arXiv:2304.06722v1 [math.GN] 4 Mar 2023

Delta-紧空间研究

Sanjay Roy*印度西孟加拉邦豪拉县乌卢贝里亚学院数学系，乌卢贝里亚，邮编 711315 电子邮箱：sanjaypuremath@gmail.com

Srabani Mondal
印度西孟加拉邦豪拉县乌卢贝里亚学院数学系，乌卢贝里亚，邮编 711315 电子邮箱：srabanimondal531@gmail.com

Shrobana Sinha Roy 印度西孟加拉邦豪拉县乌卢贝里亚学院数学系，乌卢贝里亚，邮编 711315 电子邮箱：sinharoy.shrobana@gmail.com

Bobi Mandal
印度西孟加拉邦豪拉区乌卢贝里亚，乌卢贝里亚学院数学系，邮编 711315，电子邮件：bobimandal767@gmail.com

摘要

本文旨在引入 Delta-紧空间的概念，并讨论其若干基本性质。我们尝试探讨连续映射下 Delta-紧空间的性质。最后，我们定义了另一个概念，即局部 Delta-紧性。

关键词：Delta 紧集、Delta 闭映射、局部 Delta 紧集。2010 年数学主题分类：54D30、54D45、54F99

*通讯作者

1. 引言

若取一个开集的闭包的内部（以前称为正则开集），它与给定拓扑空间之间有何关联？为探究这种关联，T. Noiri 于1980年借助 δ-闭包引入了 δ-闭集的概念，并将 δ-开集定义为 δ-闭集的补集。他还定义了 δ-连续函数的概念，并证明了它的一些性质。1993年，S. Raychaudhuri 和 M. N. Mukherjee [2] 推广了 δ-连续性和δ-开集的概念，并分别将这些广义定义称为 δ-几乎连续性和 δ-预开集。1993年，N. Palaniappan 和 K. C. Rao [3] 引入了一些概念

正则广义闭集和正则广义开集。此后，关于其他概念的研究也陆续展开，包括 δ-半开集 [4, 6]、 δ-集 [5], 半*δ-开集 [9],正则* 开集 [10]。

在本文中，我们以另一种方式定义了 δ-开集和 δ-闭集的概念，随后证明了这两个概念与 T. Noiri [1] 所给出的定义等价。紧致性是拓扑空间的一个重要性质。本文提出了 Delta 紧致空间的概念。由于每个紧致空间都是 Delta 紧致空间，但反之不成立，因此，在 Delta 紧致空间中成立的每个性质，在紧致空间中也成立，但反之不成立。所以，这是一个比紧致空间更深入的课题。

在本文中，我们还借助正则开集介绍了局部 Delta 紧致性的概念，以及其一些性质和实例。

2. 预备知识

这里给出后文将要用到的一些基本定义和定理。

定义 2.1. *[1]*拓扑空间 (X, τ) 的开集 U称为正则开集，当且仅当 $U = int[cl(U)]$。

定义 2.2. *[1]*拓扑空间 (X, τ) 的一个子集 V 称为正则闭集，当且仅当 $V = cl[int(V)]$。

定理 2.3. V是正则闭集当且仅当 $X \setminus V$是正则开集。

证明。让我们假设 V是一个正则闭集，即， $V = cl[int(V)]$。我们必须证明，$X \setminus V$是一个正则开集，即， $X \setminus V = int[cl(X \setminus V)]$。令 $x \in X \setminus V$。则 $x \notin V = cl[intV]$。因此，存在 x 的一个邻域 U_x，使得$U_x \cap intV = \phi$ $\Rightarrow U_x \cap V = \phi \Rightarrow U_x \subseteq X \setminus V \Rightarrow U_x \subseteq cl(X \setminus V) \Rightarrow x \in int[cl(X \setminus V)]$。于是 $X \setminus V \subseteq int[cl(X \setminus V)]$。再令 $x \in int[cl(X \setminus V)]$。则存在 x 的一个邻域 U_x，使得 $U_x \subseteq cl(X \setminus V) = X \setminus intV \Rightarrow U_x \cap intV = \phi \Rightarrow x \notin cl[intV] = V \Rightarrow x \in X \setminus V$. 于是 $int[cl(X \setminus V)] \subseteq X \setminus V$.Th

us, 我们获得 ge t $X \setminus V = int[cl(X \setminus V)]$.
因此， $X \setminus V$是一个正则开集。 □

结果2.4. 设(X, τ)是一个拓扑空间，且 $U \in \tau$。则 $int[cl(U)]$是正则开。

证明。令 $int[cl(U)] = V$。我们需要证明， $V = int[cl(V)]$。因为 $int[cl(U)] = V, V \subseteq cl(U)$，即， $cl(V) \subseteq cl(U)$，即， $int[cl(V)] \subseteq int[cl(U)] = V$。再次， $V \subseteq cl(V) \Rightarrow int(V) \subseteq int[cl(V)]$。由于 V是开集， $int(V) = V$。因此， $V \subseteq int[cl(V)]$。由此得到 $V = int[cl(V)]$。所以，$V = int[cl(U)]$ 是一个正则开集。 □

定义 2.5. *[1]* 拓扑空间 X 中的点 x 称为 $A \subseteq X$ 的 δ-聚点，如果对于包含 x 的 X 的每个开集 U，都有 $A \cap int[Cl(U)] \neq \phi$。 A的所有 δ-聚点组成的集合称为 A的 δ-闭包，记作$Cl_\delta A$。 X 的子集 A 称为 δ-闭集，如果 $A = Cl_\delta A$。 δ-闭集的补集称为 δ-开集。

3. δ-开（δ-开）集与 δ-闭（δ-闭）集

定义 3.1. 若拓扑空间（X, τ）的子集 U 满足：对每个 $x \in U$，存在一个正则开集 P，使得 $x \in P \subseteq U$，则称 U 为 δ- 开集。

定理 3.2. 设 A 是拓扑空间（X, τ）中的一个 δ-开集。根据 T. Noiri 的定义 *[1]*, A 是一个 δ-开集。

证明. 根据我们的定义，设 A 是拓扑空间（X, τ）中的一个 δ-开集。现在我们证明 $X \setminus A = cl_\delta$（$X \setminus A$）。设 $x \in cl_\delta$（$X \setminus A$）。那么，对于每个包含 x 的开集 U，都有（$X \setminus A$）$\cap int[cl$（U）$] \neq \phi$。若 $x \in A$，则存在一个正则开集V，使得 $x \in V \subseteq A$。因此， $X \setminus A \subseteq X \setminus V$。现在（$X \setminus A$） $\cap int[cl$（V）$] \subseteq$（$X \setminus V$） $\cap int[cl$（V）$] =$（$X \setminus V$） $\cap V = \phi$，这与我们的假设 $x \in cl_\delta$（$X \setminus A$）矛盾。因此 $x \in X \setminus A$。于是 cl_δ（$X \setminus A$） $\subseteq$（$X \setminus A$）。显然，（$X \setminus A$） $\subseteq cl_\delta$（$X \setminus A$）。因此，根据 T. Noiri 的定义 [1]，A 是一个 δ-开集。

反之，根据 T. Noiri [1]的定义，设 A 是一个 δ-开集。于是 $X \setminus A = cl_\delta(X \setminus A)$。设 $x \in A$。则 $x \notin X \setminus A$，即 $x \notin cl_\delta(X \setminus A)$。因此，存在一个包含 x 的开集 U，使得 $(X \setminus A) \cap int[cl(U)] = \phi$，即 $int[cl(U)] \subseteq A$。现在， $int[cl(U)]$ 是一个包含 x 的正则开集（由结果 2.4 可知）。因此，对每个 $x \in A$，都存在一个正则开集 V，使得 $x \in V \subseteq A$。所以，根据我们的定义， A 是 δ-开集。 □

例3.3. 若 V 是 (X, τ) 中的一个正则开集，则 $V \cap Y$ 在 (Y, τ_Y) 中可能是也可能不是正则开集，其中 Y 是 X 的一个子集。

设实数 $\mathbb{R}$上具有通常拓扑。设 $V = (1, 2)$ 在 $\mathbb{R}$ 中是开集，且 $Y = [1, 1.5]$ 是 $\mathbb{R}$ 的子空间。于是 $V \cap Y = (1, 1.5]$。因此， $cl_Y(V \cap Y) = [1, 1.5]$ 且 $int_Y cl_Y(V \cap Y) = [1, 1.5] \neq V \cap Y$。

定理3.4. 如果 V 是(X, τ)中的正则开集，并且 Y 是(X, τ)中的开集，那么 $V \cap Y$ 也是 (Y, τ_Y) 中的正则开集。

证明. 由于 V 是 (X, τ) 中的正则开集， $V = int(clV)$。于是 $V \in \tau$。因此，$V \cap Y \in \tau_Y$。故，$V \cap Y \subseteq int_Y cl_Y(V \cap Y)$。再令 $x \in int_Y cl_Y(V \cap Y)$。则存在 $W \in \tau$ 使得 $x \in W \cap Y \subseteq cl_Y(V \cap Y) \subseteq cl(V \cap Y) \subseteq cl(V)$。由于 $W \in \tau$ 且 $Y \in \tau$， $W \cap Y \in \tau$。因此， $x \in int(clV) = V$。再者 $x \in Y$，故 $x \in V \cap Y$。因此 $V \cap Y = int_Y cl_Y(V \cap Y)$。 □

定理3.5. 若 U 是 (X, τ) 中的 δ-开集，且 $Y \in \tau$，则 $U \cap Y$ 是 (Y, τ_Y) 中的 δ-开集。

证明。设 U 是 (X,τ) 中的一个 δ-开集。现在我们证明 $U\cap Y$ 也是 (Y,τ_Y) 中的一个 δ-开集。设 $x\in U\cap Y$。由于 $x\in U\cap Y$，所以 $x\in U$ 且 $x\in Y$。又由于$x\in U$且 U 是一个 δ-开集，根据定义，存在 (X,τ) 中的一个正则开集 P，使得 $\exists\ x\in P\subseteq U$。于是 $x\in P\cap Y\subseteq U\cap Y$。由于 P 是 (X,τ) 中的正则开集，且 $Y\in\tau$，根据前面的定理，我们可以说 $P\cap Y$ 是 (Y,τ_Y) 中的正则开集。因此， $U\cap Y$ 是 (Y,τ_Y) 中的一个 δ-开集。□

定义 3.6. (X,τ) 的子集 V 称为 δ-闭集，如果 V 是所有包含 V 的正则闭集的交集。

定理 3.7. V 是 δ-开集，当且仅当 $X\setminus V$ 是 δ-闭集。

证明. 假设 V 是一个 δ-开集。由于 V 是 δ-开集，因此对每个 $x\in V$，存在一个正则开集 $\exists$ ，使得 U，所以 $x\in U\subseteq V$，进而 $X\setminus U\supseteq X\setminus V$。
又由于 U 是正则开集，根据定理 2.3， $X\setminus U$ 是正则闭集。因此存在一个包含 $X\setminus V$ 的正则闭集 $X\setminus U$；而且，若 $x\notin X\setminus V$，即若 $x\in V$，则存在一个包含 $X\setminus V$ 的正则闭集 $X\setminus U$，使得 $x\notin X\setminus U$。所以， $X\setminus V$ 是所有包含 $X\setminus V$ 的正则闭集的交集。因此， $X\setminus V$ 是 δ-闭集。
反过来，假设 $X\setminus V$ 是一个 δ-闭集。
令 $x\in V$。则 $x\notin X\setminus V$。由于 $X\setminus V$ 是 δ-闭的，存在一个包含 $X\setminus V$ 的正则闭集 F，使得 $x\notin F$。因此，存在一个正则开集 $X\setminus F$，使得 $x\in X\setminus F\subseteq V$。所以 V 是 δ-开的。□

注 3.8. 设 A 是拓扑空间 (X,τ) 中的 δ-闭集。根据 T. Noiri *[1]* 的定义， A 是 δ-闭集。

4. DeltaCompact(δ-紧致)空间

定义4.1.设 (X,τ)是一个拓扑空间。 X 被称为 δ-紧空间，如果 X 的每个由 X 的 δ-开子集构成的开覆盖都有一个有限子覆盖。

定义4.2. 设(X,τ)是一个拓扑空间且 $Y\subseteq X$。如果 (Y,τ_Y) 的每个 δ-开覆盖都有一个有限子覆盖，则称 Y 为 δ-紧的。

定理4.3. 拓扑空间 (X,τ) 的开子集 Y 是 δ-紧的，当且仅当 δ 对 Y 的每个由 X 的 δ-开子集构成的开覆盖都有有限子覆盖。

证明. 设 Y 是 (X,τ) 的一个 δ-紧子集。设 $\{G_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 是 Y 的一个 δ-开覆盖，其中每个 G_α 都是 (X,τ) $\forall\alpha\in\Lambda$ 中的 δ-开集。
于是，根据定理3.4， $Y\subseteq\cup_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha\Rightarrow Y\subseteq\cup_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha\cap Y$，其中每个 $G_\alpha\cap Y$ 都是 (Y,τ_Y) 中的一个 δ-开集。
因此，根据 Y 的 δ-紧性， $\exists$ 有 Λ 的一个有限子集族 Λ_0 ，使得
$Y\subseteq\cup_{\alpha\in\Lambda_0}G_\alpha\cap Y\Rightarrow Y\subseteq\cup_{\alpha\in\Lambda_0}G_\alpha$。
因此，如果 Y是 δ-紧的，那么 (X,τ) 的 δ-开集构成的 δ-开覆盖中，每个对 Y 的覆盖都有有限子覆盖。反

过来，设 $\{Y_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 是一个 $\tilde{\delta}$ 由 δ 对 Y 的开覆盖 - 开集的

τ_Y。因此， $Y \subseteq \cup_{\alpha\in\Lambda}\ Y_\alpha$。由于 Y_α 是 τ_Y 中的 δ-开集，且 Y 是开集， Y_α 是 $\tau\ \forall\alpha \in \Lambda$中的 δ-开集。因此， $\{Y_\alpha :\ \alpha \in \Lambda\}$ 是 τ中由 δ-开集构成的 δ-开覆盖。根据给定条件， $\exists$ 有 Λ 的一个有限子覆盖 Λ_0 ，使得 $Y \subseteq \cup_{\alpha\in\Lambda}\ Y_\alpha$。因此，根据 δ-紧空间的定义， Y 是 δ-紧的。定理得证。

□

定理 4.4. 拓扑空间 (X,τ) 是 δ-紧的，当且仅当对于每个集合族$\{F_\alpha :\ \alpha \in \Lambda\}$ 中的 δ-闭集，若其具有有限交性质（f.i.p），则$\cap_{\alpha\in\Lambda}\ F_\alpha$ 整个集合族的交集非空。

证明. 设 (X,τ) 是一个 δ-紧空间，且 $\{F_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 是具有有限交性质的 δ-闭集集合族。现在证明 $\cap_{\alpha\in\Lambda}\ F_\alpha \neq \phi$。
若不然，设 $\cap_{\alpha\in\Lambda}\ F_\alpha = \phi$则 $X = X\setminus\cap_{\alpha\in\Lambda}\ F_\alpha = \cup_{\alpha\in\Lambda}(X\setminus F_\alpha)$ 是 X 的一个 δ-开覆盖。由于 X是 δ-紧的，$\exists$存在 Λ的一个有限子集族 Λ_0，使得 $X = \cup_{\alpha\in\Lambda_0}($ $X \setminus F_\alpha) = X \setminus \cap_{\alpha\in\Lambda_0}F_\alpha$。因此， $\cap_{\alpha\in\Lambda_0}F_\alpha \neq \phi$，这与 $\{F_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 具有有限交性质矛盾。故 $\cap_{\alpha\in\Lambda}F_\alpha \neq \phi$。反过来，假设给定条件成立。现在证明 X 是δ-紧的。为此，设 $\{G_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 是 X 的一个 δ-开覆盖。则
$X = \cup_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha \Rightarrow X \setminus \cup_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha = \phi \Rightarrow \cap_{\alpha\in\Lambda}(X \setminus G_\alpha) = \phi$。于是 $\exists$ 存在 Λ 的一个有限子集族 Λ_0 ，使得 $\cap_{\alpha\in\Lambda_0}(X \setminus G_\alpha) = \phi$ ，即 $X \setminus\cup_{\alpha\in\Lambda_0}G_\alpha = \phi$ ，也就是 $X = \cup_{\alpha\in\Lambda_0}G_\alpha$。因此，空间 (X,τ) 是 δ-紧的。

□

定理 4.5. δ-闭子集是 δ-紧空间的 δ-紧子集。

证明. 设 (X,τ) 是一个 δ-紧拓扑空间，且 Y 是 X 的一个 δ-闭子集。

现在证明， Y 是 δ-紧的。
设 $\{G_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 是 Y 的一个 δ-开覆盖，其中每个 G_α 都是 $(X,\tau)\forall\alpha \in \Lambda$ 中的 δ-开集。于是 $Y \subseteq \cup_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$。因此， $X \subseteq (X \setminus Y)\cup(\cup_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha)$。由于 X 是 δ-紧的，$\exists$ 存在 Λ 的一个有限子集 Λ_0，使得 $X \subseteq (X \setminus Y)\cup(\cup_{\alpha\in\Lambda_0}G_\alpha)$，因此 $Y \subseteq\cup_{\alpha\in\Lambda_0}G_\alpha$。于是， Y 的每个 δ-开覆盖 $\{G_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 都有一个有限子覆盖。因此， Y 是 δ-紧的。证明完毕。

□

定理 4.6。在正则空间中，每个闭集都是一个 δ-闭集。

证明。设 (X,τ) 为正则空间，且 $A \subseteq X$ 为闭集。我们需要证明 A 是 δ-闭的，即 $X \setminus A$ 是 δ-开的。令 $x \notin A$。则 $x \in X \setminus A$。由于 A 是闭的， $X \setminus A$ 是开的。由于该空间是正则的，存在一个开集 $\exists$，使得 U，且 $x \in U \subseteq cl(U)$ $\subseteq X \setminus A$。现在， $U \subseteq int[cl(U)] \subseteq cl(U)$。因此， $x \in int[cl(U)] \subseteq X \setminus A$。所以，依据结果 2.4， $X \setminus A$ 是 δ-开集，因为 $int[cl(U)]$ 是一个正则开集。因此， A 是 δ-闭的。证明完毕。

□

推论 4.7. 在正则空间中，每个开集也是一个 δ-开集。

定理 4.8。在正则 T_2 空间中，对于任意两个点 x 和 y，存在两个不相交的δ-开集 U 和 V，使得 $x \in U$ 和 $y \in V$。

证明. 设 (X, τ) 是一个正则 T_2空间。设 x和 y是 X中的任意两个点。由于该空间是 T_2，存在 $\exists$ 两个不相交的开集 U和 V，使得 $x \in U$和 $y \in V$。由于 $x \in U$，$x \notin X \setminus U$；又由于 $y \in V$，$y \notin X \setminus V$。由于 $X \setminus U$和 $X \setminus V$是闭集，且该空间是正则的，因此 $X \setminus U$和 $X \setminus V$是 δ-闭集。于是 U和 V是 δ-开集。因此，对于任意两个点 x和 y，存在 $\exists$ 两个不相交的 δ-开集 U和 V，使得 $x \in U$和 $y \in V$。

□

定理 4.9. 任意拓扑空间中有限个正则开集的交集是正则开集。

证明。令(X, τ)为任意拓扑空间。 $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_m$为 m正则开集在 X中。

我们取 $P = P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap \ldots \cap P_m$。
现在我们证明 P 在 X 中正则开，即 $\cap_{i=1}^{m} P_i = \text{int}[\text{cl}(\cap_{i=1}^{m} P_i)]$。
令 $x \in \text{int}[\text{cl}(\cap_{i=1}^{m} P_i)]$。则 $\exists\ U \in \tau$ 使得，$x \in U \subseteq \text{cl}(\cap_{i=1}^{m} P_i)$。于是对所有 $i = 1$、2、...、$m.$，均有$x \in U \subseteq \text{cl}(P_i)$。因此，对所有 $i = 1$、2、.....、m，均有 $x \in int[cl(P_i)] = P_i$，因为每个 P_i 在 X 中都是正则开集。因此 $x \in \cap_{i=1}^{m} P_i$。
因此，$\text{int}[\text{cl}(\cap_{i=1}^{m} P_i)] \subseteq \cap_{i=1}^{m} P_i$。
再者，由于 $\cap_{i=1}^{m} P_i \subseteq \text{cl}(\cap_{i=\ 1}^{m} P_i)$，$\cap_{i=1}^{m} P_i \subseteq int[cl(\cap_{i=1}^{m} P_i)]$ ($\because$ 每个 P_i 都是开集)。
因此，$\text{int}[\text{cl}(\cap_{i=1}^{m} P_i)] = \cap_{i=1}^{m} P_i$。
于是，P在 (X, τ) 中是正则开集。 □

定理4.10. 任意拓扑空间中，任意多个 δ-开集的并是δ-开集。

证明。令(X, τ) 为任意拓扑空间，且 $\{G_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$是 δ-开集在 X 中的一个族。令 $G = \cup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$ 和 $x \in G$。则 x 至少属于其中一个集合，设为 G_β，其中 $\beta \in \Lambda$。由于 G_β 是 δ-开集，并且 $x \in G_\beta$，存在一个正则开集 $\exists$ P 使得 $x \in P \subseteq G_\beta$。因此 $P \subseteq G_\beta \subseteq G$。由于 x 是任意的，且 $x \in P \subseteq G$，G 是 (X, τ) 中的 δ-开集。 □

定理4.11. 任意拓扑空间中有限个 δ-开集的交集是 δ-开集。

证明。设 (X, τ) 为任意拓扑空间。 $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_m$ 是 X 中的 m δ-开集。

令 $G = \cap_{i=1}^{m} G_i$ 和 $x \in G$。那么，对于每个 $i = 1$，2，.....，m，$x \in G_i$。
由于 G_1 是 δ-开集，因此存在正则开集 P_1，使得 $x \in P_1 \subseteq G_1$。

再次，由于 G_2 是 δ-开集，$\exists$ 是一个正则开集，P_2 使得 $x \in P_2 \subseteq G_2$。
.....
Cont以类似的方式继续，由于 G_m 是 δ-开集，$\exists$ 是一个正则开集 P_m，使得

$x \in P_m \subseteq G_m$。令 $P = P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap \ldots \cap P_m$。根据定理 4.9，$P$ 在 X 中是正则开集。现在，对于所有 $i = 1, 2, \cdots m$，$x \in P \subseteq P_i \subseteq G_i$。于是 $x \in P \subseteq G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap \ldots \cap G_m$。也就是说，$x \in P \subseteq G$。因此，$G$ 在 (X, τ) 中是 δ-开集。 □

定理 4.12. 设 (X, τ) 是任意的 T_3 拓扑空间。那么，如果 B 是 δ-紧子集，且 x 是 X 中的任意一个点，并且 x 可以与 B中的每个点 y强分离，那么 x 和 B 也可以在 (X, τ) 中由 δ-开集强分离。

证明. 如果 $B = \phi$，证明显然成立。如果 $B \neq \phi$，设 $y \in B$。那么 x 和 y 在 (X, τ) 中强分离。因此，根据定理 4.8，存在 $\exists$ 两个 δ- 开集 U_y 和 V_y，它们位于 (X, τ) 中，且 $y \in U_y$ 和 $x \in V_y$ 满足 $U_y \cap V_y = \phi$。现在，$\{U_y : y \in B\}$ 是 B 的一个开覆盖。于是，$\{U_y : y \in B\}$ 是 B 的一个 δ-开覆盖。根据推论 4.7，由于 B是 δ-紧的，$\exists$可从 $\{U_y$中取有限子集族 $\{U_{y_1}, U_{y_2}, \ldots, U_{y_n}\} : y \in B\}$，它也覆盖 B。现在，对应于这个子集族，包含 x的 δ-开集为 $V_{y_1}, V_{y_2}, \ldots, V_{y_n}$。设 $U = \cup_{i=1}^{n} U_{y_i}$ 和 $V = \cap_{i=1}^{n} V_{y_i}$。那么根据定理 4.10 和定理 4.11，$U$和 V都是 (X, τ) 中的 δ-开集，且 $x \in V$和 $B \subseteq U$ 以及 $U \cap V = \phi$。因此，x和 B在 (X, τ) 中由 δ-开集 U和 V强分离。

□

定理 4.13. 在每个 δ-紧致 T_3 空间中，对于任意两个不相交闭集 A，存在两个不相交的 δ-开集 U和 V，使得 $A \subseteq U$和 $B \subseteq V$。

证明。设（X，τ）是一个 δ-紧 T_3 空间。设 A和 B是两个不相交闭集。由于 A 和 B 是正则空间 X的闭子集，根据定理 4.6 A 和 B是 δ-闭集。因此，根据定理 4.5 A 和 B 是 δ-紧的。

设 $x \in A$。由于 A 和 B 不相交，因此 $x \notin B$。
由于空间 (X, τ) 是带有 $x \notin B$ 的 T_3，因此根据定理 4.12，我们可以说存在两个不相交的 δ-开集 U_x 和 V_x，使得 $x \in U_x$ 和 $B \subseteq V_x$。
现在 $A \subseteq \cup_{x \in A} U_x$。由于 A 是 δ-紧的，因此存在有限个子集 $\{U_{x_i} : i = 1、2、\cdots、n\}$，它们是 δ-开集，使得 $A \subseteq \cup_{i=1}^{n} U_{x_i}$。令 $U = \cup_{i=1}^{n} U_{x_i}$和$V = \cap_{i=1}^{n} V_{x_i}$，则 $U \cap V = \emptyset$，并且根据定理 4.10 和 4.11 U，V是 δ-开集。

因此，在 δ-紧的 T_3 空间中，对于任意两个不相交闭集 A 和 B $\exists$，存在两个不相交的 δ-开集 U和 V，使得 $A \subseteq U$和 $B \subseteq V$。 □

推论 4.14。每个 δ-紧的 T_3 空间都是 T_4。

定理 4.15。T_3 空间的每个 δ-紧子集都是 δ-闭的。

证明。设 (X, τ) 为 T_3空间，且 Y为 X 的 δ-紧子集。若 $Y = X$，则无需证明。若 $Y \neq X$，则令 $x \in X \setminus Y$。

由于 X 是 T_3，即正则且 T_2， x 可以与 Y 的每个点强分离。因此， x 可以在 (X,τ) 中与 Y 本身强分离。所以，存在 (X,τ) 中的两个 δ-开集 U 和 V，使得 $x \in U$、 $Y \subseteq V$ 且 $U \cap V = \phi$。因此 x 不是 Y 中的极限点。于是 Y 在 (X,τ) 中是闭的。因此，由于 X 是正则的， Y 在 (X,τ) 中是 δ-闭的。 □

推论 4.16。在一个 δ-紧的 T_3 空间中，集合 $Y(\subseteq X)$ 是 δ-紧的，当且仅当 Y是 δ-闭的；也就是说，在这类空间中，子集的 δ-闭性与 δ-紧性这一概念是一致的。

定理 4.17。拓扑空间中有限个 δ-紧子集的并是 δ-紧的。

证明。设 (X,τ) 是任意拓扑空间，且 Y_1、 Y_2、 Y_3、.....、 Y_m 是 X 中有限个 δ-紧子集。设 $Y = \cup_{i=1}^{m} Y_i$。我们需要证明 Y 是 δ-紧的。设 G 是由在 (X,τ) 中 δ-开的集合构成的 Y的一个覆盖。那么，对于 $i = 1$ = 1, 2, ..., m， 每个 Y_i 都被 G 覆盖。$\because$每个 Y_i都是 δ-紧的，因此对于 Y_i $i = 1$ = 1, 2, ..., m， 存在 G的有限子覆盖 G_i。于是， $G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \ldots \cup G_m$ 是 G 的一个有限子集族，并且也覆盖 Y。因此， Y 是 δ-紧的。

□

定理 4.18. 有限个 δ-闭集的交集是 δ-闭的。

证明。设 (X,τ) 是任意的拓扑空间，且 $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_m$ 是 (X,τ) 中有限个 δ-闭集。设 $Y = \cap_{i=1}^{m} Y_i$。我们需要证明 $Y = \cap_{i=1}^{m} Y_i$ 是 δ-闭的，也就是说，$X \setminus Y = X \setminus \cap_{i=1}^{m} Y_i$ 是 δ-开集。由于每个 Y_i（ $i = 1$ = 1, 2, . . . , m）都是 (X,τ) 中的 δ-闭集，因此每个 $X \setminus Y_i$ （ $i = 1$ = 1, 2, . . . , m）都是 (X,τ) 中的 δ-开集。于是， $\cup_{i=1}^{m}(X \setminus Y_i)$ 也是 (X,τ) 中的 δ-开集（$\because$ 个 δ-开集的任意并都是 δ-开集）。因此， $X \setminus \cap_{i=1}^{m} Y_i$ 是 (X,τ) 中的 δ-开集。这说明 $\cap_{i=1}^{m} Y_i$ 是 (X,τ) 中的 δ-闭集。

□

定理 4.19. T_3拓扑空间中有限个 δ-紧子集的交集是 δ-紧的。

证明.令 (X,τ) 为任意 T_3 拓扑空间，且 $Y_1, Y_2, Y_3, .., Y_m$ 是 (X,τ) 中有限个δ-紧子集。

设 $Y = \cap_{i=1}^{m} Y_i$。现在证明 Y 在 (X,τ) 中是 δ-紧的。由于每个 Y_i 都是 δ-紧的，且 X 是 T_3 ，并且 T_3 空间中的每个 δ-紧子集都是 δ-闭的，因此可以说，每个 Y_i 都是 δ-闭的。于是，根据定理 4.18，可以说 Y 在 (X,τ) 中是 δ-闭的。

□

定理 4.20。如果 A 是闭的，且 B 在 δ-紧的 T_3 空间 X 中是 δ-紧的，那么 $A \cap B$ 是 δ-紧的。

证明。由于空间 X 是 T_3，即正则且 T_2，集合 A 是 δ-闭的。此外，X 是 δ-紧的，这意味着 A 是 δ-紧的。因此，根据定理 4.19，$A \cap B$ 在 X 中是 δ-紧的。 □

5. δ-紧性与连续性

本节将尝试考察 δ-紧空间在连续映射下的性质。

例 5.1。设 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 由 $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ 定义。现在，$f^{-1}(0, 1) = (-1, 0) \cup (0, 1)$。显然，$(0, 1)$ 是正则开集。但是，$\mathrm{cl}[(-1, 0) \cup (0, 1)] = [-1, 1]$，且 $\mathrm{int}[cl((-1, 0) \cup (0, 1))] = (-1, 1) \neq (-1, 0) \cup (0, 1)$。这表明 $(-1, 0) \cup (0, 1)$ 不是正则开集。

注5.2.如果 $f: X \to Y$ 是一个连续映射，并且 U 是Y中的一个正则开集，那么 $f^{-1}(U)$ 在 X 中可能不是正则开集。

定理 5.3. 设 f 是从 (X, τ) 到 (Y, σ) 的开连续映射，且 U 是 Y 中的正则开集。那么 $f^{-1}(U)$ 在 X 中是正则开集。

证明。设 $f: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ 是一个开连续映射。现在我们证明，$f^{-1}(U)$ 在 X 中是正则开集。即，$\mathrm{int}[\mathrm{cl}(f^{-1}(U))] = f^{-1}(U)$。令 $x \in \mathrm{int}[\mathrm{cl}(f^{-1}(U))]$。则 $\exists\, W \in \tau$，使得$x \in W \subseteq \mathrm{cl}(f^{-1}(U)) \Rightarrow f(x) \in f(W) \subseteq f(cl(f^{-1}(U)) \subseteq cl(f(f^{-1}(U))) \Rightarrow f(x) \in f(W) \subseteq cl(U)$。由于 f 是一个开映射，$f(W)$ 在 (Y, σ) 中是开集。因此，$f(x) \in int[cl(U)] \Rightarrow f(x) \in U(\because U$在 Y 中是正则开集$) \Rightarrow x \in f^{-1}(U)$。所以 $int[cl(f^{-1}(U))] \subseteq f^{-1}(U)$。我们还知道 $f^{-1}(U) \subseteq cl(f^{-1}(U)) \Rightarrow int[f^{-1}(U)] \subseteq int[cl(f^{-1}(U))] \Rightarrow f^{-1}(U) \subseteq int[cl(f^{-1}(U))]$。因此，我们有 $f^{-1}(U) = int[cl(f^{-1}(U))]$。由此，$f^{-1}(U)$ 在 (X, τ) 中是正则开集。

□

定理 5.4. 设 f 是从 (X, τ) 到 (Y, σ) 的开连续映射，且 U 是 Y 中的一个 δ-开集。那么 $f^{-1}(U)$ 是 X 中的 δ-开集。

证明. 设 $f: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ 是一个开连续映射。现在我们证明，$f^{-1}(U)$ 是 X 中的 δ-开集。也就是说，对每个 $x \in f^{-1}(U)$，存在 X 中的一个正则开集 V，使得 $x \in V \subseteq f^{-1}(U)$。

令 $x \in f^{-1}(U)$。则 $f(x) \in U$由于 U是 δ-开集，存在一个正则开集 W，属于 Y，使得 $f(x) \in W \subseteq U$。因此，$x \in f^{-1}(W) \subseteq f^{-1}(U)$。现在，由于 W在 Y中是正则开集，且 f 是开连续映射，根据定理 5.3 $f^{-1}(W)$ 是 X中的正则开集。因此，$f^{-1}(U)$ 是 X中的 δ-开集。

□

定理 5.5. 设 f 是从一个 δ-紧拓扑空间 (X,τ) 到拓扑空间 (Y,σ) 的开连续映射。那么 $f(X)$ 是 (Y,σ) 中的 δ-紧集。

证明。设 $\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 是 (Y,σ) 中 $f(X)$ 的 δ-开覆盖。则 $f(X) \subseteq \cup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$，即 $X \subseteq f^{-1}(\cup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha) = \cup_{\alpha\in\Lambda} f^{-1}(U_\alpha)$。由于 f 是开且连续的，根据前面的定理 5.4，每个 $f^{-1}(U_\alpha)$ 都是 X 中的 δ-开集。因此，$\{f^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ 是 X 的 δ-开覆盖。由于 X 是 δ-紧的，故 $\exists$ 是 $\{f^{-1}(U_\alpha)$ 的一个有限子集族 $\{f^{-1}(U_{\alpha_1})\ f^{-1}(U_{\alpha_2}) \ldots, f^{-1}(U_{\alpha_m})\}$，它也覆盖 X。因此，$X \subseteq \cup_{i=1}^{m} f^{-1}(U_{\alpha_i})$。这意味着，$f(X) \subseteq \cup_{i=1}^{m} U_{\alpha_i}$。因此，$\{U_{\alpha_i} : i = 1, 2, \ldots, m\}$ 是 $\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 的有限子集族，它覆盖 $f(X)$。所以，$f(X)$ 在 (Y,σ) 中是 δ-紧的。

□

定义 5.6. 若映射 $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ 将定义域集合中的一个 δ-闭子集映射到陪域中的一个 δ-闭子集，则称其为 δ-闭映射。

定理 5.7. 从一个 δ-紧致空间到任意 T_3拓扑空间的开连续映射是 δ-闭映射。

证明. 设 (X,τ) 是一个 δ-紧致空间，(Y,σ) 是任意一个 T_3 拓扑空间。此外，设 $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ 是一个开连续映射。现在证明，f 是 δ- 闭映射。

设 F 是 X的一个 δ-闭子集。由定理 4.5，显然 F 在 X中是 δ-紧致的。

因此，由定理 5.5，$f(F)$ 在 (Y,σ) 中是 δ-紧致的。此外，空间 Y 是 T_3，并且根据定理 4.15，T_3 空间中的每个 δ-紧致子集都是 δ-闭的。因此，$f(F)$ 在 (Y,σ) 中是 δ-闭的。这就证明了 f 是一个 δ-闭映射。

□

定理 5.8. 从一个 δ-紧 T_3 空间到任意T_3 拓扑空间的开连续映射是闭映射。

证明. 设 (X,τ) 是一个 δ-紧 T_3空间，(Y,σ) 是任意一个 T_3拓扑空间。此外，设 $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ 是一个开连续映射。
现在我们证明，f 是一个闭映射。设 F 是 X的一个闭子集。由于 X是 T_3，即正则的，且 T_2，F 在 X中是 δ-闭的。因此，按照定理 5.7 的证明过程，显然可知 $f(F)$ 在 (Y,σ) 中是 δ- 闭的，也就是说，$f(F)$ 在 (Y,σ) 中是闭的。因此，f 是一个闭映射。

□

6. 局部 δ-紧性

定义 6.1.如果存在一个 x 的邻域，该邻域在 X中是 δ-紧的，则称拓扑空间 (X,τ) 在 $x \in X$处是局部 δ-紧的。如果(X,τ) 在 X 的每个点处都是局部 δ-紧的，则称 X 是局部 δ-紧的

例 6.2. 每个 δ-紧空间都是局部 δ-紧空间。事实上，设 (X,τ) 是一个 δ-紧空间且 $x \in X$。那么 X 本身就是(X,τ) 中 x 的一个 δ-紧邻域。因此 X 在 x 处是局部 δ-紧的。consequently，(X,τ) 是局部δ-紧的。

例 6.3. 任意离散空间 (X,τ) 都是局部 δ-紧的。设 (X,τ) 为离散空间且 $x \in X$。则 $\{x\}$ 是 (X,τ) 中 x 的一个 δ- 紧邻域。因此， X 在 x 处是局部 δ- 紧的。于是，(X,τ) 是局部 δ-紧的。

定理 6.4. 局部 δ-紧 T_3 空间的每个闭子空间都是局部δ-紧的。

证明。设 Y 是局部 δ-紧 T_3 空间 (X,τ) 的闭子空间。设 $y \in Y$。则 $y \in X$。

由于 X 在局部 δ-紧的，因此 $\exists$ 是 (X,τ) 中 y 的一个邻域 V，并且在 X 中是δ-紧的。
由于 Y 是正则空间 X 的闭子集，根据定理 4.6， Y 是 δ-闭集。又由于 V 是 T_3 空间 X 中的 δ- 紧子集，根据定理 4.15， V 是 δ- 闭的。因此， $V \cap Y$ 是 δ- 紧 V 的 δ-闭子集。由定理 4.5 可知， $V \cap Y$ 是 δ-紧的。因此， $V \cap Y$ 是 Y 中 y 的一个 δ-紧邻域。由 y 的任意性可知，(Y, τ_Y) 是局部 δ-紧的。 □

7. 结论

本文首先借助正则开集、正则闭集、 δ-开集和 δ-闭集，建立了关于 δ-紧集的一些基本结果。随后，我们考察了 δ-紧集在连续映射下的性质。最后，我们定义了局部 δ- 紧空间，并据此证明，局部 δ- 紧 T_3 空间的每个闭子空间都是局部 δ- 紧的。

因此，可以尝试针对 δ-紧空间建立亚历山大子基定理。

参考文献

[1] T. Noiri，关于 δ-连续函数，《韩国数学会杂志》，16，1980，161-166。[2] S. Raychaudhuri 和 M.N. Mukherjee，关于 δ-几乎连续性与 δ-预开集，《中央研究院数学研究所集刊》21(4)，1993，357-366。[3]N. Palaniappan 和 K. Chandrasekara Rao，正则广义闭集，《庆北数学》，33，1993，211-219。[4] J.H. Park、B. Y. Lee 和 M.J. Son，关于拓扑空间中的 δ-半开集，《印度数学学会杂志》，19(1)，1997，59-67。[5] M. Saleh， δ-集在 H-闭空间中的若干应用，《一般拓扑学问答》17，1999，203-211。

[6] M. Caldas、D.N. Georgian、S. Jafari 和 T. Noiri，关于 δ-半开集的进一步研究，《数学笔记》，22(2)，2003，113-126。[7] M.Caldas、T. Fukutake、S. Jafari 和 T. Noiri，δ-预开集在拓扑空间中的若干应用，《中央研究院数学研究所集刊》33(3)，2005，261-276。[8] S. Pious Missier、M. Annalakshmi，正则开集与开集之间，《国际数学档案杂志》，7(5)，2016，128-133。[9] S. Pious Missier、C. Reena，关于拓扑空间中的半$^*\delta$-开集，《IOSR 数学杂志》（IOSR-JM），12(5)，2016，01-06。[10] S.Pious Missier、M.Annalakshmi 和 G. Mahadevan，关于正则*–开集，《纯数学与应用数学全球杂志》，13(9)，2017，5717-5726。[11] R. Mohammad Latif，Delta–开集与 Delta–连续函数，《纯数学国际期刊》，8，2021，1-23。[12] J. Dugundji，《拓扑学》，Allyn and Bacon，波士顿，(1966)（由印度 Prentice Hall of India Pvt. Ltd. 重印）。[13] J. L. Kelley，《一般拓扑学》，Van Nostrand，普林斯顿（1955）。[14] James R. Munkress，《拓扑学》（2^{nd} 版），Pearson Education。（2004）。[15] K. D. Joshi，《拓扑学导论》，Wiley Eastern Ltd.（1983）。[16] N. Bourbaki，《一般拓扑学》第一部分（译本），Addison Wesley，雷丁。（1966）。[17] Stephen Willard，《一般拓扑学》，Addison-Wesley，雷丁（1970）。