arXiv:2304.06778v1 [math.FA] 13 Apr 2023

线性算子谱定理的一种 Jordan-Schwinger 变体

Wolfgang Bock、Vyacheslav Futorny、Mikhail Neklyudov

2023年4月17日

摘要

本文利用代数 Jordan-Schwinger 映射展示了谱定理的一种变体。这种方法的优势在于，我们对所考虑的算子类不要求满足正规性。另一方面，我们要求所考虑的算子类属于加权希尔伯特–施密特类。

1 引言

谱定理是线性泛函分析中最基本的定理之一。谱分解这一强大工具箱所提供的各种应用，使它产生了巨大影响。此外，物理系统的描述，尤其是其组织方式和长期行为，都编码在谱值中 [12]。这一点在量子物理和热力学中尤为明显：在这些领域，能量值是适当哈密顿算子的特征值。谱理论的应用则远不止于物理学。它在很大程度上用于描述适当空间中线性动力学所对应的演化，因此与经典半群理论 [13, 4, 9] 直接相关，并广泛应用于系统理论。通过半群方法，自然也会涉及随机分析，特别是马尔可夫过程、马尔可夫链以及狄利克雷型理论。近年来，谱理论也应用于机器学习和人工智能，尤其是模式识别。谱分解能够实现主成分分析 [16] ，从而只考虑占主导地位的模式，简化模式中的贡献模态数量。例如，在人脸识别中，人们会谈到特征脸 [10]。沿着希尔伯特早期算子理论的发展脉络（参见例如 [3] ），上世纪三十年代初，冯·诺伊曼对正规算子的谱定理 [14, 15] 作出了重要贡献。此外，该定理还被用作当时许多新兴理论的数学基础，涵盖偏微分方程和量子物理等领域。谱定理本身通常被理解为一系列关于正规算子的结果；参见例如 [8]。这些结果推广了有限维情形下关于对角化矩阵或可三角化矩阵的结论。将其推广到非正规算子，甚至超出紧算子的范围，远比标准情形复杂，也不那么直接。Gonshor 等人 [6, 7] 首先尝试处理某些特殊类别的非线性算子。对于正规算子的某些特殊扰动，文献 [5] 给出了谱定理。

本文利用 [1] 中引入的代数 Jordan-Schwinger 映射（定义 7.2）证明了谱定理的一个变体。这种方法的优势在于，我们所考虑的算子类不受正规性的限制。另一方面，我们要求所考虑的算子类属于加权希尔伯特–施密特类。

2 预备知识

固定一个可分无限维希尔伯特空间 H。令 S_0、S_1： $H \to H$ 为 Cuntz 代数 O_2的生成元。我们将假设 S_0 是移位算子，按照 [2], 的意义，即

$$\cap_{n=1}^{\infty} S_0^n(H) = \{0\}.$$

注意，此时 $K := H - S_0(H)$ 是一个可分希尔伯特空间。因此，我们可以选取一组标准正交基 $\{\xi_{0,j}\}_{j=1}^{\infty}$，其属于 K，并定义

$$\xi_{i,j} := S_0^i \xi_{0,j}, \quad i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, j \in \mathbb{N}.$$

于是， $\{\xi_{i,j}\}$ 是 H 的一组标准正交基。用 $\mathbb{H}^2(\mathbb{T})$ 表示单位环面 $\mathbb{T}$ 上平方可积函数的哈代子空间，记作 $L^2(\mathbb{T})$，并定义一个酉算子

$$V : H \to \mathcal{H}_+(K) := \mathbb{H}^2(\mathbb{T}) \otimes K, \quad V\xi_{i,j} := z^{i+1} \otimes \xi_{0,j}, \quad i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, j \in \mathbb{N}.$$

我们将 $\mathcal{H}_+(K)$ 的元素与从 $\mathbb{T}$ 到 K 的函数对应起来，使得

$$f \in \mathcal{H}_+(K) \text{ if and only if } f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n, \quad f_n \in K.$$

于是， $\mathcal{H}_+(K)$ 是一个希尔伯特空间，其内积为

$$(f, g)_{\mathcal{H}_+(K)} = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n, g_n)_K = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{S}^1} (f(z), \bar{g}(z))_K \frac{dz}{z}.$$

我们还将用到一个基于 $\mathcal{H}_+(K)$ 的索伯列夫空间。为定义该空间，我们先引入算子

$$J(f)(z) = \frac{1}{z} \int_0^z f(w)\, dw, f \in \mathcal{H}_+(K).$$

注意，

$$||J^p(f)||^2_{\mathcal{H}_+(K)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{||f_n||^2_K}{(n+1)^{2p}}, p \in \mathbb{Z}.$$

此外， J 可逆，且有（$z\frac{d}{dz} + 1$）$J = Id$。因此，我们可以定义一个希尔伯特空间

$$\mathcal{H}_+^p(K) := \{f : J^p(f) \in \mathcal{H}_+(K), \text{ such that } ||J^p(f)||_{\mathcal{H}_+(K)} < \infty\}, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

注意， $S_0^+ = VS_0V^*$ 是一个乘法算子，即:

$$S_0^+ \xi(z) = z\xi(z), \quad \xi \in \mathcal{H}_+(K), \tag{2.1}$$

并且，相应地， S_0^* 与下式酉等价:

$$(S_0^+)^* \xi(z) = VS_0^*V^* = \frac{\xi(z)}{z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{S}^1} \frac{\xi(w)}{w^2} dw = \bar{z}\xi(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{S}^1} \bar{w}^2 \xi(w) dw, \xi \in \mathcal{H}_+(K)。 \tag{2.2}$$

为了建立与 Cuntz 代数的联系，我们回顾如下 Jordan-Schwinger 映射的定义（参见 [1], 定义 7.2）：

定义 2.1. 设 V 是一个与 V^* 具有对偶性 $< \cdot, \cdot >$ 的可分局部凸豪斯多夫拓扑向量空间，并具有双正交系 $\{e_k, f_k\}_{k=1}^{\infty}$。定义 Jordan-Schwinger 映射如下

$$D(A) := \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}} < Ae_\alpha, f_\beta > s_\alpha s_\beta^*, \quad A \in \mathcal{L}(V, V), \tag{2.3}$$

$$\partial(f) := \sum_{\beta\in\mathbb{N}} < f, f_\beta > s_\beta^*, f \in V, \tag{2.4}$$

$$\bar{\partial}(g) := \sum_{\alpha\in\mathbb{N}} < e_\alpha, g > s_\alpha, g \in V^* \tag{2.5}$$

其中 $\{s_k, s_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ 是 Cuntz 代数 O_∞ 的生成元。

我们还回顾以下结果 [2]（引理 6.1），它给出了一一对应关系
bet在 Cuntz 代数 O_∞ 和 O_N 的表示之间。

引理 2.2. 在满足 S_0 为移位的条件下， O_N 在 $\mathcal{H}$ 上的表示 $s_i \mapsto S_i$、$i = 0$、.....、$N-1$ 与满足等距算子的值域之和为 Id 的 O_∞ 在 $\mathcal{H}$ 上的表示之间存在一一对应关系。若 O_∞ 的生成元的表示分别记为 T_k^j、$j = 1$、.....、$N-1$、$k \in \mathbb{N}$，使得

$$(T_{k_1}^{j_1})^* T_{k_2}^{j_2} = \delta_{k_1,k_2}\delta_{j_1,j_2}\, Id,$$

and

$$\sum_{j=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{\infty} T_k^j (T_k^j)^* = Id,$$

那么该一一对应关系由下式给出

$$T_k^j = S_0^{k-1} S_j, j = 1, \ldots, N-1, k \in \mathbb{N},$$

并由

$$S_0 = \sum_{j=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{\infty} T_{k+1}^j T_k^{j,*},$$

and

$$S_j = T_1^j, j = 1, \ldots, N-1,$$

其中所有无穷级数均在强算子拓扑下收敛。

我们将对 $N = 2$ 应用引理 2.2。由于在这种情况下我们有 $j = 1$，为便于阅读，我们省略索引 j。

3 谱定理

借助关于 $N = 2$ 的引理（2.2），并结合映射 D 的定义 2.1，我们可以将每个有界线性算子与变量 S_0 和 S_0^*的一个解析函数联系起来。这已经可以视为谱定理的一种形式。本节将证明， D(*A*) 与 A 确实具有相同的谱；此外，算子 A 的二次型还可以用 D(*A*)表示。

引理 3.1。

$$D(A) = \sum_{m,n\in\mathbb{N}} < Ae_m, f_n > S_0^{m-1} S_1 S_1^* (S_0^*)^{n-1},$$

或者，等价地（应用恒等式 $S_0 S_0^* + S_1 S_1^* = Id$），

$$\begin{aligned} D(A) \quad &= \sum_{m,n\in\mathbb{N}} (< Ae_{m+1}, f_{n+1} > - < Ae_m, f_n >) S_0^m (S_0^*)^n \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} < Ae_{m+1}, f_1 > S_0^m + \sum_{n=1}^{\infty} < Ae_1, f_{n+1} > (S_0^*)^n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

现在，我们可以应用公式 (2.1)、(2.2)，推导出 $D(A)$ 与哈代空间上移位算子及其伴随算子的某个解析函数酉等价。由此可得， $D(A)$ 与一个适当的积分算子酉等价。

定理 3.2。算子 $D(A)$ 与算子 $F(S_0^+, (S_0^+)^*)$ 酉等价，其中$F = F(z, w) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ 由下式给出

$$F = \sum_{m,n\in\mathbb{N}} (< Ae_{m+1}, f_{n+1} > - < Ae_m, f_n >) z^m w^n + \sum_{m=0}^{\infty} < Ae_{m+1}, f_1 > z^m + \sum_{n=1}^{\infty} < Ae_1, f_{n+1} > w^n,$$

而算子 S_0^+、$(S_0^+)^*$ 分别由公式 (2.1) 和 (2.2) 给出。此外，我们有

$$VD(A)V^* f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{S}^1} K(A, z, w) \frac{f(w)}{w} dw, \tag{3.2}$$

with

$$K(A, z, w) := \sum_{m,n=1}^{\infty} < Ae_m, f_n > z^m w^{-n}.$$

此外，若 A 是一个 (r, p)-加权希尔伯特-施密特算子，即

$$||A||^2_{HS^{(r,p)}} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{| < Ae_m, f_n > |^2 (n+1)^{2r}}{(m+1)^{2p}} < \infty, \tag{3.3}$$

then

$$||VD(A)V^*||^2_{\mathcal{L}(\mathcal{H}^r_+(K), \mathcal{H}^p_+(K))} \leq ||A||^2_{HS^{(r,p)}} \tag{3.4}$$

证明。我们来证明公式 (3.2)。有

$$VD(A)V^* = \sum_{m,n\in\mathbb{N}} < Ae_m, f_n > (S_0^+)^{m-1} (Id - S_0^+ (S_0^+)^*) ((S_0^+)^*)^{n-1}.$$

现在很容易计算得出

$$(Id - S_0^+ (S_0^+)^*) g(z) = \frac{z}{2\pi i} \int_{\mathbb{S}^1} \frac{g(w)}{w^2} \, dw.$$

因此，我们有

$$VD(A)V^* f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m,n\in\mathbb{N}} < Ae_m, f_n > z^m \int_{\mathbb{S}^1} \frac{((S_0^+)^*)^{n-1} f}{w^2} \, dw.$$

现在，该结果由该表示得出

$$((S_0^+)^*)^{n-1}f(z) = \frac{f(z)}{z^{n-1}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\kappa_i(f)}{z^{n-i-1}},$$

其中 $\{\kappa_i\}_{i=1}^{n-1}$ 是 f 的某些线性泛函，并且注意到积分后只剩下第一项，即

$$\int_{\mathbb{S}^1} \frac{((S_0^+)^*)^{n-1}f}{w^2}\, dw = \int_{\mathbb{S}^1} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw.$$

不等式（3.4）可由下述方法得到。

$$\begin{aligned}
\left| \tfrac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{S}^1} I^p K(A,z,w) \tfrac{f(w)}{w} dw \right|^2_{\mathcal{H}_+(K)} &= \left| \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I^p K(A,z,e^{i\phi}) f(e^{i\phi})\, d\phi \right|^2_{\mathcal{H}_+(K)} \\
&= \left| \sum_{m,n=1}^{\infty} \tfrac{A_{mn}}{(m+1)^p} z^m \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\phi}) e^{-in\phi}\, d\phi \right|^2_{\mathcal{H}_+(K)} \\
&= \left| \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{A_{mn}}{(m+1)^p} f_n \right) z^m \right|^2_{\mathcal{H}_+(K)} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{A_{mn}(n+1)^r}{(m+1)^p} \tfrac{f_n}{(n+1)^r} \right|^2_K \\
&\le \sum_{m,n=1}^{\infty} \tfrac{|<Ae_m, f_n>|^2 (n+1)^{2r}}{(m+1)^{2p}} |f|^2_{\mathcal{H}_+^r(K)}.
\end{aligned}$$

由此得证。 □

注 3.3. 设算子 A 满足以下条件:

$$|<Ae_m, f_n>| \le \frac{C}{1+|n-m|^l}, l > r + \frac{1}{2}$$

and

$$p > r + \frac{1}{2}.$$

则算子 A 属于加权希尔伯特-施密特空间 $HS^{(r,p)}$。

例 3.4.(a) 设 A 为以下无限对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix}
\alpha & 0 & \dots & 0 & \dots \\
0 & \frac{\alpha^2}{2} & 0 & \dots & \dots \\
0 & 0 & \frac{\alpha^3}{3} & 0 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & \frac{\alpha^n}{n} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{pmatrix}, |\alpha| < 1.$$

然后，我们可以由定理 3.2 推知，对应的算子 $D(A)$ 与以下算子酉等价

$$f \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left(1-\alpha e^{i(\phi-\psi)}\right) f(e^{i\psi})\, d\psi$$

(b) 如果

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2^n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \ |\alpha| < 1,$$

那么类似地可以推导出， $D(A)$与算子酉等价

$$f \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1-\frac{1}{2}e^{i(\phi-\psi)})} f(e^{i\psi})\, d\psi.$$

（c）如果 A是具有特征值 $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ 且相应约当块大小为$\{n_k - n_{k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ 的约当标准形中的算子（按定义为$n_0 = 0$），即

$$A = J_{n_1}(a_1) \oplus J_{n_2-n_1}(a_2) \dots J_{n_m-n_{m-1}}(a_m) \oplus .$$

那么 $D(A)$与将 f 映射到以下对象的算子酉等价

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\frac{e^{i(\phi-\psi)})}{e^{i(\phi-\psi)}) - 1} \sum_{l=1}^{\infty} a_l \left(e^{in_l(\phi-\psi)} - e^{in_{l-1}(\phi-\psi)} \right) + e^{i\phi} \left(\frac{e^{i(\phi-\psi)}}{1-e^{i(\phi-\psi)}} - \kappa(e^{i(\phi-\psi)}) \right) \right] f(e^{i\psi})\, d\psi,$$

∞其中 $\kappa(z) = \sum z^{n_k}$。例如，如果所有 $n_k = k$、$k \in \mathbb{N}$，即该算子是对角的，我们得到 $k=1\infty$形如 $\sum a_l e^{il(\phi-\psi)}$的核。如果 A 不是对角的，则相应的积分算子$l=1$不是卷积算子。

（d）设 $A = \{a_{i-j}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ 为双边托普利茨算子，则与 $D(A)$对应的积分算子将具有如下核

$$\frac{e^{i(\phi-\psi)}}{1-e^{i(\phi-\psi)}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ik\phi}.$$

(e) 设$A = \{a_{i-j}\}_{i}^{\infty},_{j=1}$ 为托普利茨算子。那么，与$D(A)$对应的积分算子的核为

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{m-n} e^{i(m\phi - n\psi)}.$$

以下推论给出了算子A 的双线性形式与其 Jordan-Schwinger 像之间的一一对应。

推论 3.5. 我们有 A的如下表示

$$< Af, g >= \partial(f)D(A)\bar{\partial}(g) = \partial(f)V^*F(S_0^+, (S_0^+)^*)V\bar{\partial}(g).$$

对于算子 A，我们将 $\sigma(A)$（分别记作 $\sigma_p(A)$、 $\sigma_{res}(A)$）称为它的谱（分别为点谱、剩余谱）。下面的引理将说明 A 及其各部分的谱与 $D(A)$的谱之间的联系。事实上，从谱的角度来看，我们发现 $D(A)$与 A^* 的关系更为密切。

引理 3.6. 对于 $A \in \mathcal{L}(V, V)$，有

$$\sigma_p(A) \subset \sigma_{res}(D(A)) \cup \sigma_p(D(A)), \sigma_p(A^*) \subset \sigma_p(D(A)).$$

此外,

$$\sigma_p(D(A)) \subset \sigma_{res}(A) \cup \sigma_p(A).$$

此外，若 V 是弗雷歇空间，则

$$\sigma(A) = \sigma(D(A)).$$

此外，若 V 是对偶可分的可分巴拿赫空间，则有

$$D(A^*) = D^*(A).$$

证明。(a) 若 $\lambda \in \sigma_p(A)$，因而 $Af = \lambda f$、 $f \in V$，则由 [1]中的引理 7.3 可得 $\partial(f)D(A) = \lambda\partial(f)$。因此

$$\partial(f)(D(A) - \lambda Id) = 0, f \neq 0$$

且算子 $(D(A) - \lambda Id)$ 的像在 H 中不稠密。

(b) 与 (a) 类似，对于 $\lambda \in \sigma_p(A^*)$ 及其对应的特征向量 $g \in V^*$，由引理 7.3，在 [1] 中有

$$(D(A) - \lambda Id)\bar{\partial}(g) = 0.$$

因此， $\lambda \in \sigma_p(D(A))$。

(c) 若 $\lambda \in \sigma_p(D(A))$，且 ψ 是对应的特征向量，则对任意 $f \in V$，由引理 7.3，在 [1] 中有

$$\partial(Af)\psi = \lambda\partial(f)\psi,$$

即 $\partial((A - \lambda Id)f)\psi = 0, f \in V$。因此，算子 $(A - \lambda Id)$ 的像在V 中不稠密。

(d) 由 [1]中的推论7.5可得。

(e) 为证明等式 $D(A^*) = D^*(A)$，只需注意到，根据Markushevich的经典结果， [11] 存在一个收缩 Markushevich 基。

□

注 3.7。在前面的定理、引理和推论中，我们讨论谱时，并未假设算子是正规算子、对称算子，或具有其他任何性质；只要求它在局部凸拓扑可分豪斯多夫空间上有界。特别是， A 只需满足这样的条件：它是在具有双正交系的空间上的加权希尔伯特-施密特算子，参见 3.3 中范数的定义。

推论 3.8。假设 V是一个可分巴拿赫空间。如果 $A \in \mathcal{L}(V,V) \cap HS^{(r,p)}$ 是一个紧算子，那么 $D(A)$ 也是紧算子。此外，如果 A 属于正则度为 $p \geq 1$ 的 Schatten 类，那么 $D(A)$ 也属于具有相同正则度 p 的 Schatten 类。

证明。设 $A \in HS^{(r,p)}$ 是一个紧算子。则 $D(A) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_+^r(K)\ \mathcal{H}_+^p(K)))$，根据不等式（3.4），可以在相同范数下用有限秩投影逼近。因此， $D(A)$ 是紧的。由引理 3.6 $\sigma(D(A)) = \sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$，此外， $\sigma_p(D(A)) \subset \sigma_p(A) \cup \sigma_{res}(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$。因此， $D(A)$ 的点谱是离散的，其唯一可能的聚点位于 $\{0\}$ 中，并且是 A 的点谱的子集（除去点 $\{0\}$）。由于 Schatten 类范数只依赖于点谱，且 $\sigma_p(D(A)) \subset \sigma_p(A)$，我们得到该结果的第二部分。

□

3.1 可数群 G 的同胚嵌入

设 G 是一个阶为 $|G|$ （可能为无穷）的可数群， $\mathcal{F}(G)$ 是 G 上所有实值函数构成的空间， H 是一个无限维可分希尔伯特空间， $O(H)$ 是 H 上正交算子构成的群， $\{S_g, g \in G\}$ 是 Cuntz 代数 $O_{|G|}$ 的生成元，它们是 H 中相互正交的等距算子。我们将生成元 $S.$ 与 G 的元素一一对应。无需损失一般性，我们可以假设

$$\sum_{h \in G} S_h S_h^* = Id.$$

¯定义 3.9。定义 $D: G \to O(H)$, $\partial, \partial: \mathcal{F}(G) \to O_{|G|}$如下

$$D(g) := \sum_{h \in G} S_h S_{gh}^*, \partial(\alpha) := \sum_{h \in G} \alpha(h) S_h, \quad \bar{\partial}(\alpha) := \sum_{h \in G} \alpha(h) S_h^*, \quad g \in G, \alpha \in \mathcal{F}(G).$$

下一个引理说明 D 在群上的定义是良好的。

引理 3.10。映射 D 是群之间的忠实同态:

$$D(g)D(f) = D(gf), D^*(g) = D(g^{-1}), D(e) = Id, g, f \in G. \tag{3.5}$$

此外,

$$D(g)\partial(\alpha) = \partial(\alpha \circ g), \bar{\partial}(\beta)D(g) = \bar{\partial}(\beta \circ g^{-1}), \bar{\partial}(\beta)\partial(\alpha) = \sum_{h \in G} \alpha(h)\beta(h), \alpha, \beta \in \mathcal{F}(G), g \in G. \tag{3.6}$$

¯证明。该结果可由 D、 ∂、 ∂的定义立即得出。 □

由于算子 $D(g)$ $g \in G$ 彼此正交，正规算子的谱定理给出

$$D(g) = \int_{\sigma(D(g))} \lambda dE_\lambda(g),$$

其中 $E_\lambda(g)$ $\lambda \in \sigma(D(g))$ 是 $D(g)$ 的谱投影。因此，对于任意 $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$，我们可以定义

$$f(D(g)) := \int_{\sigma(D(g))} f(\lambda) dE_\lambda(g).$$

这样，我们可以扩展群 G，例如加入 G 中所有元素的平方根。

注记 3.11。定义 3.9 中的表示可以利用引理（2.2）的构造写成如下形式。设 G 是一个无限可数群，$K : G \to \mathbb{N}$ 是 G 中元素的任意枚举，且 $S_0 : H \to H$ 是 H 上的移位算子，那么，与引理 3.1 中相同，我们得到以下公式

$$D(g) := \sum_{h\in G} S_0^{K(h)-1}(S_0^*)^{K(gh)-1} - S_0^{K(h)}(S_0^*)^{K(gh)}, g \in G \tag{3.7}$$

每个枚举 K 都可以写成 $K = \sigma \circ K_0$，其中 K_0 是某个固定的枚举，且$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是一个换位。

因此，表示 (3.7) 由两个参数刻画—— H 的移位算子 S_0，以及换位群中的一个元素 σ。

例 3.12. 设 $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 为克莱因群，其生成元为 a、b，并设 S_e、S_a、S_b、S_{ab}为辅助的无限维可分希尔伯特空间 H上的互相正交的等距算子，它们生成 Cuntz 代数 O_4。则我们有 G的以下忠实表示:

$$D(e) := Id, D(a) := S_eS_a^* + S_aS_e^* + S_bS_{ab}^* + S_{ab}S_b^*,$$
$$D(b) := S_eS_b^* + S_bS_e^* + S_aS_{ab}^* + S_{ab}S_a^*,$$
$$D(ab) := S_eS_{ab}^* + S_{ab}S_e^* + S_aS_b^* + S_bS_a^*.$$

例 3.13. 设 $G = \mathbb{Z}$ 和 $K : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ 由下式给出

$$K(m) := \begin{cases} 2m+1 & , \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ -2m & , \quad m < 0 \end{cases}$$

则 $D(0) = I$，且当 $m \in \mathbb{N}$时，

$$\begin{aligned} D(m) \quad &= \sum_{k=1}^{m} S_0^{2k-1}(I - S_0S_0^*)(S_0^*)^{2m-2k} \\ &+ \sum_{k=m+1}^{\infty} S_0^{2k-1}(I - S_0S_0^*)(S_0^*)^{2k-2m-1} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} S_0^{2n}(I - S_0S_0^*)(S_0^*)^{2n+2m}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

$D(-m) = D(m)^*$ 或者，直接计算可得

$$\begin{aligned} D(-m) \quad &= \sum_{n=0}^{m} S_0^{2n}(I - S_0S_0^*)(S_0^*)^{2(m-n)-1} \\ &+ \sum_{n=m+1}^{\infty} S_0^{2n}(I - S_0S_0^*)(S_0^*)^{2(n-m)} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} S_0^{2n}(I - S_0S_0^*)(S_0^*)^{2n+2m-1}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

注意，我们有 $D(m) = D(1)^m, m \in \mathbb{N}$，而引理 3.10（恒等式 (3.6)）表明，$D(m)$ 在序列 $\alpha = \{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$（由算子 $\partial(\alpha)$ 表示）上充当移位算子。

致谢

M. N. 和 V. F. 获得了 CNPq（402449/2021-5）的部分资助。

参考文献

[1] W. Bock、V. Futorny、M. Neklyudov，《通过线性向量场与 Cuntz代数构造凸拓扑代数》，《纯粹与应用代数杂志》第225卷第3期，106535（2021）。[2] O. Bratelli、P.T.E. Joergensen，《等距算子、移位算子、Cuntz代数与尺度 N 的多分辨率小波分析》，《积分方程与算子理论》28，382–443（1997）。[3] R. Courant 和 D. Hilbert，《数学物理方法：英文第一版》，第1卷，Interscience Publishers，1953。[4] Curtain, R. F., & Zwart, H.（2012）。《无穷维线性系统理论导论》（第21卷）。Springer Science & Business Media。[5] Ding, J., Zhou, A.（2008）。《扰动有界线性算子的谱定理》。《应用数学与计算》201（1-2），723-728。[6] Gonshor, Harry.《一类非正规算子的谱理论》。《加拿大数学杂志》8（1956）：449-461。[7] Gonshor, H.（1958）。《一类非正规算子的谱理论 II》。《加拿大数学杂志》10，97-102。芝加哥[8] S. Hassani，《数学物理》（Springer，纽约，1999）。[9] Jacob, B., & Zwart, H. J.（2012）。《无穷维空间上的线性端口哈密顿系统》（第223卷）。Springer Science & Business Media。[10] Kshirsagar, V. P., Baviskar, M. R., & Gaikwad, M. E.（2011年3月）。《使用特征脸进行人脸识别》。载于《2011年第3届计算机研究与发展国际会议》（第2卷，第302-306页）。IEEE。[11] A. Markushevich，《线性空间中的（广义）基》，C. R.（Doklady）苏联科学院（新系列）41，227—229（1943）。´N. Trefethen，（2011）。《最喜爱的特征值问题》，《SIAM 新闻》44（10）。[12] Pazy, A.（2012）。《线性算子半群及其在偏微分方程中的应用》（第44卷）。Springer Science & Business Media。[13] J. von Neumann，《关于函数运算代数及正规算子理论》，《数学年刊》102，370–427（1930）。https://doi.org/10.1007/bf0178235213。[14] J. von Neumann，《量子力学的数学基础》（普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1955）。[15] Vidal, R., Ma, Y., Sastry, S. S., Vidal, R., Ma, Y., & Sastry, S. S.（2016）。《主成分分析》（第25-62页）。Springer New York。（W. Bock）

[16] , Technomathematics Group, University of Kaiserslautern, P. O. Box 3049 67653 Kaiser-,slautern Germany: *E-mail address*(V.Futorny) bock@mathematik.uni-kl.de, SUSTech, Shenzhen和 China , University of São Paulo Brasil: *E-mail address*(M. Neklyudov) vfutorny@gmail.com, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matematica, UFAM, Manaus CEP,69077-000 Brasil: *E-mail address*