arXiv:2304.06791v1 [math.RA] 13 Apr 2023

第三个 Aczél-Jabotinsky 形式微分方程解群的代数结构

WOJCIECH JABŁOŃSKI 和 Ludwig Reich

摘要。我们研究第三个 Aczél-Jabotinsky 微分方程解群的代数结构

$$(H \circ \Phi)(x) = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} \cdot H(x)$$

在形式幂级数环和截断形式幂级数环 $\boldsymbol{k}[\![x]\!]_s$ 中，其中 s 是正整数或 $s = \infty$，且 $H \in \boldsymbol{k}[\![x]\!]_s$ 已给定。我们还详细描述了该方程的所有解。

1. 引言

设 $\boldsymbol{k}$ 是一个特征为 0、单位元为 1 的域，并设 $\boldsymbol{q} \subset \boldsymbol{k}$ 是一个单域（显然同构于全体有理数构成的域）。确定 $\boldsymbol{k}$ 上可逆形式幂级数的单参数迭代群 $(F_t)_{t\in\boldsymbol{k}}$ 的问题，引出了著名的平移方程

$$\begin{cases} F_{t_1+t_2} = F_{t_1} \circ F_{t_2} & \text{for } t_1, t_2 \in \boldsymbol{k}, \\ F_1 = \mathrm{id}. \end{cases} \tag{1}$$

由于 $(\boldsymbol{k}, +)$ 是交换的，因此任意迭代群 $(F_t)_{t\in\boldsymbol{k}}$ 都是一族相互交换的形式幂级数（见 [7]），也就是说，它满足

$$F_{t_1} \circ F_{t_2} = F_{t_2} \circ F_{t_1} \qquad \text{for } t_1, t_2 \in \boldsymbol{k}. \tag{2}$$

如果 F_t 在某种意义下关于时间变量 t可微，那么对 (2) 关于 t_1 求导，得到

$$\frac{\partial F_{t_1}}{\partial t}(F_{t_2}(x)) = \frac{\partial F_{t_2}}{\partial x}(F_{t_1}(x)) \cdot \frac{\partial F_{t_1}}{\partial t}(x).$$

令 $t_1 = 0$，再令 $t_2 = 1$，其中 $H := \frac{\partial F_0}{\partial t}$且 $\Phi := F_1$，我们得到第三个 Aczél-Jabotinsky 微分方程

$$(\mathrm{AJ}_\infty(H)) \qquad (H \circ \Phi)(x) = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}(x) \cdot H(x). \tag{AJ$_\infty$(H))}$$

可逆形式幂级数群 $\Gamma^\infty \subset \boldsymbol{k}[\![x]\!]$ 是由可逆截断形式幂级数群 $\Gamma^s \subset \boldsymbol{k}[\![x]\!]_s$ 构成的序列 $(\Gamma^s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的射影极限。因此，我们可以探讨单参数迭代群 $(F_t^{[s]})_{t\in G}$ 的形式。

2020 数学主题分类。主要分类：13F25, 34M25；次要分类：13J05, 13H05。关键词与短语。形式幂级数，平移方程，Aczél-Jabotinsky 微分方程。

可逆截断形式幂级数，我们也可以在这里推导出阿克塞尔-雅波廷斯基微分方程

$$(\mathrm{AJ}_s(H)) \qquad (H\circ\Phi)(x)=\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}(x)\cdot H(x) \qquad \mathrm{mod}\ x^{s+1}$$

在 $\boldsymbol{k}[\![x]\!]_s$ 阶 s 截断形式幂级数环中。我们用 $\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H))$ 表示 $(\mathrm{AJ}_s(H))$ 的所有解的集合，其中 $s\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$。令 $\boldsymbol{k}[\![x]\!]_\infty:=\boldsymbol{k}[\![x]\!]$。

对于固定的正整数 n，令 $\boldsymbol{E}_n\subset\boldsymbol{k}^*:=\boldsymbol{k}\backslash\{0\}$，我们将单位元 $1\in\boldsymbol{k}$ 的所有根所构成的集合记为，即多项式 $x^n-1\in\boldsymbol{k}[x]$ 的所有根所构成的集合。

令我们固定 $s\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 和 $H(x)=\sum_{j=l+1}^{s}h_jX^j\in\boldsymbol{k}[\![x]\!]_s$，其中 $l\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 是非负整数，且 $h_{l+1}\neq 0$。显然，$\Phi(x)$ 是 $(\mathrm{AJ}_s(H))$ 的解，当且仅当 $\Phi(x)$ 是 $(\mathrm{AJ}_s(\frac{1}{h_{l+1}}H))$ 的解。因此，不失一般性，我们假设 $H(x)=x^{l+1}+\sum_{j=l+2}^{s}h_jX^j$。我们从解集 $\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H))$ 的一般性质入手。我们证明，$\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H))$ 关于代入构成一个群。随后，我们分两种一般情形求解 $(\mathrm{AJ}_s(H))$：

情形 1： $l=1$,

情形 2： $l\geqslant 2$。

在第一种情形下，我们给出解 $\Phi(x)=c_1x+\sum_{j=2}^{s}c_jx^j\in\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H))$ 的两种表示。这些表示使我们能够证明，群 $\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H))$ 是交换的，并且同构于乘法群 $(\boldsymbol{k}^*,\ \cdot)$。第二种情形复杂得多。首先，对于 $s=\infty$，群 $\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_\infty(H))$ 有一种双参数表示。此外，这里的解群 $\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_\infty(H))$ 是交换的。对于 $s\in\mathbb{N}$，$\mathrm{AJ}_s(H))$ 的解还依赖于一些额外的自由参数。与前面的情形不同，当 $l\geqslant 3$ 时，群 $\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H))$ 不是交换的。

2. 形式幂级数环与截断形式幂级数

在形式幂级数环 $\boldsymbol{k}[\![x]\!]$ 中，对于 $\boldsymbol{k}$ 上的形式幂级数 $\sum_{j=0}^{\infty}c_jx^j$，我们定义任意形式幂级数的阶为 $\mathrm{ord}\left(\sum_{j=0}^{\infty}c_jx^j\right)=\mathrm{min}\{j\in\mathbb{Z}:\ j\geqslant 0,\ c_j\neq 0\}$，并假设 $\mathrm{min}\ \varnothing=\infty$。在形式幂级数集合 $x\boldsymbol{k}[\![x]\!]$ 中，对于满足 $\mathrm{ord}\,f\geqslant 1$ 的形式幂级数 f，我们定义如下代入：若 $f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}c_jx^j$，$g(x)=\sum_{j=1}^{\infty}d_jx^j\in\boldsymbol{k}[\![x]\!]$，则

$$(f\circ g)(x)=\sum_{j=1}^{\infty}c_j\left(\sum_{l=1}^{\infty}d_lx^l\right)^j.$$

那么，集合 $\Gamma^\infty=\{f(X)\in\boldsymbol{k}[\![X]\!]\colon\mathrm{ord}\ f(X)=1\}$ 在代入 $\circ$ 下构成一个群，其单位元为 $L_1(x)=x=\mathrm{id}$。

固定一个正整数 $s\in\mathbb{N}$。s 阶截断形式幂级数构成的环 $\boldsymbol{k}[\![x]\!]_s$ 是商环 $\boldsymbol{k}[\![X]\!]/\mathfrak{m}^{s+1}$，其中 $\mathfrak{m}=(x)=x\boldsymbol{k}[\![x]\!]=\{f\in\boldsymbol{k}[\![x]\!]\colon\mathrm{ord}\,f\geqslant 1\}$ 且 $\mathfrak{m}^{s+1}=(x)^{1+1}=x^{s+1}\boldsymbol{k}[\![x]\!]=\{f\in\boldsymbol{k}[\![x]\!]\colon\mathrm{ord}\,f\geqslant s+1\}$。对于每个满足 $f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}c_jX^j\in\boldsymbol{k}[\![x]\!]$ 的陪集$f+\mathfrak{m}^{s+1}$，我们将 f 的 s 阶截断与之关联，其定义如下:

$$f^{[s]}(x):=\sum_{j=0}^{s}c_jx^j\in\boldsymbol{k}[\![x]\!]_s\subset\boldsymbol{k}[x]\subset\boldsymbol{k}[\![x]\!].$$

在如此定义的 $\boldsymbol{k}[\![x]\!]_s$ 中，我们按如下方式引入加法、乘法和代入运算：对于 f_1、$f_2\in\boldsymbol{k}[\![x]\!]_s$，令 $(f_1+f_2)(x):=f_1(x)+f_2(x)$,

$(f_1 \cdot f_2)(x) := (f_1 \cdot f_2)^{[s]}(x)$，且 $(f_1 \circ f_2)(x) := (f_1 \circ f_2)^{[s]}(x)$。此外，集合 $\Gamma^s = \{f \in \boldsymbol{k}[\![x]\!]_s \colon \operatorname{ord} f = 1\}$ 在代入运算下构成一个群，其单位元为 L_1。

如所见，环 $\boldsymbol{k}[\![x]\!]_\infty := \boldsymbol{k}[\![x]\!]$ 是环 $(\boldsymbol{k}[\![x]\!]_s)_{s\in\mathbb{N}}$ 序列的射影极限。投影 $\pi_s^r \colon \boldsymbol{k}[\![x]\!]_r \to \boldsymbol{k}[\![x]\!]_s$ 定义为

$$\pi_s^r\left(\sum_{j=0}^{r} c_j x^j\right) = \sum_{j=0}^{s} c_j x^j$$

对于 $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 和 $s \in \mathbb{N}$，它们是典范环满同态，并满足 $\pi_q^p \circ \pi_r^q = \pi_r^p$（其中 $p \geqslant q \geqslant r$）。类似地，群 Γ^∞ 是序列 $(\Gamma^s)_{s\in\mathbb{N}}$ 的射影极限，其典范群满同态为 $\pi_s^r \colon \Gamma^r \to \Gamma^s$（其中 $r \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 和 $s \in \mathbb{N}$）。

固定 $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。关于代入，我们将 $f \in \Gamma^s$ 的逆元和 n 次幂分别记为 $f^{\circ -1}$ 和 $f^{\circ n}$。形式幂级数在 Γ^s 中的 $l \in \mathbb{N}$ 阶半标准形，是指满足 $f(x) = \sum_{j=0}^{r} c_{jl+1} x^{jl+1}$ 的任意 $f \in \Gamma^s$，其中 r 要么是满足 $rl+1 \leqslant s$ 的最后一个正整数（若 $s < \infty$），要么是 $r = \infty$。将所有此类 $f \in \Gamma^s$ 构成的族记为 $\mathcal{N}^{s,\,l}$。若 $c \in \boldsymbol{E}_l$ 是 l 阶本原元，则

$$\mathcal{N}^{s,l} = \{f \in \Gamma^s : f \circ L_c = L_c \circ f\},$$

因此，$\mathcal{N}_l^s$是 Γ^s的子群。令 $L_c(x) = cx$ 表示 $c \in \boldsymbol{k}^\star$ 的线性形式。对于固定的 $l \in \mathbb{N}$，我们定义

$$\mathcal{L} = \{L_c : c \in \boldsymbol{k}^\star\} \quad \text{and} \quad \mathcal{L}_l = \{L_c \in \mathcal{L} : c \in \boldsymbol{E}_l\}.$$

显然，对每个 $s \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$，都有 $\mathcal{L}_l \subset \mathcal{L} \subset \Gamma^s$，并且它们都是 Γ^s的子群。考虑 Γ^s的以下子群:

$$\Gamma_1^s = \ker \pi_1^s = \{f \in \Gamma^s : f(x) = x \mod x^2\},\ \mathcal{N}_l^{s,l} = \{f \in \mathcal{N}^{s,l} : \pi_1^s f \in \mathcal{L}_l\}.$$

显然，Γ_1^s 是 Γ^s的正规子群，但对于 $s \geqslant 2$，$\mathcal{L}_m$ 和 $\mathcal{L}$ 不是正规子群。此外，$\mathcal{L} \cap \Gamma_1^s = \{L_1\}$；若 $f \in \Gamma^s$ 且 $\pi_1^s f = L_c$对某个 $c \in \boldsymbol{k}^*$成立，则 $f = L_c \circ (L_{c^{-1}} \circ f)$且 $L_{c^{-1}} \circ f \in \Gamma_1^s$，因此 $\mathcal{L} \circ \Gamma_1^s := \{L \circ f\colon\ L \in \mathcal{L}^s,\ f \in \Gamma_1^s\} = \Gamma^s$，故 $\Gamma^s = \mathcal{L}\overline{\circledcirc}\Gamma_1^s$是子群 $\mathcal{L}$ 与正规子群 Γ_1^s的半直积。另一方面，$\mathcal{L}_l$和 $\mathcal{N}^{s,\,1}{}^{\,l} = \ker \pi_1^s|_{\mathcal{N}^{s,\,l}} \subset \mathcal{N}^{s,\,l}$都是 $\mathcal{N}^{s,\,m}{}^{l}$的正规因子，因此$\mathcal{N}^{s,\,l}{}^{\,l} = \mathcal{L}_m \circledcirc \mathcal{N}^{s,\,1}{}^{\,l}$是子群 $\mathcal{L}_l$与 $\mathcal{N}^{s,\,1}{}^{\,l}$的直积。

3. $\boldsymbol{k}[\![x]\!]$ 与 $\boldsymbol{k}[\![x]\!]_s$中代入的描述及性质

为了证明阿策尔-雅博廷斯基形式微分方程解的形式，我们必须详细说明环 $\boldsymbol{k}[\![x]\!]$ 和 $\boldsymbol{k}[\![x]\!]_s$中的代入律。任意正整数 n 都可以视为 $n \cdot 1 \in \boldsymbol{q} \subset \boldsymbol{k}$。对于固定整数 i 和 j，令 $|i,\ j|$ 表示满足 $i \leqslant n \leqslant j$的所有整数 n 的集合，并令 $|i,\ \infty|$ 表示所有整数 $n \geqslant i$的集合。我们还假设$\sum_{t\in\varnothing} a_t = 0$和 $\prod_{t\in\varnothing} a_t = 1$。描述代入 $\circ$ 的公式可直接由以下引理得出。

引理 1 (多项式定理)。设 l, m 为正整数，且设 $x_1, \ldots, x_m$为相互独立的不定元。那么

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^l = \sum_{\substack{\overline{u}_m = (u_1,\ldots,u_m) \in |0,l|^m, \\ u_1+\ldots+u_m = l}} B_{\overline{u}_m}^l \prod_{j=1}^{m} x_j^{u_j},$$

where $B^l_{\overline{u}_m} = \frac{l!}{\prod\limits_{j=1}^{m} u_j!} \in \boldsymbol{n} := \{n \cdot 1 \in \boldsymbol{k} : n \in \mathbb{Z},\, n \geqslant 1\}$.

应用引理 1 很容易验证，若 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i, \sum_{i=1}^{\infty} b_i x^i \in \boldsymbol{k}[\![x]\!]$，则

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j x^j \right)^i = \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n,$$

当且仅当

$$d_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{\overline{u}_n \in U_{n,i}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=1}^{n} b_j^{u_j} \qquad \text{for } n \in |1, \infty|, \tag{3}$$

其中

$$U_{n,i} = \left\{ \overline{u}_n = (u_1, \ldots, u_n) \in |0, i|^n : \sum_{j=1}^{n} u_j = i,\ \sum_{j=1}^{n} j u_j = n \right\},\ B_{\overline{u}_n} = \frac{i!}{\prod\limits_{j=1}^{n} u_j!} \in \boldsymbol{n}.$$

在截断形式幂级数环 $\boldsymbol{k}[\![x]\!]_s$ 中，对于 $\sum_{i=1}^{s} a_i k^i$、$\sum_{i=1}^{s} b_i x^i \in \boldsymbol{k}[\![x]\!]_s$，我们有

$$\sum_{i=1}^{s} a_i \left(\sum_{j=1}^{s} b_j x^j \right)^i = \sum_{n=1}^{s} d_n x^n \mod x^{s+1}$$

当且仅当 d_n 对于 $n \in |1、s|$ 由式 (3) 给出。作为式 (3) 的例子，我们有（参见 [1]）

$$d_1 = a_1 b_1, \quad d_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1^2, \quad d_3 = a_1 b_3 + 2 a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3. \tag{4}$$

为了证明我们的结果，我们需要了解式 (3) 所描述的代入运算的一些具体而详尽的性质。为方便读者，我们在此将这些性质汇集起来，并指出它们是由描述式 (3) 中集合 $U_{n,\ i}$ 的等式推导而来的。

引理 2。

(i) For $n \geqslant 2$ *we have* $U_{n,1} = \{(0, \ldots, 0, 1)\}$ *and* $U_{n,n} = \{(n, 0, \ldots, 0)\}$. *Then* $B_{(0,\ldots,0,1)} = B_{(n,0,\ldots,0)} = 1$.

(ii) If $n \geqslant 3$, $i \in |2, n|$ *and* $\overline{u}_n \in U_{n,i}$ *then* $u_j = 0$ *for each* $j \in |n - i + 2, n|$.

(iii) If $n \geqslant 3$ *then* $U_{n,n-1} = \{(n-2, 1, 0, \ldots, 0)\}$ *and* $B_{(n-2,1,0,\ldots,0)} = n - 1$.

(iv) For $n \geqslant 4$ *we have* $U_{n,n-2} = \{(n-4, 2, 0, \ldots, 0), (n-3, 0, 1, 0, \ldots, 0)\}$. *Then* $B_{(n-4,2,0,\ldots,0)} = \frac{(n-3)(n-2)}{2}$ *and* $B_{(n-3,0,1,0,\ldots,0)} = n - 2$.

(v) If $n \geqslant 4$, $i \in |2, n-1|$ *and* $\overline{u}_n = (u_1, \ldots, u_n) \in U_{n,i}$, *then* $i - u_1 \geqslant 1$.

在研究 Aczél-Jabotinsky 微分方程的解时，我们经常使用（3）的特定形式。这是引理 2 （*i*）和 （*ii*）的推论，即有

$$d_n = a_1 b_n + \sum_{i=2}^{n-1} a_i \sum_{\overline{u}_n \in U_{n,i}} B_{\overline{u}_n} b_1^{u_1} \prod_{j=2}^{n-i+1} b_j^{u_j} + a_n b_1^n \qquad \text{for } n \geqslant 2. \tag{5}$$

对于固定的整数 $l \geqslant 1$，令 $\mathbb{N}_m$ 表示所有满足$j \equiv 1 \bmod l$的正整数 j 的集合。显然 $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}$。对于 $n \geqslant l + 2$，我们定义（见引理 2 *(ii)*）

$$\begin{aligned} \widehat{U}^{l+1}_{n,i} &= \{\overline{u}_n \in U_{n,i} : u_j = 0 \quad \text{for } j \in |2, l| \cup |n - i + 2, n|\}, \\ U^m_{n,i} &= \{\overline{u}_n \in \widehat{U}^{l+1}_{n,i} : u_j = 0 \quad \text{for } j \in |l + 2, n - i + 1| \backslash \mathbb{N}_l\} \\ &= \{\overline{u}_n \in U_{n,i} : u_j = 0 \quad \text{for } j \in (|2, n - i + 1| \backslash \mathbb{N}_l) \cup |n - i + 2, n|\}. \end{aligned}$$

注意，$\widehat{U}^2_{n,\ i}=U^2_{n,\ i}=U_{n,\ i}$。现在我们证明 (5) 的若干进一步性质。鉴于这些性质具有普遍性，我们总是假设 $l\geqslant 1$，即使对于 $l=1$ 而言，这些事实显而易见或为空。如果 $n\geqslant l+2$ 且 $i\in|2,\ n-l|$，我们定义

$$\begin{aligned}\overline{U}^{l+1}_{n,i}&=\{\overline{u}_n\in\widehat{U}^{l+1}_{n,i}:u_j=0\ \text{ for }\ j\in|n-i+1,n|\,\}\\&=\{\overline{u}_n\in U_{n,i}:u_j=0\ \text{ for }\ j\in|2,l|\cup|n-i+1,n|\,\}.\end{aligned}$$

由描述集合 $U_{n,\ i}$ 的等式，我们推导出以下引理。

引理3。设 $l\geqslant 1$ 且 $n\geqslant l+2$。

(i) If $i\in|n-l+1,n-1|$ *then* $\widehat{U}^{l+1}_{n,i}=\varnothing$, *hence also* $U^{l+1}_{n,i}=\varnothing$.

(ii) If $i\in|2,n-l|$ *then* $\widehat{U}^{l+1}_{n,i}=\left\{\left(i-1,0,\dots,0,\overset{n-i+1}{1},0,\dots,0\right)\right\}\cup\overline{U}^{l+1}_{n,i}$. *For* $\overline{u}_n=\left(i-1,0,\dots,0,\overset{n-i+1}{1},0,\dots,0\right)\in\widehat{U}^{l+1}_{n,i}$ *we have* $B_{\overline{u}_n}=i$.

由 (5) 和引理3 可直接推出

推论 1。若 $l\geqslant 1$, $n\geqslant l+2$ 且 $b_j=0$ 对于 $j\in|2,\ l|$，则

$$\sum_{\overline{u}_n\in\widehat{U}^{l+1}_{n,i}}B_{\overline{u}_n}b_1^{u_1}\prod_{j=l+1}^{n-i+1}b_j^{u_j}=ib_1^{i-1}b_{n-i+1}+\sum_{\overline{u}_n\in\overline{U}^{l+1}_{n,i}}B_{\overline{u}_n}b_1^{u_1}\prod_{j=l+1}^{n-i}b_j^{u_j}\ \ \textit{for}\ \ i\in|2,n-l|,$$

因此

$$\begin{aligned}d_n&=a_1b_n+\sum_{i=2}^{n-l}a_i\sum_{\overline{u}_n\in\widehat{U}^{l+1}_{n,i}}B_{\overline{u}_n}b_1^{u_1}\prod_{j=l+1}^{n-i+1}b_j^{u_j}+a_nb_1^n\\&=a_1b_n+\sum_{i=2}^{n-l}a_i\left(ib_1^{i-1}b_{n-i+1}+\sum_{\overline{u}_n\in\overline{U}^{l+1}_{n,i}}B_{\overline{u}_n}b_1^{u_1}\prod_{j=l+1}^{n-i}b_j^{u_j}\right)+a_nb_1^n.\end{aligned}$$

固定一个正整数 $l\geqslant 2$，并令

$$\begin{aligned}&\widetilde{U}^{l+1}_{n,l+1}=\overline{U}^{l+1}_{n,l+1}\ \text{ and }\ \breve{U}^{l+1}_{n,l+1}=U^{l+1}_{n,l+1}\cap\overline{U}^{l+1}_{n,l+1}&&\text{for }\ n\geqslant 2l+2,\\&\widetilde{U}^{l+1}_{n,2l+1}=\widehat{U}^{l+1}_{n,2l+1}&&\text{for }\ n\geqslant 3l+1.\end{aligned}\tag{6}$$

我们证明

引理4. 若 $l\geqslant 2$, $n\in|l,\infty|\backslash\mathbb{N}_l$ 且 $i\in\{l+1,2l+1\}$，则 $\widetilde{U}^{l+1}_{n\ i,}=\varnothing$。

证明. 固定 $l\geqslant 2$, $n\in|l+2,\infty|\backslash\mathbb{N}_l$ 和 $i\in\{l+1,2l+1\}$。若 $\overline{u}_n\in\widetilde{U}^{l+1}_{n\ i,}$，则对每个 $j\in(|2,n-i+1|\backslash\mathbb{N}_l)\cup|n-i+2,n|$，都有 $u_j=0$。因此

$$n-i=\sum_{j=2}^{n}(j-1)u_j=\sum_{j\in|2,n-i+1|\cap\mathbb{N}_l}(j-1)u_j,$$

这意味着

$$n=i+\sum_{j\in|2,n-i+1|\cap\mathbb{N}_l}(j-1)u_j\in\mathbb{N}_l.$$

这一矛盾完成了证明。 □

我们现在通过以下引理总结代入的性质。

推论 2。 固定正整数 $l \geqslant 1$ 和 $n \geqslant l+2$。如果 $b_1 = 1$ 和 $b_j = 0$ 对于$j \in |2, n-l|\backslash\mathbb{N}_l$，那么

$$d_n = a_1 b_n + \sum_{i=2}^{n-l} a_i \sum_{\overline{u}_n \in U_{n,i}^{l+1}} B_{\overline{u}_n} b_1^{u_1} \prod_{j \in |2, n-i+1| \cap \mathbb{N}_l} b_j^{u_j} + a_n b_1^n.$$

此外，

(i) 对于 $n \notin \mathbb{N}_l$ 和 $i \in \{l,\ 2l-1|$，有

$$\sum_{\overline{u}_n \in \tilde{U}_{n,i}^{l+1}} B_{\overline{u}_n} b_1^{u_1} \prod_{j \in |l, n-i+1| \cap \mathbb{N}_l} b_j^{u_j} = 0,$$

(ii) 对于 $n = rl+1 \in \mathbb{N}_l$ 和 $i = pl+1 \in |l+1,\ n-1| \cap \mathbb{N}_l$，有

$$\sum_{\overline{u}_n \in \check{U}_{n,i}^{l+1}} B_{\overline{u}_n} b_1^{u_1} \prod_{j=l+1}^{n-i+1} b_j^{u_j} = \sum_{\overline{u}_{rl+1} \in \check{U}_{rl+1,pl+1}^{l+1}} B_{\overline{u}_{rl+1}} b_1^{u_1} \prod_{j=1}^{r-p} b_{jl+1}^{u_{jl+1}}.$$

4. 第三个 Aczel-Jabotynski 形式微分方程

此处及下文中，除非另有说明，s 为正整数或 $s = \infty$。我们证明第三个 Aczél-Jabotinsky 微分方程的解的一些性质

$$(\mathrm{AJ}_s(H)) \qquad (H \circ \Phi)(x) = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} \cdot H(x)$$

这里讨论形式幂级数和 s 截断形式幂级数这两种情况。在后一种情况下，所有等式均视为模 x^{s+1} 成立。

事实1 (参见 [6]**)**。 对于固定的非零 $H(x) \in \boldsymbol{k}[\![x]\!]$，所有 $(\mathrm{AJ}_s(H))$ 的解 $\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H))$ Φ 在代入运算下构成一个群。

证明。 事实上，固定 $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H))$。于是

$$\begin{aligned} H\left((\Phi_1 \circ \Phi_2)(x)\right) = H\left(\Phi_1(\Phi_2(x))\right) &= \left.\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}x}\right|_{y=\Phi_2(x)} \cdot H(\Phi_2(x)) \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}x}\right|_{y=\Phi_2(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}x} \cdot H(x) = \frac{\mathrm{d}(\Phi_1 \circ \Phi_2)}{\mathrm{d}x} \cdot H(x). \end{aligned}$$

因此 $\Phi_1 \circ \Phi_2 \in \mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H))$。此外，若 $\Phi \in \mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H))$，则

$$H(x) = H((\Phi \circ \Phi^{-1})(x)) = H(\Phi(\Phi^{-1}(x))) = \left.\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}\right|_{y=\Phi^{-1}(x)} \cdot H(\Phi^{-1}(x)),$$

这对于 Φ^{-1} 而言是 $(\mathrm{AJ}_s(H))$。 □

现在我们证明有限 s 时 $\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_\infty(H_1))$ 与 $\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H_2))$ 之间的联系。

引理 5。 如果 s 有限，则 $\pi_s^\infty\left(\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_\infty(H))\right) \subset \mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(\pi_s^\infty(H)))$。

证明。 如果 $\Phi \in \mathcal{S}(\mathrm{AJ}_\infty(H))$，则对于有限的 s，有

$$\pi_s^\infty\left((H \circ \Phi)(x)\right) = \pi_s^\infty\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} \cdot H(x)\right),$$

因此

$$\left((\pi_s^\infty H) \circ (\pi_s^\infty \Phi)\right)(x) = \pi_s^\infty\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}\right) \cdot (\pi_s^\infty H)(x) \mod x^{s+1}.$$

最后，我们必须指出，

$$\pi_s^\infty\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}\right)\cdot(\pi_s^\infty H)(x)=\frac{\mathrm{d}(\pi_s^\infty\Phi)}{\mathrm{d}x}\cdot(\pi_s^\infty H)(x)\mod x^{s+1},$$

这意味着 $\pi_s^\infty\Phi\in\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(\pi_s^\infty H))$。 □

在某些情况下，考虑阿策尔–雅博廷斯基方程 $(\mathrm{AJ}_s(H))$ 的另一种等价形式会更方便。该形式如下

事实 2 (参见 [6, 引理 1 和 4]**)**。令 $T\in\Gamma_1^s$ 为固定值。那么，$\Phi\in\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H))$ 当且仅当 $\widetilde{\Phi}=(T^{-1}\circ\Phi\circ T)\in\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))$ 且 $\widetilde{H}(x)=\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)^{-1}(H\circ T)(x)$。

~证明。设 Φ 是 $(\mathrm{AJ}_s(H))$ 的一个解，并设 $T\circ\Phi=\Phi\circ T$。那么

$$\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}u}\right|_{u=\widetilde{\Phi}(x)}\cdot\frac{\mathrm{d}\widetilde{\Phi}}{\mathrm{d}x}=\left.\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}v}\right|_{v=T(x)}\cdot\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}.\tag{7}$$

此外，由 $(\mathrm{AJ}_s(H))$ 可得

$$(H\circ\Phi\circ T)(x)=\left.\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}v}\right|_{v=T(x)}\cdot(H\circ T)(x).\tag{8}$$

~因此，利用 $\Phi\circ T=T\circ\Phi$，由 (7) 和 (8) 得到

$$\left(\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}u}\right|_{u=\widetilde{\Phi}(x)}\right)^{-1}\cdot(H\circ T\circ\widetilde{\Phi})(x)=\frac{\mathrm{d}\widetilde{\Phi}}{\mathrm{d}x}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)^{-1}(H\circ T)(x),$$

结合 $\widetilde{H}(x):=\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)^{-1}(H\circ T)(x)$，得到

$$(\widetilde{H}\circ\widetilde{\Phi})(x)=\frac{\mathrm{d}\widetilde{\Phi}}{\mathrm{d}x}\cdot\widetilde{H}(x).\tag{9}$$

显然，逆映射 $\Phi\mapsto T\circ\widetilde{\Phi}\circ T^{-1}$ 将 (9) 变换为 $(\mathrm{AJ}_s(H))$。 □

5. 等式组

计算 $(\mathrm{AJ}_s(H))$ 两边（在有限 s 的情况下，所有等式均应理解为模 x^{s+1} 成立），得到（其中 $h_{l+1}=1$）

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}H(x)&=\left(\sum_{n=1}^{s}nc_nx^{n-1}\right)\left(x^{l+1}+\sum_{n=l+2}^{s}h_nx^n\right)\\&=\sum_{n=l+1}^{s}\left(\sum_{i=l+1}^{n}h_i(n+1-i)c_{n-i+1}\right)x^n,\end{aligned}$$

并且，根据将 (3) 中的 $a_j=0$ 用 $j\in|1$ 替换为 $l|$，我们得到

$$\begin{aligned}(H\circ\Phi)(x))&=\sum_{n=l+1}^{s}h_n\left(\sum_{i=1}^{s}c_ix^i\right)^n\\&=\sum_{n=l+1}^{s}\left(\sum_{i=l+1}^{n}h_i\sum_{\overline{u}_n\in U_{n,i}}B_{\overline{u}_n}\prod_{j=1}^{n-i+1}c_j^{u_j}\right)x^n\end{aligned}$$

其中 $h_l = 1$。那么 $(\mathsf{AJ}_s(H))$ 等价于

(10)
$$\sum_{i=l+1}^{n} h_i \sum_{\overline{u}_n \in U_{n,i}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=1}^{n-i+1} c_j^{u_j} = \sum_{i=l+1}^{n} h_i (n-i+1) c_{n-i+1} \text{ for every } n \in |l+1, s|$$

满足 $h_{l+1} = 1$。特别地，对于 $n = l+1$，我们得到 $c_1^{l+1} = c_1$。因此，对于每个正整数 l，$c_1 \in \boldsymbol{k}^\star$ 可在 $l = 0$ 中任意取定，而 $c_1 \in \boldsymbol{E}_l$ 亦然。因此，为了确定 $(\mathsf{AJ}_s(H))$ 在有限和无限 s 两种情况下的解，我们考虑以下两种不同情形：

(C1) $l = 0$ i.e. $H(x) = x + \sum_{n=2}^{s} h_n x^n$,
(C2) $l \geqslant 1$, i.e. $H(x) = x^{l+1} + \sum_{n=l+2}^{s} h_n x^n$.

在第一种情形下，由 (10) 并根据 (4) 和 (5)，我们得到

$$\begin{aligned}
&c_2 + h_2 c_1^2 = 2c_2 + h_2 c_1 && (\text{for } n = 2 \text{ provided } s \geqslant 2),\\
&c_3 + 2h_2 c_1 c_2 + h_3 c_1^3 = 3c_3 + 2h_2 c_2 + h_3 c_1 && (\text{for } n = 3 \text{ provided } s \geqslant 3),\\
&c_n + \sum_{i=2}^{n-1} h_i \sum_{\overline{u}_n \in U_{n,i}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=1}^{n-i+1} c_j^{u_j} + h_n c_1^n\\
&\qquad = n c_n + \sum_{i=2}^{n} h_i (n-i+1) c_{n-i+1} \quad \text{for } n \in |4, s|.
\end{aligned}$$

这个方程组很容易化简为

$$\begin{aligned}
&c_2 = h_2(c_1^2 - c_1) \qquad \text{provided } s \geqslant 2,\\
&2c_3 = h_3(c_1^3 - c_1) + 2h_2 c_2 (c_1 - 1) \qquad \text{provided } s \geqslant 3,\\
&(n-1)c_n = h_n(c_1^n - c_1) +\\
&\quad \sum_{i=2}^{n-1} h_i \left(\sum_{\overline{u}_n \in U_{n,i}} B_{\overline{u}_n} c_1^{u_1} \prod_{j=2}^{n-i+1} c_j^{u_j} - (n-i+1) c_{n-i+1} \right), \ n \in |4, s|,
\end{aligned} \tag{11}$$

并且我们可以通过某种递归过程得到解的形式。在第二种情况下，利用引理 2 *(i)*、*(iii)*、*(iv)* 和（5），将（10）改写为以下形式

$$\begin{aligned}
&(l+1)c_1^l c_2 + h_{l+2} c_1^{l+2} = 2c_2 + h_{l+2} c_1 && (n = l+1 \text{ provided } s \geqslant l+2),\\
&\frac{l(l+1)}{2} c_1^{l-1} c_2^2 + (l+1) c_1^l c_3 + (l+2) c_1^{l+1} c_2 + h_{l+3} c_1^{l+3}\\
&\qquad = 3c_2 + 2h_{l+2} c_2 + h_{l+3} c_1 && (n = l+3 \text{ provided } s \geqslant l+3),\\
&\sum_{\overline{u}_n \in U_{n,l+1}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=1}^{n-l} c_j^{u_j} + \sum_{i=l+2}^{n-1} h_i \sum_{\overline{u}_n \in U_{n,i}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=1}^{n-i+1} c_j^{u_j} + h_n c_1^n\\
&\qquad = (n-l) c_{n-l} + \sum_{i=l+2}^{n-1} (n-i+1) h_i c_{n-i+1} + h_n c_1, \qquad n \in |l+4, s|.
\end{aligned} \tag{12}$$

注意，$U_{n,l+1}=\widehat{U}^2_{n,l+1}$。根据推论 **1**，令 $l=1$ 和 $i=l+1$，我们得到

$$\begin{aligned}&\sum_{\overline{u}_n\in U_{n,l+1}} B_{\overline{u}_n}c_1^{u_1}\prod_{j=2}^{n-l}c_j^{u_j}\\&\quad=\sum_{\overline{u}_n\in \widehat{U}^2_{n,l+1}} B_{\overline{u}_n}c_1^{u_1}\prod_{j=2}^{n-l}c_j^{u_j}=(l+1)c_1^lc_{n-l}+\sum_{\overline{u}_n\in \overline{U}^2_{n,l+1}} B_{\overline{u}_n}\prod_{j=1}^{n-l-1}c_j^{u_j},\end{aligned}$$

因此，由 (12) 可得

$$\begin{aligned}&2c_2-(l+1)c_1^lc_2=h_{l+2}(c_1^{l+2}-c_1),\\&3c_3-(l+1)c_1^lc_3=\frac{l(l+1)}{2}c_1^{l-1}c_2^2+h_{l+3}(c_1^{l+3}-c_1)+h_{l+2}((l+2)c_1^{l+1}c_2-2c_2),\\&(n-l)c_{n-l}-(l+1)c_1^lc_{n-l}=\sum_{\overline{u}_n\in \overline{U}^2_{n,l+1}} B_{\overline{u}_n}c_1^{u_1}\prod_{j=2}^{n-l}c_j^{u_j}+h_n(c_1^n-c_1)\\&\qquad+\sum_{i=l+2}^{n-1}h_i\left(\sum_{\overline{u}_n\in U_{n,i}} B_{\overline{u}_n}c_1^{u_1}\prod_{j=2}^{n-i+1}c_j^{u_j}-(n-i+1)c_{n-i+1}\right),\ n\in|l+4,s|.\end{aligned}$$

由于 $c_1^l=1$，我们得到

$$\begin{aligned}&(1-l)c_2=h_{l+2}(c_1^2-c_1)\qquad\qquad(n=l+2\text{ provided }s\geqslant l+2)\\&(2-l)c_3=\frac{l(l+1)}{2}c_1^{l-1}c_2^2+\\&\qquad h_{l+2}(c_1^3-c_1)+h_{l+2}c_2((l+2)c_1-2)\quad(n=l+3\text{ provided }s\geqslant l+3),\\&(n-1-2l)c_{n-l}=\sum_{\overline{u}_n\in \overline{U}^2_{n,l+1}} B_{\overline{u}_n}c_1^{u_1}\prod_{j=2}^{n-l}c_j^{u_j}+h_n(c_1^n-c_1)+\\&\qquad\sum_{i=l+2}^{n-1}h_i\left(\sum_{\overline{u}_n\in U_{n,i}} B_{\overline{u}_n}c_1^{u_1}\prod_{j=2}^{n-i+1}c_j^{u_j}-(n-i+1)c_{n-i+1}\right),\ n\in|l+4,s|.\end{aligned}\tag{13}$$

注意，对于 $l=1$ 或 $s\leqslant 2l$，我们也可以通过递归过程得到解的形式。$l\geqslant 2$ 和 $s\geqslant 2l+1$ 的情形则复杂得多。事实上，对于 $n=2l+1$，我们能够用递归方法确定 $j\in\{2、\ldots\ldots、l\}$ 时 c_j 的形式，进而得到 $(n-1-2l)c_{n-l}=0c_{l+1}=0$，但我们无法验证这个等式右端是否也等于零。因此，我们将 Aczél-Jabotinsky 微分方程变换为一种更简单的形式，在这种形式下不会出现这个问题。

6. 第三个 Aczé-Jabotinsky 形式微分方程的标准形

固定 $s\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$、$l\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 和 $H(x)=x^{l+1}+\sum_{i=l+2}^{s}h_ix^i\in\boldsymbol{k}[\![x]\!]_s$。我们证明，Aczél-Jabotinsky形式微分方程 $(\mathrm{AJ}_s(H))$ 可以变换为（见事实 2）可能的简单标准形。令 $\widetilde{H}(x)=x^{l+1}+\delta x^{2l+1}$。我们找到 $T(x)=x+\sum_{i=2}^{s}v_ix^i$，它们将 $(\mathrm{AJ}_s(H))$ 变换为

$$(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))\qquad\qquad(\widetilde{\Phi}(x))^{l+1}+\delta(\widetilde{\Phi}(x))^{2l+1}=\frac{\mathrm{d}\widetilde{\Phi}}{\mathrm{d}x}\cdot\left(x^{l+1}+\delta x^{2l+1}\right),$$

其中，对于有限的 s，上述等式应理解为模 x^{s+1} 成立，并附加假设 $\delta = 0$ 对 $l = 0$ 或 $s < 2l + 1$ 中的一个成立。

引理 6. 对于每个 $H(x) = x^{l+1} + \sum_{i=l+2}^{s} h_i x^i \in \boldsymbol{k}[\![x]\!]_s$，都存在 $T \in \Gamma_1^s$，它将 $(\mathrm{AJ}_s(H))$ 变换为 $(\mathrm{AJ}_s(H))$。在 $l = 0$ 或 $s \leqslant 2l$ 的情况下，可以对 $\delta = 0$ 执行此变换，且变换 T 唯一。

证明。只需找到（参见事实 2）$T(x) = x + \sum_{i=2}^{s} v_i x^i \in \Gamma_1^s$，使得 $(H \circ T)(x) = \frac{T}{\mathrm{d}x}(x^l + \delta x^{2l-1})_{\mathrm{d}}$。因此，我们有（其中 $h_l = 1$）

$$\sum_{i=l+1}^{s} h_i \left(X + \sum_{j=2}^{s} v_j x^j \right)^i = \left(1 + \sum_{n=2}^{s} k v_n x^{n-1} \right) (x^{l+1} + \delta x^{2l+1}),$$

由此得到以下等式组

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=l+1}^{n-1} h_i \sum_{\overline{u}_n \in U_{n,i}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=2}^{n-i+1} v_j^{u_j} + h_n = (n-l) v_{n-l}, \quad n \in |l+2, 2l|, \\
&\sum_{i=l+1}^{2l} h_i \sum_{\overline{u}_{2l+1} \in U_{2l+1,i}} B_{\overline{u}_{2l+1}} \prod_{j=2}^{2l+2-i} v_j^{u_j} + h_{2l+1} \\
&\qquad = (l+1) v_{l+1} + \delta, \qquad \text{provided } s \geqslant 2l+1, \\
&\sum_{i=l+1}^{n-1} h_i \sum_{\overline{u}_n \in U_{n,i}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=2}^{n-i+1} v_j^{u_j} + h_n \\
&\qquad = (n-l) v_{n-l} + \delta (n-2l) v_{n-2l}, \quad n \in |2l+2, s|.
\end{aligned} \tag{14}$$

我们首先考虑 $l = 0$ 的情形。显然，$|l+2、\ 2l+1| = |2、\ 1| = \varnothing$，并且我们可以令 $\delta = 0$。根据（5），由（14）可得

$$v_n + \sum_{i=2}^{n-1} h_i \sum_{\overline{u}_n \in U_{n,i}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=2}^{n-i+1} v_j^{u_j} + h_n = n v_n, \quad n \in |2, s|,$$

这意味着以下递推公式

$$\begin{cases}
v_2 = h_2 \\
v_n = \dfrac{1}{n-1} \left(\displaystyle\sum_{i=2}^{n-1} h_i \sum_{\overline{u}_n \in U_{n,i}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=2}^{n-i+1} v_j^{u_j} + h_n \right) \quad \text{for } n \in |3, s|.
\end{cases} \tag{15}$$

现在假设 $l \geqslant 1$。根据推论 **1** *(i)*，取 $l=1$和 $i=l+2$，由 **(14)** 得到 ($U_{n,l+1}=\widehat{U}^2_{n,l+1}$)

$$
\begin{aligned}
&(l+1)v_{n-l}+\sum_{\overline{u}_n\in\overline{U}^2_{n,l+1}} B_{\overline{u}_n}\prod_{j=2}^{n-l-1}v_j^{u_j}+\sum_{i=l+2}^{n-1}h_i\sum_{\overline{u}_n\in U_{n,i}}B_{\overline{u}_n}\prod_{j=2}^{n-i+1}v_j^{u_j}\\
&\qquad +h_n=(n-l)v_{n-l}, \qquad\qquad n\in|l+2,2l|,\\
&(l+1)v_{l+1}+\sum_{\overline{u}_{2l+1}\in\overline{U}^2_{2l+1,l+1}} B_{\overline{u}_n}\prod_{j=2}^{l}v_j^{u_j}+\sum_{i=l+2}^{2l}h_i\sum_{\overline{u}_{2l+1}\in U_{2l+1,i}}B_{\overline{u}_n}\prod_{j=2}^{2l+2-i}v_j^{u_j}\\
&\qquad +h_{2l+1}=(l+1)v_{l+1}+\delta, \qquad \text{provided } s\geqslant 2l+1\\
&(l+1)v_{n-l}+\sum_{\overline{u}_n\in\overline{U}^2_{n,l+1}} B_{\overline{u}_n}\prod_{j=2}^{n-l-1}v_j^{u_j}+\sum_{i=l+2}^{n-1}h_i\sum_{\overline{u}_n\in U_{n,i}}B_{\overline{u}_n}\prod_{j=2}^{n-i+1}v_j^{u_j}\\
&\qquad +h_n=(n-l+1)v_{n-l+1}+\delta(n-2l)v_{n-2l}, \quad n\in|2l+2,s|,
\end{aligned}
$$

或者等价地

$$
\begin{aligned}
&(n-2l-1)v_{n-l}=\sum_{\overline{u}_n\in\overline{U}^2_{n,l+1}} B_{\overline{u}_n}\prod_{j=2}^{n-l-1}v_j^{u_j}\\
&\quad +\sum_{i=l+2}^{n-1}h_i\sum_{\overline{u}_n\in U_{n,i}}B_{\overline{u}_n}\prod_{j=2}^{n-i+1}v_j^{u_j}+h_n, \qquad\qquad n\in|l+2,2l|,\\
&\delta=\sum_{\overline{u}_{2l+1}\in\overline{U}^2_{2l+1,l+1}} B_{\overline{u}_n}\prod_{j=2}^{l}v_j^{u_j}\\
&\quad +\sum_{i=l+2}^{2l}h_i\sum_{\overline{u}_{2l+1}\in U_{2l+1,i}}B_{\overline{u}_n}\prod_{j=2}^{2l+2-i}v_j^{u_j}+h_{2l+1}, \quad \text{provided } s\geqslant 2l+1,\\
&(n-2l-1)v_{n-l}=\sum_{\overline{u}_n\in\overline{U}^2_{n,l+1}} B_{\overline{u}_n}\prod_{j=2}^{n-l-1}v_j^{u_j}\\
&\quad +\sum_{i=l+2}^{n-1}h_i\sum_{\overline{u}_n\in U_{n,i}}B_{\overline{u}_n}\prod_{j=2}^{n-i+1}v_j^{u_j}+h_n-\delta(n-2l)v_{n-2l},\ n\in|2l+2,s|.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

~让我们考虑情形 $l=1$。我们有 $|l+2,2l|=|3,2|=\varnothing$ 和 $U_{3,2}=\varnothing$。此外，对于 $n=4$，我们有

$$
\sum_{\overline{u}_4\in\overline{U}^2_{4,2}} B_{\overline{u}_4}\prod_{j=2}^{4-2}v_j^{u_j}+\sum_{i=3}^{3}h_i\sum_{\overline{u}_4\in U_{4,i}}B_{\overline{u}_4}\prod_{j=2}^{4-i+1}v_j^{u_j}+h_4=v_2^2+3h_3v_2+h_4,
$$

因此，由 (16) 可得

$$\begin{aligned}
&\delta = h_3, \quad \text{provided } s \geqslant 3,\\
&v_3 = v_2^2 + 3h_3v_2 + h_4 - 2\delta v_2, \quad \text{provided } s \geqslant 4,\\
&(n-3)v_{n-1} = \sum_{\overline{u}_n \in \overline{U}^2_{n,2}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=2}^{n-2} v_j^{u_j}\\
&\qquad\qquad + \sum_{i=3}^{n-1} h_i \sum_{\overline{u}_n \in U_{n,i}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=2}^{n-i+1} v_j^{u_j} + h_n - (n-2)\delta v_{n-2},\ n \in |5, s|.
\end{aligned}$$

因此， $\delta = h_3$、 v_2 可以任意选定。此外，我们得到以下递推公式

$$\begin{cases}
v_3 = v_2^2 + h_3v_2 + h_4,\\
v_{n-1} = \dfrac{1}{n-3}\left(\displaystyle\sum_{\overline{u}_n \in \overline{U}^2_{n,2}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=2}^{n-2} v_j^{u_j}\right.\\
\qquad\left. + \displaystyle\sum_{i=3}^{n-1} h_i \sum_{\overline{u}_n \in U_{n,i}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=2}^{n-i+1} v_j^{u_j} + h_n - (n-2)h_3v_{n-2}\right) \text{ for } n \in |5, s|,
\end{cases}$$

并任意选定 $v_n \in \boldsymbol{k}$ 。

最后，假设 $l \geqslant 2$。我们递归地确定 $k \in |2、 l|$ 对应的 v_k 。事实上，$\sim U_{l+2,l+1} = \varnothing$，因此由(16)式，当 $n = l + 2$ 时可得

$$\begin{cases}
v_2 = -\dfrac{1}{l-1}h_{l+2},\\
v_{n-l} = -\dfrac{1}{2l+1-n}\left(\displaystyle\sum_{\overline{u}_n \in \overline{U}^2_{n,l+1}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=2}^{n-l-1} v_j^{u_j}\right.\\
\qquad\left. + \displaystyle\sum_{i=l+2}^{n-1} h_i \sum_{\overline{u}_n \in U_{n,i}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=2}^{n-i+1} v_j^{u_j} + h_n\right) \quad \text{for } n \in |l+3, 2l|.
\end{cases}$$

接下来，令（见(16)式，其中 $n = 2l + 1$）

$$\delta = \sum_{\overline{u}_{2l+1} \in \overline{U}^2_{2l+1,l+1}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=2}^{l+1} v_j^{u_j} + \sum_{k=l+2}^{2l+1} h_k \sum_{\overline{u}_{2l+1} \in U_{2l+1,k}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=2}^{2l+2-k} v_j^{u_j}$$

在给定 $s \geqslant 2l + 1$ 的条件下，并任意选定 $v_l \in \boldsymbol{k}$ 。最后，由(16)式可得

$$\begin{aligned}
v_{n-l} = \frac{1}{n-2l-1}\left(\sum_{\overline{u}_n \in \overline{U}^2_{n,l+1}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=2}^{n-l-1} v_j^{u_j} + \sum_{i=l+2}^{n-1} h_i \sum_{\overline{u}_n \in U_{n,i}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=2}^{n-i+1} v_j^{u_j}\right.\\
\left. + h_n - \delta(n-2l)v_{n-2l}\right) \quad \text{for } n \in |2l+2, s|,
\end{aligned}$$

并且在 $s < \infty$ 时，我们为 $n \in |s - l + 1、 s|$ 任意固定 $v_n \in \boldsymbol{k}$ 。 □

7. 具有简单代数结构的群

这里给出一些与若干群的直积和半直积相关的技术性结果。我们首先

事实 3. 设 $(G,\cdot)$ 是一个群，且 $H_1, H_2 \subset G$ 是子群，使得 $G = H_1 \cdot H_2$ 和 $H_1 \cap H_2 = \{1\}$。

(i) 若 H_2 是 G 的正规因子，则 $G = H_1 \overline{\odot} H_2$ 是子群 H_1 和 H_2 的半直积。
(ii) 若 H_1, H_2 是 G 的正规子群，则 $G = H_1 \odot H_2$ 是 H_1 和 H_2 的直积。
(iii) 若对所有 $h_1 \in H_1$ 都有 $h_1 h_2 = h_2 h_1$，且 $h_2 \in H_2$，则 H_1 和 H_2 都是 G 的正规因子。

引理 7. 设 $(G,\cdot)$ 是一个群，且 $H \subset G$ 是一个子群。假设 $\varphi\colon G \to H$ 是一个同态，满足 $\varphi|_H = \mathrm{id}_H$。则 $G = H \overline{\odot}$ 核 φ。此外，若对所有 $h_1 \in H$ 都有 $h_1 h_2 = h_2 h_1$，且 $h_2 \in$ 核 φ，则 $G = H \odot$ 核 φ。

证明。对于每个 $g \in G$，我们有 $\varphi(g)^{-1} \in H$，因此 $\varphi(\varphi(g)^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$ 和 $\varphi\left(\varphi(g)^{-1} \cdot g\right) = \varphi\left(\varphi(g)^{-1}\right) \cdot \varphi(g) = \varphi(g)^{-1} \cdot \varphi(g) = 1$，于是

$$g = \varphi(g) \cdot \left(\varphi(g)^{-1} \cdot g\right) \in H \cdot \ker \varphi,$$

所以 $G = H \cdot \ker \varphi$。此外，$\ker \varphi$ 是 G 中的正规因子，而 $\varphi(h) = 1$，因为 $h \in H$ 蕴含 $h = 1$，所以 $H \cap \ker \varphi = \{1\}$。根据事实 3 *(i)*，我们得到 $G = H \overline{\odot} \ker \varphi$。最后一个结论由事实 3 *(iii)* 和 *(ii)* 推出。□

这里我们考虑一些具有简单代数结构的群，它们出现在第三个阿策尔-雅博廷斯基形式微分方程解群的代数刻画中。在这些刻画中，我们使用加法群 $(\boldsymbol{k}, +)$，以及乘法群 $(\boldsymbol{k}^*, \cdot)$ 和 $(\boldsymbol{E}_l, \cdot)$，其中 $l \in \mathbb{N}$。在乘积 $\boldsymbol{E}_l \times \boldsymbol{k}$ 中，我们定义运算 $\diamond$：$(\boldsymbol{E}_l \times \boldsymbol{k}) \times (\boldsymbol{E}_l \times \boldsymbol{k}) \to \boldsymbol{E}_l \times \boldsymbol{k}$,

$$(c_1, c_2) \diamond (d_1, d_2) = (c_1 d_1, c_1 d_2 + d_1 c_2) \qquad \text{for } (c_1, c_2), (d_1, d_2) \in \boldsymbol{E}_l \times \boldsymbol{k}.$$

显然，$(\boldsymbol{E}_l \times \boldsymbol{k}, \diamond)$ 是一个交换群，事实上，它是子群 $\boldsymbol{E}_l \times \{0\}$ 和 $\{1\} \times \boldsymbol{k}$ 的直积 $(\boldsymbol{E}_l \times \{0\}) \diamond (\{1\} \times \boldsymbol{k})$。

对于固定的 $l \in \mathbb{N}$，我们令

$$\Gamma^{l,l} = \{c_1 x + c_{l+1} x^{l+1} \in \Gamma^{l+1} : c_1 \in \boldsymbol{E}_l, c_l \in \boldsymbol{k}\},$$
$$\Gamma_1^{l,l} = \{x + c_{l+1} x^{l+1} \in \Gamma^{l+1,l+1} : c_{l+1} \in \boldsymbol{k}\}.$$

引理 8. 对于 $l \in \mathbb{N}$，我们有以下性质：

(i) $\Gamma^{l,\,l} \subset \Gamma^{l+1}$ 是一个交换子群，它与 $(\boldsymbol{E}_l \times \boldsymbol{k}, \diamond)$ 同构；*(ii)* $\Gamma^{l,\,l}{}_{,\,1}{}^{l}$ 是 $\Gamma^{l,\,l}$ 中的一个子群，它与 $(\boldsymbol{k}, +)$ 同构；*(iii)* $\Gamma^{l,\,l} = \mathcal{L}_l \circledcirc \Gamma^{l,\,1}{}_{,\,1}{}^{l}$ 是子群 $\mathcal{L}_l$ 和 $\Gamma^{l,\,1}{}_{,\,1}{}^{l}$ 的直积。

证明。设 $f(x) = c_1 x + c_{l+1} x^{l+1}, g(x) = d_1 x + d_{l+1} x^{l+1} \in \Gamma^{l,\,l}$。那么 $d_1^{l+1} = d_1$ 和

$$(f \circ g)(x) = (c_1 d_1) x + (c_1 d_{l+1} + d_1 c_{l+1}) x^{l+1} \mod x^{l+2},$$

因此 $f \circ g \in \Gamma^{l,\,l}$ 且 $f^{\circ -1}(x) = c_1^{-1} x + c_1^{-1} c_{l+1} x^{l+1} \in \Gamma^{l,\,l}$。所以 $\Lambda\colon \boldsymbol{E}_l \times \boldsymbol{k} \to \Gamma^{l,\,l}$，$\Lambda(c_1,\ c_{l+1}) = c_1 x + c_{l+1} x^{l+1}$ 对于 $(c_1,\ c_{l+1}) \in \boldsymbol{E}_l \times \boldsymbol{k}$ 是一个群同构。此外，$\Gamma^{l,\,1}{}_{,\,1}{}^{l} = \ker \pi_1^{l+1}|_{\Gamma^{l,\,l}}$，显然 $\Gamma^{l,\,1}{}_{,\,1}{}^{l} \cong \boldsymbol{k}$。最后，每个 $f \in \Gamma^{l,\,l}$ 都满足

$\pi_1^{l+1} f = L_c \in \mathcal{L}_l$ 我们都可以唯一地写成 $f = L_c \circ (L_{c^{-1}} \circ f)$ 和 $L_{c^{-1}} \circ f \in \Gamma^{l,}_{1}{}^{l}$ 的形式，这就完成了证明。□

在描述 Aczél-Jabotinsky 微分方程的解时，我们还使用以下群。对于 $l, s \in \mathbb{N}$ with 且 $2l+1 \leqslant s$，考虑乘积 $\boldsymbol{E}_l \times \boldsymbol{k}^{l+1}$ 及其运算 $\overline{\diamond}$:
$(\boldsymbol{E}_l \times \boldsymbol{k}^{l+1}) \times (\boldsymbol{E}_l \times \boldsymbol{k}^{l+1}) \to \boldsymbol{E}_{l+1} \times \boldsymbol{k}^{l+1}$,

$$(c_1, (c_j)_{j\in\{l\}\cup|s-l+1,s|}) \overline{\diamond} (d_1, (d_j)_{j\in\{l\}\cup|s-l+1,s|}) = (c_1 d_1, (c_1 d_j + d_1^j c_j)_{j\in\{l\}\cup|s-l+1,s|})$$

对于 $(c_1, (c_j)_{j\in\{l\}\cup|s-l+1,\ s|}), (d_1, (d_j)_{j\in\{l\}\cup|s-l+1,\ s|}) \in \boldsymbol{E}_l \times \boldsymbol{k}^{l+1}$。

类似地，若 $l, s \in \mathbb{N}$ with $l+1 \leqslant s \leqslant 2l$，我们使用乘积 $\boldsymbol{E}_l \times \boldsymbol{k}^l$ 及其运算 $\hat{\diamond}$:
$(\boldsymbol{E}_l \times \boldsymbol{k}^l) \times (\boldsymbol{E}_l \times \boldsymbol{k}^l) \to \boldsymbol{E}_l \times \boldsymbol{k}^l$,

$$(c_1, (c_j)_{j\in|s-l+1,s|}) \hat{\diamond} (d_1, (d_j)_{j\in|s-l+1,s|}) = (c_1 d_1, (c_1 d_j + d_1^j c_j)_{j\in|s-l+1,s|})$$

对于 $(c_1, (c_j)_{j\in|s-l+1,\ s|}), (d_1, (d_j)_{j\in|s-l+1,\ s|}) \in \boldsymbol{E}_l \times \boldsymbol{k}^l$。注意，当 $l \geqslant 2$ 时，群 $(\boldsymbol{E}_l \times \boldsymbol{k}^{l+1}, \overline{\diamond})$ 和 $(\boldsymbol{E}_l \times \boldsymbol{k}^l, \overline{\diamond})$ 不一定是交换的。这取决于群 $\boldsymbol{E}_l$ 的基数。更准确地说，若 $\{1\} \subsetneq \boldsymbol{E}_l$，则对于任意$1 \neq d_1 \in \boldsymbol{E}_l$和某些 $j \in |s-l+1, s|$，都有 $d_1^j \neq d_1$。

8. 解群的代数结构

现在我们描述 $(\mathrm{AJ}_s(H))$ for$s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$的解群的代数性质。这里的一个重要工具是内自同构 $\mathcal{A}_T\colon \Gamma^s \to \Gamma^s$,$\mathcal{A}_T(F) = T^{-1} \circ F \circ T$for $F \in \Gamma^s$，其中 $T \in \Gamma_1^s$ 固定。我们从事实 2 和引理 6 的一个显然推论开始。

推论 3. 固定 $s \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$, $l \in |0,\ s-1|$, $H(x) = x^{l+1} + \sum_{i=l+2}^{s} h_i x^i \in \boldsymbol{k}[\![x]\!]_s$。令 $T \in \Gamma_1^s$ 将 $(\mathrm{AJ}_s(H))$ 变换为 $(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))$，其中 $\widetilde{H}(x) = x^{l+1} + \delta x^{2l+1}$ 具有适当的$\sim$ $\delta \in \boldsymbol{k}$。那么 $\mathcal{A}_T|_{\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H))}\colon \mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H)) \to \mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H))$ 是一个群同构。

我们首先固定 $H(x) = x + \sum_{i=2}^{s} h_i x^i \in \boldsymbol{k}[\![x]\!]_s$。我们证明，解的群$\mathcal{S}$(AJ $_s(H))$ 与 $(\mathrm{AJ}_s(H))$ 同构，即 $(\boldsymbol{k}^\star, \cdot)$。由推论 3 和引理 6 可得

定理 1. 固定 $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $H \in \Gamma_1^s$，并设 $T \in \Gamma_1^s$ 将 $(\mathrm{AJ}_s(H))^{\sim}$ $\sim$ 变换为 $(\mathrm{AJ}_s(H))$，其中 $H = L_1$。于是

(i) $\mathcal{A}_T(\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H))) = \mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H})) = \mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(L_1)) = \mathcal{L} \cong (\boldsymbol{k}^\star, \cdot)$,
(ii) $\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H)) = \mathcal{A}_{T^{-1}}(\mathcal{L}) = \left\{T \circ L_c \circ T^{-1} : c \in \boldsymbol{k}^\star\right\} \cong (\boldsymbol{k}^\star, \cdot)$.

证明. 根据引理 6，我们知道存在 $T \in \Gamma_1^s$，它将 $(\mathrm{AJ}_s(H))$ 变换为 $(\mathrm{AJ}_s(H))$，其中 $H = L_1$，也就是说，变换为

$$\Phi(x) = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} \cdot x.$$

容易验证，对于每个 $c \in \boldsymbol{k}^\star$，$\Phi(x) = cx$ 都是该形式微分方程的唯一解，即 $\mathcal{S}($ AJ$_s(\widetilde{H})) = \mathcal{L}$。显然 $\mathcal{L} \cong \boldsymbol{k}^\star$。第二个结论由第一个结论推出。□

现在我们继续讨论第二种情形，即研究固定 $H(x) = x^{l+1} + \sum_{i=l+2}^{s} h_i x^i$ 时 AJ $_s(H)$ 的解群结构，其中 $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$,$l \in |1, s-1|$。这里我们也可以将 $(\mathrm{AJ}_s(H))$ 化为其标准形 $(\mathrm{AJ}_s(H))$

其中 $\widetilde{H}(x)=x^{l+1}+\delta x^{2l+1}$，且 $\delta\in\boldsymbol{k}$ 和 $\delta=0$，条件是 $s\leqslant 2l$。注意，$\mathcal{L}_l\subset\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H))$ 是一个子群，并且对每个 $\Phi\in\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H))$，都有 $\pi_1^s\Phi\in\mathcal{L}_l$。令

$$\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))=\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))\cap\Gamma_1^s=\{\Phi\in\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H})):\pi_1^s\Phi=L_1\}.$$

由于 $\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_s(H))=\ker\pi_1^s|_{\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(\tilde{H}))}$，因此族 $\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_s(H))$ 是 $\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H))$ 中的正规因子。此外，$\mathcal{L}_l\cap\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_s(H))=\{L_1\}$，且若 $\Phi\in\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H))$，其中 $\pi_1^s\Phi=L_c\in\mathcal{L}_l$，则 $\Phi=L_c\circ(L_{c^{-1}}\circ\Phi)$，并且 $L_{c^{-1}}\circ\Phi\in\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_s(H))$，因此 $\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H))=\mathcal{L}_l\overline{\circledcirc}\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_s(H))$ 是子群 $\mathcal{L}_l$ 与正规因子 $\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_s(H))$ 关于代换的半直积。由此我们

定理 2. 取 $s\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, $l\in|1,s-1|$ 和 $H(x)=x^{l+1}+\sum_{i=l+2}^{s}h_ix^i\in\boldsymbol{k}[\![x]\!]_s$。设 $T\in\Gamma_1^s$ 将 $(\mathrm{AJ}_s(H))$ 变换为 $(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))$，其中 $\widetilde{H}(x)=x^{l+1}+\delta x^{2l+1}$, $\delta\in\boldsymbol{k}$和 $\delta=0$，条件是 $s\leqslant 2l$。那么

(i) $\mathcal{A}_T(\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H)))=\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))=\mathcal{L}_l\overline{\circledcirc}\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))$,

(ii)

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H))&=\mathcal{A}_{T^{-1}}(\mathcal{L}_l\overline{\circledcirc}\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H})))\\&=\left\{T\circ(L_c\circ\Phi)\circ T^{-1}:c\in\boldsymbol{E}_l,\Phi\in\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H})\right\}.\end{aligned}$$

因此，我们需要研究群 $\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_s(H))$ 的代数结构。固定 $s\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$、$l\in|1,s-1|$ 和 $\widetilde{H}(x)=x^{l+1}+\delta x^{2l+1}$，其中 $\delta\in\boldsymbol{k}$ 和 $\delta=0$ 满足 $l+1\leqslant s\leqslant 2l$。我们先给出一个技术性结果，以便证明群 $\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_s(H))$的结构。

引理 9. 固定 $s\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 和 $l\in|1,\ s-1|$。若对于某个 $m\in|2,\ s|$ 和 $c_m\in\boldsymbol{k}^\star$，有 $\Phi(x)=x+c_mx^m+\sum_{i=m+1}^{s}c_ix^i\in\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))$，则要么 $m=l+1$，要么$s\in\mathbb{N}$ 且 $m\geqslant s-l+1$。在后一种情况下，对于所有 $c_{s-l+1},\ \ldots,\ c_s\in\boldsymbol{k}$，均有 $\Psi(x)=x+\sum_{i=s-l+1}^{s}c_ix^i\in\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))$。

证明。假设 $\Phi(x)=x+c_mx^m+\sum_{i=m+1}^{s}c_ix^i\in\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))$ 且 $c_m\in\boldsymbol{k}^\star$。将 $(\Phi)^{l+1}$ 重新排列，并将 $(\Phi)^{2l+1}$ 按 x 的后续幂次排列，我们得到

$$\begin{aligned}(\Phi(x))^{l+1}&=x^{l+1}+(l+1)c_mx^{m+l}+\ldots\\\delta\,(\Phi(x))^{2l+1}&=\delta\left(x^{2l+1}+(2l+1)c_mx^{m+2l}+\ldots\right)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}(x^{l+1}+\delta x^{2l+1})=x^{l+1}+mc_mx^{m+l}+\sum_{i=m+1}^{s}ic_ix^{i+l}\\+\delta\left(x^{2l+1}+mc_mx^{m+2l}+\sum_{i=m+1}^{s}ic_ix^{i+2l}\right).\end{aligned}$$

比较 $(\mathrm{AJ}_s(H))$两边。首先假设 $s=\infty$。比较 x^{m+l} 的系数，得到 $(l+1)c_m=mc_m$；结合 $c_m\neq 0$ 可推出$m=l+1$。最后，如果 s是有限的，那么有两种可能：要么 $m+l\leqslant s$，进而也有 $m=l+1$；要么 $m+l\geqslant s+1$，因此 $m\geqslant s-l+1$。在后一种情况下，对于所有 $c_{s-l+1},\ \ldots\ldots,\ c_s\in\boldsymbol{k}$，我们都有 $\Psi(x)=x+\sum_{i=s-l+1}^{s}c_ix^i\in\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))$。□

利用引理 5 和引理 9，我们能够证明 $\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_s(H))$ 的结构性质。

引理 10. 若 $s,l\in\mathbb{N}$ 且 $l+1\leqslant s$，则有

Lemma 10. *(i)* $\pi_s^\infty \mathcal{S}_1(\widetilde{AJ}_\infty(H)) \subset \mathcal{S}_1(\widetilde{AJ}_s(H))$, *(ii)* $\mathcal{S}_1^l(\widetilde{AJ}_s(\widetilde{H})) = \left\{ x + \sum_{i=s-l+1}^{s} c_i x^i : c_{s-l+1}, \ldots, c_s \in \boldsymbol{k} \right\} \subset \mathcal{S}_1(\widetilde{AJ}_s(\widetilde{H}))$, *(iii)* $\pi_s^\infty \mathcal{S}_1(\widetilde{AJ}_\infty(\widetilde{H})) \cap \mathcal{S}_1^l(\widetilde{AJ}_s(\widetilde{H})) = \{L_1\}$ 对于 $s \geqslant 2l+1$, *(iv)* $\pi_s^\infty \mathcal{S}_1(\widetilde{AJ}_\infty(\widetilde{H})) \subset \mathcal{S}_1^l(\widetilde{AJ}_s(\widetilde{H}))$ 且 $\mathcal{S}_1(\widetilde{AJ}_s(\widetilde{H})) = \mathcal{S}_1^l(\widetilde{AJ}_s(\widetilde{H}))$ 对于 $s \leqslant 2l$, *(v)* $\mathcal{S}_1^l(\widetilde{AJ}_s(\widetilde{H}))$ 是 $\mathcal{S}_1(\widetilde{AJ}_s(\widetilde{H}))$ 中的一个交换正规除子，它与加法群 $\boldsymbol{k}^l$同构, *(vi)* 若 $s \geqslant 2l+1$, $\Phi(x) = x + c_{l+1}x^{l+1} + \sum_{i=l+2}^{s} c_i x^i \in \pi_s^\infty \mathcal{S}_1(\widetilde{AJ}_\infty(\widetilde{H}))$ 且 $\Psi(x) = x + \sum_{i=s-l+1}^{s} d_i x^i \in \mathcal{S}_1^l(\widetilde{AJ}_s(\widetilde{H}))$，则 $(\Phi \circ \Psi)(x) = (\Psi \circ \Phi)(x) = x + \sum_{i=s-l+1}^{s-l} c_i x^i + \sum_{i=l+1}^{s} (c_i + d_i)x^i$.

证明。包含关系 *(i)* 显然由引理 5 得出，而 *(ii)* 则由引理 9 得出。性质 *(iii)* 和 *(iv)* 是引理 9 以及以下观察的推论：$s - l + 1 \geqslant l + 2$ 当且仅当 $s \geqslant 2l + 1$。事实上，若对某个 $c_m \in \boldsymbol{k}^\star$ 有 $\Phi(x) = x + c_m x^m + \sum_{i=m+1}^{\infty} \in \mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(\widetilde{H}))$，则由引理 9 可得 $m = l + 1$。因此，对 $s \geqslant 2l + 1$有 $\pi_s^\infty \Phi(x) = x + c_{l+1}x^{l+1} + \sum_{i=l+2}^{s} \notin \mathcal{S}_1^l(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))$，并且在 $s \leqslant 2l$成立时，$\pi_s^\infty \Phi(x) = x + c_{l+1}x^{l+1} + \sum_{i=l+2}^{s} \in \mathcal{S}_1^l(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))$。此外，

$$(\Psi_1 \circ \Psi_2)(x) = x + \sum_{i=s-l+1}^{s} (c_i + d_i)x^i \quad \text{and} \quad \Psi_1^{\circ -1}(x) = x + \sum_{i=s-l+1}^{s} (-c_i)x^i,$$

对于 $\Psi_1(x) = x + \sum_{i=s-l+2}^{s} c_i x^i, \Psi_2(x) = x + \sum_{i=s-l+2}^{s} d_i x^i \in \mathcal{S}_1^l(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))$，因此$\mathcal{S}_1^l(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))$ 同构于加法群 $\boldsymbol{k}^l$。在 $s \geqslant 2l + 1$的情况下，对于$\pi_{l+1}^s : \mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H})) \to \Gamma^l$，$_1{}^l$由引理 9 可得 $\mathcal{S}_1^l(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H})) = \ker \pi_{l+1}^s|_{\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))}$，而 $\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H})) = \mathcal{S}_1^l(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))$ 适用于 $s \leqslant 2l$（同样由引理 9 得出），因此在两种情况下，$\mathcal{S}_1^l(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))$ 都是 $\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))$的正规因子。

最后，对于 $s \geqslant 2l + 1$ 和 $\Phi(x) = x + c_{l+1}x^{l+1} + \sum_{i=l+2}^{s} c_i x^i \in \pi_s^\infty \mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(\widetilde{H}))$，我们有$\Psi(x) = x + \sum_{i=s-l+1}^{s} d_i x^i \in \mathcal{S}_1^l(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))$

$$(\Phi \circ \Psi)(x) = x + \sum_{i=s-l+1}^{s} d_i x^i + \sum_{j=l+1}^{s} c_j \left(x + \sum_{i=s-l+1}^{s} d_i x^i \right)^j \mod x^{s+1},$$

因此 $(\Phi \circ \Psi)(x) = x + \sum_{i=s-l+1}^{s-l} c_i x^i + \sum_{i=s-l+1}^{s} (c_i + d_i)x^i$。另一方面，

$$(\Psi \circ \Phi)(x) = x + \sum_{i=l+1}^{s} c_i x^i + \sum_{j=s-l+1}^{s} d_j \left(x + \sum_{i=l+1}^{s} c_i x^i \right)^j \mod x^{s+1},$$

因此 $(\Psi \circ \Phi)(x) = x + \sum_{i=l+1}^{s-l} c_i x^i + \sum_{i=s-l+1}^{s} (c_i + d_i)x^i$。证明至此完成。 □

我们用以下推论结束对这一情形的研究。

推论 4. 固定 $s \in \mathbb{N}$ 和 $l \in |1, s-1|$。设 $\widetilde{H}(x) = x^{l+1} + \delta x^{2l+1}$，其中 $\delta \in \boldsymbol{k}$和 $\delta = 0$ 在 $l + 1 \leqslant s \leqslant 2l$时成立。

(i) 如果 $\pi^{\infty}_{l+1}:\ \mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(\widetilde{H}))\to\Gamma^{l}_{,\ 1^{l}}$ 是同构，那么

$$\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))\cong\left(\pi^{\infty}_{s}\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(\widetilde{H}))\right)\circledcirc\mathcal{S}^{l}_1(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))\cong\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}^{l}=\boldsymbol{k}^{l+1}$$

provided $s\geqslant 2l+1$,

(ii) $\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))=\mathcal{S}^{l}_1(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))\cong\boldsymbol{k}^{l}$ *for* $s\leqslant 2l$.

证明。条件 *(ii)* 由引理 10 *(iv)*得出。设 $2l+1\leqslant s<\infty$。若$\pi^{\infty}_{l+1}:\ \mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(\widetilde{H}))\to\Gamma^{l}_{,\ 1^{l}}$是一个同构，则 $\pi^{s}_{l+1}:\ \pi^{\infty}_{s}(\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(\widetilde{H})))\to\Gamma^{l}_{,\ 1^{l}}$~也是一个同构。显然，由引理 10 *(i)*，$\pi^{\infty}_{s}(\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(H)))\subset\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))$，因此 $\pi^{s}_{l+1}:\ \mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))\to\Gamma^{l}_{,\ 1^{l}}$ 是一个满同态。定义（一个同构）

$$\Psi:=\left(\pi^{s}_{l+1}|_{\pi^{\infty}_{s}(\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(\tilde{H})))}\right)^{-1}:\Gamma^{l,l}_{1}\to\pi^{\infty}_{s}(\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(\tilde{H}))).$$

~~于是 $\Psi\circ\pi^{s}_{l+1}|_{\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))}:\ \mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_s(H))\to\pi^{\infty}_{s}\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(H))$ 是一个满同态，其中$\Psi\circ\pi^{s}_{l+1}|_{\pi^{\infty}_{s}\mathcal{S}_\infty(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))}=\mathrm{id}_{\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(\widetilde{H}))}$。此外，$\ker\pi^{s}_{l+1}|_{\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_{s}(\widetilde{H}))}=\mathcal{S}^{l}_1(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))$，且 Ψ 是一个同构，因此 $\ker\Psi\circ\pi^{s}_{l+1}|_{\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))}=\mathcal{S}^{l}_1(\mathrm{AJ}_{s}(\widetilde{H}))$。结合引理 7，即可证明*(i)*。□

9. Aczél-Jabotynski形式微分方程—— $l=0$情形

在定理 1 中，我们给出了 $l=0$情形下 Aczél-Jabotynski形式微分方程的一般解。不幸的是，这种解的形式并未显示解对生成元 $H(x)=x+\sum_{j=1}^{s}h_jx^j$ 的依赖关系。现在我们给出解的另一种形式，其中明确展示了它们对 h_j 的直接依赖关系。

定理 3 (参见 [6, 定理 1]**).** 固定 $H(x)=x+\sum_{n=2}^{s}h_nx^n\in\Gamma^{s}_{1}$。存在一个序列 $(K_n)_{n\in|2,s|}$，$K_n(y,t_2\ldots,t_n)\in\boldsymbol{q}[y;\,t_2,\ldots,t_n]$，其元素为按递推方式给出的泛多项式

$$\begin{aligned}K_n(y,t_2,\ldots,t_n)=\frac{1}{n-1}\Bigg(&t_n\sum_{j=0}^{n-2}y^j+\\&\sum_{i=2}^{n-1}t_i\sum_{\overline{u}_n\in U_{n,i}}B_{\overline{u}_n}y^{u_1}(y^2-y)^{i-u_1-1}\prod_{j=2}^{n-i+1}K_j(y,t_1,\ldots,t_j)^{u_j}\\&-\sum_{i=2}^{n-1}t_i(n-i+1)K_{n-i+1}(y,t_2\ldots,t_{n-i+1})\Bigg)\quad\textit{for }\ n\in|2,s|.\end{aligned}$$

使得对每个 $c_1\in\boldsymbol{k}^{\star}$

$$\Phi_{c_1}(x)=c_1x+\sum_{n=2}^{s}(c_1^2-c_1)K_n(c_1;h_2,\ldots,h_n)x^n\tag{17}$$

都是 $(\mathrm{AJ}_s(H))$ 的唯一解。方程 $(\mathrm{AJ}_s(H))$ 的所有解 Φ_{c_1} 构成的族 $\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H))$ 在代入运算下构成一个交换群，与 $(\boldsymbol{k}^{\star},\cdot)$ 同构。

证明。我们知道，$c_1\in\boldsymbol{k}^{\star}$ 是任意的，并且由（11）可得 $c_2=h_2(c_1^2-c_1)$和 $c_3=(c_1^2-c_1)\left(\left(\frac{h_3}{2}+h_2^2\right)(c_1+1)-2h_2^2\right)$。定义多项式 $K_2\in\boldsymbol{q}[y;\ t_2]$、$K_3\in\boldsymbol{q}[y;\ t_2、\ t_3]$，使其满足 $K_2(y、\ t_2)=t_2$ 以及 $K_3(y、\ t_2、\ t_3)=\left(\frac{t_3}{2}+t_2^2\right)(y+1)-2t_2^2$。

固定 $n \in |3、\ s|$，并假设存在多项式 $K_j(y、\ t_2,\ \ldots\ldots、\ t_j) \in \boldsymbol{q}[y;\ t_2,\ \ldots\ldots、\ t_j]$，使得对于 $j \in |2、\ n-1|$，有 $c_j = (c_1^2 - c_1)K_j(c_1、\ h_2,\ \ldots\ldots、\ h_j)$。那么

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=2}^{n-1} h_i \left(\sum_{\overline{u}_n \in U_{n,i}} B_{\overline{u}_n} c_1^{u_1} \prod_{j=2}^{n-i+1} c_j^{u_j} - (n-i+1)c_{n-i+1} \right) \\
&\quad = \sum_{i=2}^{n-1} h_i \sum_{\overline{u}_n \in U_{n,i}} B_{\overline{u}_n} c_1^{u_1} \prod_{j=2}^{n-i+1} \left((c_1^2 - c_1)K_j(c_1, h_2, \ldots, h_j) \right)^{u_j} \\
&\qquad\quad - \sum_{i=2}^{n-1} (n-i+1)h_i(c_1^2 - c_1)K_{n-i+1}(c_1, h_2, \ldots, h_{n-i+1}) \\
&\quad = \sum_{i=2}^{n-1} h_i \sum_{\overline{u}_n \in U_{n,i}} B_{\overline{u}_n} c_1^{u_1} (c_1^2 - c_1)^{i-u_1} \prod_{j=2}^{n-i+1} K_j(c_1, h_2, \ldots, h_j)^{u_j} \\
&\qquad\quad - \sum_{i=2}^{n-1} (n-i+1)h_i(c_1^2 - c_1)K_{n-i+1}(c_1, h_2, \ldots, h_{n-i+1}).
\end{aligned}$$

因此，由将 c_n 放在左侧的（11）式可得

$$\begin{aligned}
(n-1)c_n &= h_n(c_1^n - c_1) \\
&\quad + \sum_{i=2}^{n-1} h_i \sum_{\overline{u}_n \in U_{n,i}} B_{\overline{u}_n} c_1^{u_1} (c_1^2 - c_1)^{i-u_1} \prod_{j=2}^{n-i+1} K_j(c_1, h_2, \ldots, h_j)^{u_j} \\
&\qquad - \sum_{i=2}^{n-1} (n-i+1)h_i(c_1^2 - c_1)K_{n-i+1}(c_1, h_2, \ldots, h_{n-i+1}),
\end{aligned}$$

接下来，根据引理 2 （ν），我们推得

$$\begin{aligned}
(n-1)c_n = (c_1^2 - c_1) \Bigg(& h_n \sum_{j=0}^{n-2} c_1^j + \\
& \sum_{i=2}^{n-1} h_i \sum_{\overline{u}_n \in U_{n,i}} B_{\overline{u}_n} c_1^{u_1} (c_1^2 - c_1)^{i-u_1-1} \prod_{j=2}^{n-i+1} K_j(c_1, h_2, \ldots, h_j)^{u_j} \\
& - \sum_{i=2}^{n-1} (n-i+1)h_i K_{n-i+1}(c_1, h_2, \ldots, h_{n-i+1}) \Bigg).
\end{aligned}$$

定义 $K_n(y、\ t_2、\ \ldots\ldots、\ t_n) \in \boldsymbol{q}[y;\ t_2、\ \ldots\ldots、\ t_n]$ 为

$$\begin{aligned}
K_n(y, t_2, \ldots, t_n) = \frac{1}{n-1} \Bigg(& t_n \sum_{j=0}^{n-2} y^j + \\
& + \sum_{i=2}^{n-1} t_i \sum_{\overline{u}_n \in U_{n,i}} B_{\overline{u}_n} y^{u_1} (y^2 - y)^{i-u_1-1} \prod_{j=2}^{n-i+1} K_j(y, t_2, \ldots, t_j)^{u_j} \\
& - \sum_{i=2}^{n-1} (n-i+1)t_i K_{n-i+1}(y, t_2, \ldots, t_{n-i+1}) \Bigg).
\end{aligned}$$

显然，我们于是有

$$c_n = (c_1^2 - c_1)K_n(c_1, h_2, \ldots, h_n). \tag{18}$$

反之，若任意固定 $c_1 \in \boldsymbol{k}^\star$，并令 c_n 对于 $n \in |2, s|$ 由 (18) 给出，则等式组 (11) 成立，因此由 (17) 给出的 Φ_{c_1} 是 $(\mathrm{AJ}_s(H))$ 的一个解。

最后，由事实1可知，对于固定的 H ， $\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H))$ （即 $(\mathrm{AJ}_s(H))$ 的解集）是一个群。根据已证明的结果，我们推知，对于典范满同态 π_1^s ， $\pi_1^s|_{\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H))}$ ： $\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H)) \to \Gamma^1$ 是一个同构。因此 $\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H)) \cong \Gamma_1 \cong \boldsymbol{k}^\star$。□

10. 阿策尔-雅博廷斯基形式微分方程——情形 $l \geqslant 1$

~现在我们考虑由变换后的阿策尔-~雅博廷斯基微分方程 $(\mathrm{AJ}_s(H)$的所有解构成的群 $\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H)$ ，其中 $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$、 $l \in |1、 s-1|$为固定值，且 $\widetilde{H}(x) = x^{l+1} + \delta x^{2l+1}$，其中 $\delta \in \boldsymbol{k}$ 和 $\delta = 0$ ，条件是 $s \leqslant 2l$。根据定理 2~ ~ ~，我们有 $\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H) = \mathcal{L}_l \overline{\circledcirc} \mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_s(H)$。在描述有限 s~时的 $\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_s(H))$ 时，我们使用群 $\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(H))$ ；现在我们将注意力集中在这个群上，也就是说，接下来要确定微分方程 $(\mathrm{AJ}_\infty(H)$的所有解 $\widetilde{\Phi}(x) = x + c_{l+1}x^{l+1} + \sum_{n=l+2}^{\infty} \widetilde{c}_n x^n \in$~ ~$\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(H)$ 。我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\widetilde{\Phi}}{\mathrm{d}x} \cdot (x^{l+1} + \delta x^{2l+1}) &= \left(1 + (l+1)\widetilde{c}_{l+1}x^l + \sum_{n=l+2}^{\infty} n\widetilde{c}_n x^{n-1}\right) \cdot (x^{l+1} + \delta x^{2l+1}) \\ &= x^{l+1} + ((l+1)\widetilde{c}_{l+1} + \delta)x^{2l+1} + \sum_{n=2l+2}^{3l} (n-l)\widetilde{c}_{n-l}X^n \\ &\quad + \sum_{n=3l+1}^{\infty} \left((n-l)\widetilde{c}_{n-l} + (n-2l)\delta\widetilde{c}_{n-2l}\right) X^n.\end{aligned}$$

另一方面（参见推论 1 及 $m = l$ 和（6））

$$\begin{aligned}&(\widetilde{\Phi}(x))^{l+1} + \delta(\widetilde{\Phi}(x))^{2l+1} \\ &= \left(x + \widetilde{c}_{l+1}x^{l+1} + \sum_{n=l+2}^{\infty} \widetilde{c}_n x^n\right)^{l+1} + \delta\left(x + \widetilde{c}_{l+1}x^{l+1} + \sum_{n=l+2}^{\infty} \widetilde{c}_n x^n\right)^{2l+1} \\ &= x^{l+1} + ((l+1)\widetilde{c}_{l+1} + \delta)x^{2l+1} + \sum_{n=2l+2}^{3l}\left(l\widetilde{c}_{n-l} + \sum_{\overline{u}_n \in \widetilde{U}_{n,l+1}^{l+1}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=l+1}^{n-l-1} \widetilde{c}_j^{u_j}\right)x^n \\ &\quad + \sum_{n=3l+1}^{\infty}\left((l+1)\widetilde{c}_{n-l} + \sum_{\overline{u}_n \in \widetilde{U}_{n,l+1}^{l+1}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=l+1}^{n-l-1} \widetilde{c}_j^{u_j} + \delta \sum_{\overline{u}_n \in \widetilde{U}_{n,2l+1}^{l+1}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=l+1}^{n-2l} \widetilde{c}_j^{u_j}\right)x^n.\end{aligned}$$

~因此，通过比较 x 后续各次幂的系数，由 $(\mathrm{AJ}_\infty(H)$ 得到 $\widetilde{c}_l \in \boldsymbol{k}$ 以及以下等式组

$$\begin{aligned}(n-l)\widetilde{c}_{n-l} &= (l+1)\widetilde{c}_{n-l} + \sum_{\overline{u}_n \in \widetilde{U}_{n,l+1}^{l+1}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=l+1}^{n-l-1} \widetilde{c}_j^{u_j}, \quad n \in |2l+2, 3l| \\ (n-l)\widetilde{c}_{n-l} &= (l+1)\widetilde{c}_{n-l} + \sum_{\overline{u}_n \in \widetilde{U}_{n,l+1}^{l+1}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=l+1}^{n-l-1} \widetilde{c}_j^{u_j} \\ &\quad + \delta \sum_{\overline{u}_n \in \widetilde{U}_{n,2l+1}^{l+1}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=l+1}^{n-2l} \widetilde{c}_j^{u_j} - (n-2l)\delta\widetilde{c}_{n-2l}, \quad n \geqslant 3l+1,\end{aligned}$$

或者，等价地，

$$(n-2l-1)\widetilde{c}_{n-l} = \sum_{\overline{u}_n\in\widetilde{U}^{l+1}_{n,l+1}} B_{\overline{u}_n}\prod_{j=l+1}^{n-l-1}\widetilde{c}_j^{u_j},\quad n\in|2l+2,3l|$$

$$\begin{aligned}(n-2l-1)\widetilde{c}_{n-l} &= \sum_{\overline{u}_n\in\widetilde{U}^{l+1}_{n,l+1}} B_{\overline{u}_n}\prod_{j=l+1}^{n-l-1}\widetilde{c}_j^{u_j}\\ &+\delta\sum_{\overline{u}_n\in\widetilde{U}^{l+1}_{n,2l+1}} B_{\overline{u}_n}\prod_{j=l+1}^{n-2l}\widetilde{c}_j^{u_j}-(n-2l)\delta\widetilde{c}_{n-2l},\quad n\geqslant 3l+1.\end{aligned}\tag{19}$$

现在，我们确定式（19）的所有解。我们证明

定理 4 (参见 [6, 定理 2、引理 2 和 3])。 固定 $l\geqslant 1$。存在一列泛多项式 $Q_n^{l+1}(y,t)\in\boldsymbol{q}[y,\ t]$，由递推关系给出

$$\begin{aligned}&Q^{l+1}_{l+1}(y,t)=y,\\ &Q^{l+1}_{rl+1}(y,t)=\frac{1}{(r-1)l}\Bigg(\sum_{\overline{u}_n\in\widetilde{U}^{l+1}_{n,l+1}} B_{\overline{u}_n}\prod_{j=1}^{r-1}Q^{l+1}_{jl+1}(y,t)^{u_{jl+1}}\\ &\quad+t\sum_{\overline{u}_n\in\widetilde{U}^{l+1}_{n,2l+1}} B_{\overline{u}_n}\prod_{j=1}^{r-1}Q^{l+1}_{jl+1}(y,t)^{u_{jl+1}}\\ &\quad-t((r-1)l+1)Q^{l+1}_{(r-1)l+1}(y,t)\Bigg),\ \textit{for}\ r\geqslant 2\ \ \textit{with}\ n=(r+1)l+1,\end{aligned}\tag{20}$$

使得对每个 $\widetilde{c}_{l+1}\in\boldsymbol{k}$

$$\widetilde{\Phi}_{\widetilde{c}_{l+1}}(x)=x+\widetilde{c}_{l+1}x^{l+1}+\sum_{p=2}^{\infty}Q^l_{pl+1}(\widetilde{c}_{l+1},\delta)x^{pl+1}\in\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(\widetilde{H}))\subset\mathcal{N}^{\infty,l}\tag{21}$$

都是 $\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(\widetilde{H}))$ 中 $(\mathrm{AJ}_\infty(\widetilde{H}))$ 的唯一解，其中 $\widetilde{H}(x)=x^{l+1}+\delta x^{2l+1}$。那么，$\pi^\infty_{l+1}:\ (\mathrm{AJ}_\infty(\widetilde{H}))\to\Gamma^l_{,\ 1^l}$ 是一个同构，群 $\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(\widetilde{H}))$ 是交换群，并且同构于 $(\boldsymbol{k},+)$。

证明。 首先假设 $l=1$。那么 $|2l+2、\ 3l|=\varnothing$ 和 $\widehat{U}^2_{n,\ 3}=U_{n,\ 3}$ 因此，等式组（19）可化为

$$(n-3)\widetilde{c}_{n-1}=\sum_{\overline{u}_n\in\overline{U}^2_{n,2}}B_{\overline{u}_n}\prod_{j=2}^{n-2}\widetilde{c}_j^{u_j}+\delta\sum_{\overline{u}_n\in U_{n,3}}B_{\overline{u}_n}\prod_{j=2}^{n-2}\widetilde{c}_j^{u_j}-\delta(n-2)\widetilde{c}_{n-2},\ n\geqslant 4.\tag{22}$$

任意固定 $\widetilde{c}_2$。若令 $Q^2_2(y,t)=y$ 那么 $\widetilde{c}_2=Q^2_2(\widetilde{c}_2,\delta)$。对于 $n=4$，我们有 $\overline{U}_{4,\ 2}=\{(0,2,0,0)\}$ 以及 $U_{4,\ 3}=\{(2,1,0,0)\}$，因此由 (22) 得到

$$\widetilde{c}_3=\frac{2!}{2!}\widetilde{c}_2^2+\delta\frac{3!}{2!}\widetilde{c}_2-\delta\cdot 2\widetilde{c}_2=\widetilde{c}_2^2+\delta\widetilde{c}_2=:Q^2_3(\widetilde{c}_2,\delta).$$

假设对于某个 $n \geqslant 4$，我们有 $\widetilde{c}_j = Q_j^2(\widetilde{c}_2, \delta)$ 对于 $j \in |2, n-2|$，由 (22) 可得 $\widetilde{c}_{n-1} = Q_{n-1}^2(\widetilde{c}_2, \delta)$，其中

$$Q_{n-1}^2(y,t) = \frac{1}{n-3}\left(\sum_{\overline{u}_n \in \overline{U}_{n,2}^2} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=2}^{n-2} Q_j^2(y,t)^{u_j} + \delta \sum_{\overline{u}_n \in U_{n,3}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=2}^{n-2} Q_j^2(y,t)^{u_j} - \delta(n-2)Q_{n-2}^2(y,t)\right). \tag{23}$$

由此，我们对所有 $n \geqslant 3$ 得到 $\widetilde{c}_n$。注意，(23) 与取 $l=2$ 时的 (20) 相同。现在固定 $l \geqslant 2$。定义 $Q_{l+1}^{l+1}(y,t) = y \sum_{\overline{u}_{2l+2} \in \widetilde{U}_{2l+2,\, l+1}^{l+1}} B_{\overline{u}_{2l+2}} \prod_{j=l+1}^{l+1} z_j^{u_j}$，并先考虑 $n = 2l+2$ 时的 (19)。显然，$2l+2 \notin \mathbb{N}_l$，由推论 2 *(i)* 可得 $\widetilde{c}_{l+2} = 0$。

假设对于某个 $n \in |2l+2,\ 3l|$（注意 $n \notin \mathbb{N}_l$），我们有 $\widetilde{c}_j = 0$ 对于 $j \in |l+2,\ n-l-1|$，那么由推论 2 *(i)* 可得 $\sum_{\overline{u}_n \in \widetilde{U}_{n,\, l+1}^{l+1}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=l+1}^{l+1} z_j^{u_j} = 0$，这意味着 $\widetilde{c}_{n-l} = 0$。因此，对每个 $j \in |l+2,\ 2l|$，都有 $\widetilde{c}_j = 0$。

现在考虑 $n = 3l+1$ 的等式。我们已证明，对于 $j \in |l+2,\ 2l|$，$\widetilde{c}_j = 0$。此外，我们有

$$\widetilde{U}_{3l+1,l+1}^{l} = \{l-1, 0, \ldots, 0, \overset{l+1}{2}, 0, \ldots, 0\} \text{ and } \widetilde{U}_{3l+1,2l+1}^{l} = \{2l, 0, \ldots, 0, \overset{l+1}{1}, 0, \ldots, 0\},$$

因此

$$\begin{aligned} l\widetilde{c}_{2l+1} &= \sum_{\overline{u}_{3l+1} \in \widetilde{U}_{3l+1,l+1}^{l+1}} B_{\overline{u}_{3l+1}} \prod_{j=l}^{2l} \widetilde{c}_j^{u_j} + \delta \sum_{\overline{u}_{3l+1} \in \widetilde{U}_{3l+1,2l+1}^{l}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=l+1}^{l+1} \widetilde{c}_j^{u_j} - (l+1)\delta\widetilde{c}_{l+1} \\ &= \frac{(l+1)!}{(l-1)!2!}\widetilde{c}_{l+1}^2 + \delta\frac{(2l+1)!}{(2l)!}\widetilde{c}_{l+1} - \delta(l+1)\widetilde{c}_{l+1} = \frac{l(l+1)}{2}\widetilde{c}_{l+1}^2 + l\delta\widetilde{c}_{l+1}. \end{aligned}$$

于是 $\widetilde{c}_{2l+1} = \frac{l+2}{2}\widetilde{c}_{l+1}^2 + \delta\widetilde{c}_{l+1}$，并定义 $Q_{2l+1}^{l}(y,\ t) := \frac{l+1}{2}y^2 + ty \in \boldsymbol{q}[y,\ t]$。

最后，假设对于某个 $n \geqslant 3l+2$，我们有

$$\begin{aligned} &\widetilde{c}_j = 0 && \text{for } j \in |2, n-l-1| \backslash \mathbb{N}_l, \\ &\widetilde{c}_{pl+1} = Q_{pl+1}^{l+1}(\widetilde{c}_{l+1}; \delta) && \text{for } p \in |0, r-1|, \end{aligned} \tag{24}$$

其中，$r \geqslant 2$ 是满足 $(r-1)l+1 \leqslant n-l-1$ 的最后一个正整数。根据我们的假设 (24)，由推论 2 可得

$$\begin{aligned} &\sum_{\overline{u}_n \in \widetilde{U}_{n,l+1}^{l+1}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=l+1}^{n-l-1} \widetilde{c}_j^{u_j} + \delta \sum_{\overline{u}_n \in U_{n,2l+1}^{l+1}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j=l+1}^{n-2l} \widetilde{c}_j^{u_j} - (n-2l)\delta\widetilde{c}_{n-2l} \\ &= \sum_{\overline{u}_n \in \widetilde{U}_{n,l+1}^{l+1}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j \in |l+1, n-l-1| \cap \mathbb{N}_l} \widetilde{c}_j^{u_j} \\ &\qquad + \delta \sum_{\overline{u}_n \in U_{n,2l+1}^{l+1}} B_{\overline{u}_n} \prod_{j \in |l+1, n-2l| \cap \mathbb{N}_l} \widetilde{c}_j^{u_j} - (n-2l)\delta\widetilde{c}_{n-2l}, \end{aligned}$$

因此，我们将考虑等式

$$
\begin{aligned}
(n-1-2l)\widetilde{c}_{n-l} = &\sum_{\overline{u}_n\in\breve{U}^{l+1}_{n,l+1}} B_{\overline{u}_n}\prod_{j\in|1,n-l-1|\cap\mathbb{N}_l}\widetilde{c}_j^{u_j}\\
&+\delta\sum_{\overline{u}_n\in U^{l+1}_{n,2l+1}} B_{\overline{u}_n}\prod_{j\in|1,n-2l|\cap\mathbb{N}_l}\widetilde{c}_j^{u_j}-(n-2l)\delta\widetilde{c}_{n-2l}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

若 $n\notin\mathbb{N}_l$，则与上文类似，可以证明 $\widetilde{c}_{n-l}=0$。若 $n\in\mathbb{N}_l$，即 $n=(r+1)l+1$，则由 (25) 得

$$
\begin{aligned}
(r-1)l\widetilde{c}_{rl+1} = &\sum_{\overline{u}_n\in\breve{U}^{l+1}_{n,l+1}} B_{\overline{u}_n}\widetilde{c}_1^{u_1}\prod_{j=1}^{r-1}\widetilde{c}_{jl)+1}^{u_{jl+1}}\\
+\delta&\sum_{\overline{u}_n\in U^{l+1}_{n,2l+1}} B_{\overline{u}_n}\widetilde{c}_1^{u_1}\prod_{j=1}^{r-1}\widetilde{c}_{jl+1}^{u_{jl+1}}-((r-1)l+1)\delta\widetilde{c}_{(r-1)l+1}\ \text{ with }\ n=(r+1)l+1.
\end{aligned}
$$

因此，我们可以定义一个多项式 $Q^{l+1}_{rl+1}(y,t)\in\boldsymbol{q}[y,t]$，如 (20) 中所示，使得 $\widetilde{c}_{rl+1}=Q^{l+1}_{rl+1}(\widetilde{c}_2,\delta)$。这样，对于每个 $j\geqslant l+1$，我们都得到 $\widetilde{c}_j$。

我们已经证明，对于每个 $\widetilde{c}_l\in\boldsymbol{k}$，都存在唯一的解 $\Phi_{\widetilde{c}_l}\in\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(\widetilde{H}))$。因此，$\pi^\infty_{l+1}\colon\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(\widetilde{H}))\to\Gamma^{l,l}_{,1}$ 是一个满同态，因此 $\sim\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(H))$ 根据定理 4 和引理 8 *(ii)* 同构于 $(\boldsymbol{k},+)$。□

我们能够给出阿策尔-雅博廷斯基微分方程 $(\mathrm{AJ}_\infty(H))$ 的解群的描述。由定理 2 和定理 4 可得

推论 5. 固定 $l\in\mathbb{N}$ 和 $H(x)=x^{l+1}+\sum_{j=l+2}^\infty h_jx^j\in\boldsymbol{k}[\![x]\!]$。设 $T(x)=x+\sum_{j=2}^\infty v_jx^j\in\Gamma_1$ 将 $(\mathrm{AJ}_\infty(H))$ 变换为 $(\mathrm{AJ}_\infty(\widetilde{H}))$，其中 $\widetilde{H}(x)=x^{l+1}+\delta x^{2l+1}$满足某个 $\delta\in\boldsymbol{k}$。通过 (20)定义泛多项式序列 $Q^l_n(y,t)\in\boldsymbol{q}[y,t]$。

(i) 对每个 $c_1\in\boldsymbol{E}_l$ 和 $c_{l+1}\in\boldsymbol{k}$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\Phi}_{c_1,c_l} &= L_{c_1}\circ\widetilde{\Phi}_{c_1^{-1}c_l}=c_1x+c_{l+1}x^{l+1}\\
&\quad+\sum_{p=2}^\infty c_1Q^{l+1}_{pl+1}(c_1^{-1}c_{l+1},\delta)x^{pl+1}\in\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_\infty(\widetilde{H}))\subset\mathcal{N}^{\infty,l}
\end{aligned}
$$

~ ~ ~是 $(\mathrm{AJ}_\infty(H))$的唯一解，其中 $\Phi_{\widetilde{c}_{l+1}}\in\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(H))$ 是 $(\mathrm{AJ}_\infty(H))$ 的一个解~ ~，如定理 *4* 所述。$(\mathrm{AJ}_\infty(H))$ 的所有解~ ~构成的群 $\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_\infty(H))$ 是子群 $\mathcal{L}_l$ 和$\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(\widetilde{H}))$ 的直积 $\mathcal{L}_l\circledcirc\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(H))$，因此它同构于 $\Gamma^{l,l}_{,}\cong(\boldsymbol{E}_l\times\boldsymbol{k})$。

(ii) 对于每个 $c_1\in\boldsymbol{E}_l$ 和 $c_{l+1}\in\boldsymbol{k}$

$$
\begin{aligned}
\Phi_{c_1,c_{l+1}} &= T\circ\widehat{\Phi}_{c_1,c_{l+1}}\circ T^{\circ-1}=T\circ\left(L_{c_1}\circ\widetilde{\Phi}_{c_1^{-1}c_l}\right)\circ T^{\circ-1}\\
&=\left(T\circ L_{c_1}\circ T^{\circ-1}\right)\circ\left(T\circ\widetilde{\Phi}_{c_1^{-1}c_l}\circ T^{\circ-1}\right)
\end{aligned}
$$

是 *Aczel-Jabotinsky* 微分方程 $(\mathrm{AJ}_\infty(H))$，~ ~ ~的唯一解，其中 $\Phi_{c_1^{-1}c_l}\in\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(H))$ 是 $(\mathrm{AJ}_\infty(H))$的一个解。因此，所有 $(\mathrm{AJ}_\infty(H))$ 的解构成的群$\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_\infty(H))$ 是子群 $\mathcal{A}_T(\mathcal{L}_l)$与 $\mathcal{A}_T(\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(H)))$的直积 $\mathcal{A}_T(\mathcal{L}_l)\circledcirc$ ~ ~$\mathcal{A}_T(\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(H)))$，并且它也同构于 $\Gamma^{l,}_{l}\cong(\boldsymbol{E}_l\times\boldsymbol{k})$。

证明。固定一个解 $\widehat{\Phi}(x)=c_1x+\sum_{j=2}^{\infty}c_jx^j\in\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_\infty(\widetilde{H}))$。于是 $c_1\in\boldsymbol{E}_l$，根据定理 2 的证明，我们得到 $\widehat{\Phi}=L_{c_1}\circ\left(L_{c_1^{-1}}\circ\widehat{\Phi}\right)\in\mathcal{L}_l\overline{\circledcirc}\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(\widetilde{H}))$和 $(L_{c_1^{-1}}\circ\widehat{\Phi})(x)=x+\sum_{j=2}^{\infty}c_1^{-1}c_jx^j\in\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(\widetilde{H}))$。由引理 9，我们进而得到 $(L_{c_1^{-1}}\circ\widehat{\Phi})(x)=x+c_1^{-1}c_{l+1}x^{l+1}+\sum_{j=l+2}^{\infty}c_1^{-1}c_jx^j$。定理 4 蕴含$\pi_{l+1}^{\infty}|_{\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(\tilde{H}))}$：$\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(\widetilde{H}))\to\Gamma^{l,\,l}_{,1}$ 是一个满同态，而且

$$(L_{c_1^{-1}}\circ\widehat{\Phi})(x)=x+c_1^{-1}c_{l+1}x^{l+1}+\sum_{p=2}^{\infty}Q_{pl+1}^{l+1}(c_1^{-1}c_{l+1},\delta)x^{pl+1}\in\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(\widetilde{H}))\subset\mathcal{N}^{\infty,l}.$$

注意到 $L_{c_1}\in\mathcal{L}_l$ 和 $L_{c_1^{-1}}\circ\widehat{\Phi}\in\mathcal{N}^{\infty,\,l}$，因此 L_{c_1} 和 $L_{c_1^{-1}}\circ\widehat{\Phi}$ 可交换。于是，$\sim\mathcal{L}_l$ 和 $\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(H))$ 都是 $\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_\infty(H))$中的正规除子，因此 $\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_\infty(H))=\sim\mathcal{L}_l\circledcirc\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(H))$。最后，

$$\widehat{\Phi}(x)=\widehat{\Phi}_{c_1,c_l}(x)=c_1x+c_{l+1}x^{l+1}+\sum_{p=2}^{\infty}c_1Q_{pl+1}^{l+1}(c_1^{-1}c_l,\delta)x^{pl+1},$$

$\pi_s^{\infty}|_{\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_\infty(\tilde{H}))}$：$\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_\infty(\widetilde{H}))\to\Gamma^{l,\,l}$ 是一个满同态，核为 $\ker\pi_s^{\infty}|_{\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_\infty(\tilde{H}))}=\{L_1\}$，因此 $\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_\infty(\widetilde{H}))\cong\Gamma^{l,\,l}\cong(\boldsymbol{E}_l\times\boldsymbol{k})$。

于是，*(ii)* 是*(i)* 和定理 2 *(ii)*的推论。 □

现在考虑 $s\in\mathbb{N}$ 的情形。这里给出的结果的证明与推论 5 的证明类似，因此略去。

推论 6. 固定 $l\in\mathbb{N}$，$s\geqslant 2l+1$ 和 $H(x)=x^{l+1}+\sum_{j=l+2}^{s}h_jx^j\in\boldsymbol{k}[\![x]\!]_s$。假设 $T(x)=x+\sum_{j=2}^{s}v_jx^j\in\Gamma_1^s$ 将 $(\mathrm{AJ}_s(H))$ 变换为 $(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))$，$\widetilde{H}(x)=x^{l+1}+\delta x^{2l+1}$，其中 $\delta\in\boldsymbol{k}$。令 $r\in\mathbb{N}$ 为满足 $rl+1\leqslant s$ 的最大正整数，并定义多项式序列 $Q_n^{l+1}(y,t)\in\boldsymbol{q}[y,t]$。

(i) 对每个 $c_1\in\boldsymbol{E}_l$和 $c_{l+1},c_{s-l+1},\ldots,c_s\in\boldsymbol{k}$

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}_{c_1,c_{l+1},c_{s-l+1},\ldots,c_s}&=L_{c_1}\circ\left(\widetilde{\Phi}_{c_1^{-1}c_{l+1}}\circ\overline{\Phi}_{c_1^{-1}c_{s-l+1},\ldots,c_1^{-1}c_s}\right)\\&=c_1x+c_{l+1}x^{l+1}+\sum_{p=2}^{r-1}c_1Q_{pl+1}^{l+1}(c_1^{-1}c_{l+1},\delta)x^{pl+1}+\sum_{j=s-l+1}^{rl}c_jx^j\\&\quad+\left(c_1Q_{rl+1}^{l+1}(c_1^{-1}c_{l+1},\delta)+c_{rl+1}\right)x^{rl+1}+\sum_{j=rl+2}^{s}c_jx^j\in\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))\end{aligned}$$

是 $(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))$ 的唯一解，其中 $\overline{\Phi}_{c_1^{-1}c_{s-l+1},\ldots,c_1^{-1}c_s}\in\mathcal{S}_1^l(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))$，$\sim\Phi_{\tilde{c}_{l+1}}=\pi_s^{\infty}\Phi_{\tilde{c}_{l+1}}$，且 $\Phi_{\tilde{c}_{l+1}}\in\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(H))$ 是定理 *4* 中所述的 $(\mathrm{AJ}_\infty(H))$ 的一个解。那么，$\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H))$ 的所有解构成的群是子群 $\mathcal{L}_l$、$\pi_s^{\infty}\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(\widetilde{H}))$ 和 $\mathcal{S}_1^l(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))$ 的半直积 $\mathcal{L}_l\overline{\circledcirc}\left(\pi_s^{\infty}\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(\widetilde{H}))\circledcirc\mathcal{S}_1^l(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))\right)$，因而同构于 $(\boldsymbol{E}_l\times\boldsymbol{k}^{l+1},\overline{\circ})$。

(ii) 对每个 $c_1 \in \boldsymbol{E}_l$ 和 $c_{l+1}, c_{s-l+1}, .., c_s \in \boldsymbol{k}$

$$\begin{aligned}\Phi_{c_1,c_{l+1},c_{s-l+1},\ldots,c_s} &= T \circ \widehat{\Phi}_{c_1,c_{l+1},c_{s-l+1},\ldots,c_s} \circ T^{\circ -1} \\ &= T \circ \left(L_{c_1} \circ \widetilde{\Phi}_{c_1^{-1}c_{l+1}} \circ \overline{\Phi}_{c_1^{-1}c_{s-l+1},\ldots,c_1^{-1}c_s}\right) \circ T^{\circ -1} \\ &= \left(T \circ L_{c_1} \circ T^{\circ -1}\right) \circ \left(T \circ \widetilde{\Phi}_{c_1^{-1}c_{l+1}} \circ T^{\circ -1}\right) \\ &\qquad \circ \left(T \circ \overline{\Phi}_{c_1^{-1}c_{s-l+1},\ldots,c_1^{-1}c_s} \circ T^{\circ -1}\right)\end{aligned}$$

是 *Aczel-Jabotinsky* 微分方程 $(\mathrm{AJ}_s(H))$，$\widetilde{\ }$ 的唯一解，其中 $\Phi_{\tilde{c}_{l+1}} = \pi_s^\infty \Phi_{\tilde{c}_{l+1}}$，$\Phi_{\tilde{c}_{l+1}} \in \mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(H))$ 是 $(\mathrm{AJ}_\infty(H))$ 的一个解，且 $\overline{\Phi}_{c_1^{-1}c_{s-l+1},\ldots,c_1^{-1}c_s} \in \mathcal{S}_1^l(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))$。因此，所有 $(\mathrm{AJ}_s(H))$ 的解构成的群 $\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H))$ 是一个半直积

$$\mathcal{A}_T(\mathcal{L}_l)\overline{\circledcirc}\left(\mathcal{A}_T(\pi_s^\infty \mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(\widetilde{H}))) \circledcirc \mathcal{A}_T(\mathcal{S}_1^l(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H})))\right)$$

由子群 $\mathcal{A}_T(\mathcal{L}_l)$，$\mathcal{A}_T(\pi_s^\infty \mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_\infty(\widetilde{H})))$ 和 $\mathcal{A}_T(\mathcal{S}_1^l(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H})))$ 构成，并且同构于 $(\boldsymbol{E}_l \times \boldsymbol{k}^{l+1}, \overline{\diamond})$。

推论7. 固定 $2 \leqslant l+1 \leqslant s \leqslant 2l$ 和 $H(x) = x^{l+1} + \sum_{j=l+2}^s h_j x^j \in \boldsymbol{k}[\![x]\!]_s$。假设 $T(x) = x + \sum_{j=2}^s v_j x^j \in \Gamma_1^s$ 将 $(\mathrm{AJ}_s(H))$ 变换为 $(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))$，其中 $\widetilde{H}(x) = x^{l+1}$。

(i) 对每个 $c_1 \in \boldsymbol{E}_l$ 和 $c_{s-l+1}, \ldots, c_s \in \boldsymbol{k}$

$$\widehat{\Phi}_{c_1,c_{s-l+1},\ldots,c_s} = L_{c_1} \circ \overline{\Phi}_{c_1^{-1}c_{s-l+1},\ldots,c_1^{-1}c_s} = c_1 x + \sum_{j=s-l+1}^{s} c_j x^j \in \mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))$$

$\widetilde{\ }$ 是 $(\mathrm{AJ}_s(H))$ 的唯一解，其中 $\overline{\Phi}_{c_1^{-1}c_{s-l+1},\ldots,c_1^{-1}c_s} \in \mathcal{S}_1^l(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))$。$\widetilde{\ }$ 所有 $(\mathrm{AJ}_s(H))$ 的解构成的群 $\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H))$ 是子群 $\mathcal{L}_l$ 和 $\mathcal{S}_1^l(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))$ 的半直积 $\mathcal{L}_l \overline{\circledcirc} \mathcal{S}_1^l(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))$，因此同构于 $(\boldsymbol{E}_l \times \boldsymbol{k}^l, \hat{\diamond})$。

(ii) 对每个 $c_1 \in \boldsymbol{E}_l$ 和 $c_{s-l+1}, \ldots, c_s \in \boldsymbol{k}$

$$\begin{aligned}\Phi_{c_1,c_{s-l+1},\ldots,c_s} &= T \circ \widehat{\Phi}_{c_1,c_{l+1},c_{s-l+1},\ldots,c_s} \circ T^{\circ -1} \\ &= T \circ \left(L_{c_1} \circ \overline{\Phi}_{c_1^{-1}c_{s-l+1},\ldots,c_1^{-1}c_s}\right) \circ T^{\circ -1} \\ &= \left(T \circ L_{c_1} \circ T^{\circ -1}\right) \circ \left(T \circ \overline{\Phi}_{c_1^{-1}c_{s-l+1},\ldots,c_1^{-1}c_s} \circ T^{\circ -1}\right)\end{aligned}$$

是 *Aczel-Jabotinsky* 微分方程 $(\mathrm{AJ}_s(H))$的唯一解，其中 $\overline{\Phi}_{c_1^{-1}c_{s-l+1},\ldots,c_1^{-1}c_s} \in \mathcal{S}_1^l(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H}))$。因此，所有 $(\mathrm{AJ}_s(H))$ 的解构成的群 $\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H))$ 是子群 $\mathcal{A}_T(\mathcal{L}_l)$ 和 $\mathcal{A}_T(\mathcal{S}_1^l(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H})))$ 的半直积 $\mathcal{A}_T(\mathcal{L}_l)\overline{\circledcirc}\mathcal{A}_T(\mathcal{S}_1^l(\mathrm{AJ}_s(\widetilde{H})))$，并且也同构于 $(\boldsymbol{E}_l \times \boldsymbol{k}^l, \hat{\diamond})$。

11. 示例与问题

可以看出，对于 $s \in \mathbb{N}, s \geqslant 3$ 和 $l \in |2, s-1|$，所有 $(\mathrm{AJ}_s(H))$ 的解组成的群 $\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_s(H))$ 不一定是交换的。事实上，在 $s \geqslant 2l+1$ 的情况下，它们同构于 $(\boldsymbol{E}_l \times \boldsymbol{k}^{l+1}, \overline{\diamond})$；而在 $s \leqslant 2l$ 的情况下，它们同构于 $(\boldsymbol{E}_l \times \boldsymbol{k}^l, \hat{\diamond})$，这些群也不一定是交换的。

例1。 假设 $l+1=s=3$。显然 $\boldsymbol{E}_2=\{-1,1\}$。我们来考虑一个族

$$\mathcal{F}=\left\{\Phi(x)=c_1x+c_2x^2+c_3x^3 : c_1\in\boldsymbol{E}_2, c_2,c_3\in\boldsymbol{k}\right\}.$$

我们证明，对于 $H(x)=x^3$，有 $\mathcal{F}=\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_3(H))$。事实上

$$\begin{aligned}(\Phi(x))^3&=\left(c_1x+c_2x^2+c_3x^3\right)^3=c_1^3x^3 &&\mod x^4,\\ \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}\cdot H(x)&=\left(c_1+2c_2x+3c_2x^2\right)\cdot x^3=c_1x^3 &&\mod x^4.\end{aligned}$$

因此 $\Phi(x)\in\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_3(H))$，由此可见不存在其他解。现在取某些 $c_1\in\boldsymbol{E}_2$ 和 $c_2\in\boldsymbol{k}^*$ 的 $\Phi_1(x)=c_1x+c_2x^2$、$\Phi_2(x)=-x$。则 Φ_1、$\Phi_2\in\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_3(H))$，并且

$$\begin{aligned}(\Phi_1\circ\Phi_2)(x)&=c_1(-x)+c_2(-x)^2=-c_1x+c_2x^2 &&\mod x^4,\\ (\Phi_2\circ\Phi_1)(x)&=-(c_1x+c_2x^2)=-c_1x-c_2x^2 &&\mod x^4.\end{aligned}$$

因此 $\Phi_1\circ\Phi_2\neq\Phi_2\circ\Phi_1$，所以 $\mathcal{S}(\mathrm{AJ}_3(H))$ 不是交换的。

例2。 固定 l、$s\in\mathbb{N}$、$l\geqslant 2$ 和 $l\leqslant s\leqslant 2l$。根据推论7，族

$$\mathcal{F}=\mathcal{L}_l\overline{\circledcirc}\mathcal{S}_1^l(\mathrm{AJ}_s(x^l))=\left\{c_1x+\sum_{j=s-l+1}^{s}c_1c_jx^j : c_1\in\boldsymbol{E}_l, c_{s-l+1},\ldots,c_s\in\boldsymbol{k}\right\}$$

是 $(\mathrm{AJ}_s(x^{l+1}))$ 的解群。群 $\mathcal{F}$ 显然同构于群 $(\boldsymbol{E}_l\times\boldsymbol{k}^l、\hat{\diamond})$，并且当 $\{1\}\subsetneq\boldsymbol{E}_l$ 时它不是交换的。因此，我们得到了一个非交换群的例子，它是交换群的半直积。

现在我们构造一个一般的例子。对于固定的 $l\geqslant 1$，令

$$(kl+1)!_l:=\prod_{j=0}^{k}(jl+1).$$

定义一族 $(F_t^{(l)})_{t\in\boldsymbol{k}}$,

$$F_t^{(l+1)}(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n-1)l+1)!_l}{n!}t^nx^{nl+1}\in\Gamma_1^s\quad\text{for } t\in\boldsymbol{k}. \tag{26}$$

运用 [3] 中定理 1 的证明所用的技巧，可以很容易地证明以下事实。

事实4. 设 $s\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$。族 $(F^{(2)})_{t\in\boldsymbol{k}}$

$$F_t^{(2)}(x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}t^{n-1}x^n\qquad \textit{for } t\in\boldsymbol{k}$$

是一个形式幂级数单参数群，这意味着

$$F_{t_1+t_2}^{(2)}=F_{t_1}^{(2)}\circ F_{t_2}^{(2)}\qquad \textit{for } t_1,t_2\in\boldsymbol{k}.$$

Then

(i) $(F_t^{(2)})_{t\in\boldsymbol{k}}$ 是 ***Aczél-Jabotinsky***形式微分方程 $(\mathrm{AJ}_\infty(x^2))$ 的解的交换群，其生成元为 $H(x)=x^2$,

(ii) 对于 $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 2$, 族

$$\widehat{\mathcal{F}} = \left\{ \widehat{F}^{(2)}_{t,c}(x) = x + \sum_{n=2}^{s-1} t^{n-1}x^n + \left(c + t^{s-1}\right)x^s : \ t, c \in \boldsymbol{k} \right\},$$

是 *Aczél-Jabotinsky*形式微分方程 $(\mathrm{AJ}_s(x^2))$ 的解的交换群，其生成元为 $H(x) = x^2$，对于有限的 $s \geqslant 3$。

注 1. 因此，我们构造出了生成元为 $H(x) = x^2$的 Aczél-Jabotinsky形式微分方程解群的显式形式。

问题 1. 能否构造生成元为 $\widetilde{H}(x) = x^{l+1} + \delta x^{2l+1}$的 Aczél-Jabotinsky形式微分方程解群的显式形式，其中 $\delta \in \boldsymbol{k}^*$ 且 $l \geqslant 1$?

问题 2. 对于任意 $l \geqslant 2$，由 (26) 定义的族 $(F_t^{(l+1)})_{t\in\boldsymbol{k}}$ 是否构成形式幂级数单参数群?

注 2. 在 $l \geqslant 2$ 且 $l+1 \leqslant s \leqslant 4l$ 的情况下，可以验证 $\pi_s^\infty\left((F_t^{(l+1)})_{t\in\boldsymbol{k}}\right)$是形式幂级数单参数群。我们还验证了[1)]，对于 $s \leqslant 15$和 $l \in \{2、3、4、5\}$，族 $\pi_s^\infty\left((F_t^{(l+1)})_{t\in\boldsymbol{k}}\right)$ 是形式幂级数单参数群。

特别地，我们于是得到

例 3. 该族

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \ &= \ \mathcal{L}_2\overline{\circledcirc}\mathcal{S}_1(\mathrm{AJ}_{15}(x^3)) = \mathcal{L}_2\overline{\circledcirc}\left(\pi_{15}^\infty\left((F_{c_3}^{(3)})_{c_3\in\boldsymbol{k}}\right)\circledcirc\mathcal{S}_1^2(\mathrm{AJ}_{15}(x^3))\right)\\ &= \Big\{c_1x + c_1c_3x^3 + \frac{3}{2}c_1c_3^2x^5 + \frac{5}{2}c_1c_3^3x^7 +\\ &\qquad \frac{35}{8}c_1c_3^4x^9 + \frac{63}{8}c_1c_3^5x^{11} + \frac{231}{16}c_1c_3^6x^{13} + c_1c_{14}x^{14} +\\ &\qquad\qquad c_1\left(\frac{429}{16}c_3^7 + c_{15}\right)x^{15} : c_1 \in \{-1,1\}, c_3, c_{14}, c_{15} \in \boldsymbol{k}\Big\}\end{aligned}$$

是 Aczél-Jabotinsky形式微分方程 $(\mathrm{AJ}_{15}(x^3))$ 的解的非交换群，其生成元为 $H(x) = x^3$。

注 3. 对于幂 x^{14} 和 x^{15}，其系数 c_1c_{14} 和 $c_1\left(\frac{429}{16}c_3^7 + c_{15}\right)$ 可以形式化地写为 $\widetilde{c}_{14}$ 和 $\widetilde{c}_{15}$，其中 $\widetilde{c}_{14}$、$\widetilde{c}_{15} \in \boldsymbol{k}$可取任意值。我们将它们写成现在的形式，是为了展示群 $\mathcal{F}$ 作为群的乘积的结构。

声明与披露。

经费支持。 W. Jabłoński的研究部分得到了 AGH UST应用数学学院法定任务经费以及科学与高等教育部补贴中的院长拨款支持。

利益冲突。作者声明不存在任何经济利益。

数据可用性。不适用。

1)使用计算机代数系统 ***Maxima***

参考文献

[1] W. Jabłoński, L. Reich, 关于形式幂级数环中的平移方程之解, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 75 (2005), 179-201. [2] W. Jabłoński, L. Reich, 关于到微分群的同态的形式 L_s^1 及其可扩展性, Result. Math. 47 (2005), 61-68.[3] Wojciech Jabłoński, 关于群的子半群的存在性 L_s^1 以及到 L_s^1 的同态的可扩展性, Aequationes Math. 74 (2007), 219–225. [4] W. Jabłoński, L. Reich, 关于形式幂级数环中平移方程解的标准形式, Math. Panon. 18/2 (2007), 169-187. [5] W. Jabłoński, L. Reich, 关于阿贝尔群到可逆形式幂级数群的同态, Publ. Math. Debrecen 73/1-2 (2008), 25-47. [6] L. Reich, 关于单变量形式幂级数环中迭代理论所涉及的一类微分方程, 收录于：数学讲义 1163。《迭代理论及其函数方程》，施普林格出版社，柏林、海德堡、纽约、东京，1985。[7] L. Reich, 关于交换形式幂级数族，《函数方程专题选集》。格拉茨研讨会论文集，研讨会于1986年5月22—23日举行。Grazer Math. Ber. 285-296 (1988), Ber. Nr. 294。

AGH科技大学应用数学学院，波兰克拉科夫密茨凯维奇街30号，邮编30-059电子邮件地址：wjablonski@agh.edu.pl

奥地利格拉茨卡尔·弗朗岑斯大学数学研究所，海因里希街36号，邮编A- 8010电子邮件地址：ludwig.reich@kfunigraz.ac.at