arXiv:2304.06781v1 [math.RA] 13 Apr 2023

低维复 BiHom 三代数的分类、导子与质心

Ahmed Zahari*法国米卢斯，上阿尔萨斯大学 IRIMAS 数学系，弗雷尔·吕米埃尔街 18 号，邮编 F-68093。Bouzid Mosbahi†突尼斯斯法克斯，斯法克斯大学斯法克斯理学院，邮政信箱 1171，邮编 3000。Imed Basdouri‡突尼斯加夫萨，加夫萨大学加夫萨理学院，邮编 2112。

摘要。本文旨在研究 BiHom-结合三代数的结构。为此，我们构造了一类重要的 BiHom 三代数，并确定 BiHom-结合三代数中右运算、左运算和中间运算的性质。我们给出了 n 维 BiHom 三代数的分类，其中 n ≤ 3。基于 BiHom-结合三代数的分类结果，我们刻画了低维 BiHom-结合三代数的导子与质心。我们回顾了 BiHom-结合三代数质心的一些性质，并计算了低维 BiHom-结合三代数的质心。

美国数学会学科分类：17A30, 17A32, 16D20, 16W25, 17B63。

关键词：BiHom-结合三代数、分类、质心、导子、中心导子。

1 引言

BiHom-结合三代数（$\mathcal{A}$、$\dashv$、$\vdash$、$\perp$、α、β）包含一个向量空间、三种乘法和两个线性自映射。它可以被视为结合代数的变形，其中结合条件由线性映射 α 和 β扭曲；当 α = 为恒等映射（分别地， β =为恒等映射）时，BiHom-结合三代数退化为恰好的BiHom-三结合代数。在当前工作中，我们的核心重点是BiHom-结合三代数的结构。设 $\mathcal{A}$ 为一个n维 $\mathbb{F}$-线性空间，并设 {e_1,e2、$\cdots$、e_n}为 $\mathcal{A}$的一组基。 $\mathcal{A}$上的BiHom-结合三代数结构，其乘积μ、λ和 ξ由$3n^3$个结构常数γ_i^kj、δ_i^kj和 ξ_{ij}^k确定，即$e_i \dashv e$ j $= \sum_{k=1}^{n} \gamma_i^kje_k$、$e_i \vdash e$ j $= \sum_{k=1}^{n} \delta_{ij}^k e_k$以及e $_i \perp e$ j $= \sum_{k=1}^{n} \xi_{ij}^k e_k$。它们还由 α确定

*电子邮件地址：zaharymaths@gmail.com

†电子邮件地址：mosbahibouzid@yahoo.fr

‡电子邮件地址：basdourimed@yahoo.fr

（分别为 β），后者由$2n^2$个结构常数a_{ij}（分别为b_{ij}）给出，其中 α（e_i）$=\sum_{j=1}^{n} a_{ji}e_j$（分别为$\beta$（$e_j$）$=\sum_{k=1}^{n} b_{kj}e_k$）。要求代数结构为BiHom-结合三代数且含单位，会产生 $\mathcal{BT}$ 中的一个子簇，其形式为 $\mathbb{F}^{3n^3+2n^2}$。 $\mathcal{A}$ 中的基变换导致$GL_n(k)$在 $\mathcal{BT}$ 上的自然结构输运作用。从这一角度看，n维BiHom-代数的同构类与$GL_n(\mathbb{F})$在 $\mathcal{BT}$ 上的作用轨道一一对应。

采用代数与几何方法研究 BiHom-结合三代数的分类问题，引发了人们对其导子和质心的广泛关注。Loday [5] 提出 BiHom-结合三代数，旨在构造对偶双代数；此后，人们从数学和物理学的多个领域对其进行了进一步研究。 [1] 和 A. Zahari 对 Hom-结合代数的分类进行了研究，而 I. Bakayoko 与 A. Zahari 则研究了 BiHom-结合二代数的分类 [2]。

本文着重研究有限维结合试代数的导子和质心。导子代数和质心在代数的代数与几何分类问题中十分必要且极为有用。

本文结构如下。第一节介绍研究主题，并概述一些已有结果。本文旨在引入并分类 BiHom-结合三代数的导子和质心。第二节探讨 BiHom-结合三代数的结构。第三节展示 BiHom-结合三代数的代数簇，并给出二维和三维 BiHom-结合三代数在同构意义下的分类。

在第 4 节中，我们确定了导子的分类。最后，在第 5 节中，我们给出了质心的分类。在这种情况下，导子和质心的概念很大程度上受到有限维代数中相关概念的启发，并引起了科学界的广泛关注。质心代数在分类问题以及代数的各种应用中都发挥着重要作用。在本研究中，我们详细阐述了二维和三维 BiHom-结合三代数的分类结果。我们假设所有讨论的代数和向量空间都定义在特征零的域$\mathbb{F}$上。

2 BiHom-结合试代数的结构

定义 2.1. BiHom-结合三代数是一个六元组 $(\mathcal{A}, \dashv, \vdash, \perp, \alpha, \beta)$，由一个线性空间 $\mathcal{A}$、线性映射 $\dashv, \vdash, \perp : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ 以及 $\alpha, \beta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ 构成，并满足对所有 x, y, z $\in \mathcal{A}$，以下条件：

$$\begin{aligned}
\alpha \circ \beta &= \beta \circ \alpha, && (2.1)\\
(x \dashv y) \dashv \beta(z) &= \alpha(x) \dashv (y \dashv z), && (2.2)\\
(x \dashv y) \dashv \beta(z) &= \alpha(x) \dashv (y \vdash z) = \alpha(x) \dashv (y \perp z), && (2.3)\\
(x \dashv y) \dashv \beta(z) &= \alpha(x) \vdash (y \dashv z), && (2.4)\\
(x \dashv y) \vdash \beta(z) &= \alpha(x) \vdash (y \vdash z) = (x \perp y) \vdash \beta(z), && (2.5)\\
(x \vdash y) \vdash \beta(z) &= \alpha(x) \vdash (y \vdash z), && (2.6)\\
(x \perp y) \dashv \beta(z) &= \alpha(x) \perp (y \dashv z), && (2.7)\\
(x \dashv y) \perp \beta(z) &= \alpha(x) \perp (y \vdash z), && (2.8)\\
(x \vdash y) \perp \beta(z) &= \alpha(x) \vdash (y \perp z), && (2.9)\\
(x \perp y) \perp \beta(z) &= \alpha(x) \perp (y \perp z), && (2.10)
\end{aligned}$$

对所有的 x、y、z $\in \mathcal{A}$。我们称 α 和 β（依此顺序）为 $\mathcal{A}$的结构映射。

注 2.2. 此外，α 和 β 关于 $\dashv$、$\vdash$ 和 $\perp$是自同态。于是，$\mathcal{A}$ 称为乘法型 BiHom-结合试代数

$$\begin{aligned}
\alpha(x \dashv y) = \alpha(x) \dashv \alpha(y) \quad &; \quad \beta(x \dashv y) = \beta(x) \dashv \beta(y),\\
\alpha(x \vdash y) = \alpha(x) \vdash \alpha(y) \quad &; \quad \beta(x \vdash y) = \beta(x) \vdash \beta(y),\\
\alpha(x \perp y) = \alpha(x) \perp \alpha(y) \quad &; \quad \beta(x \perp y) = \beta(x) \perp \beta(y),
\end{aligned}$$

对所有的 x、y $\in \mathcal{A}$。

定义 2.3. BiHom-结合试代数同态是一个线性映射

$$\psi : (\mathcal{A}, \dashv, \vdash, \perp, \alpha, \beta) \to (\mathcal{A}', \dashv', \vdash', \perp', \alpha', \beta')$$

使得

$$\alpha' \circ \psi = \psi \circ \alpha, \ \beta' \circ \psi = \psi \circ \beta$$

and

$$\begin{aligned}
\psi(x \dashv y) &= \psi(x) \dashv' \psi(y),\\
\psi(x \vdash y) &= \psi(x) \vdash' \psi(y),\\
\psi(x \perp y) &= \psi(x) \perp' \psi(y),
\end{aligned}$$

对所有的 x、y $\in \mathcal{A}$。

注 2.4. 双射同态是 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$的同构。

定义 2.5. 设 $(\mathcal{A}, *, \alpha, \beta)$ 是一个 BiHom-结合三代数。若存在一个结合试代数 $(\mathcal{A}, *')$，使得对任意 x, y ∈A，有 x $*'$y $= \alpha^{-1}$(x) $*\beta^{-1}$(y)，$\forall$，则称 $(\mathcal{A}, *, \alpha, \beta)$ 为结合型，并称 (A, $*'$) 为其相容结合代数，或称为 $(\mathcal{A}, *, \alpha, \beta)$ 的解扭。

命题 2.6. 设 $(\mathcal{A}, \dashv, \vdash, \perp, \alpha, \beta)$ 是一个 n 维 BiHom-结合三代数，并设 $\psi: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是一个可逆线性映射。因此，它与一个 n 维 BiHom-结合三代数 $(\mathcal{A}, \dashv', \vdash', \perp', \psi\alpha\psi^{-1}, \psi\beta\psi^{-1})$ 同构，其中 $(\dashv', \vdash', \perp') = \psi \circ (\dashv, \vdash, \perp) \circ (\psi^{-1} \otimes \psi^{-1})$。此外，若 $n\phi_i^k j$、$\gamma_i^k j$、$\delta_i^k jo$ 是 $(\dashv, \vdash, \perp)$ 关于基 $\{e_1, ..., e_n\}$ 的结构常数，则 $(\dashv', \vdash', \perp')$ 关于基 $\{\psi(e_1)、 ...、 \psi(e_n)\}$ 具有相同的结构常数。

证明。我们证明，对于任意可逆线性映射 $\psi: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$，$(\mathcal{A}, \dashv', \vdash', \perp', \psi\alpha\psi^{-1}, \psi\beta\psi^{-1})$ 是一个 BiHom-结合三代数。

$$\begin{aligned}
(x \dashv' y) \dashv' \psi\beta\psi^{-1}(z) &= \psi \dashv (\psi^{-1} \otimes \psi^{-1})(x, y) \dashv' \psi\beta\psi^{-1}(z) \\
&= (\psi(\psi^{-1} \otimes \psi^{-1})(x \dashv y)) \dashv' \psi\beta\phi^{-1}(z) \\
&= \psi(\psi^{-1} \otimes \psi^{-1})(\psi(\psi^{-1} \otimes \psi^{-1})(x \dashv y) \dashv \phi^{-1}\beta\psi(z) \\
&= \psi(\psi^{-1}(x) \dashv \psi^{-1}(y)) \dashv \psi^{-1}\beta\psi(z) \\
&= \psi(\alpha\psi^{-1}(x) \dashv (\psi^{-1}(y) \vdash \psi^{-1}(z))) \\
&= \psi(\psi^{-1} \otimes \psi^{-1})(\psi \otimes \psi)\alpha\psi^{-1}(x) \dashv (\psi^{-1} \otimes \psi^{-1}(y \vdash z)) \\
&= \psi(\psi^{-1} \otimes \psi^{-1})(\psi\alpha\psi^{-1}(x) \dashv (\psi(\psi^{-1} \otimes \psi^{-1})(y \vdash z))) \\
&= \psi\alpha\psi^{-1}(x) \dashv' (y \vdash' z).
\end{aligned}$$

因此，$(\mathcal{A}, \dashv', \vdash', \perp', \psi\alpha\psi^{-1}, \psi\beta\psi^{-1})$ 是一个 BiHom-结合三代数。
它还是乘法的。事实上，对于 α

$$\begin{aligned}
\psi\alpha\psi^{-1}(x \dashv' y) &= \psi\alpha\psi^{-1}\psi \dashv (\psi^{-1} \otimes \psi^{-1})(x, y) \\
&= \psi\alpha \dashv (\psi^{-1} \otimes \psi^{-1})(x, y) \\
&= \psi(\alpha\psi^{-1}(x) \dashv \alpha\psi^{-1}(y)) \\
&= \psi((\psi^{-1} \otimes \psi^{-1})(\psi \otimes \phi)\alpha\psi^{-1}(x) \dashv \alpha\psi^{-1}(y)) = (\psi\alpha\psi^{-1}(x) \dashv' \psi\alpha\psi^{-1}(y)).
\end{aligned}$$

对于 β，我们也有

$$\begin{aligned}
\psi\beta\psi^{-1}(x \dashv' y) &= \psi\beta\psi^{-1}\psi \dashv (\psi^{-1} \otimes \psi^{-1})(x, y) \\
&= \psi\beta \dashv (\psi^{-1} \otimes \psi^{-1})(x, y) \\
&= \psi(\beta\psi^{-1}(x) \dashv \beta\psi^{-1}(y)) \\
&= \psi((\psi^{-1} \otimes \psi^{-1})(\psi \otimes \phi)\beta\psi^{-1}(x) \dashv \beta\psi^{-1}(y)) = (\psi\beta\psi^{-1}(x) \dashv' \psi\beta\psi^{-1}(y)).
\end{aligned}$$

因此，$\psi: (\mathcal{A}, \dashv, \vdash, \perp, \alpha, \beta) \to (\mathcal{A}, \dashv', \vdash', \perp', \psi\alpha\psi^{-1}, \psi\beta\psi^{-1})$ 是一个 BiHom-结合三代数态射，因为

$\psi \circ \dashv = \psi \circ \dashv \circ (\psi^{-1} \otimes \psi^{-1}) \circ (\psi \otimes \psi) = \mu' \circ (\psi \otimes \psi)$ 且 $(\psi\alpha\phi^{-1}) \circ \psi = \psi \circ \alpha$ 且 $(\psi\beta\psi^{-1}) \circ \psi = \psi \circ \beta$。容易推得 $\{\psi(e_i), \cdots, \psi(e_n)\}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一组基。对于 $i, j = 1, \cdots, n$，有

$$(\psi(e_i) \dashv \psi(e_j)) = \psi(\psi^{-1}(e_i) \dashv \psi^{-1}(e_j)) = \psi(e_i \dashv e_j) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ij}^k \psi(e_k).$$

□

命题 2.7. 设 $(\mathcal{A}, \dashv, \vdash, \perp, \alpha, \beta)$ 是 $\mathbb{F}$ 上的 BiHom-结合三代数。设 $(\mathcal{A}, \dashv', \vdash', \perp', \phi\alpha\psi^{-1}, \psi\beta\psi^{-1})$ 是命题 2.6 中描述的、与之同构的 BiHom-结合三代数。若 ψ 是 $(\mathcal{A}, \dashv, \vdash, \perp, \alpha, \beta)$ 的自同构，则 $\psi\phi\psi^{-1}$ 是 $(\mathcal{A}, \dashv', \vdash', \perp', \psi\alpha\psi^{-1}, \psi\beta\psi^{-1})$ 的自同构。

证明. 注意到 $\gamma = \psi\alpha\psi^{-1}$。由此可得

$$\psi\phi\psi^{-1}\gamma = \psi\phi\psi^{-1}\psi\alpha\psi^{-1} = \psi\phi\alpha\psi^{-1} = \psi\alpha\phi\psi^{-1} = \psi\alpha\psi^{-1}\psi\phi\psi^{-1} = \gamma\psi\phi\psi^{-1}.$$

对于 β，我们假设 $\lambda = \psi\beta\psi^{-1}$。因此，我们得到

$$\psi\phi\psi^{-1}\lambda = \psi\phi\psi^{-1}\psi\beta\psi^{-1} = \psi\phi\beta\psi^{-1} = \psi\beta\phi\psi^{-1} = \psi\beta\psi^{-1}\psi\phi\psi^{-1} = \lambda\psi\phi\psi^{-1}.$$

对于任意 x, y ∈ T,

$$\begin{aligned}\psi\phi\psi^{-1}(\psi(x)\dashv'\psi(y)) &= \psi\phi\psi^{-1}\psi(x\dashv y)=\psi\phi(x\dashv y)=\psi(\phi(x)\dashv\phi(y))\\ &=(\psi\phi(x)\dashv'\psi\phi(y))=(\psi\phi\psi^{-1}(\psi(x)\dashv'\phi\psi\phi^{-1}(\phi(y))).\end{aligned}$$

根据定义， $\psi\phi\psi^{-1}$ 是 $(A,\dashv',\vdash',\perp',\psi\alpha\psi^{-1},\psi\beta\psi^{-1})$ 的一个自同构。 □

在下面的命题中，我们证明 BiHom-结合三代数在直和运算下封闭，并给出一个条件，使线性映射成为 BiHom-结合三代数直和的同态。

命题 2.8. 设 $(\mathcal{A},\dashv_{\mathcal{A}},\vdash_{\mathcal{A}},\perp_{\mathcal{A}},\alpha_{\mathcal{A}},\beta_{\mathcal{A}})$ 和 $(\mathcal{B},\dashv_{\mathcal{B}},\vdash_{\mathcal{B}},\perp_{\mathcal{B}},\alpha_{\mathcal{B}},\beta_{\mathcal{A}})$ 是两个 BiHom-结合三代数。那么，在 $\mathcal{A}\oplus\mathcal{B}$ 上存在一个 BiHom-结合三代数结构，其双线性映射 $\prec,\succ,*:(\mathcal{A}\oplus\mathcal{B})^{\otimes 2}\to\mathcal{A}\oplus\mathcal{B}$ 定义如下:

$$(a_1+b_2)\dashv(a_2+b_2):=a_1\dashv_{\mathcal{A}}a_2+b_2\dashv_{\mathcal{B}}b_2,$$

$$(a_1+b_1)\vdash(a_2+b_2):=a_1\vdash_{\mathcal{A}}a_2+b_{\mathcal{A}}\vdash_{\mathcal{B}}b_2$$

$$(a_1+b_1)\perp(a_2+b_2):=a_1\perp_{\mathcal{A}}a_2+b_{\mathcal{A}}\perp_{\mathcal{B}}b_2$$

以及线性映射 $\alpha=\alpha_{\mathcal{A}}+\alpha_{\mathcal{B}},\beta=\beta_{\mathcal{A}}+\beta_{\mathcal{B}}$: $\mathcal{A}\oplus\mathcal{B}\to\mathcal{A}\oplus\mathcal{B}$ 由下式表示

$$(\alpha_{\mathcal{A}}+\alpha_{\mathcal{B}})(a+b):=\alpha_{\mathcal{A}}(a)+\alpha_{\mathcal{B}}(b),(\beta_{\mathcal{A}}+\beta_{\mathcal{B}})(a+b):=\beta_{\mathcal{A}}(a)+\beta_{\mathcal{B}}(b),\forall(a,b)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}.$$

此外，如果 $\xi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是一个线性映射，那么，

$$\xi:(\mathcal{A},\dashv_{\mathcal{A}},\vdash_{\mathcal{A}},\alpha_{\mathcal{A}},\beta_{\mathcal{A}})\to(\mathcal{B},\dashv_{\mathcal{B}},\vdash_{\mathcal{B}},\alpha_{\mathcal{B}},\beta_{\mathcal{B}})$$

是一个同态，当且仅当其图 $\Gamma_\xi=\{(x,\xi(x)),x\in\mathcal{A}\}$ 是 $(\mathcal{A}\oplus\mathcal{B},\prec,\succ,*,\alpha,\beta)$ 的 BiHom-子代数。

证明。第一部分可通过直接计算得出，因此我们略去证明。现在，假设 $\xi:(\mathcal{A},\dashv_{\mathcal{A}},\vdash_{\mathcal{A}},\alpha_{\mathcal{A}},\beta_{\mathcal{A}})\to(\mathcal{B},\dashv_{\mathcal{B}},\vdash_{\mathcal{B}},\alpha_{\mathcal{B}},\beta_{\mathcal{B}})$ 是 BiHom-结合试代数的一个同态。因此

$$(u+\xi(u))\dashv(v+\xi(v))=(u\dashv_{\mathcal{A}}v+\xi(u)\dashv_B\xi(v))=u\dashv_{\mathcal{A}}v+\xi(u\dashv_{\mathcal{A}}v),$$

$$(u+\xi(u))\vdash(v+\xi(v))=(u\vdash_{\mathcal{A}}v+\xi(u)\vdash_B\xi(v))=u\vdash_{\mathcal{A}}v+\xi(u\vdash_{\mathcal{A}}v).$$

$$(u+\xi(u))\perp(v+\xi(v))=(u\perp_{\mathcal{A}}v+\xi(u)\vdash_B\xi(v))=u\perp_Av+\xi(u\perp_{\mathcal{A}}v).$$

因此，图 Γ_ξ 在运算 $\dashv,\vdash$ 和 $\perp$下封闭。
此外，由于 $\xi\circ\alpha_{\mathcal{A}}=\alpha_{\mathcal{B}}\circ\xi$，且 $\xi\circ\beta_{\mathcal{A}}=\beta_{\mathcal{B}}\circ\xi$，我们有

$$(\alpha_{\mathcal{A}}\oplus\alpha_{\mathcal{B}})(u,\xi(u))=(\alpha_{\mathcal{A}}(u),\alpha_{\mathcal{B}}\circ\xi(u))=(\alpha_{\mathcal{A}}(u),\xi\circ\alpha_{\mathcal{A}}(u)),$$

and

$$(\beta_{\mathcal{A}}\oplus\beta_{\mathcal{B}})(u,\xi(u))=(\beta_{\mathcal{A}}(u),\beta_{\mathcal{B}}\circ\xi(u))=(\beta_{\mathcal{A}}(u),\xi\circ\beta_{\mathcal{A}}(u));$$

这意味着 Γ_ξ在 $\alpha_{\mathcal{A}}\oplus\alpha_{\mathcal{B}}$和 $\beta_{\mathcal{A}}\oplus\beta_{\mathcal{B}}$下是闭合的。因此， Γ_ξ是（$\mathcal{A}\oplus\mathcal{B}$， $\dashv$， $\vdash$， α， β）的 BiHom-子代数。
反之，若图 $\Gamma_\xi\subset\mathcal{A}\oplus\mathcal{B}$是 $(\mathcal{A}\oplus\mathcal{B},\dashv,\vdash,\alpha,\beta)$ 的 BiHom-子代数，则可得

$$(u+\xi(u))\dashv(v+\xi(v))=(u\dashv_{\mathcal{A}}v+\xi(u)\dashv_{\mathcal{B}}\xi(v))\in\Gamma_\xi,$$

$$(u+\xi(u))\vdash(v+\xi(v))=(u\vdash_{\mathcal{A}}v+\xi(u)\vdash_{\mathcal{B}}\xi(v))\in\Gamma_{\xi},$$

$$(u+\xi(u))\perp(v+\xi(v))=(u\perp_{\mathcal{A}}v+\xi(u)\perp_{\mathcal{B}}\xi(v))\in\Gamma_{\xi}.$$

此外，$(\alpha_{\mathcal{A}}\oplus\alpha_{\mathcal{B}})(\Gamma_{\xi})\subset\Gamma_{\xi}$，且$(\beta_{\mathcal{A}}\oplus\beta_{\mathcal{B}})(\Gamma_{\xi})\subset\Gamma_{\xi}$，这意味着

$$(\alpha_{\mathcal{A}}\oplus\alpha_{\mathcal{B}})(u,\xi(u))=(\alpha_{\mathcal{A}}(u),\alpha_{\mathcal{B}}\circ\xi(u))\in\Gamma_{\xi},(\beta_{\mathcal{A}}\oplus\beta_{\mathcal{B}})(u,\xi(u))=(\beta_{\mathcal{A}}(u),\beta_{B}\circ\xi(u))\in\Gamma_{\xi},$$

这等价于条件 $\alpha_{\mathcal{B}}\circ\xi(\mathrm{u})=\xi\circ\alpha_{\mathcal{A}}(\mathrm{u})$，即 $\alpha_{\mathcal{B}}\circ\xi=\xi\circ\alpha_{\mathcal{A}}$。类似地，$\beta_{\mathcal{B}}\circ\xi=\xi\circ\beta_{\mathcal{A}}$。
因此，ξ是 BiHom-结合三代数同态。 □

定义 2.9. 设 $(\mathcal{A},\dashv,\vdash,\perp,\alpha,\beta)$ 是一个 BiHom-结合三代数，并赋予线性映射 $\mathrm{R}:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$，满足 $\alpha\circ\mathrm{R}=\mathrm{R}\circ\alpha,\beta\circ\mathrm{R}=\mathrm{R}\circ\beta$且

$$\begin{aligned}R(x)\vdash R(y)&=R(R(x)\dashv y+x\dashv R(y)+\lambda(x\dashv y)),\\ R(x)\dashv R(y)&=R(R(x)\vdash y+x\vdash R(y)+\lambda(x\vdash y)),\\ R(x)\perp R(y)&=R(R(x)\perp y+x\perp R(y)+\lambda(x\perp y)),\end{aligned}$$

其中 $\lambda\in\mathbb{K}$，$\mathrm{x,y}\in\mathcal{A}$，称为 Rota-Baxter BiHom-结合三代数，而 R 称为 $\mathcal{A}$上权为 λ 的 Rota-Baxter 算子。

例 2.10. 我们考虑一个二维 BiHom-结合三代数，其基为 $\{\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2\}$。对于 $\mathrm{e}_1\dashv\mathrm{e}_2=\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2\dashv\mathrm{e}_1=\mathrm{e}_1$，$\mathrm{e}_1\vdash\mathrm{e}_2=\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_1\perp\mathrm{e}_2=\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2\perp\mathrm{e}_2=\mathrm{e}_1$，$\alpha(\mathrm{e}_2)=\mathrm{e}_1$，$\beta(\mathrm{e}_2)=\mathrm{e}_1$ 且 $\mathrm{R}(\mathrm{e}_1)=-\lambda\mathrm{e}_1,\mathrm{R}(\mathrm{e}_2)=-\lambda\mathrm{e}_2$。

命题 2.11. 设 $(\mathcal{A},*,\alpha,\beta,\mathrm{R})$ 是权为 λ 的某个 Rota-Baxter BiHom-结合三代数，并在 $\mathcal{A}$ 上定义三个新运算 $\perp$、$\dashv$ 和 $\vdash$：$\mathrm{x}\dashv\mathrm{y}=\mathrm{x}*\mathrm{R(y)}$，$\mathrm{x}\vdash\mathrm{y}=\mathrm{R(x)}*\mathrm{y}$，以及 $\mathrm{x}\perp\mathrm{y}=\lambda\mathrm{x}*\mathrm{y}$。则，$(\mathcal{A},\dashv,\vdash,\perp,\alpha,\beta)$ 是一个 BiHom-结合三代数。

证明. 我们只证明一个公理，其余公理的证明类似。事实上，对于任意 $\mathrm{x,y,z}\in\mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}(x\vdash y)\dashv\beta(z)&=(R(x)*y)\dashv\beta(z)\\&=(R(x)*y)*R(\beta(z))\\&=\alpha(R(x))*(y\dashv y)\\&=\alpha(x)\vdash(y\dashv y),\end{aligned}$$

由此证明完毕。 □

命题 2.12. 设 $(\mathcal{A},\dashv,\vdash,\perp,\alpha,\beta)$ 是一个 BiHom-结合三代数，且假设 $\alpha^2=\beta^2\alpha\circ\beta=\beta\circ\alpha=\mathrm{id}$。则，$(\mathrm{A},\dashv,\vdash,\perp,\alpha,\beta)\cong(\mathcal{A},\dashv,\vdash,\perp,\beta,\alpha)$。

证明。我们只证明一个公理，其他公理的证明类似。对于任意的 $\mathrm{x,y,z}\in\mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}\alpha(x)\dashv(y\vdash z)&=\alpha(x)\dashv(y\perp z)\\&\Leftrightarrow\alpha(\alpha\beta(x))\dashv(y\vdash z)=\alpha(\alpha\beta(x))\dashv(y\perp z)\\&\Leftrightarrow\alpha^2\beta(x)\dashv(y\vdash z)=\alpha^2\beta(x)\dashv(y\perp z)\\&\Leftrightarrow\beta(x)\dashv(y\vdash z)=\beta(x)\dashv(y\perp z).\end{aligned}$$

因此，$(\mathcal{A},\perp,\dashv,\vdash,\alpha,\beta)\cong(\mathcal{A},\perp,\dashv,\vdash,\beta,\alpha)$。 □

命题 2.13. 设 $(\mathcal{A},\dashv,\vdash,\perp,\alpha,\beta)$ 是一个 BiHom-结合三代数。因此，$(\mathcal{A},\dashv,\perp,*,\alpha,\beta)$ 是一个 BiHom-结合三代数，其中对于任意 $\mathrm{x,y,z}\in\mathcal{A}$，$\mathrm{x}*\mathrm{y}=\mathrm{x}\vdash\mathrm{y}+\mathrm{x}\perp\mathrm{y}$。

证明。我们只证明一个公理，其余公理的证明类似。对于任意 $x,y,z \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}(x*y) \dashv \beta(z) &= (x \vdash y + x \perp y) \dashv \beta(z)\\ &= (x \vdash y) \dashv \beta(z) + (x \perp y) \dashv \beta(z)\\ &= \alpha(x) \vdash (y \dashv z) + \alpha(x) \perp (y \dashv z) = \alpha(x) * (y \dashv z),\end{aligned}$$

由此得证。 □

命题 2.14. 设 $(\mathcal{A}, \dashv, \vdash, \perp, \alpha, \beta)$ 是 BiHom-结合三代数。现在定义二元运算如下：

$$\begin{aligned}x*y &= x \dashv y - y \vdash x\\ [x,y] &= x \perp y - y \perp x.\end{aligned}$$

则 $(\mathcal{A}, *, [,], \alpha, \beta)$ 成为一个 BiHom-结合三代数。

证明。根据定义，对任意 $x,y,z \in \mathcal{A}$，有

$$\begin{aligned}[x,y] * \beta(z) &= [x,y] \dashv \beta(z) - \alpha(z) \vdash [x,y]\\ &= (x \vdash y - y \perp x) \dashv \beta(z) - \alpha(z) \vdash (x \perp y - y \perp x).\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}[x*z, \beta(y)] + [\alpha(x), y*z] &= [x \dashv z - z \vdash, \beta(y)] + [\alpha(x), y \dashv z - z \vdash y]\\ &= (x \vdash z - z \vdash x) \perp \beta(y) - \alpha(y) \perp (x \dashv z - z \vdash x)\\ &+ \alpha(x) \perp (y \dashv z - z \vdash y) - (y \dashv z - z \vdash y) \perp \beta(x).\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}(x \perp y) \dashv \beta(z) &= \alpha(x) \perp (y \vdash z),\\ (y \perp x) \dashv \beta(z) &= \alpha(y) \perp (x \vdash z),\\ \alpha(z) \vdash (x \perp y) &= (z \vdash x) \perp \beta(y),\\ \alpha(z) \vdash (y \perp x) &= (z \vdash y) \perp \beta(x),\\ (x \perp z) \perp \beta(y) &= \alpha(x) \perp (z \vdash y),\\ \alpha(y) \perp (z \vdash x) &= (y \dashv z) \perp \beta(x),\end{aligned}$$

在 BiHom-结合试代数中，我们有 $[x,y] * \alpha\beta(z) = [x*z, \beta(y)] + [\alpha(x), y*z]$。证明至此结束。□

命题 2.15. 设 $(\mathcal{A}, \dashv, \vdash, \perp, \alpha, \beta)$ 是一个 BiHom-结合试代数，且 $x*y = x \vdash y + x \dashv y + x \perp y$。那么，$(\mathcal{A}, *, \alpha, \beta)$ 是一个 BiHom-结合代数。

证明. 对任意 $x,y,z \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}(x*y)*\beta(z) &- \alpha(x)*(y*z)\\ &= (x \vdash y + x \dashv y + x \perp y) * \beta(z) - \alpha(x) * (y \vdash z + y \dashv z + y \perp z)\\ &= (x \vdash y) * \beta(z) + (x \dashv y) * \beta(z) + (x \perp y) * \beta(z) - \alpha(x) * (y \vdash z) - \alpha(x) * (y \dashv z) - \alpha(x) * (y \perp z)\\ &= (x \vdash y) \vdash \beta(z) + (x \vdash y) \dashv \beta(z) + (x \vdash y) \perp \beta(z) + (x \dashv y) \vdash \beta(z) + (x \dashv y) \dashv \beta(z) + (x \dashv y) \perp \beta(z)\\ &+ (x \perp y) \vdash \beta(z) + (x \perp y) \dashv \beta(z) + (x \perp y) \perp \beta(z) - \alpha(x) \vdash (y \vdash z) - \alpha(x) \dashv (y \vdash z) - \alpha(x) \perp (y \vdash z)\\ &- \alpha(x) \vdash (y \dashv z) - \alpha(x) \dashv (y \dashv z) - \alpha(x) \perp (y \dashv z) - \alpha(x) \vdash (y \perp z) - \alpha(x) \dashv (y \perp z) - \alpha(x) \perp (y \perp z).\end{aligned}$$

这证实了 $(\mathcal{A}, *, \alpha, \beta)$ 是一个 BiHom-结合代数。 □

定义 2.16. BiHom-结合试代数 $(\mathcal{A}, \dashv, \perp, *, \alpha, \beta)$ 上的平均算子是一个线性映射 $\xi: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$，使得 $\alpha \circ \xi = \xi \circ \alpha$ 且 $\beta \circ \xi = \xi \circ \beta$，并且对所有 $x, y \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}\xi(\xi(x) \perp y) &= \xi(x) \perp \xi(y) = \xi(x \perp \xi(y)),\\ \xi(\xi(x) \dashv y) &= \xi(x) \dashv \xi(y) = \xi(x \dashv \xi(y)),\\ \xi(\xi(x) \vdash y) &= \xi(x) \vdash \xi(y) = \xi(x \vdash \xi(y)).\end{aligned}$$

命题 2.17. 设 $(\mathcal{A},\cdot)$ 是一个结合代数，并设 $\alpha,\beta\colon \mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$ 是两个平均算子，使得 $(\mathcal{A},\cdot,\alpha,\beta)$ 是一个 BiHom-结合代数。对任意 $x, y\in\mathcal{A}$，在 $\mathcal{A}$ 上定义新算子：$x\dashv y=\alpha(x)\cdot y$，$x\vdash y=x\cdot\beta(y)$，$x\perp y=\alpha(x)\cdot\beta(y)$。

证明。我们只证明一个公理，其余公理的证明方法类似。对于任意的 $x,y,z\in\mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}(x\dashv y)\perp\beta(z) &= (\alpha(x)\cdot y)\perp\beta(z)\\ &= \alpha(\alpha(x)\cdot y)\cdot\beta(\beta(y))\\ &= (\alpha(x)\cdot\alpha(y))\cdot\beta(\beta(z))=\alpha(\alpha(x))\cdot(\alpha(y)\cdot\beta(z)),\end{aligned}$$

证明至此结束。 □

3 低维 BiHom-结合试代数的分类

本节详细描述域 $\mathbb{F}$ 上二维和三维 BiHom-结合三代数的 $\alpha\beta$-导子。设 $\{e_1,e_2,e3,\cdots,e_n\}$ 是 n 维 BiHom-结合三代数 $\mathcal{A}$ 的一组基。基底乘积表示为

$$e_i\dashv e_j=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ij}^{k}e_k;\quad e_i\vdash e_j=\sum_{k=1}^{n}\delta_{ij}^{k}e_k;\quad e_i\perp e_j=\sum_{k=1}^{n}\xi_{ij}^{k}e_k;\ \alpha(e_i)=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}e_j;\quad \beta(e_j)=\sum_{k=1}^{n}b_{kj}e_k.$$

我们有

$$\sum_{j=1}^{n}b_{ji}a_{kj} = \sum_{j=1}^{n}a_{ji}b_{kj}, \tag{3.1}$$

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\gamma_{ij}^{p}b_{qk}\gamma_{pq}^{r} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}a_{pi}\gamma_{jk}^{q}\gamma_{pq}^{r}, \tag{3.2}$$

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\gamma_{ij}^{p}b_{qk}\gamma_{pq}^{r} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}a_{pi}\delta_{jk}^{q}\gamma_{pq}^{r} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}a_{pi}\xi_{jk}^{q}\gamma_{pq}^{r}, \tag{3.3}$$

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\delta_{ij}^{p}b_{qk}\gamma_{pq}^{r} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}a_{pi}\gamma_{jk}^{q}\delta_{pq}^{r}, \tag{3.4}$$

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\gamma_{ij}^{p}b_{qk}\delta_{pq}^{r} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}a_{pi}\gamma_{jk}^{q}\delta_{pq}^{r} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\xi_{ij}^{p}b_{qk}\delta_{pq}^{r}, \tag{3.5}$$

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\delta_{ij}^{p}b_{qk}\delta_{pq}^{r}=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}a_{pi}\delta_{jk}^{q}\delta_{pq}^{r}\quad;\quad\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\xi_{ij}^{p}b_{qk}\gamma_{pq}^{r}=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}a_{pi}\gamma_{jk}^{q}\xi_{pq}^{r}, \tag{3.6}$$

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\gamma^{p}{}_{ij}b_{qk}\xi_{pq}^{r}=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}a^{pi}\delta^{q}{}_{jk}\xi_{pq}^{r}\quad;\quad\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\delta^{p}{}_{ij}b_{qk}\xi_{pq}^{r}=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}a^{pi}\xi^{q}{}_{jk}\delta_{pq}^{r}, \tag{3.7}$$

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\xi^{p}{}_{ij}b_{qk}\xi_{pq}^{r} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}a^{pi}\xi^{q}{}_{jk}\xi_{pq}^{r}, \tag{3.8}$$

其中，$(a_{ij})_{1\leq i,\ j\leq n}$ 表示 α 的矩阵，$(b_{ij})_{1\leq i,\ j\leq n}$ 对应于 β 的矩阵，而 (γ_{ij}^{k})、(δ_{ij}^{k}) 和 (ξ_{ij}^{k}) 表示 $\mathcal{A}$ 的结构常数。

注 2.2 中的公理分别等价于

$$\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ij}^{k}a_{qk}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}a_{ki}a_{pj}\gamma_{kp}^{q},\quad \sum_{k=1}^{n}\delta_{ij}^{k}a_{qk}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}a_{ki}a_{pj}\delta_{kp}^{q},\quad \sum_{k=1}^{n}\xi_{ij}^{k}a_{qk}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}a_{ki}a_{pj}\xi_{kp}^{q}.$$

$$\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ij}^{k}b_{qk}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}b_{ki}a_{pj}\gamma_{kp}^{q},\quad \sum_{k=1}^{n}\delta_{ij}^{k}b_{qk}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}b_{ki}a_{pj}\delta_{kp}^{q},\quad \sum_{k=1}^{n}\xi_{ij}^{k}b_{qk}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}b_{ki}a_{pj}\xi_{kp}^{q}.$$

3.1 二维 BiHom-结合试代数的分类

注意， $\mathcal{BT}\mathrm{as}_n^m$表示 n 维 BiHom-结合三代数的 m^{th} 同构类。

定理 3.1。任意二维复 BiHom-结合三代数要么是结合的，要么同构于以下彼此不同构的 BiHom-结合三代数之一：

$$\begin{aligned}
\mathcal{BT}as_2^1:&\ e_1\dashv e_2=e_1,\quad e_2\dashv e_2=e_1,\quad e_2\vdash e_1=e_1,\quad \alpha(e_2)=e_1,\\
&\ e_2\dashv e_1=e_1,\quad e_1\vdash e_2=e_1,\quad e_2\perp e_2=e_1,\quad \beta(e_2)=e_1.\\
\mathcal{BT}as_2^2:&\ e_1\dashv e_2=e_1,\quad e_2\dashv e_2=e_1,\quad e_2\vdash e_1=e_1,\quad e_2\perp e_2=e_1,\\
&\ e_2\dashv e_1=e_1,\quad e_1\vdash e_2=e_1,\quad e_2\vdash e_2=e_1,\quad \alpha(e_2)=\beta(e_2)=e_1.\\
\mathcal{BT}as_2^3:&\ e_2\dashv e_2=e_1,\quad e_2\perp e_1=e_1,\quad \alpha(e_1)=\beta(e_1)=e_1,\\
&\ e_2\vdash e_2=e_1,\quad e_2\perp e_2=e_1,\quad \alpha(e_2)=\beta(e_2)=e_1+e_2.\\
\mathcal{BT}as_2^4:&\ e_2\dashv e_1=e_1,\quad e_2\vdash e_1=e_1,\quad e_2\perp e_1=e_1,\quad \alpha(e_1)=\beta(e_1)=e_1,\\
&\ e_2\dashv e_2=e_1+e_2,\quad e_2\vdash e_2=e_1+e_2,\quad e_2\perp e_2=e_1+e_2,\quad \alpha(e_2)=\beta(e_2)=e_1+e_2.\\
\mathcal{BT}as_2^5:&\ e_1\dashv e_2=e_1,\quad e_1\vdash e_2=e_1,\quad e_1\perp e_2=e_1,\quad \alpha(e_1)=\beta(e_1)=e_1,\\
&\ e_2\dashv e_2=e_2,\quad e_2\vdash e_2=e_2,\quad e_2\perp e_2=e_2,\quad \alpha(e_2)=e_2,\beta(e_2)=e_1+e_2.\\
\mathcal{BT}as_2^6:&\ e_2\dashv e_2=e_1,\quad e_2\perp e_2=e_1,\quad \alpha(e_2)=e_2,\\
&\ e_2\vdash e_2=e_1,\quad \alpha(e_1)=\beta(e_1)=e_1,\quad \beta(e_2)=e_1+e_2.\\
\mathcal{BT}as_2^7:&\ e_1\dashv e_2=e_1,\quad e_1\vdash e_2=e_1,\quad e_1\perp e_2=e_1,\quad \alpha(e_1)=e_1,\quad \beta(e_1)=e_1,\\
&\ e_1\dashv e_2=e_1+e_2,\quad e_2\vdash e_2=e_1+e_2,\quad e_2\perp e_2=e_1+e_2,\quad \alpha(e_2)=e_1+e_2,\quad \beta(e_2)=e_1+e_2.
\end{aligned}$$

3.2 三维 BiHom-结合试代数的分类 **s**

定理 3.2。任意三维复 BiHom-结合三代数要么是结合的，要么同构于以下彼此不同构的 BiHom-结合三代数之一：

$$\begin{aligned}
\mathcal{BT}as_3^1:&\ e_1\dashv e_2=e_1,\quad e_2\vdash e_1=e_1,\quad e_2\perp e_2=e_1,\\
&\ e_2\dashv e_2=e_1,\quad e_2\vdash e_2=e_1,\quad e_2\perp e_3=e_1,\quad \alpha(e_3)=e_3,\\
&\ e_2\dashv e_3=e_1,\quad e_3\vdash e_2=e_1,\quad e_3\perp e_2=e_1,\quad \beta(e_2)=e_1.\\
\mathcal{BT}as_3^2:&\ e_1\dashv e_2=e_1,\quad e_2\vdash e_2=e_1,\quad e_2\perp e_1=e_1,\quad \alpha(e_3)=e_3,\\
&\ e_2\dashv e_1=e_1,\quad e_2\vdash e_3=e_1,\quad e_2\perp e_3=e_1,\quad \beta(e_2)=e_1,\\
&\ e_3\dashv e_2=e_1,\quad e_3\vdash e_3=e_1,\quad e_3\perp e_2=e_1,\quad \beta(e_3)=e_3.\\
\mathcal{BT}as_3^3:&\ e_2\dashv e_3=e_1,\quad e_1\vdash e_2=e_1\quad e_1\perp e_1=e_1,\quad e_3\perp e_1=e_1,\\
&\ e_3\dashv e_1=e_1,\quad e_2\vdash e_3=e_1,\quad e_1\perp e_2=e_1,\quad \alpha(e_2)=e_2,\\
&\ e_3\dashv e_2=e_1,\quad e_3\vdash e_2=e_1,\quad e_2\perp e_3=e_1,\quad \beta(e_3)=e_3.\\
\mathcal{BT}as_3^4:&\ e_1\dashv e_2=e_1,\quad e_1\vdash e_2=e_1\quad e_2\vdash e_3=e_3,\quad e_3\perp e_3=e_3,\\
&\ e_2\dashv e_1=e_3,\quad e_2\vdash e_1=e_1\quad e_2\perp e_2=e_1,\quad \alpha(e_2)=e_1,\\
&\ e_2\dashv e_2=e_1+e_3,\quad e_2\vdash e_2=e_1+e_3,\quad e_2\perp e_3=e_1,\quad \beta(e_2)=e_1.
\end{aligned}$$

$\mathcal{BT}$ 如$_3^5$: $e_1 \dashv e_2 = e_1$, $e_2 \dashv e_3 = e_1$, $e_3 \vdash e_2 = e_1$, $e_3 \perp e_2 = e_1$, $e_2 \dashv e_1 = e_3$, $e_2 \vdash e_1 = e_1$, $e_1 \perp e_2 = e_1$, $\alpha(e_3) = \beta(e_3) = e_3$, $e_2 \dashv e_2 = e_1$, $e_2 \vdash e_3 = e_1$, $e_2 \perp e_2 = e_1$, $\beta(e_2) = e_{1\circ}$

$\mathcal{BT}$ 为$_3^6$: $e_1 \dashv e_2 = e_1$, $e_2 \vdash e_2 = e_1$, $e_2 \perp e_1 = e_1$, $e_3 \perp e_3 = e_1$, $e_2 \dashv e_1 = e_1$, $e_2 \vdash e_3 = e_1$, $e_2 \perp e_2 = e_1$, $\alpha(e_3) = e_3$, $e_2 \dashv e_2 = e_1$, $e_3 \vdash e_3 = e_1$, $e_2 \perp e_3 = e_1$, $\beta(e_2) = e_1$.

$\mathcal{BT}$ as$_3^7$: $e_1 \dashv e_1 = e_1$, $e_3 \dashv e_1 = e_1$, $e_3 \vdash e_1 = e_1$, $e_3 \perp e_2 = e_1$, $e_1 \dashv e_2 = e_1$, $e_1 \vdash e_1 = e_1$, $e_1 \perp e_2 = e_1$, $\alpha(e_2) = e_2$, $e_2 \dashv e_3 = e_1$, $e_2 \vdash e_3 = e_1$, $e_2 \perp e_3 = e_1$, $\beta(e_3) = e_{3\circ}$

$\mathcal{BT}$ 作为$_3^8$: $e_1 \dashv e_1 = e_1$, $e_3 \dashv e_2 = e_1$, $e_3 \vdash e_1 = e_1$, $e_3 \perp e_2 = e_1$, $e_2 \dashv e_3 = e_1$, $e_1 \vdash e_2 = e_1$, $e_2 \perp e_3 = e_1$, $\alpha(e_2) = e_2$, $e_3 \dashv e_1 = e_1$, $e_2 \vdash e_3 = e_1$, $e_3 \perp e_1 = e_1$, $\beta(e_3) = e_3$.

$\mathcal{BT}$ 如$_3^9$: $e_1 \dashv e_1 = e_1$, $e_2 \vdash e_1 = e_1$, $e_1 \perp e_1 = e_1$, $\alpha(e_2) = e_2$, $e_1 \dashv e_2 = e_1$, $e_3 \vdash e_1 = e_1$, $e_3 \perp e_1 = e_1$, $\beta(e_3) = e_3$. $e_3 \dashv e_1 = e_1$, $e_3 \vdash e_2 = e_1$, $e_3 \perp e_2 = e_1$,

$\mathcal{BT}$ as$_3^{10}$: $e_2 \dashv e_1 = e_2$, $e_3 \dashv e_2 = e_2$, $e_3 \vdash e_2 = e_2$, $e_3 \perp e_2 = e_2$, $e_2 \dashv e_2 = e_2$, $e_2 \vdash e_1 = e_2$ $e_2 \perp e_2 = e_2$, $\alpha(e_1) = e_1$, $e_3 \dashv e_1 = e_2$, $e_3 \vdash e_1 = e_2$, $e_3 \perp e_1 = e_2$, $\beta(e_3) = e_3$.

$\mathcal{BT}$ 为$_3^{11}$: $e_2 \dashv e_1 = e_3$, $e_2 \vdash e_1 = e_3$ $e_2 \perp e_1 = e_3$, $e_3 \perp e_3 = e_3$, $e_2 \dashv e_3 = e_3$, $e_3 \vdash e_1 = e_3$, $e_2 \perp e_3 = e_3$, $\alpha(e_1) = e_1$, $e_3 \dashv e_1 = e_3$, $e_3 \vdash e_3 = e_3$, $e_3 \perp e_1 = e_3$, $\beta(e_3) = e_3$.

$\mathcal{BT}$ as$_3^{12}$: $e_2 \dashv e_1 = e_3$, $e_1 \vdash e_2 = e_3$ $e_2 \perp e_1 = e_3$, $\alpha(e_1) = e_1$, $e_3 \dashv e_1 = e_3$, $e_2 \vdash e_1 = e_3$, $e_2 \perp e_3 = e_3$, $\beta(e_3) = e_3$. $e_3 \dashv e_3 = e_3$, $e_3 \vdash e_1 = e_3$, $e_3 \perp e_3 = e_3$,

$\mathcal{BT}$ as$_3^{13}$: $e_1 \dashv e_2 = e_3$, $e_3 \dashv e_3 = e_3$, $e_3 \vdash e_1 = e_3$, $e_3 \perp e_3 = e_3$, $e_2 \dashv e_1 = e_3$, $e_2 \vdash e_1 = e_3$ $e_1 \perp e_2 = e_3$, $\alpha(e_1) = e_1$, $e_3 \dashv e_1 = e_3$, $e_2 \vdash e_3 = e_3$, $e_2 \perp e_3 = e_3$, $\beta(e_3) = e_{3\circ}$

$\mathcal{BT}$ 作为$_3^{14}$: $e_1 \dashv e_2 = e_3$, $e_2 \vdash e_1 = e_3$ $e_3 \vdash e_3 = e_3$, $e_3 \perp e_2 = e_3$, $e_2 \dashv e_2 = e_3$, $e_2 \vdash e_2 = e_3$, $e_1 \perp e_2 = e_3$, $\alpha(e_1) = e_1$, $e_2 \dashv e_3 = e_3$, $e_3 \vdash e_2 = e_3$, $e_2 \perp e_2 = e_3$, $\beta(e_1) = e_1$.

$\mathcal{BT}$ 作为$_3^{15}$: $e_2 \dashv e_1 = e_3$, $e_2 \vdash e_2 = e_3$ $e_2 \perp e_1 = e_3$, $\alpha(e_1) = e_1$, $e_2 \dashv e_2 = e_3$, $e_2 \vdash e_3 = e_3$, $e_3 \perp e_2 = e_3$, $\beta(e_1) = e_1$. $e_2 \dashv e_3 = e_3$, $e_3 \vdash e_3 = e_3$, $e_3 \perp e_3 = e_3$,

$\mathcal{BT}$ 作为$_3^{16}$: $e_2 \dashv e_1 = e_1 + e_3$, $e_3 \dashv e_2 = e_3$, $e_2 \perp e_2 = e_1 + e_3$, $\alpha(e_2) = e_1$, $e_2 \dashv e_2 = e_1 + e_3$, $e_1 \vdash e_2 = e_1 + e_3$ $e_2 \perp e_3 = e_3$, $\alpha(e_3) = e_2$, $e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_3$, $e_2 \vdash e_1 = e_1 + e_3$, $e_3 \perp e_2 = e_1$, $\beta(e_2) = e_1$.

$\mathcal{BT}$ as$_3^{17}$: $e_1 \dashv e_1 = e_1 + e_3$, $e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_3$, $e_3 \vdash e_2 = e_1 + e_3$, $\alpha(e_2) = e_1$, $e_2 \dashv e_1 = e_1 + e_3$, $e_2 \vdash e_1 = e_1 + e_3$ $e_2 \perp e_2 = e_1 + e_3$, $\alpha(e_3) = e_2$, $e_2 \dashv e_2 = e_1 + e_3$, $e_2 \vdash e_2 = e_1 + e_3$, $e_3 \perp e_2 = e_1 + e_3$, $\beta(e_2) = e_{1\circ}$

$\mathcal{BT}$ as$_3^{18}$: $e_2 \dashv e_1 = e_1 + e_3$, $e_3 \dashv e_2 = e_1 + e_3$, $e_3 \vdash e_2 = e_1 + e_3$, $\alpha(e_2) = e_1$, $e_2 \dashv e_2 = e_1 + e_3$, $e_1 \vdash e_2 = e_1 + e_3$ $e_2 \perp e_2 = e_1 + e_3$, $\alpha(e_3) = e_2$, $e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_3$, $e_2 \vdash e_1 = e_1 + e_3$, $e_2 \perp e_3 = e_1 + e_3$, $\beta(e_2) = e_1$.

$\mathcal{BT}$ 作为$_3^{19}$: $e_2 \dashv e_2 = e_1$, $e_1 \vdash e_2 = e_1$ $e_2 \perp e_1 = e_1 + e_3$, $\alpha(e_2) = e_1$, $e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_3$, $e_2 \vdash e_1 = e_1$ $e_2 \perp e_3 = e_1 + e_3$, $\beta(e_2) = e_1$. $e_3 \dashv e_3 = e_3$, $e_3 \vdash e_3 = e_1 + e_3$, $e_3 \perp e_3 = e_1 + e_3$,

$\mathcal{BT}\mathrm{as}_3^{20}$: $e_1 \dashv e_2 = e_1 + e_3$, $e_2 \vdash e_2 = e_1 + e_3$, $e_2 \perp e_1 = e_1$, $\alpha(e_2) = e_1$,
$e_2 \dashv e_2 = e_1 + e_3$, $e_2 \vdash e_3 = e_1 + e_3$, $e_2 \perp e_2 = e_1 + e_3$, $\alpha(e_3) = e_2$,
$e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_3$, $e_3 \vdash e_2 = e_1 + e_3$, $e_3 \perp e_2 = e_1 + e_3$, $\beta(e_2) = e_1$.

$\mathcal{BT}\mathrm{as}_3^{21}$: $e_1 \dashv e_2 = e_1$, $e_1 \vdash e_2 = e_1 + e_3$, $e_2 \perp e_1 = e_1$, $\alpha(e_2) = e_1$,
$e_2 \dashv e_1 = e_1 + e_3$, $e_2 \vdash e_1 = e_1 + e_3$, $e_2 \perp e_3 = e_1 + e_3$, $\beta(e_2) = e_1$.
$e_2 \dashv e_2 = e_1 + e_3$, $e_2 \vdash e_2 = e_1 + e_3$, $e_3 \perp e_3 = e_1 + e_3$,

$\mathcal{BT}\mathrm{as}_3^{22}$: $e_1 \dashv e_2 = e_3$, $e_2 \vdash e_1 = e_1$ $e_2 \perp e_2 = e_1 + e_3$, $\alpha(e_2) = e_1$,
$e_2 \dashv e_2 = e_1 + e_3$, $e_2 \vdash e_2 = e_1 + e_3$, $e_2 \perp e_3 = e_1 + e_3$, $\alpha(e_3) = e_2$,
$e_3 \dashv e_3 = e_1 + e_3$, $e_3 \vdash e_2 = e_1 + e_3$, $e_3 \perp e_2 = e_1$, $\beta(e_2) = e_1$.

$\mathcal{BT}$为$_3^{23}$: $e_2 \dashv e_1 = e_3$, $e_3 \dashv e_2 = e_1 + e_3$, $e_2 \perp e_1 = e_1 + e_3$, $\alpha(e_2) = e_1$,
$e_2 \dashv e_2 = e_1 + e_3$, $e_2 \vdash e_1 = e_3$ $e_2 \perp e_2 = e_3$, $\alpha(e_3) = e_2$,
$e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_3$, $e_2 \vdash e_2 = e_1$, $e_2 \perp e_3 = e_3$, $\beta(e_2) = e_1$。

$\mathcal{BT}$作为$_3^{24}$: $e_2 \dashv e_1 = e_3$, $e_2 \vdash e_2 = e_1 + e_3$ $e_1 \perp e_2 = e_1 + e_3$, $\alpha(e_2) = e_1$,
$e_2 \dashv e_2 = e_3$, $e_2 \vdash e_3 = e_3$, $e_2 \perp e_3 = e_1 + e_3$, $\alpha(e_3) = e_2$,
$e_2 \dashv e_3 = e_1 + e_3$, $e_2 \vdash e_3 = e_1$, $e_3 \perp e_2 = e_3$, $\beta(e_2) = e_1$.

4 低维 BiHom-结合试代数的导子

定义 4.1. BiHom-结合三代数 $\mathcal{A}$ 的 $\alpha\beta$-导子是一种线性变换: $\mathcal{D}: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, 满足

$$\alpha \circ d = d \circ \alpha \quad , \quad \beta \circ d = d \circ \beta \tag{4.1}$$
$$d(x \dashv y) = d(x) \dashv \alpha\beta(y) + \alpha\beta(x) \dashv d(y) \tag{4.2}$$
$$d(x \vdash y) = d(x) \vdash \alpha\beta(y) + \alpha\beta(x) \vdash d(y) \tag{4.3}$$
$$d(x \perp y) = d(x) \perp \alpha\beta(y) + \alpha\beta(x) \perp d(y), \tag{4.4}$$

对所有 x, y $\in \mathcal{A}$ 均成立。

本节深入阐述域 $\mathbb{F}$ 上二维和三维 BiHom-结合三代数的 $\alpha\beta$-导子。设 $\{e_1, e_2, e3, \cdots, e_n\}$ 是 n 维 BiHom- 结合三代数 $\mathcal{A}$ 的一组基。基底乘积记为

$$d(e_p) = \sum_{q=1}^{n} d_{qp} e_q.$$

我们有

$$\sum_{p=1}^{n} d_{pk} a_{qp} = \sum_{p=1}^{n} a_{pk} d_{qp} \quad ; \quad \sum_{p=1}^{n} d_{pk} b_{qp} = \sum_{p=1}^{n} b_{pk} d_{qp}, \tag{4.5}$$
$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ij}^{p} d_{rp} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \sum_{p=1} d_{ki} b_{pj} a_{qp} \gamma_{kq}^{r} + \sum_{q=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1} b_{ki} a_{qk} d_{pj} \gamma_{qp}^{r}, \tag{4.6}$$
$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{ij}^{p} d_{rp} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \sum_{p=1} d_{ki} b_{pj} a_{qp} \delta_{kq}^{r} + \sum_{q=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1} b_{ki} a_{qk} d_{pj} \delta_{qp}^{r}, \tag{4.7}$$
$$\sum_{k=1}^{n} \xi_{ij}^{p} d_{rp} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \sum_{p=1} d_{ki} b_{pj} a_{qp} \xi_{kq}^{r} + \sum_{q=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1} b_{ki} a_{qk} d_{pj} \xi_{qp}^{r}. \tag{4.8}$$

定理 4.2. 二维 BiHom-结合三代数的导子具有如下形式:

IC	Der($\mathcal{D}$)	Dim($\mathcal{D}$)	IC	Der($\mathcal{D}$)	Dim($\mathcal{D}$)
$\mathcal{BT}\text{as}_2^1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	1	$\mathcal{BT}\text{as}_2^2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	1
$\mathcal{BT}\text{as}_2^6$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	1			

定理 4.3。三维 BiHom-结合三系代数的导子具有如下形式:

IC	$\mathcal{D}$的导子代数	$\mathcal{D}$的维数	IC	$\mathcal{D}$的导子代数	$\mathcal{D}$的维数
$\mathcal{BT}$作为$_3^1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$	2	$\mathcal{BT}$作为$_3^2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1
$\mathcal{BT}$作为$_3^3$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$	2	$\mathcal{BT}$作为$_3^4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & 0 & d_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2
$\mathcal{BT}$作为$_3^5$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1	$\mathcal{BT}$作为$_3^6$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$	2
$\mathcal{BT}$作为$_3^7$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$	2	$\mathcal{BT}$作为$_3^8$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$	2
$\mathcal{BT}$作为$_3^9$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$	2	$\mathcal{BT}$作为$_3^{10}$	$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$	2
$\mathcal{BT}$作为$_3^{11}$	$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2	$\mathcal{BT}$作为$_3^{12}$	$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2
$\mathcal{BT}$作为$_3^{13}$	$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2	$\mathcal{BT}$作为$_3^{14}$	$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & d_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	3
$\mathcal{BT}$为$_3^{15}$	$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2	$\mathcal{BT}$为$_3^{19}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & 0 & d_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2

证明。根据定理 4.3，我们仅对一种情形给出证明，以说明所采用的方法。其他情形也可以用类似的方法处理，无需修改或只需稍作修改。我们参照定理 4.3，并分别对运算 $\dashv$、$\vdash$ 和 $\perp$ 使用方程组 (4.5)、(4.6)、(4.7)、(4.8)，以求得三维 BiHom- 结合三代数的所有导子。考虑 Trias_3^1。应用方程组 (4.5)、(4.6)、(4.7)、(4.8)，因此得到 Trias_3^1 的导子如下: $\mathrm{d}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$。显然，$\mathrm{d}_1(\mathrm{e}_1) = \mathrm{e}_2, \mathrm{d}_2(\mathrm{e}_3) = \mathrm{e}_3$。因此，$\text{Trias}_3^1$ 的导子如下所示: $\mathrm{d}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\mathrm{d}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是 Der($\mathcal{D}$) 的基，且 $\text{DimDer}(\mathcal{D}) = 2$。这些导子

三维结合三系代数的其余部分可以按照上文所述的类似方式处理。□

推论 4.4。

- 二维 BiHom-结合三代数的导子维数介于零和二之间。
- 三维 BiHom-结合三系代数的导子维数介于零和三之间。

5 低维 BiHom-结合试代数的质心

5.1 BiHom-结合试代数质心的性质

本节将展示以下关于 BiHom-结合三代数质心性质的结果 $\mathcal{A}$。

定义 5.1. 设 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{A}$的一个非空子集。子集

$$Z_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}) = \{x \in \mathcal{H} \mid \alpha\beta(x) \bullet \mathcal{H} = \mathcal{H} \bullet \alpha\beta(x) = 0\}, \tag{5.1}$$

称为 $\mathcal{A}$中的 $\mathcal{H}$ 的中心化子，其中 $\bullet$ 分别为 $\dashv$、$\vdash$ 和 $\perp$。

定义 5.2. 设 $\psi \in \mathrm{End}(\mathcal{A})$。若 $\psi(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Z}(\mathcal{A})$ 且 $\psi(\mathcal{A}^2) = 0$，则称 ψ 为一个中心 $\alpha\beta$-导子。$\mathcal{A}$ 的所有中心 $\alpha\beta$-导子构成的集合记为 $C(\mathcal{A})$。

命题 5.3. 设 $(\mathcal{A}, \dashv, \vdash, \perp, \alpha, \beta)$ 是一个 BiHom-结合三代数。则，

i) $\Gamma(\mathcal{A})\mathrm{Der}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Der}(\mathcal{A})$。

ii) $[\Gamma(\mathcal{A}), \mathrm{Dr}(\mathcal{A})] \subseteq \Gamma(\mathcal{A})$.

iii) $[\Gamma(\mathcal{A})、\Gamma(\mathcal{A})](\mathcal{A}) \subseteq \Gamma(\mathcal{A})$ 和 $[\Gamma(\mathcal{A})、\Gamma(\mathcal{A})](\mathcal{A}^2) = 0$。

证明。第 i) –iii) 部分的证明很直接，只需依据 $\alpha\beta$-导子的定义和质心的定义即可。□

现在，我们将介绍 BiHom-结合三代数的质心。

定义 5.4. 设 $(\mathcal{A}, \dashv, \vdash, \perp, \alpha, \beta)$ 是一个 BiHom-结合三代数。若线性映射 $\psi: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 满足对于所有 $x, y \in \mathcal{A}$，则称其为 $\mathcal{A}$ 上 (α,β)-质心的一个元素，

$$\alpha \circ \psi = \psi \circ \alpha, \quad \beta \circ \psi = \psi \circ \beta, \tag{5.2}$$

$$\psi(x) \dashv \alpha\beta(y) = \psi(x) \dashv \psi(y) = \alpha\beta(x) \dashv \psi(y), \tag{5.3}$$

$$\psi(x) \vdash \alpha\psi(y) = \psi(x) \vdash \psi(y) = \alpha\beta(x) \vdash \psi(y), \tag{5.4}$$

$$\psi(x) \perp \alpha\beta(y) = \psi(x) \perp \psi(y) = \alpha\beta(x) \perp \psi(y). \tag{5.5}$$

$\mathcal{A}$ 的所有（α,β）-中心元所组成的集合记为 $\mathrm{Cent}^{(\alpha,\beta)}(\mathcal{A})$。$\mathcal{A}$ 的中心记为 $\mathrm{Cent}(\mathcal{A})$。

命题 5.5. 设 $(\mathcal{A}, \dashv, \vdash, \perp, \alpha, \beta)$ 是一个 BiHom-结合三代数，且 $\varphi \in \mathrm{Cent}(\mathcal{A})$，$d \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$。那么，$\varphi \circ d$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个 $\alpha\beta$-导子。

证明. 确实，若 x,y $\in \mathcal{A}$，则

$$\begin{aligned}(\varphi\circ d)(x\bullet y) &= \varphi(d(x)\bullet\alpha\beta(y)+\alpha\beta(x)\bullet d(y))\\ &= \varphi(d(x)\bullet y)+\varphi(x\bullet d(y)) = (\varphi\circ d)(x)\bullet\alpha\beta(y)+\alpha\beta(x)\bullet(\varphi\circ d)(y),\end{aligned}$$

其中，$\bullet$ 分别是 $\dashv$、$\vdash$ 和 $\perp$。 □

命题 5.6. 设 $(\mathcal{A},\dashv,\vdash,\perp,\alpha,\beta)$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的 BiHom-结合三代数。因此，$C(\mathcal{A}) = \text{Cent}(\mathcal{A})\cap\text{Der}(\mathcal{A})$。

证明. 若 $\psi\in\text{Cent}(\mathcal{A})\cap\text{Der}(\mathcal{A})$，则根据 Cent($\mathcal{A}$) 和 Der($\mathcal{A}$) 的定义，我们有 e
$\psi(x\bullet y) = \psi(x)\bullet\alpha\beta(y)+\alpha\beta(x)\bullet\psi(y)$，且 $\psi(x\bullet y) = \psi(x)\circ\alpha\beta(y) = \alpha\beta(x)\circ\psi(y)$，其中 x, y $\in\mathcal{A}$。由此可得 $\psi(\mathcal{A}\mathcal{A}) = 0$ 且 $\psi(\mathcal{A})\subseteq Z(\mathcal{A})$，即 $\text{Cent}(\mathcal{A})\cap\text{Der}(\mathcal{A})\subseteq\text{Cent}(\mathcal{A})$。反向包含显然，因为 $C(\mathcal{A})$ 同时属于 Cent($\mathcal{A}$) 和 Der($\mathcal{A}$)，其中 $\bullet$ 分别是 $\dashv$、$\vdash$ 和 $\perp$。□

命题 5.7. 设 $(\mathcal{A},\dashv,\vdash,\perp,\alpha,\beta)$ 是一个 BiHom-结合三代数。因此，对于任意 d $\in$Der($\mathcal{A}$) 和 $\varphi\in$ Cent($\mathcal{A}$)，有

(i) 复合映射 d $\circ\varphi$属于 Cent($\mathcal{A}$)，当且仅当 $\varphi\circ$d 是 $\alpha\beta$的中心导子 $\mathcal{A}$.

(ii) 复合映射 d $\circ\varphi$是 $\alpha\beta$的导子 $\mathcal{A}$，当且仅当 [d,φ]是 $\alpha\beta$的中心导子 $\mathcal{A}$。

证明。i) 对于任意 $\varphi\in$Cent($\mathcal{A}$)、d $\in$Der($\mathcal{A}$) 以及 $\forall$ x,y $\in\mathcal{A}$，有

$$\begin{aligned}d\circ\varphi(x\bullet y) = d\circ\varphi(x)\bullet y &= d\circ\varphi(x)\bullet y+\varphi(x)\bullet d(y)\\ &= d\circ\varphi(x)\bullet y+\varphi\circ d(x\bullet y)-\varphi\circ d(x)\bullet y.\end{aligned}$$

因此，(d $\circ\varphi-\varphi\circ$d)(x$\bullet$y) =(d $\bullet\varphi-\varphi\circ$d)(x) $\bullet$y。

ii) 设 d $\circ\varphi\in$Der($\mathcal{A}$)。利用 [d,φ]$\in$Cent($\mathcal{A}$)，可得

$$[d,\varphi](x\bullet y) = ([d,\varphi](x))\bullet\alpha\beta(y) = \alpha\beta(x)\bullet([d,\varphi](y)) \tag{5.6}$$

另一方面，[d、φ]d $\circ\varphi-\varphi\circ$d 且 d $\circ\varphi$、$\varphi\circ$d $\in$Der($\mathcal{A}$)。因此，

$$[d,\varphi](x\bullet y) = (d(\varphi\circ(x))\bullet\alpha\beta(y)+\alpha\beta(x)\bullet(d\circ\varphi(y))-(\varphi\circ d(x))\bullet\alpha\beta(y)-\alpha\beta(x)\bullet(\varphi\circ d(y)). \tag{5.7}$$

Referring to (5.6) and (5.7), we get $\alpha\beta(x)\bullet([d,\varphi])(y) = ([d,\varphi])(x)\bullet\alpha\beta(y) = 0$.
在这一分析阶段，令 [d、φ] 为 $\mathcal{A}$ 的一个中心 $\alpha\beta$-导子。于是，

$$\begin{aligned}d\circ\varphi(x\bullet y) &= [d\circ\varphi](x\bullet y)+(\varphi\circ d)(x\bullet y)\\ &= \varphi(\circ d(x)\bullet\alpha\beta(y))+\varphi(\alpha\beta(x)\bullet d(y))\\ &= (\varphi\circ d)(x)\bullet\alpha\beta(y)+\alpha\beta(x)\bullet(\varphi\circ d)(y),\end{aligned}$$

其中，$\bullet$ 分别表示乘积 $\dashv$、$\vdash$ 和 $\perp$。 □

5.2 BiHom-结合试代数的质心

本节详细讨论域 $\mathbb{F}$ 上二维和三维 BiHom-结合三代数的中心。设 $\{e_1,e_2,e3,\cdots,e_n\}$ 是 n 维 BiHom-结合三代数 $\mathcal{A}$ 的一组基。基底乘积由下式确定：

$$\psi(e_i)=\sum_{j=1}^{n}c_{ji}e_j.$$

因此，我们有

$$\sum_{p=1}^{n}c_{pi}a_{qp}=\sum_{p=1}^{n}a_{pi}c_{qp} \quad ; \quad \sum_{p=1}^{n}c_{pi}b_{qp}=\sum_{p=1}^{n}b_{pi}c_{qp}, \tag{5.8}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}c_{ki}b_{pj}a_{qp}\gamma_{kq}^{r}=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}c_{pi}c_{qj}\gamma_{pq}^{r} = \sum_{q=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}b_{ki}a_{qk}c_{pj}\gamma_{qp}^{r}, \tag{5.9}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}c_{ki}b_{pj}a_{qp}\delta_{kq}^{r}=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}c_{pi}c_{qj}\delta_{pq}^{r} = \sum_{q=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}b_{ki}a_{qk}c_{pj}\delta_{qp}^{r}, \tag{5.10}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}c_{ki}b_{pj}a_{qp}\xi_{kq}^{r}=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}c_{pi}c_{qj}\xi_{pq}^{r} = \sum_{q=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}b_{ki}a_{qk}c_{pj}\xi_{qp}^{r}. \tag{5.11}$$

定理 5.8。三维复 BiHom-结合三代数的质心如下所示：

IC	Cent($\mathcal{A}$)	Dim(Cent($\mathcal{A}$))	IC	Cent($\mathcal{A}$)	Dim(Cent($\mathcal{A}$))
$\mathcal{BT}$作为$_3^1$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\c_{21}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	1	$\mathcal{BT}$作为$_3^2$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\c_{21}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	1
$\mathcal{BT}$作为$_3^3$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&c_{33}\end{pmatrix}$	1	$\mathcal{BT}$作为$_3^4$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\c_{31}&0&0\end{pmatrix}$	1
$\mathcal{BT}$作为$_3^5$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\c_{21}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	1	$\mathcal{BT}$作为$_3^6$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\c_{21}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	1
$\mathcal{BT}$作为$_3^7$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&c_{33}\end{pmatrix}$	1	$\mathcal{BT}$作为$_3^8$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&c_{33}\end{pmatrix}$	1
$\mathcal{BT}$作为$_3^9$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&c_{33}\end{pmatrix}$	1	$\mathcal{BT}$作为$_3^{10}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&c_{33}\end{pmatrix}$	1
$\mathcal{BT}$作为$_3^{11}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&c_{22}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	1	$\mathcal{BT}$作为$_3^{12}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&c_{22}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	1
$\mathcal{BT}$作为$_3^{13}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&c_{22}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	1	$\mathcal{BT}$作为$_3^{15}$	$\begin{pmatrix}c_{11}&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	1
$\mathcal{BT}$作为$_3^{16}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\c_{31}&0&0\end{pmatrix}$	1	$\mathcal{BT}$如$_3^{18}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\c_{31}&0&0\end{pmatrix}$	1

IC	Cent($\mathcal{A}$)	Dim(Cent($\mathcal{A}$))	IC	Cent($\mathcal{A}$)	Dim(Cent($\mathcal{A}$))
$\mathcal{BT}as_3^{19}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1	$\mathcal{BT}as_3^{20}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1
$\mathcal{BT}as_3^{21}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1	$\mathcal{BT}as_3^{22}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1
$\mathcal{BT}如_3^{23}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1	$\mathcal{BT}如_3^{24}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1.

推论5.9。

- 二维 BiHom-结合三代数的质心维数为零。
- 三维 BiHom-结合三系代数的质心维数介于零和一之间。

参考文献

[1] A. Makhlouf 和 Ahmed Zahari，《Hom-结合代数的结构与分类》，Acta et commentationes universitis Tartuensis de mathematica，第 24 卷第 1 期（2020），79 – 102。

[2] A. Zahari 和 I. Bakayoko，《关于 BiHom-结合二代数》，Open J. Math. Sci. 第 7 卷（2023），96 – 117。

[3] I. BAKAYOKO 和 M. BANGOURA，《双模与 Rota-Baxter 关系》，J. Appl. Mech. Eng4:178，doi:10.4172/2168-9873.1000178，2015。

[4] I. BAKAYOKO 和 M. BANGOURA，《左 Hom-对称代数与 Hom-Poisson 二代数》，Konuralp 数学杂志，3 卷第 2 期，42-53，2015。

[5] Loday J.-L., Frabetti A., Chapoton F., Goichot F.，《二代数及相关算子》，《数学讲义》，1763，Springer，柏林，2001。

[6] Benkanta G., Neherb E.，《扩展仿射李代数和根分级李代数的质心》，《纯粹与应用代数杂志》，204(1)，(2006)，117 – 145。

[7]Merville D. J，《幂零李代数的质心》，《代数通讯》，20(12)，(1992)，3649 – 3682。

[8] Rakhimov, I.S., Fiidov, M. A.，《有限维结合二代数的质心》，《远东数学科学杂志》，98(4)，(2015)，427 – 443。

[9] M.A. Fiidov, I.S.,Rakhimov, S.K. said Hussain，《结合代数的质心》，IEEE国际数学研究与教育会议论文集（CIREM7），(2015)，227 – 232。

[10] G.Mozzola，五维结合代数的代数与几何分类，Manus- cita Math.，第27卷第1期（1979），第 81 – 101页。

[11] Bakayoko I.、Bangoura M.，《双模与 Rota-Baxter 关系》，《应用力学与工程杂志》4:178，doi:10.4172/2168-9873.1000178，2015 年。

[12] Bakayoko I.、Bangoura M.，《左 Hom-对称与 Hom-Poisson 二代数》，《Konuralp 数学杂志》3（第 2 期），42-53，2015 年。[13] A. Makhlouf 和 S. Silvestrov，《Hom-代数结构》，《广义李理论与应用杂志》第 2 卷（2008 年），第 2 期，51-64。[14] W. Basri 和 Rokhsiboev，《低维二结合代数》，《第三届数学研究与教育会议论文集》（ICREM3），UPM，马来西亚：（2007 年），164-170。[15] Rikhsiboev I.、Rakhimov I.、Basri W.，《三维复二结合代数的分类》，《马来西亚数学科学杂志》4（2）：241-254，2010 年。[16] W. Basri 和 Rokhsiboev，《低维二结合代数》，《第三届数学研究与教育会议论文集》（ICREM3），UPM，马来西亚：（2007 年）164-170。[17] A. Armour、H. Chen 和 Y. Zhang，《四维超代数的分类》，《代数通讯》第 37 卷，（2009 年），3697-3728。[18]M. Ikrom、Rokhsiboev、S. Isamiddin、Rakhimov 和 W. Basri，《三维复二结合代数的分类》，《马来西亚数学科学杂志》4（2），（2010 年），241 – 254。[19] I. M. Rikhsiboev、I. S. Rakhimov 和 W. Basri，《二结合代数及其导子》，《物理学杂志：会议系列》553，（2014 年），012006。[20] W. Basri、I. S. Rakhimov 和 I. M. Rokhsiboev，《四维幂零二结合代数》，《广义李理论与应用杂志》28。doi：10.4172/1736 – 4337.1000218。[21] A. Makhlouf 和 Yau D.，《Rota-Baxter Hom-Lie 容许代数》，《代数通讯》 23 （ 3 ），（ 2014 年），1231-1257。[22] I. S. Rakhimov、Al-Nashri、Al-Hossain，《低维复 Leibniz 代数的导子》，《JR 代数、数论与应用杂志》第 21 卷（1），（2011 年），第 68 –81 页。