arXiv:2304.06721v1 [math.GN] 1 Mar 2023

广义参数度量空间的一些拓扑结果

Abhishikta Das[1] 和 T. Bag*[2]

[1,2]数学系，Siksha-Bhavana，Visva-Bharati，
Santiniketan-731235，Birbhum，西孟加拉邦，印度 电子邮箱[1]：
abhishikta.math@gmail.com 电子邮箱[2]：tarapadavb
@gmail.com[1]Orcid ID： https://orcid.org/0000-0002-2860-424X[2]
Orcid ID： https://orcid.org/0000-0002-8834-7097

摘要

本文引入了开球、闭球和紧集的概念，并研究了一些相关的基本性质。在广义参数度量空间框架下，建立了一些拓扑性质以及度量空间中的其他一些著名结果，包括 Cantor交集定理。

关键词：广义参数度量空间、广义参数拓扑、开球、Cantor交集定理。

数学学科分类：47H10，54H25。

1 引言

众所周知，度量结构在泛函分析中发挥着关键作用，而度量不动点理论广泛应用于科学的各个领域。由于度量不动点理论具有广泛的应用潜力，吸引了众多研究者，进而产生了许多广义度量空间（如 2-度量 [1], b-度量 [2], G-度量 [3], S-度量 [4], 锥度量 [5], 参数度量 [6], 参数S-度量 [7], 等），相关研究仍在继续（参见 [8–13], 等）。大多数推广都是通过修改度量公理中的“三角不等式”实现的。遵循 N. Hussain [6], 在我们早期论文 [14] 中引入的参数度量定义，我们给出了广义参数度量的定义。在广义参数度量空间中，我们使用一般的二元运算“o”代替“+”，并略微改变参数度量定义中“t”的作用。通过我们提出的新方法，可以得到分解定理，这些定理对于发展广义参数度量空间中的相关结果至关重要。

本文研究我们在早期论文 [14] 中引入的广义参数度量空间，以及序列的收敛性与柯西性、完备性和有界集等概念。借鉴度量空间和参数空间的相关结果，我们提出了开球、闭球、紧集和集合的直径的新定义，并在广义参数度量空间框架下建立了一些度量空间中的著名结果，包括 Cantor交集定理。

本文的组织结构如下。
第 2 节包含一些预备结果，我们将在本文的研究中加以利用。在第 3 节中，我们定义开球、闭球、紧集、集合的直径等。我们证明了一些著名的拓扑性质，以及与度量空间中类似的完备性结果。

*通讯作者

2 预备知识

在本文中 本节回顾广义参数度量空间的一些基本定义和结果 s.

定义 2.1. [14] 令 $o: [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ 为满足以下条件的二元运算:

(a) $\alpha\ o\ 0 = \alpha$(b)
$\alpha \le \beta \implies \alpha o\gamma \le \beta o\gamma$
(c) $\alpha o\gamma = \gamma o\alpha$(d) $\alpha o($
$\beta o\gamma) =(\alpha o\beta)o\gamma$

对所有 $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in [0,\infty)$.

定义 2.2. 若对于任意序列 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$，它们在 $[0,\infty)$ 中分别收敛到 α 和 β，且 $\{\alpha_n o\beta_n\}$ 收敛到 $\alpha o\beta$, 则称 [14] 'o'连续。

关于"o"还有一些附加公理。(e) "o"是连续函数。(f) 对所有 α, $\beta,\ \gamma,\ \delta \in [0,\infty)$， $\alpha < \beta$ 和 $\gamma < \delta$ 蕴含 $\alpha o\gamma < \beta o\delta$。(g) 对所有 $\alpha \in [0,\infty)$， $\alpha o\alpha > \alpha$。

定义 2.3。 [14] 设 X 为一个非空集合，且 P: $X \times X \times(0,\infty) \to [0,\infty)$ 是一个满足以下条件的函数:

(P1) $(P(a,b,t) = 0,\ \forall t > 0) \iff a = b$; (P2)
$P(a,b,t) = P(b,a,t)\ \ \forall t > 0$ 且 $\forall a,b \in X$;

(P3) 对于 $s,t > 0$，且对所有 $a,b,x \in X$, $P(a,b,s+t) \le P(a,x,s)\ o\ P(b,x,t)$。

则称函数 P 为广义参数度量，三元组（X， P， o）称为广义参数度量空间。

注记 2.4. 在 [14] 中，我们假设以下条件,

$$(P4)\ \ P(a,b,t) < \alpha\ \ \forall t > 0,\ \text{ for any }\ \alpha \in (0,\infty) \text{ implies } a = b.$$

$$(P5)\ \ \text{for all } a,b \in X,\ \ P(a,b,.) \text{ is continuous function of } t\ \ \forall t > 0.$$

我们提出关于二元运算'o'的以下注记。

注记 2.5. 如果二元运算'o'是连续的，则

(i) 对任意 α_1、 $\alpha_2 > 0$ 满足 $\alpha_1 > \alpha_2$，存在 $\alpha_3 > 0$ 使得 $\alpha_2\ o\ \alpha_3 \le \alpha_1$。

(ii) 对任意 $\beta_1 > 0$，存在 β_2、 $\beta_3 > 0$ 使得 $\beta_2\ o\ \beta_3 \le \beta_1$。

命题 2.6. *[14]*若 P是 X上的广义参数度量，则对所有的 $a,b \in X$, P, $(a,b,.)$ 是关于 t的非增函数。

命题 2.7. *[14]*设 $(X,P,$ 最大值$)$ 是一个广义参数度量空间，且 P满足 (P4)。则对每个 $\alpha \in (0,\infty)$,

$$d_\alpha(a,b) = \inf\{t > 0 : P(a,b,t) < \alpha\}\ \ \alpha \in (0,\infty)\ and\ \ \forall a,b \in X \tag{1}$$

是由广义参数度量 P诱导的 α-度量。

引理 2.8. *[14]* 若 P 是 X 上的广义参数度量，且 d_α 按关系式 (1) 定义，则对每个 $\alpha \in (0,\infty)$， d_α 是非增函数。

定义 2.9. [14] 设 (X,P,o) 是一个广义参数度量空间。若序列 $\{x_n\} \subseteq X$ 被称为

(i) 若存在 $x \in X$ 使得 lim，则称为收敛序列 $\lim_{n\to\infty} P(x_n, x, t) = 0 \ \forall t > 0$。
点 x 称为 $\{x_n\}$ 的极限，记作 lim $\lim_{n\to\infty} x_n$.

（ii）柯西序列，则当 $\lim_{m, n\to\infty} P(x_n, x_m, t) = 0 \ \forall t > 0$。

定义 2.10. [14] 设 (X, P, o) 是一个广义参数度量空间。若对每个 $t > 0$，都存在一个非负实数 K_t，使得对所有$x, y \in A$，均有 $P(x, y, t) \leq K_t$，则称 $A \subseteq X$ 有界。

命题 2.11. *[14]*广义参数度量空间 (X, P, o) 中的每个收敛序列都是有界的。

在第 3 节中，我们在广义参数度量空间上定义拓扑，并证明一些拓扑性质。关于这一方面，下面给出一些拓扑空间的定义。

定义 2.12. [15] 称拓扑空间 (X, τ) 为

(i) T_0 空间，若对于任意两个不同的点 $x, y \in X$，存在一个包含 x 的开集 U，使得 $y \notin U$。(ii) T_1 空间，若对于任意两个不同的点 $x, y \in X$，存在两个开集 U 和 V，分别包含 x 和 y，使得 $y \notin U$ 和 $x \notin V$。(iii) 豪斯多夫空间，若对于任意两个不同的点 $x, y \in X$，存在两个不相交的开集 U 和 V，分别包含 x 和 y。(iv) 正则空间，若对于每个闭集 $A \subset B$ 和一个点 $x \in X \setminus A$，存在两个不相交的开集 U 和 V，分别包含 A 和 x。(v) 正规空间，若在 X 中，两个不相交的闭集 A 和 B 存在两个不相交的开集 U 和 V，分别包含 A 和 B。

3 主要结果

这里介绍开球、闭球、集合的直径、完备性、紧致性等概念，并证明一些其他重要的著名定理。

定义 3.1. 设 (X, P, o) 是一个广义参数度量空间。对于 $t > 0$，以 $a \in X$ 为中心、半径为 $\alpha > 0$ 的开球 $B(a, \alpha, t)$ 定义为

$$B(a, \alpha, t) = \{b \in X : P(a, b, t) < \alpha\}.$$

定理 3.2. 设 (X, P, o) 是一个广义参数度量空间。我们考虑 X 的子集族,

$$\tau_P = \{A \subseteq X : \ for\ any\ a \in A,\ \exists\ \alpha > 0\ and\ t > 0\ such\ that\ B(a, \alpha, t) \subseteq A\}.$$

那么 τ_P 是 X 上的一个拓扑。

证明. (i) 显然， $\phi, X \in \tau_P$。

(ii) 设 A_1、$A_2 \in \tau_P$ 和 $a \in A_1 \cap A_2$。则存在 t_1、$t_2 > 0$ 和 α_1、$\alpha_2 > 0$，使得 $B(a, \alpha_i, t_i) \subset A_i,\ i = 1, 2$。设 $t =$最大值$\{t_1, t_2\}$和 $\alpha =$最小值$\{\alpha_1, \alpha_2\}$。则 $B(a, \alpha, t) \subset A_i,\ i = 1, 2$。因此 $B(a, \alpha, t) \subset A_1 \cap A_2$，这意味着 $A_1 \cap A_2 \in \tau_P$。

(iii) 设 $A_i \in \tau_P$、 $i \in \Delta$ 和 $a \in \cup A_i$。则 $a \in A_j$，对于某个 $j \in \Delta$，并且存在 $t > 0$、 $\alpha > 0$，使得 $B(a, \alpha, t) \subset A_j \subset \cup A_i$。因此 $\cup A_i \in \tau_P$。

□

注 3.3. τ_P 的成员称为开集。

定理 3.4. 设 P 是 X 上的广义参数度量，满足 (P5)，且'o'是连续的。则 (X, P, o) 中的每个开球都是开集。

证明。对于某些 $t > 0$ 和 $\alpha > 0$，我们考虑开球 $B(a, \alpha, t)$， $a \in X$ 并令 $b \in B(a, \alpha, t)$。那么 $P(a, b, t) < \alpha$。

由于 $P(a, b, t)$ 是关于 $t(> 0)$ 的非增连续函数，因此存在 $t_0 \in (0, t)$，使得 $P(a, b, t_0) < \alpha$。

令 $P(a, b, t_0) = \alpha_0 (> 0)$.
因此 $\alpha_0 < \alpha$，我们可以找到 $\beta > 0$，使得 $\alpha_0 < \beta < \alpha$。同样，存在 $\alpha_1 > 0$，使得$\alpha_0 \ o \ \alpha_1 \leq \beta$。

现在我们证明 $B(b, \alpha_1, t') \subset B(a, \alpha, t)$，其中 $t' = (t - t_0)$。
令 $c \in B(b, \alpha_1, t')$。则 $P(b, c, t') < \alpha_1$。因此，

$$P(a, c, t) = P(a, c, (t - t_0) + t_0) \leq P(a, b, t_0) \ o \ P(b, c, t - t_0) < \alpha_0 \ o \ \alpha_1 \leq \beta < \alpha.$$

因此 $c \in B(a, \alpha, t)$，从而 $B(b, \alpha_1, t') \subset B(a, \alpha, t)$，其中 $t' = (t - t_0)$。 □

证明至此完成。

命题 3.5. 设 (X, P, o) 是满足 (P5) 的广义参数度量空间，且 'o' 是连续的。那么开集的任意并仍是开集。

证明. 证明是直接的。 □

引理 3.6. 设 (X, P, o) 是广义参数度量空间，且二元运算 'o' 是连续的。设 $\alpha, \beta > 0$ 满足 $\beta \ o \ \beta \leq \alpha$，则对于每个 $a \in X$ 及某个 $t > 0$，有 $B(a, \beta, \frac{t}{2}) \subset B(a, \alpha, t)$。

证明. 对于某个 $t > 0$ 和 $\alpha > 0$，我们考虑开球 $B(a, \alpha, t)$， $a \in X$。
由于 'o' 连续，因此对于 $\alpha > 0$，存在 $\beta > 0$ 使得 $\beta \ o \ \beta \leq \alpha$。
令 $b \in \overline{B(a, \beta, \frac{t}{2})}$。
由于 $B(a, \beta, \frac{t}{2}) \cap B(b, \beta, \frac{t}{2}) \neq \phi$，因此存在 $c \in B(a, \beta, \frac{t}{2}) \cap B(b, \beta, \frac{t}{2})$。于是，

$$P(a, b, t) \leq P(a, c, \frac{t}{2}) \ o \ P(b, c, \frac{t}{2}) < \beta \ o \ \beta \leq \alpha.$$

因此 $b \in B(a, \alpha, t)$，从而 $B(a, \beta, \frac{t}{2})^{-} \subset B(a, \alpha, t)$。 □

定义 3.7. 设 (X, P, o) 为广义参数度量空间。对于 $t > 0$，以 $a \in X$ 为中心、半径为 $\alpha > 0$ 的闭球 $B[a, \alpha, t]$ 定义为

$$B[a, \alpha, t] = \{b \in X : P(a, b, t) \leq \alpha\}.$$

定义 3.8. 设 (X, P, o) 为广义参数度量空间，且 $A \subset X$。

(i) 如果对于任意收敛到 x 的序列 $\{x_n\} \subset X$，都有 $x \in A$，则称 A 为闭集。

(ii) 如果对于任意 $t > 0$，都存在 $\alpha > 0$，使得 $(B(x, \alpha, t) \setminus \{x\}) \cap A \neq \phi$，则称点 $x \in X$ 为 A 的极限点。

(iii) A 的闭包记为 $\overline{A}$，它是满足以下条件的集合：若 $x \in A$，则存在 A 中收敛到 x 的序列。

引理 3.9. 设 A 是广义参数度量空间 (X, P, o) 的闭子集，且 $x \in X$。则 $x \notin A$ 蕴含 $\inf\{P(x, a, t) : a \in A\} > 0$ 对所有 $t > 0$ 均成立。

证明. 设 $x \notin A$，使得对于某个 $t_0 > 0$，$\inf\{P(x, a, t) : a \in A\} = 0$。这意味着
对于给定的 $\alpha \in \in (0, 1)$,

$$\exists a' \in A \text{ such that } P(x, a', t_0) < \alpha$$
$$\text{i.e } \exists a' \in A \text{ such that } a' \in B(x, \alpha, t_0).$$

因此， $B(x, \alpha, t_0) \cap A$ 包含一个不同于 x 的 A 点 a'。因此， x 是 A 的极限点。由于 A 是闭的，所以 $x \in A$。
这导致矛盾。 □

定理 3.10. 设 (X, P, o) 是一个广义参数度量空间，且 P 满足 (P5)，'o' 是连续的。那么每个闭球都是闭集。

证明。设 $a \in X$。对于某些 $t > 0$ 和 $\alpha > 0$，我们考虑闭球 $B[a, \alpha, t]$。接下来，假设 $b \in \overline{B[a, \alpha, t]}$。于是 $\exists$ 一个序列 $\{y_n\}$，该序列位于 $B[a, \alpha, t]$ 中，并且当 $n \to \infty$ 时， $y_n \to y$。同样，对于所有 n，我们有 $P(a, y_n, t) \leq \alpha$。
现在，对于任意 $\epsilon > 0$,

$$P(a, y, t + \epsilon) \leq P(a, y_n, t) \; o \; P(y, y_n, \epsilon) \;\; \forall n.$$

令 $n \to \infty$ 趋于极限，对上述不等式两边取极限，得到

$$\begin{aligned} & P(a, y, t + \epsilon) \leq \lim_{n\to\infty} P(a, y_n, t) \; o \; \lim_{n\to\infty} P(y, y_n, \epsilon) \\ \implies & P(a, y, t + \epsilon) \leq \alpha \; o \; 0 = \alpha \end{aligned}$$

因此，对于任意 $\epsilon > 0$,

$$P(a, y, t + \epsilon) \leq \alpha. \tag{2}$$

设 $\{\epsilon_k\}$ 为一个正实数序列，满足当 $k \to \infty$ 时， $\epsilon_k \to 0$。因此，由（2）可得

$$P(a, y, t + \epsilon_k) \leq \alpha.$$

由于 P 满足（P5），因此令 $k \to \infty$ 趋于极限，对上述不等式两边取极限，得到

$$P(a, y, t) \leq \alpha.$$

因此 $y \in B[a, \alpha, t]$，从而 $B[a, \alpha, t]$ 是一个闭集。 □

定理 3.11. 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是广义参数度量空间 (X, P, o) 中的两个序列，分别收敛于 x 和 y。若 P 满足 (P5)，且 'o' 连续，则对所有 $t > 0$，序列 $\{P(x_n, y_n, t)$ 收敛于 $P(x, y, t)$。

证明. 由于 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 分别收敛于 x 和 y，因此 $\lim_{n\to\infty} P(x_n, x, t) = 0, \forall t > 0$ 且 $\lim_{n\to\infty} P(y_n, y, t) = 0, \forall t > 0$。
现在任取 $\epsilon > 0$。则对所有 $t > 0$,

$$\begin{aligned} P(x, y, t + \epsilon) \leq & P(x, x_n, t + \frac{\epsilon}{2}) \; o \; P(y, x_n, t + \frac{\epsilon}{2}) \;\; \forall n \\ \leq & P(x, x_n, t + \frac{\epsilon}{2}) \; o \; P(y, y_n, \frac{\epsilon}{2}) \; o \; P(x_n, y_n, t) \quad \forall n \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} P(x_n, y_n, t + \epsilon) \leq & P(x_n, y, t + \frac{\epsilon}{2}) \; o \; P(y, y_n, \frac{\epsilon}{2}) \;\; \forall n \\ \leq & P(x_n, x, \frac{\epsilon}{2}) \; o \; P(x, y, t) \; o \; P(y, y_n, \frac{\epsilon}{2}) \quad \forall n. \end{aligned}$$

对上述不等式两边取 $n \to \infty$ 时的极限，得到

$$P(x, y, t + \epsilon) \leq \lim_{n\to\infty} P(x_n, y_n, t) \tag{3}$$

and

$$\lim_{n\to\infty} P(x_n, y_n, t + \epsilon) \leq P(x, y, t) \tag{4}$$

对所有 $t > 0$ 以及所有 $\epsilon > 0$。
现在我们声称，对于所有 $t > 0.$，关系 (3) 蕴含 $\lim_{n\to\infty} P(x_n, y_n, t) \geq P(x, y, t)$
否则，存在 $t_0 > 0$ 使得 $\lim_{n\to\infty} P(x_n, y_n, t_0) < P(x, y, t_0)$。
因此，存在 $\epsilon_0 > 0$ 使得 $\lim_{n\to\infty} P(x_n, y_n, t_0) < P(x, y, t_0 + \epsilon_0) < P(x, y, t_0)$，因为 P 满足 (P5)。但这与关系 (3) 矛盾。
同样，我们声称，对于所有 $t > 0.$，关系 (4) 蕴含 $\lim_{n\to\infty} P(x_n, y_n, t) \leq P(x, y, t)$
否则，存在 $t_1 > 0$ 使得 $\lim_{n\to\infty} P(x_n, y_n, t_1) > P(x, y, t_1)$。
因此，存在 $\epsilon_1 > 0$，使得 $\lim_{n\to\infty} P(x_n, y_n, t_1) > \lim_{n\to\infty} P(x_n, y_n, t_1 + \epsilon_1) > P(x, y, t_1)$，因为 P 满足 (P5)。但这与关系式 (4) 矛盾。
因此，对于所有 $t > 0$，我们得到 $P(x, y, t) \leq \lim_{n\to\infty} P(x_n, y_n, t) \leq P(x, y, t)$，也就是说，对于所有 $t > 0$， $x_n(y_n, t) = P(x, y, t)$。 □

定理 3.12. 设 (X,P,o) 是一个广义参数度量空间，且 P 满足 (P5)，'o' 是连续的。那么 (X,τ_P) 是一个豪斯多夫拓扑空间。

证明. 设 $a,b\in X$ 满足 $a\neq b$。那么存在 $\exists t_0>0$，使得 $P(a,b,t_0)\neq 0$。令 $P(a,b,t_0)=\alpha_0(>0)$。
那么存在 $\alpha_1>0$，使得 $\alpha_1\ o\ \alpha_1<\alpha_0$。
现在考虑开集 $B(a,\alpha_1,\frac{t_0}{2})$ 和 $B(b,\alpha_1,\frac{t_0}{2})$。对于任意 $z\in B(a,\alpha_1,\frac{t_0}{2})\cap B(b,\alpha_1,\frac{t_0}{2})$，有 $P(a,z,\frac{t_0}{2})<\alpha_1$ 且 $P(b,z,\frac{t_0}{2})<\alpha_1$。
如果存在 $c\in B(a,\alpha_1,\frac{t_0}{2})\cap B(b,\alpha_1,\frac{t_0}{2})$，那么

$$\alpha_0=P(a,b,t_0)\leq P(a,c,\frac{t_0}{2})\ o\ P(b,c,\frac{t_0}{2})\leq\alpha_1\ o\ \alpha_1<\alpha_0.$$

这导致矛盾，并完成了证明。 □

定理 3.13. 设 (X,P,o) 是一个广义参数度量空间，且 P满足 (P5)，'o' 连续。那么 (X,τ_P) 是一个 T_0 空间。

证明. 设 $a,b\in X$ 满足 $a\neq b$。那么存在 $t_0>0$ 使得 $P(a,b,t_0)\neq 0$。令 $P(a,b,t_0)=\alpha_0(>0)$。
现在考虑开集 $B(a,\alpha_0,t_0)$。显然 $b\notin B(a,\alpha_0,t_0)$。 □

定理 3.14. 设 (X,P,o) 是一个广义参数度量空间，且 P满足 (P5)，'o' 连续。那么 (X,τ_P) 是一个 T_1 空间。

证明. 设 $a,b\in X$ 满足 $a\neq b$。那么 $\exists t_0>0$ 使得 $P(a,b,t_0)\neq 0$。令 $P(a,b,t_0)=\alpha_0(>0)$。
现在考虑开球 $B(a,\alpha_0,t_0)$ 和 $B(b,\alpha_0,t_0)$。显然 $b\notin B(a,\alpha_0,t_0)$ 且$a\notin B(b,\alpha_0,t_0)$。

□

定理 3.15. 设 (X,P,o) 是一个广义参数度量空间，且 P满足 (P5)，'o' 连续。那么 (X,τ_P) 是一个正则空间。

证明. 设 A 是一个闭集，且 $x_0\in X\setminus A$。
那么由引理 (3.9)，$\alpha(t)=\inf\{P(x_0,a,t):a\in A\}>0\ \ \forall t>0$。
取一个固定的 $t_0\in(0,\infty)$。那么对于 $\alpha(t_0)$，存在 $\alpha_1(t_0)>0$ 使得$\alpha_1(t_0)\ o\ \alpha_1(t_0)<\alpha(t_0)$。

现在考虑包含 x_0和 A的开集 $U=B(x_0,\alpha_1(t_0)\ \frac{t_0}{2})$ 和 $V=\cup_{a\in A}B(a,\alpha_1(t_0)\ \frac{t_0}{2})$，分别对应于它们。

我们断言 $U\cap V=\phi$。
如果不是这样，那么存在 $z\in U\cap V$。因此，对于某个 $a_0\in A$，$P(z,a,\frac{t_0}{2})<\alpha_1(t_0)$，且 $P(x_0,z,\frac{t_0}{2})<\alpha_1(t_0)$。现在，

$$P(x_0,a_0,t_0)\leq P(x_0,z,\frac{t_0}{2})\ o\ P(a_0,z,\frac{t_0}{2})\leq\alpha_1(t_0)\ o\ \alpha_1(t_0)<\alpha(t_0).$$

这与我们的假设矛盾，因此证明完成。 □

定理 3.16. 设 (X,P,o) 为一个广义参数度量空间，且 P满足 (P5)，'o' 为连续的。那么 (X,τ_P) 是一个正规空间。

证明. 设 A 和 B 是 X中的两个闭集。
那么由引理 (3.9)，$\alpha(t)=\inf\{P(a,b,t):a\in A,b\in B\}>0\ \ \forall t>0$。
取一个固定的 $t_0\in(0,\infty)$。那么对于 $\alpha(t_0)$，存在 $\alpha_1(t_0)>0$ 使得$\alpha(t)\ o\ \alpha(t)<\alpha(t)$
$1\quad 0\qquad 1\quad 0\qquad 0\cdot$
考虑开集 $U=\cup_{a\in A}B(a,\alpha_1(t_0)\ \frac{t_0}{2})$ 和 $V=\cup_{b\in B}B(b,\alpha_1(t_0)\ \frac{t_0}{2})$。显然，$A\,\text{and}B$ 分别包含于 U 和 V 中。

我们断言 $U\cap V=\phi$。
若可能，假设存在 $z\in U\cap V$。那么，对于某些 $a_0\in A$ 和 $b_0\in B$，使得

$z \in B(a_0, \alpha_1(t_0)\ \frac{t_0}{2})$ 和 $z \in B(b_0, \alpha_1(t_0)\ \frac{t_0}{2})$，即 $P(a_0, z, \frac{t_0}{2}) < \alpha_1(t_0)$ 和 $P(b_0, z, \frac{t_0}{2}) < \alpha_1(t_0)$。因此，

$$\begin{aligned} & P(a_0, b_0, t_0) \leq P(a, z, \frac{t_0}{2})\ o\ P(b, z, \frac{t_0}{2}) \\ \Longrightarrow\ & P(a_0, b_0, t_0) \leq \alpha_1(t_0)\ o\ \alpha_1(t_0) \leq \alpha(t_0). \end{aligned}$$

这与我们的假设矛盾。
因此，证明完毕。 □

定理 3.17. 设 (X, P, o) 是一个广义参数度量空间，且 P 满足 (P5)，'o' 连续。则 (X, τ_P) 是第一可数的。

证明. 设 $x \in X$. 我们需要证明 $\beta_x = \{B(x, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ 是 $x \in X$ 的一个局部基。设 $G \in \tau_P$ 使得 $x \in G$. 由于 G 是开集，因此存在 $\alpha_0 > 0$ 和 $t_0 > 0$，使得 at $B(x, \alpha_0, t_0) \subset G$。
选取 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\frac{1}{n} < \alpha_0$ 且 $\frac{1}{n} < t_0$。
那么，对于 $z \in X, z \in B(x, \frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ 蕴含 $P(x, z, \frac{1}{n}) < \frac{1}{n} < \alpha_0$。因此，

$$\begin{aligned} & P(x, z, t_0) \leq P(x, z, \frac{1}{n}) < \frac{1}{n} \ \text{ (since P is non-incrasing)} \\ \Longrightarrow\ & P(x, z, t_0) < \alpha_0 \\ \Longrightarrow\ & z \in B(x, \alpha_0, t_0). \end{aligned}$$

因此，$B(x, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subset B(x, \alpha_0, t_0) \subset G$。由此可知，$\beta_x$ 是 x 的可数局部基。因此，(X, τ_P) 是第一可数的。 □

定理 3.18. 设 (X, P, o) 是一个广义参数度量空间，且 P满足 (P5)，'o' 是连续的。那么，(X, τ_P) 是第二可数的。

证明. 设 $\mathscr{A} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 X 的一个可数稠密子集，且 $\beta = \{B(a_m, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) : m, n \in \mathbb{N}\}$。
我们断言，β 是 τ_P 的一个可数基。
显然，β 是可数的。
设 G 是 X 中的一个开集。那么对于任意 $x \in G$，存在 $\alpha > 0$ 和 $t_0 > 0$，使得 $B(x, \alpha, t_0) \subset G$。

再次存在 $\delta > 0$，使得 $\delta\ o\ \delta < \alpha$。设 $m \in \mathbb{N}$，使得 $\frac{1}{m} < \delta$ 且 $\frac{1}{m} < \frac{t_0}{2}$。S ince $\mathscr{A}$ is d在 X 中稠密, t h存在 $a_j \in \mathscr{A}$ such th在 $a_j \in B(x, \frac{1}{m}, \frac{1}{m})$.
现在，对于 $a \in X$，若 $a \in B(x, \frac{1}{m}, \frac{1}{m})$，则

$$P(a, x, t_0) \leq P(a, a_j, \frac{t_0}{2})\ o\ P(x, a_j, \frac{t_0}{2}) \leq \frac{1}{m}\ o\ \frac{1}{m} < \delta\ o\ \delta < \alpha.$$

因此，$a \in B(x, \alpha, t_0)$，且 β 是 τ_P 的基。 □

定义 3.19. 在广义参数度量空间中，若集合 B 中的每个序列都存在一个在 B中收敛的子序列，则称 B 为紧集。

定理 3.20. 设 (X, P, o) 是一个广义参数度量空间，且 P满足 (P5)，'o' 连续。则每个紧子集都是闭且有界的。

证明. 设 $\{x_n\}$ 是 A 中的一个收敛到某个 $x \in X$ 的序列。
由于 A 是 X中的一个紧集，因此存在 $\{x_n\}$ 的一个子序列 $\{x_{n_k}\}$，它收敛到 A中的某个点。但 $\{x_{n_k}\}$ 必收敛到 x。因此 $x \in A$。
由于 $\{x_n\}$ 是 A中的任意序列，因此 A 是闭集。
接下来，若可能，假设 A 无界。
取 $x_0 \in A$ 为任意固定元素。
由于 A无界，存在 $x_1 \in A$，使得 $P(x_1, x_0, t_0) > 1$，其中某个 $t_0 > 0$满足条件。类似地，存在 $x_2 \in A$，使得 $P(x_2, x_0, t_0) > 2$。如此继续下去，存在 $x_n \in A$，使得$P(x_n, x_0, t_0) > n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立。

因此，我们得到一个序列 $\{x_n\} \subseteq A$，满足 $P(x_n, x_0, t_0) > n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$都成立。由于 A是紧的，因此存在 $\{x_n\}$ 的一个子序列 $\{x_{n_k}\}$，该子序列收敛到 A中的某个元素 x（称为）。
因 f此，$\lim_{n\to\infty} P(x_{n_k}, x, t) = 0, \ \forall t > 0$。

特别地， $\lim_{n\to\infty} P(x_{n_k}, x, \frac{t_0}{2}) = 0$。
再次有， $P(x_{n_k}, x_0, t_0) > n_k$。现在，

$$P(x_{n_k}, x_0, t_0) \le P(x_{n_k}, x, \frac{t_0}{2}) \ o \ P(x_0, x, \frac{t_0}{2})$$

给出

$$n_k < P(x_{n_k}, x, \frac{t_0}{2}) \ o \ P(x_0, x, \frac{t_0}{2}).$$

对上述不等式两边取 $k \to \infty$ 的极限，我们得到

$$\infty \le P(x_0, x, \frac{t_0}{2}).$$

这与 P 是一个实值函数相矛盾。
因此， A 有界。 □

定义 3.21. 设 (X, P, o) 是一个广义参数度量空间，且 $A \subseteq X$。A的直径记为 $\delta(A)$，定义为 $\delta(A) = Sup_{x, y\in A \ t>0} P(x, y, t)$。

引理 3.22. 设 (X, P, o) 是一个广义参数度量空间， P 满足 (P5)，且 'o' 连续。对于任意集合 A，若 X，则 $\delta(A) = \delta(\overline{A})$。

证明。由于 $A \subset \overline{A}$，因此

$$\delta(A) \le \delta(\overline{A}). \tag{5}$$

设 $\delta(A) < \alpha_0$。那么

$$\begin{aligned} &\sup_{x,y\in A} \sup_{t>0} P(x, y, t) < \alpha_0 \\ \Longrightarrow\ &\sup_{t>0} P(x, y, t) < \alpha_0, \quad \forall x, y \in A \end{aligned} \tag{6}$$

取 $x_0, y_0 \in \overline{A}$。那么 $\exists$ 一个序列 $\{x_n\}, \{y_n\} \subset A$，使得 $x_n \to x_0$ 且当 $n \to \infty$ 时 $y_n \to y_0$。因此我们有，

$$\lim_{n\to\infty} P(x_n, y_n, t) = P(x_0, y_0, t) \quad \forall t > 0 \tag{7}$$

由 (6) 可得，

$$\begin{aligned} &\sup_{t>0} P(x_n, y_n, t) < \alpha_0 \quad \forall n \\ \Longrightarrow\ &P(x_n, y_n, t) < \alpha_0 \quad \forall n, \ \forall t > 0 \\ \Longrightarrow\ &\lim_{n\to\infty} P(x_n, y_n, t) \le \alpha_0 \quad \forall t > 0 \\ \Longrightarrow\ &P(x_0, y_0, t) \le \alpha_0 \quad \forall t > 0 \\ \Longrightarrow\ &\sup_{t>0} P(x_0, y_0, t) \le \alpha_0 \end{aligned}$$

由于 $x_0, y_0 \in \overline{A}$ 是任意选取的，因此 $Sup_{x, \ y\in\overline{A} \ t>0} P(x, y, t) \le \alpha_0$，即 $\delta(\overline{A}) \le \alpha_0$，这就推出了

$$\delta(\overline{A}) \le \delta(A). \tag{8}$$

由关系式 (5) 和 (8)，可得 $\delta(A) = \delta(\overline{A})$。 □

定理 3.23。（康托尔交集型定理）设 (X, P, o) 是一个广义参数度量空间，且 P 满足 (P5)，并且 'o' 是连续的。广义参数度量空间 (X, P, o) 完备的充要条件是：每个非空闭子集的嵌套序列 $\{A_i\}$，若满足 $\delta(A_i) \to 0$，则 $i \to \infty$ 使得 $A = \cap_{i=1}^{\infty} A_i$ 恰好包含一个点。

证明。利用引理 3.22，证明过程与度量空间中的康托尔交集定理 [16] 类似。

□

定理 3.24. 设 (X, P, o) 是一个广义参数度量空间，且 P 满足 (P5)，'o' 连续。若 X 中的每个柯西序列都有一个收敛子序列，则 X 是完备的。

证明. 设 $\{x_n\}$ 是 X 中的一个柯西序列，且 $\{x_{i_n}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的一个收敛到 $x \in X$ 的子序列。

现在我们证明， $\{x_n\}$ 也收敛到 x。
现在，由不等式可得

$$P(x_n, x, t) \leq P(x_n, x_{i_n}, \frac{t}{2}) \; o \; P(x_{i_n}, x, \frac{t}{2}) \quad \forall t > 0$$

令 $n \to \infty$取极限,

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty} P(x_n, x, t) \leq 0 \quad \forall t > 0 \\ \implies & \lim_{n\to\infty} P(x_n, x, t) = 0 \quad \forall t > 0 \end{aligned}$$

因此，柯西序列 $\{x_n\}$ 收敛到 $x \in X$。
证明至此完成。 □

我们以如下结果结束讨论，该结果表明广义参数拓扑与其诱导的 α-度量拓扑相同。

定理 3.25. 设 $(X, P,$ 最大值$)$ 是一个广义参数度量空间，满足 P4，且 $\{d_\alpha : \alpha \in (0, \infty)\}$ 是 X 上由 α 诱导的度量。则由 d_α 诱导的拓扑 τ_{d_α} 与由 P 诱导的拓扑 τ_P 相同。

证明. 我们知道，对于所有 $a, b \in X$,

$$d_\alpha(a, b) = \inf\{t > 0 : P(a, b, t) < \alpha\}, \; \alpha \in (0, \infty)$$

设 $G \in \tau_{d_\alpha}$。则对于每个 $x \in G$，存在 $\epsilon > 0$ 使得 $B_\alpha(x, \epsilon) \subset G$，其中$B_\alpha(x, \epsilon)$ $= \{y \in X : d_\alpha(x, y) < \epsilon\}$。接下来，设 $y \in B_\alpha(x, \epsilon)$。那么,

$$\begin{aligned} & d_\alpha(x, y) < \epsilon \\ \implies & \inf\{t > 0 : P(x, y, t) < \alpha\} < \epsilon \\ \implies & P(x, y, \epsilon) < \alpha \\ \implies & y \in B(x, \alpha, \epsilon). \end{aligned}$$

因此 $B_\alpha(x, \epsilon) \subset B(x, \alpha, \epsilon)$。
对于反向部分，设 $G \in \tau_P$。那么对于每个 $x \in G$，存在 $\alpha > 0$ 和 $t_0 > 0$ 使得$B(x, \alpha, t_0) \subset G$。现在,

$$\begin{aligned} & y \in B(x, \alpha, t_0) \\ \implies & P(x, y, t_0) < \alpha \\ \implies & P(x, y, t') < \alpha, \; \forall \; t' > t_0 \\ \implies & \inf\{s > 0 : P(x, y, s) < \alpha\} \leq t_0 \\ \implies & d_\alpha(x, y) \leq t_0 \end{aligned}$$

取 $s_0 > 0$ 使得 $s_0 > t_0$。于是， $d_\alpha(x, y) < s_0$，因此 $y \in B_\alpha(x, s_0)$。所以， B $(x, \alpha, t_0) \subset B_\alpha(x, s_0)$，其中 $s_0 > t_0$。证明至此完成。

□

结论：本文探讨了广义参数度量空间的拓扑性质、完备性等问题。我们针对一般的二元运算‘o’得到了所有结果。此外，我们指出，当二元运算‘o’取为‘max’时，两个拓扑 τ_{d_α} 和 τ_P 相同，因此，对于这类广义参数度量空间，其拓扑结果与度量空间中的结果相同。我们希望本文的结果能够为广义参数度量空间的进一步发展作出重要贡献。

致谢：作者 AD 感谢印度新德里的大学拨款委员会（UGC）授予高级研究奖学金 [Grant No.1221/(CSIRNETJUNE2019)]。作者还感谢 Visva-Bharati 的 Siksha-Bhavana 数学系。

参考文献

[1] S. Gahler，《2-度量空间及其拓扑结构》，《数学新闻》26，1963，115-148。[2] S. Czerwik，《b-度量空间中的压缩映射》，《俄斯特拉发大学数学与信息学学报》1，1993，5-11。[3] Z. Mustafa，B. Sims，《广义度量空间的一种新方法》，《非线性凸分析杂志》7，2006，289-297。[4] S. Sedghi，N. Shobe，A. Aliouche，《S-度量空间中不动点定理的推广》，《数学通报》64，2012，258-266。[5] L. G. Huang，X. Zhang，《锥度量空间与压缩映射的不动点定理》，《数学分析及其应用杂志》33，2007，1468-1476。[6] N. Hussain，S. Khaleghizadeh，P. Salimi，A. A. N. Abdou，《三角直觉模糊度量空间中不动点结果的新方法》，《摘要与应用分析》2014，文章编号 690139，共 16 页。[7] N. Tas，N. Y. Ozgur，《关于参数化 S-度量空间及扩张映射的不动点型定理》，《数学杂志》2016，共 6 页，文章编号 4746732。[8] A. Das，T. Bag，《参数化 S-度量空间研究》，《数学与应用通讯》3，2022。已接收。[9] R. Sharma，A. K. Garg，《参数化度量空间中压缩映射的不动点定理》，《数学进展：科学期刊》9，2020，5401–5407。[10] N. Tas，N. Y. Ozqur，《参数化 N_b 度量空间中的一些不动点结果》，《韩国数学会通讯》33，2018，943-960。[11] N. Priyobarta，Y. Rohen，S. Radenovic，《参数化 A-度量空间上的不动点定理》，《美国应用数学与统计学杂志》6，2018，1-5。[12] R. Jain，R. D. Daheriya，M. Ughade，《参数化度量空间和参数化 b-度量空间中各种扩张条件下的不动点、重合点及公共不动点定理》，《加齐大学科学杂志》GU J Sci，29，2016，95-107。[13] R. P. Agarwal，M. Meehan，D. O'Regan，《不动点理论及其应用》，剑桥大学出版社，2004，ISBN：0-511-03258-7。[14] A. Das，T. Bag，《参数化度量空间的一种推广》，《非线性分析应用国际期刊》，DOI：10.22075/IJNAA.2022.26832.3420。[15] J. R. Munkres，《拓扑》，培生，ISBN-13：978-93-534-3277-5。[16] B. K. Lahiri，《泛函分析基础》，世界出版社，1982，ISBN-13：978-8187567592。