \in \mathcal{F}$或 $A \setminus B$、$B \setminus A \in \mathcal{F}$，当 A、 $B \in \mathcal{F}$时），并且 $\emptyset$、 $V \notin \mathcal{F}$，那么 f是弱$\mathcal{F}$-超模的。证明的核心是说明 $\mathcal{F} = \{A \subseteq V\colon\ d_I(A) \geq 1\}$ 是不可交叉的。或者，我们也可以（大致地）说，如果 f 同时满足超模不等式和余超模不等式（当相关集合不为 $\emptyset$、 V时），那么 f是弱 $\mathcal{F}$-超模的。

D.2 k-边故障容忍子图 2-近似

现在，我们将弱 $\mathcal{F}$-超模这一概念应用于k-边故障容忍子图问题。请注意，k-边故障容忍子图是以下元问题的一个特例。

SET FUNCTION COVER输入： 一个图 $G = (V,\ E)$，带有边成本，以及定义在集合族 $\mathcal{F} \subseteq 2^V$上的集合函数 f。输出： 图 G的一个最小成本子图 H，使得 $d_H(A) \geq f(A)$。

设 $\mathcal{F} = 2^V \setminus \{\emptyset, V\}$。由引理 A.1 很容易看出，特别是对于 k-EFTS，我们必须覆盖集合函数 $f(A) = \min\{k, d_G(A)\}$，其中 $A \in \mathcal{F}$。如果我们已经选取一组边 F并将其加入解 H，那么我们需要覆盖剩余函数 $\min\{d_G(A)\ k\} - d_F(A)$。我们选取所有**强制边** ——即属于至多含有 k 条边的 G 的割的边。在迭代舍入算法中，我们可能还会选取其他边。因此，设 $F \subseteq E$ 为包含所有强制边的边集。满足 $\delta_E(A) \subseteq F$ 的割 $\delta_E(A)$ 无法也无需覆盖，因此我们需要覆盖的函数是 $f(A) = k - d_F(A)$（对于 $A \in 2^V \setminus \{\emptyset, V\}$）在集合族$\mathcal{F} = \{A \subseteq V$上的限制：$d_{E\setminus F}(A) \geq 1\}$。在引理 D.1 的设定中，此处有 $I = E \setminus F$。函数$k - d_F(A)$是对称交叉超模的，因为 $d_F(A)$ 是对称次模的。因此，根据引理 D.1，我们需要覆盖的函数是弱 $\mathcal{F}$-超模的。

定理 D.2. k-边故障容忍子图问题在任意成本下的近似比为2，在 $1+4/k$单位成本下的近似比为 $1+4/k$。

证明。 我们需要覆盖的集合函数是函数 $f(A) = k - d_F(A)$ 在集合族 $\mathcal{F} = \{A \subseteq V$ 上的限制：$d_{E\setminus F}(A) \geq 1\}$。根据引理 D.1，我们知道 f是弱 $\mathcal{F}$-超模的。其余证明与 [17] 中相同：可以在多项式时间内求解线性规划，因此可以应用迭代舍入。在任意成本的情况下，我们可以使用 Jain 的方法 [26], ；而在单位成本的情况下，则使用 Gabow-Gallagher [23]。 □