arXiv:2304.06792v3 [hep-th] 2 Nov 2024

UUITP-05/23

通过膜与极小解消进行量子化

Jian Qiu[a, b]

[a]物理与天文学系，乌普萨拉大学，

[b] 数学研究所，乌普萨拉大学，

乌普萨拉，瑞典

摘要

“膜量子化”是 Gukov 和 Witten [GW09]提出的一种量子化程序。我们将这一思想与倾斜理论和极小分解相结合，以此加以实现。通过这种方式，我们可以切实地计算作用于希尔伯特空间上的可观测量空间的变形量子化。我们将这一程序应用于 $\mathbb{P}^2$ 上广义 K¨ahler 结构背景下的若干量子化问题。我们的方法与 Bischoff 和 Gualtieri [BG22]的方法有所不同，并与之互为补充。此外，我们还受益于一项重要的技术工具：由 Barmeier 和 Wang 在 [BW20] 开发的 Maurer-Cartan 方程组合判据。

目录

1 引言 **2**

2 设定 **4**

3 双模分解与变形量子化 **7**
3.1 巴尔分解.7 3.2 变形量子化.8

4 最小分解 10

5 Chouhy-Solotar 分解 **14**
5.1 约化系统.14 5.2 $T^*\mathbb{P}^2$ 的分解.17

6 双模分解之间的映射 19
6.1 同伦传递.22 6.2 组合变形量子化.23

7 预备示例 25
7.1 A_1 .25 7.2 A_n .30 7.3 D_4 .31

8 $T^*\mathbb{P}^2$ **32**
8.1 动机：广义 K¨ahler 结构.32 8.2 $T^*\mathbb{P}^2$ 的霍赫希尔德上同调.33 8.3 表示 HH^2 的显式余循环.35

一份 $HH^2(T^*\mathbb{P}^2)$ **的显式余链代表元** **40**
A.1 $T^*\mathbb{P}^2$ 上的一些层上同调群汇集.40 A.2 使用极小分解显式计算 HH^2 .42

1 引言

设 (M^{2n}, ω) 是一个辛流形，例如可以是某个力学系统的相空间。对 (M, ω) 进行量子化，意指构造一个希尔伯特空间 H，并将 M 上的函数提升为算子$f \to \hat{f}$，使其作用于 H。这样一来，泊松括号 $\{f, g\}$ 就会提升为算子 $[\hat{f}, \hat{g}]$ 的交换子。

希尔伯特空间通常可以通过几何量子化来构造，这种方法适用于相当广泛的情形。所需条件是 $[\omega/(2\pi\hbar)]$ 为整类，随后便存在一个曲率为 $F = i\omega/(2\pi\hbar)$ 的线丛 L。下一步是选择一种极化，也就是 M 上的拉格朗日叶状结构。简单来说，这种叶状结构将 M 的一半坐标指定为坐标，另一半指定为动量。希尔伯特空间 H 将由 L 的截面组成，这些截面沿叶状结构的叶子协变常值

。这会产生沿着一组特定叶子（称为“玻尔-索末菲叶”）具有 δ函数支撑的截面，因此它们相当奇异。当 M 是 K¨ahler 时，可以选择 K¨ahler 极化，并将 H 设为 L 的全纯截面。若进一步假设 M 紧致，这类截面的维数有限，因此希尔伯特空间的维数也有限。最优雅的示例或许是完全旗流形 G/B （其中 G 是一个紧李群，而 B 是其 Borel子群）。$[\omega/2\pi\hbar]$ 的整性相当于选择一个支配权，由此得到的希尔伯特空间给出 G 的各种最高权表示。这就是著名的 Borel-Weil-Bott定理的内容。

然而，将 M 上的函数提升为算子要困难得多，这主要是由于正规序歧义。只有在非常简单的情形下，并且对于受限类别的函数，我们才有将函数映射为算子的程序。膜量子化程序旨在为解决这一问题提供一个框架。其主要构造是将 M 嵌入到一个维数加倍的流形（M^{2n}，ω）$\hookrightarrow$(X^{4n}，Ω) 中，其中 Ω 是一个全纯辛形式，且 Re $\Omega|_M = \omega$。这一过程称为“复化 M”，其含义是，我们希望对其进行量子化的 M 上的函数应当能够解析延拓为 X 上的全纯函数。

[GW09] 中的方案是研究 X 上的 A-模型，其辛形式为 Im Ω，该模型会使 X 上全纯函数的乘法规则发生变形。然而，除了 A-模型中的拉格朗日膜，还必须考虑余各向同性膜 [KO03], ，而对后者的研究远不及对拉格朗日膜的研究。 [BG22], 中曾提出一个颇具吸引力的方案，讨论这些膜之间的同态空间；另请参见 [LY23] 中一些近期相关工作。但本文暂且搁置 A-模型，转而使用变形量子化来量子化全纯函数。必须区分变形量子化与量子化：前者通常不会给出真正的变形，因为乘法最终会成为关于 $\hbar$ 的形式幂级数。即使该级数收敛，也不会有关于 $\hbar$ 的整性条件。但正如本文的示例所示，我们确实能从变形量子化中得到整性条件。

我们前面提到，待量子化的实函数现在被延拓为X上的全纯函数。这是一项巨大的优势，因为相比实函数，我们对全纯函数有更多可用的工具。此外，我们不选择对结构层 O_X作变形，而是选择对 X上的整个相干层范畴作变形。通过做超出此处要求的事情，我们实际上做得更少。这是因为在许多情况下，我们可以利用倾斜理论，为 $D^b(X)$提供一种简洁的 A_∞-范畴模型。这里的背景是 [Low08]。读者可在第7.3节看到，我们通过导出范畴可以毫不费力地得到这种变形，然而它对应于原代数 O_X的一个极其复杂的变形。

本文其余部分将沿着这一思路展开。我们来强调一个主要结果。取一个 3维向量空间 V，并设 $X = T^*\mathbb{P}(V)$（简而言之，记为 $T^*\mathbb{P}^2$）。其全纯函数为 $H^0(X) := H^0(X, \mathsf{O}_X)$，由 $H^0(\mathbb{P}(V)\ T\mathbb{P}(V)) = (V \otimes V^*)^{tf}$($tf$表示无迹)生成。我们将对这个代数进行变形。空间 X 具有一个全纯辛形式 Ω_s ，它依赖于一个参数 s。特别地，当 $s = 1$时，(X，Ω_1) 是定义在 $\mathbb{P}(V)$ 上的全纯辛群胚，并出现在 [BGZ18]) 中。通过对 (X，Ω_s) 进行变形量子化，并结合 Kodaira-Spencer 变形，我们得到 X 上全纯函数代数的三参数变形。具体而言，我们将 $V \otimes V^*$ 的基记为 X_i^j，

$i,\ j=1,\ 2,\ 3$，其中 $\mathrm{Tr}[X]=\sum_p X_p^p=0$。我们得到一个变形代数

$$
\begin{aligned}
&X_p^p = t+\frac{1}{2}s, \quad X_i^p \star X_p^l = (t-\frac{3}{2}s)X_i^l,\\
&X_i^j \star X_k^l = q^{j<k}q^{l<j}q^{k<l}X_i^l \star X_k^j - s(\delta_k^j X_i^l - q^{j<k}q^{l<j}X_i^j\delta_k^l)\\
&X_i^j \star X_k^l = q^{j<k}q^{k<i}q^{i<j}X_k^j \star X_i^l - s(\delta_k^j X_i^l - q^{j<k}q^{k<i}\delta_i^j X_k^l),\\
&X_i^j \star X_k^l = q^{j<k}q^{k<i}q^{l<j}q^{i<l}X_k^l \star X_i^j - s(\delta_k^j X_i^l - q^{j<k}q^{k<i}q^{l<j}\delta_i^l X_k^j).
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

第 2 行和第 3 行推出第 4 行。进一步地，$q^{i<j}$ 定义为

i,j	12	23	31	21	32	13	$i=j$
$q^{i<j}$	q	q	q	q^{-1}	q^{-1}	q^{-1}	1

例如

$$
\begin{aligned}
&X_1^p \star X_p^1 = (t-\frac{3}{2}s)X_1^1, \quad X_p^1 \star X_1^p = (t+\frac{3}{2}s)X_1^1 - s(t+\frac{1}{2}s)\\
&X_1^2 \star X_2^3 = q^{-3}X_2^3 \star X_1^2 - sX_1^3,\\
&X_1^2 \star X_2^1 = X_2^2 \star X_1^1 - sX_1^1,\\
&X_2^1 \star X_3^2 = q^{-3}X_3^2 \star X_2^1 + sq^{-3}X_3^1.
\end{aligned}
$$

当 $s=1$，且 (X,Ω_1) 是一个辛群胚，因此我们预期 $H^0(X)$ 上存在余乘法和反演映射。这将在后续工作中展开。

最后，简要谈谈我们的方法的适用范围。关键在于倾斜对象（将在第 3.2 节中解释），它有助于构造待变形范畴的一个小模型。因此，人们或许可以将这种方法应用于某些锥状托里克 Calabi–Yau 流形，其倾斜对象与二聚体模型相关；也可以应用于某些 Gorenstein 奇点，其奇点范畴等价于矩阵分解范畴的稳定范畴。

致谢：我很高兴能感谢 Severin Barmeier 耐心解答我的许多技术问题。我还想特别致谢他与 Zhengfang Wang [BW20], 的合作；没有这项工作，本文便不可能完成。我也感谢 M. Gualtieri 与我讨论，并与我分享他关于膜量子化的想法。

2 背景

设 (M,ω) 是一个 K¨ahler 流形。我们假设存在一个嵌入 $(M,\omega) \to (X,\Omega)$，其中 Ω 是一个全纯辛形式，且 $\mathrm{Re}\,\Omega|_M=\omega$ and $\mathrm{Im}\,\Omega|_M=0$。应将 Ω 视为 ω 的解析延拓。接着考虑 A-模型在 X 上，其辛形式为 $\mathrm{Im}\,\Omega$，其中 M 是一张拉格朗日膜。还需要考虑余各向同性膜。我们只需要填充空间的余各向同性膜，其数据由一个线丛 L 及其曲率 iF 构成，并满足

$$J = (\mathrm{Im}\,\Omega)^{-1}F$$

视为映射 $TX \to TX$ 满足 $J^2=-1$。在这些膜中，我们将考虑典范余各向同性膜 B_{cc}，其线丛是平凡的 $\mathsf{L}\sim\mathsf{O}_X$（且 F 是恰当的）。

预期从 B_{cc} 出发并终止于 B_{cc} 的开弦，其希尔伯特空间为 $H^\bullet(X, \mathsf{O}_X)$；而一端位于 B_{cc} 、另一端位于 M 的开弦，其希尔伯特空间为 $H^\bullet(X, E)$，其中 E 是附加到 M 上的向量丛或层。全纯函数通过弦的串接自然地作用于 $H^\bullet(X, E)$，如图 1 所示。上述许多内容都是人们所预期的

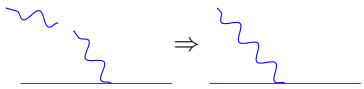


图 1：拼接弦给出了 O_X 对 E 的作用。

弦理论，但对于下面的讨论，要理解通过膜的量子化框架，并不需要了解弦理论的内部运作。相反，

在本文中，弦是代数 A 作为投射 A-A 双模的分解的同义词。

这里的代数 A 可以是交换代数、代数层（例如 O_X），也可以是箭图代数。这一说法包含了路径空间和对角线的消解的概念。接下来我们会逐步展开这些概念。

现在我们希望变形代数结构 O_X。如前所述，我们不会采用 A-模型这条路线，因为我们没有能力进行此类计算。作为替代方案，我们将采用变形量子化 [Kon01]。首先，无穷小变形由霍赫希尔德上同调群 $HH^2(X)$ 控制，根据霍赫希尔德-科斯坦特-罗森伯格（HKR）定理 [HKR62]，它同构于

$$HH^2(X) = H^2(X, \mathcal{O}_X) \oplus H^1(X, TX) \oplus H^0(X, \wedge^2 TX). \tag{2.1}$$

严格来说，HKR 证明的这一结论适用于光滑仿射簇，因此上面只有最后一个求和项 ˇ。其他两个求和项可由切赫覆盖或霍奇谱序列论证得到，参见 [Swa96]。(2.1) 中的第二个求和项控制无穷小 Kodaira-Spencer 型变形，而最后一个求和项 $H^0(X, \wedge^2 TX)$ 表示全纯双向量场，全纯泊松结构就蕴含其中。我们目前先聚焦于这些结构。设 Π 是一个全纯泊松张量，它导出 O_X 上交换乘积的一阶变形。

$$f \star g = fg + \hbar\{f, g\}_\Pi + \cdots .$$

为了获得完整的高阶变形，需要求解所谓的 Maurer-Cartan（MC）方程，我们将在后续章节中回顾该方程。但 O_X 是一个过于庞大的代数，而作为 HH^2 代表的 Π 也过于难以驾驭，因此我们无法求解 MC 方程。

相反，我们来处理一个更广泛的问题：变形相干层范畴。为此，我们将采用倾斜理论，为 $D^b(X)$ 构造一个更小的模型。简言之，对于某个小得多的代数 Λ，倾斜理论给出了导出等价 $D^b(X) \simeq D^b(\mathrm{mod}_\Lambda)$。为得到这一等价，考虑乘积 $X \times X$，其中 Δ 是对角线。令 p, q 为到第一和第二X的投影，则以下是 $D^b(X)$ 中的恒等函子

$$F \to Rp_*(q^* F \otimes^L \mathcal{O}_\Delta), \quad F \in D^b(X). \tag{2.2}$$

简单来说，(2.2) 是下式的导出范畴版本：$\int \delta(x-y) f(y) dy = f(x)$，其中 O_Δ 扮演狄拉克δ函数的角色，而推前 Rp_* 取代了对 y的积分。但要计算导出张量积

与 O_Δ，需要将 O_Δ 作为 $\mathsf{O}_{X\times X}$-模进行分解。这正是我们先前关于路径空间和双模分解的论述发挥作用之处：直观地说，我们不是像 $\delta(x-y)$ 那样严格施加 $x=y$，而是通过一条路径连接 x 与 y，以同伦的方式施加 $x=y$。巴复形（见第 3.1 节）以代数方式实现了路径空间这一思想。另一方面，将 O_Δ 视为 $\mathsf{O}_{X\times X}$ 模，相当于将 O_X视为 O_X-双模；而将 O_X作为 O_X-双模进行分解的需求，又让我们回到了巴复形。因此可以说，弦在几何上为我们提供了一种分解，而在实践中，我们可以采用代数方法，并选取任意一种自己偏好的双模分解。理想情况下，这样的分解将是由某些向量丛构成的复形（它们构成倾斜对象）。于是，应用 (2.2) 的结果表明，任意 F 都可表示为上述向量丛的扩张。

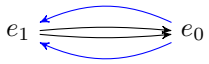
假设倾斜过程已经完成，并且我们得到了倾斜对象 T。那么，代数 $\Lambda=\mathrm{End}(T)$ 就是等价关系 $D^b(X)\simeq D^b(\mathrm{mod}_\Lambda)$ 中所涉及的代数，而 Λ 的巴复形可以被视为 $D^b(X)$ 的一个更精简的 A_∞- 模型（参见备注 3.1）。这样，我们就能够在 HH^2 中找到 Π 的一个更便于处理的代表元，并在 Λ 上进行变形量子化。此外，我们还将在同一过程中纳入式 (2.1) 的中间求和项，即 Kodaira-Spencer 型变形。

让我们总结一下我们将实施上述步骤的示例类型。在 [GW09] 中反复出现的示例是 S^2，其表述为

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \tag{2.3}$$

配备标准的 K¨ahler 形式 $\omega=dx\wedge dy/z$。通过将 x,y,z 视为复坐标而非实坐标，同一个方程便定义了 $\mathbb{C}^3$ 的一个子簇，其拓扑结构为 $X=T^*S^2$。事实上，同一个 2-形式 $dx\wedge dy/z$ 就是 X上的典范全纯 2-形式。参数 r^2 控制着$\omega=\mathrm{Re}\,\Omega$ 的大小，因此预计它需要满足某些整性条件。

作为预备示例，我们改为令 $r^2=0$ above，最终得到一个 A_1-奇点 $x^2+y^2+z^2=0$。为简单起见，我们作变量替换，并将方程写成 $xy-z^2=0$。代数 $R=\mathbb{C}[x,y,z]/(xy-z^2)$ 的 Auslander-Reiten 理论众所周知，其箭图（带关系）为



.

我们将在这个代数上进行变形量子化。式 (2.3) 中的半径参数 r^2 将作为 Kodaira-Spencer 型变形纳入变形量子化。更妙的是，我们将得到相同的 r^2 整性条件，这在变形量子化中相当罕见。

接下来，我们将转向本工作的主要应用。在流形 M 上的广义 K¨ahler 结构背景下，自然会有一个全纯泊松结构 π。随后，为了编码广义 K¨ahler 势，需要将 π 积分为一个全纯辛群胚 [BGZ18], ，记作 (X,Ω)。在 X 内， M 嵌入为单位空间；这是 Gukov 和 Witten 的“复化” $M\hookrightarrow X$ 所具有的另一个自然背景。我们还需要用一个二形式 F 对 Ω 进行变形：$\Omega\to\Omega+tF$，它用于变形 X 上的复结构，并最终导出 M 上的广义 K¨ahler 结构。我们将对 (X,Ω) 应用变形量子化，以变形 O_X，并在 $M=\mathbb{P}^2$ 的特殊情形下纳入变形 F。在文献 [BG22], 中，作者考察了所有环面曲面。此外，该文作者还提出了 A-膜的定义，以计算此类膜的同态空间。相比之下，我们的研究立足于 B 侧，主要工具是更为熟悉的同调代数和变形量子化。我们希望本工作的结果能与该文的结果互为补充。

3 双模分解与变形量子化 n

无论是倾斜理论还是代数变形，我们都需要将代数 A 作为其自身上的双模进行分解。本节将回顾巴复形的基础知识以及一些相关内容。我们假设读者熟悉 L_∞-结构。

我们首先说明所采用的设定：除了 A 是 k-代数这一熟悉的情形外，我们还需要考虑一些箭图代数，它们是某个倾斜对象的自同态代数。令 Q 为一个箭图，$Q_0 = \{e_i\}$ 为节点集合， Q_1 为长度为 1 的路径集合。沿用 [BK99], 的记号，令 $S = k\mathrm{h}e_i\mathrm{i}$ 为由幂等元生成的代数。由于 Q_1 是一个 S-双模，我们可以考虑张量代数。

$$\Gamma = TQ_1 = \bigoplus_{n\geq 0} \underbrace{Q_1 \otimes_S \cdots \otimes_S Q_1}_{n},$$

也就是说， Γ 是 Q的路径代数。令 R 为关系的双边理想，并令 $\Lambda = \Gamma/R$。

3.1 Bar分解

要将 Λ 作为其自身的双模进行解消，可以始终使用 bar（或 Hochschild）复形 $\mathsf{B}_\bullet \to \Lambda$。尽管这种方法效率很低，但它总是有效，并且具有许多额外结构，下面将对此进行回顾。

在次数 n，我们有

$$\mathsf{B}_n = \Lambda \otimes \underbrace{\Lambda[1] \otimes \cdots \otimes \Lambda[1]}_{n} \otimes \Lambda, \qquad \otimes := \otimes_S.$$

我们还使用巴 记号，并将 $a_0[a_1|\cdots|a_n]a_{n+1}$ 记作 B_n 的一个元素。微分读作 s

$$\begin{aligned} \partial a_0[a_1|\cdots|a_n]a_{n+1} &= a_0a_1[a_2|\cdots|a_n]a_{n+1} - a_0[a_1a_2|a_3|\cdots|a_n]a_{n+1} \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n-1}a_0[a_1|\cdots|a_{n-2}|a_{n-1}a_n]a_{n+1} + (-1)^n a_0[a_1|\cdots|a_{n-1}]a_na_{n+1}. \end{aligned}$$

注意，由于张量取在 S 上， a_i 是可复合路径。

巴复形有一个作为 左 Λ-模映射的链同伦： $k : \mathsf{B}_i \to \mathsf{B}_{i+1}$

$$\begin{aligned} k([a_1|\cdots|a_i]b) &= (-1)^{i-1}[a_1|\cdots|a_i|b] \\ \{k, \partial\} &= 1, \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中若 b h 当长度为 0 时， k 被设为零。也可以定义 k的右模版本。

设 M 为一个左 Λ-模，那么张量积

$$\mathsf{B}_\bullet \otimes_\Lambda M$$

是 M的一个分解。将 M 视为一张膜，并将张量到其上的 $\mathsf{B}_\bullet$ 视为一条终止于膜上的路径，也不无裨益。上文 k 的右模版本给出了该复形（作为一个 S-模）的收缩，这体现了将路径收缩至其端点的可能性。

我们将余链复形记为 $\mathsf{B}^n := \hom_{\Lambda^e}(\mathsf{B}_n, \ \Lambda)$，其中下标 $_{\Lambda^e}$ 表示这些映射是双模映射。令 δ 表示由 $\mathsf{B}_\bullet$上的 ∂ 在 $\mathsf{B}^\bullet$ 上诱导的微分。存在一个自然元素$m \in \mathsf{B}^2$, , 它将 $1[a|b]1$ 映射到 ab。由于 Λ 中的乘法是结合的，很容易验证$\delta m = 0$。

该余链复形具有分次李代数的结构，并配备 Gerstenhaber括号。为定义该括号，首先定义两个余链 $f \in B^m$ 和 $g \in B^n$之间的复合 $\circ_i$

$$f \circ_i g([a_1|\cdots|a_{m+n-1}]) := f([a_1|\cdots|a_{i-1}|g([a_i|\cdots|a_{i+n-1}])|a_{i+n}|\cdots|a_{m+n-1}])$$

也就是说，将 g 的结果代入 f的 i^{th} 槽位。李括号为

$$[f,g] = f\circ g - (-1)^{(m-1)(n-1)} g\circ f, \quad f\circ g = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{(n-1)(i-1)} f\circ_i g. \tag{3.2}$$

例如，对于 $f \in B^1$ 和 $g,\ h \in B^2$，则

$$[f,g] = f\circ_1 g - g\circ_1 f - g\circ_2 f,$$
$$[g,h] = g\circ_1 h - g\circ_2 h + (g \leftrightarrow h).$$

根据这个定义，也很容易验证 $[m,m]=0$，因此 $[m,-]$是幂零的，因而是一个微分。它是微分 δ: $[m,f] = -\delta f$ 的负值。

备注 3.1. 我们此前强调过，这里的张量积取在 S上，因此 B 由 Λ中的可复合路径构成。可以将 Λ 视为一个范畴，其中幂等元 e_i 是对象，而路径是态射。那么，B_n由 n个可复合态射构成，而 $\mathrm{B}^n = \mathrm{hom}_{\Lambda^e}(\mathrm{B}_n, \Lambda)$ 给出了 n个态射的复合。我们有 $m \in \mathrm{B}^2$ 和 $[m,m]=0$，由此得到复合的结合律。但更一般地，设$g \in \mathrm{B}^\bullet$ 且满足 $[g,g]=0$，那么 g 赋予其 Λ 一个 A_∞-范畴结构，其变形由霍赫希尔德上同调 $HH^\bullet(\Lambda)$ [Low08]控制。特别地，当 Λ 是一个由倾斜对象导出的箭图代数，即 $\Lambda = \mathrm{End}_{D^b(X)}(T)$时，我们便得到 $D^b(X)$ 作为一个 A_∞-范畴的变形。

3.2 变形量子化

对乘法 $m \to m + m'$ 进行变形，同时保持结合律，意味着要求$[m+m', m+m'] = 0$。记住 $[m,\bullet] = -\delta\bullet$, 我们得到

$$-\delta m' + \frac{1}{2}[m',m'] = 0, \tag{3.3}$$

这称为 Maurer-Cartan（MC）方程。由于它具有非线性，求解并不容易，但至少可以尝试幂级数解。将变形写作 $m \to m + \hbar m_1 + \hbar^2 m_2 + \cdots$，并按 $\hbar$ 的阶展开 MC 方程

$$\begin{aligned} &\delta m_1 = 0, \\ &\delta m_2 = \frac{1}{2}[m_1, m_1], \\ &\cdots \end{aligned} \tag{3.4}$$

我们发现，甚至在第二步时，就可能无法找到 m_2: 尽管 $[m_1,m_1]$ 是 δ-闭的，但显然并非恰当的。

上述问题的解由 Kontsevich [Kon03] 给出。为便于讨论，我们假设 X 是一个光滑仿射簇。这里起核心作用的是 Λ 的霍赫希尔德上同调，其定义如下:

$$HH^n(\Lambda) := \mathrm{Ext}^n_{\Lambda^e}(\Lambda, \Lambda). \tag{3.5}$$

若使用巴尔分解，则 HH^n 是 $\mathsf{B}^\bullet$ 的 n^{th} 上同调。HH^2 中的一个元素（更准确地说，是它在 B^2 中的代表元）给出式（3.4）中的 m_1，即乘法 m 的一阶变形。HKR 定理表明，$HH^2(X)$ 与 $H^0(X, \wedge^2 TX)$ 同构（对于仿射 X）。因此，双向量场 π 导出一个变形 m_1^π

$$m_1^\pi(f,g) = \{f,g\}_\pi.$$

这个特定的 m_1^π 有什么特别之处，使得 $[m_1^\pi, m_1^\pi]$ 是精确的？已证明存在一个 L_∞-态射（见 [Kon03] 的第 4.6.2 节）

$$\wedge^\bullet TX \rightsquigarrow \mathsf{B}^\bullet(\Lambda). \tag{3.6}$$

请注意，上述两侧都是微分分次李代数，然而它们之间的映射是一个 L_∞-映射，因此包含非线性修正。更重要的是，在此映射下，Maurer-Cartan 元素保持不变。现在可以从 X 上的一个全纯泊松结构 π 出发，$\partial\pi = 0 = [\pi,\pi]$ 这一事实意味着 π 是一个 MC 元素。在 L_∞-映射下，它转化为一个 MC 元素 $m'(\pi) \in \mathsf{B}^2$。因此，无需逐阶求解 (3.4)，而只需构造 L_∞-映射 (3.6)。完成这一步后，所得的 $m + m'(\pi)$ 给出一个新的结合乘法。m' 中的首阶变形恰好对应于 π，因此也就是泊松括号。

L_∞-映射的详细公式难以计算，原因仍然是 $\mathsf{B}^\bullet$ 的规模过大。为了解决这一问题，我们转而采用一种规模更小的双模分解 $\mathsf{P}_\bullet \to \Lambda$。我们将在第 4 节和第 5 节中使用两种这样的分解，但在此之前，我们先简要说明 $\mathsf{P}_\bullet$ 如何为我们提供帮助。

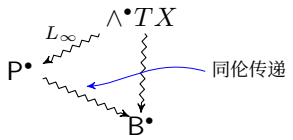
由于 $\mathsf{P}_\bullet$ 和 $\mathsf{B}_\bullet$ 都是 Λ 的投射分解，因此必定存在双模映射

$$\mathsf{P}_\bullet \underset{G_\bullet}{\overset{F_\bullet}{\rightleftarrows}} \mathsf{B}_\bullet \tag{3.7}$$

我们将看到，这些映射满足

$$G_nF_n = 1, \quad F_nG_n = 1 - (h_{n-1}\partial + \partial h_n),$$

其中 $h_n : \mathsf{B}_n \to \mathsf{B}_{n+1}$ 是双模链同伦。我们稍后将构造同伦 h_n，并用 $h^\bullet$ 表示上链复形的映射 $\mathsf{B}^\bullet \to \mathsf{B}^{\bullet-1}$。现在，我们通过 $\mathsf{P}^\bullet$ 将困难的 L_∞-映射 $\wedge^\bullet TX \rightsquigarrow \mathsf{B}^\bullet$ 分成两部分。



这样，$P^\bullet$ 与 $B^\bullet$ 之间的映射就是一种更为熟悉的同伦传递，其公式通过对某些树求和给出。$\wedge^\bullet TX$ 与 $P^\bullet$ 之间的映射则并不直接。不过，我们现在可以选择在 $P^\bullet$中求解 MC 方程；它小得多，因此我们可以借助一些有效的组合工具快速得到 MC 元素。

4 极小分解

我们在上文看到，计算 $HH^\bullet(\Lambda)$需要将 Λ 视为其自身上的双模来求分解。巴复形对此来说过于庞大，因此本节将回顾 [BK99]中的极小分解。

首先，我们解释“最小”一词。设 $(A,\ \mathfrak{m})$ 是一个局部环，那么当且仅当 $\partial P_n \subset \mathfrak{m}P_{n-1}$ 时，分解 $P_\bullet \to M$ 是最小的。对于分次代数 $A = \oplus_{n\geq 0}A_n$，我们要求 $\partial P_n \subset A_{>0}P_{n-1}$。在这种情况下，如果 A 的整体维数是有限的，那么分解的长度就是整体维数（参见 [Eis95] 第 19.1 节）。

分次情形对我们尤为重要，因为我们的所有箭图代数都是齐次的，也就是说，关系理想 R 是一个齐次理想。我们重申一下设定： $\Gamma = TQ_1$ 是长度为 1 的路径在 $S = k\mathbf{h}e_i\mathbf{i}$ 上的张量代数， J 是由非零长度的路径生成的理想， $R \subset J$ 是齐次理想，且 $\Lambda = \Gamma/R$。 [BK99] 的定理 7.2 给出了如下分解。

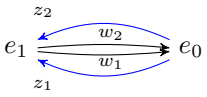
$$\cdots \to \Lambda \otimes_S \mathsf{T}_3 \otimes_S \Lambda \to \Lambda \otimes_S \mathsf{T}_2 \otimes_S \Lambda \to \Lambda \otimes_S \mathsf{T}_1 \otimes_S \Lambda \to \Lambda \otimes_S \Lambda \to \Lambda \to 0. \tag{4.1}$$

(4.1) 中的各项为

$$\mathsf{T}_1 = Q_1,\quad \mathsf{T}_2 = \frac{R\cap J^2}{JR+RJ},\quad \mathsf{T}_3 = \frac{JR\cap RJ}{R^2+JRJ},\quad \mathsf{T}_4 = \frac{R^2\cap JRJ}{JR^2+R^2J},\cdots$$

严格来说，T_3是 $JR\cap RJ$中 R^2+JRJ的 S-双模补空间，而 T_4是 $R^2\cap JRJ$中 JR^2+R^2J的 S-双模补空间。由于代数 S 是可分的，因此可以作出这样的分裂，所以我们假设已经选定了一个分裂。

例 4.1 考虑我们一直使用的 A_1 奇点示例



, (4.2)

其关系为

$$R = \langle e_0 w_i z^i e_0, e_1 z^i w_i e_1\rangle.$$

请注意，我们的箭头方向是从右向左，例如， $e_1 z^1 w_2 e_1$ 表示 $e_1 \overset{z^1}{\leftarrow} e_0 \overset{w_2}{\leftarrow} e_1$。这是一个整体维数为 2 的代数，无需计算 T_3, ，其分解为

$$\begin{aligned} 0 \to \Lambda e_0 \otimes w_i z^i \otimes e_0\Lambda \bigoplus \Lambda e_1 \otimes z^i w_i \otimes e_1\Lambda \to \\ \to \Lambda e_1 \otimes z^i \otimes e_0\Lambda \bigoplus \Lambda e_0 \otimes w_i \otimes e_1\Lambda \to \Lambda e_0 \otimes e_0\Lambda \bigoplus \Lambda e_1 \otimes e_1\Lambda \to \Lambda \to 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

微分如下所示。

$$\begin{aligned} &\partial(e_0 \otimes w_i z^i \otimes e_0) = e_0 w_i \otimes z^i \otimes e_0 + e_0 \otimes w_i \otimes z^i e_0,\\ &\partial(e_1 \otimes z^i w_i \otimes e_1) = e_1 z^i \otimes w_i \otimes e_1 + e_1 \otimes z^i \otimes w_i e_1,\\ &\partial(e_1 \otimes z^i \otimes e_0) = e_1 z^i \otimes e_0 - e_1 \otimes z^i e_0,\\ &\partial(e_0 \otimes w_i \otimes e_1) = e_0 w_i \otimes e_1 - e_0 \otimes w_i e_1,\\ &\partial(e_a \otimes e_a) = e_a,\quad a = 0, 1. \end{aligned} \tag{4.4}$$

事实上，箭图代数的双模分解的前两步看起来完全相同：T_1 项由长度为 1 的路径张成，其微分

$$\partial(1 \otimes p \otimes 1) = p \otimes 1 - 1 \otimes p.$$

对于 T_2 项，我们选取关系 R 的一个生成集。对于其中一个生成元 $p_1 \cdots p_n \in R$，微分作用为分裂

$$\partial(1 \otimes p_1 \cdots p_n \otimes 1) = p_1 \cdots p_{n-1} \otimes p_n \otimes 1 + p_1 \cdots p_{n-2} \otimes p_{n-1} \otimes p_n + \cdots + 1 \otimes p_1 \otimes p_2 \cdots p_n.$$

配备 w 有了这一点信息，我们也给出 A_n 和 D_4 Kleinian 奇点的示例

示例 4.2. A_n 奇点定义为轨迹 $f = xy - z^{n+1} = 0$。根据 [Tju69], , 它具有一个 n 维的局部半普适平坦变形族，其基为

$$\frac{\mathbb{C}[x, y, z]}{\langle f, \partial_x f, \partial_y f, \partial_z f \rangle}.$$

因此，变形可写为

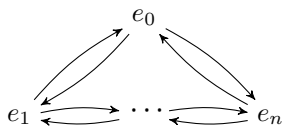
$$f \to f_t = xy - z^{n+1} - t_0 - t_1 z - \cdots t_{n-1} z^{n-1}.$$

对于一般的 t，由 f_t 切出的曲面 X_t 是光滑的，其实截面 M_t 也是如此。将倾斜理论应用于 $\{f = 0\}$，将得到同一奇点的非交换分解。之后进行变形量子化，可视为对复化 $M_t \hookrightarrow X_t$ 进行膜量子化。

我们简要说明一下如何得到倾斜对象；更多细节可见 Wemyss 的精彩讲义 [Wem12]。令 A 为代数 $\mathbb{C}[x, y, z]/(xy - z^{n+1})$，并考虑它的理想 $I_p = (x,\ z^p)$，其中 $p = 1,\ \cdots\ n$。在 I_p 和 A 之间，我们有如下映射

$$A \underset{}{\overset{z}{\rightleftarrows}} (x, z) \qquad (x, z^p) \overset{z}{\rightleftarrows} (x, z^{p+1}) \qquad (x, z^n) \underset{x}{\overset{y/z^n}{\rightleftarrows}} A \tag{4.5}$$

我们将这些模和映射放入以下箭图中



(4.6)

其中 e_0 对应于 A，而 e_p 对应于 I_p。由 (4.5) 可得，这些映射之间有如下关系

$$(e_i \leftarrow e_{i+1} \leftarrow e_i) = (e_i \leftarrow e_{i-1} \leftarrow e_i). \tag{4.7}$$

读者可以自行写出双模分解。

示例 4.3. 为了有所变化，我们也考虑 D_4 奇点：$X = \{(u, v, w) \in \mathbb{C}^3 | f = v^2 - u^2 w + 4w^3 = 0\}$。要得到箭图还需要做一些工作。我们回顾一下，由 $f = 0$ 定义的奇点也可以通过将 $\mathbb{C}^2$ 对 $SU(2)$ 的一个有限子群取商得到，该子群称为 BD_4 （二元 D_4）。它具有生成元

$$T = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

该群有四个非平凡不可约表示，其中一个记为 R，是 $SU(2)$ 的基本表示。如果我们将 R 的两个基向量记为 $|+\mathrm{i}$ 和 $|-\mathrm{i}$，那么其余三个一维表示具有基

$$R_1:\ |+-\rangle+|-+\rangle,\quad R_2:\ |++\rangle+|--\rangle,\quad R_3:\ |++\rangle-|--\rangle,$$

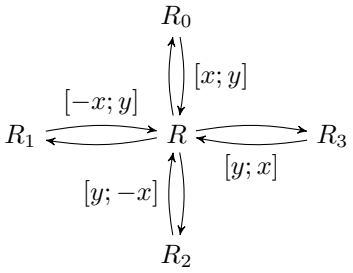
而 $\mathbb{C}^2$ 的坐标（x，y）属于表示 R^*。一个自然的研究对象是由 $G=BD_4$ 保持不变的多项式集合。这些多项式由以下元素生成

$$u=x^4+y^4,\quad v=x^5y-y^5x,\quad w=x^2y^2$$

它们恰好满足关系 $f=v^2-u^2w+4w^3=0$。我们也可以考虑每个不可约表示对应的相对不变量（$\mathbb{C}[x,y]\otimes R_i)^G$。我们在此汇总结果

$$\begin{aligned}
&(\mathbb{C}[x,y]\otimes R_1)^G=\langle xy,x^4-y^4\rangle,\\
&(\mathbb{C}[x,y]\otimes R_2)^G=\langle x^2+y^2,x^3y-y^3x\rangle,\quad (\mathbb{C}[x,y]\otimes R_3)^G=\langle x^2-y^2,x^3y+y^3x\rangle,\\
&(\mathbb{C}[x,y]\otimes R)^G=\langle\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x^5\\y^5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x^2y\\-xy^2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y^3\\-x^3\end{bmatrix}\rangle.
\end{aligned}$$

令 R_0 为平凡表示，我们将这些模排列成仿射 Dynkin 图 D_4



(4.8)

其中，从 $R_{0,\ 1,\ 2,\ 3}$ 到 R 的映射已标注出来。映射 $R\to R_{1,\ 2,\ 3,\ 0}$ 通过将 R 与 $[x$ 作张量积，$y]$ 并分解为各个相对不变量而得到。我们总结结果如下

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}f(x,y)\\g(x,y)\end{bmatrix}\quad\to\quad &\frac{1}{2}(xg+yf)(|+-\rangle+|-+\rangle)+\frac{1}{2}(xf+yg)(|++\rangle+|--\rangle)\\
&+\frac{1}{2}(xf-yg)(|++\rangle-|--\rangle)+\frac{1}{2}(xg-yf)(|+-\rangle-|-+\rangle)
\end{aligned}\tag{4.9}$$

其中右端分别是相对于 R_1，R_2，R_3，R_0 的不变量。

至于映射之间的关系，很容易看出，对于所有 i，$R_i\leftarrow R\leftarrow R_i$ 均为零，并且

$$\sum_i R\leftarrow R_i\leftarrow R=0.$$

我们注意到，这些关系与 Kronheimer 在其 ALE 空间的 HyperK¨ahler 商构造中出现的关系相同 [Kro89]。事实上，如果从箭图 (4.8) 出发，并考虑节点 $R_{0,1,2,3},R$ 上维数向量为 $\underline{d}=$(1,1,1,1,2) 的箭图表示，那么这类表示的模空间可以通过 GIT 商或 HyperK¨ahler 商得到，其中箭头之间的关系即为动量映射条件。该 HyperK¨ahler 商给出了一个曲面，它是 D_4 奇点 $\hat{}X\to X$ 的保典解析，而箭图代数 (4.8) 则给出了一个非交换保典解析（NCCR）。

最后，我们将回顾中心示例 $X = T^*\mathbb{P}^2$。箭图代数是通过 $D^b(X)$ 的倾斜对象的自同态代数得到的，该倾斜对象由 $\mathsf{O}_{\mathbb{P}^2}$、$\mathsf{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ 和 $\mathsf{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$ 组成（随后将其拉回到 $T^*\mathbb{P}^2$），参见 [TU10]。该箭图如下。

$$2 \underset{\vec{w}\times 3}{\overset{\vec{z}\times 3}{\rightleftarrows}} 1 \underset{\vec{w}\times 3}{\overset{\vec{z}\times 3}{\rightleftarrows}} 0 \tag{4.10}$$

其中每个箭头实际上都由三个箭头组成，分别标记为 $z^{1,2,3}$ 或 $w_{1,2,3}$。这里的三个节点分别对应对象 $\mathsf{O}_{\mathbb{P}^2}(0,1,2)$。注意，要使倾斜理论成立，至关重要的是高阶上同调 $\mathrm{Ext}^{>0}(\mathsf{O}(m),\mathsf{O}(n))$ 对于 $m,n=0,1,2$ 必须消失。

箭图的关系是

$$e_2 \overset{z^i}{\leftarrow}\overset{z^j}{\leftarrow} e_0 = e_2 \overset{z^j}{\leftarrow}\overset{z^i}{\leftarrow} e_0, \quad e_0 \overset{w_i}{\leftarrow}\overset{w_j}{\leftarrow} e_2 = e_0 \overset{w_j}{\leftarrow}\overset{w_i}{\leftarrow} e_2, \quad e_1 \overset{z^i}{\leftarrow}\overset{w_j}{\leftarrow} e_1 = e_1 \overset{w_j}{\leftarrow}\overset{z^i}{\leftarrow} e_1,$$
$$\textstyle\sum_i e_a \overset{z^i}{\leftarrow}\overset{w_i}{\leftarrow} e_a = 0, \quad a=1,2, \qquad \sum_i e_a \overset{w_i}{\leftarrow}\overset{z^i}{\leftarrow} e_a = 0, \quad a=0,1.$$

这个代数的整体维数为 4，因此确实需要求出式 (4.1) 中的 $\mathsf{T}_{3,4}$ 项。这已在第 6.3 节和附录 B 中由 [Qiu22] 完成。

$$\mathsf{T}_2 = \begin{bmatrix} e_1(z\cdot w \oplus w\cdot z)e_1 \\ e_2(z\cdot w)e_2 \\ e_0(w\cdot z)e_0 \\ e_1([w_i,z^j]_{\text{t.f.}})e_1 \\ e_2(z^{[i}z^{j]})e_0 \\ e_0(w_{[i}w_{j]})e_2 \end{bmatrix} \quad \mathsf{T}_3 = \begin{bmatrix} e_2(z^k w_k z^j - z^k z^j w_k + z^j z^k w_k)e_1 \\ e_0(w_k z^k w_j - w_k w_j z^k + w_j w_k z^k)e_1 \\ e_1(z^j w_k z^k - w_k z^j z^k + w_k z^k z^j)e_0 \\ e_1(w_j z^k w_k - z^k w_j w_k + z^k w_k w_j)e_2 \end{bmatrix},$$
$$\mathsf{T}_4 = \begin{bmatrix} e_2(z^{[k}z^{l]}w_{[k}w_{l]} - 2z^k w_k z^l w_l)e_2 \\ e_0(w_{[k}w_{l]}z^{[k}z^{l]} - 2w_k z^k w_l z^l)e_0 \\ e_1([z^i,w_j]\,[w_i,z^j] - z^i w_i w_j z^j - w_i z^i z^j w_j)e_1 \end{bmatrix}. \tag{4.11}$$

对于微分，我们已经提到，$\partial\mathsf{T}_1$ 和 $\partial\mathsf{T}_2$ 在所有情况下都是标准的。至于 $\partial\mathsf{T}_3$，，根据定义，T_3 中的一条长度为 3 的路径可以用两种方式写成 $p = xr = r'x'$，其中 x，x' 是两条长度为 1 的路径，而 r，r' 是两个长度为 2 的关系。于是，$\partial_3(1\otimes_S p\otimes_S 1)$表示

$$\Lambda\otimes_S \mathsf{T}_3\otimes_S\Lambda \ni 1\otimes_S p\otimes_S 1 \xrightarrow{\partial_3} x\otimes_S r\otimes_S 1 - 1\otimes_S r'\otimes_S x' \in \Lambda\otimes_S\mathsf{T}_2\otimes_S\Lambda,$$

最后，$q\mathsf{T}_4$ 中长度为 4 的一条路径有两种写法：$q = rr' = xr''y$ 其中 x，y 的长度为 1，且 r，r'，r'' 是关系。我们有映射

$$\Lambda\otimes_S \mathsf{T}_4\otimes_S\Lambda \ni 1\otimes_S q\otimes_S 1 \xrightarrow{\partial_4} x\otimes_S r''y\otimes_S 1 + 1\otimes_S xr''\otimes_S y \in \Lambda\otimes_S\mathsf{T}_3\otimes_S\Lambda.$$

注意，[BK99] 的命题 A.1 (b) 保证 $r''y$ 和 xr'' 确实属于 T_3。来看一个示例$q = e_2(z^{[k}z^{l]}w_{[k}w_{l]} - 2z^k w_k z^l w_l)e_2$，那么

$$\partial_4(1\otimes_S q\otimes_S 1) = 2z^k\otimes_S([z^l,w_k]w_l - z^l w_l w_k)\otimes_S 1 + 2\otimes_S(z^k[z^l,w_k] - z^l z^k w_k)\otimes_S w_l$$

且每个括号显然都属于 $JR\cap RJ$，因此右端属于 T_3。

5 TheChouhy-Solotar 分解

与上一节的分解不同，在 [CS15] 中构造的分解并不总是极小的。然而，这种方法非常直观，也更贴近人类的思维方式。让我们花一点篇幅来讨论这一特点。设想有人提出一个由生成元和关系给出的代数，即代数元素是由某个字母表中的字母构成的字。我们可以应用这些关系对任意一个字进行约化，直到再也没有可用的关系为止。这个过程绝不是唯一的：根据约化方式的不同，最终得到的不可约词可能有所不同。我们还可以通过将两个不可约词并置，然后对其进行约化，来定义它们的乘积，但这样做同样无法得到唯一的结果。

约化过程中唯一性失效的原因有两个。首先，应当对字的集合施加良序（例如词典序），并尝试在约化的每一步降低一个字的阶。但这样可能会陷入“局部极小值”（我们很快就会看到一些示例）。其次，可能存在诸如“abc”这样的字，其中“ab”和“bc”都可以被约化，因此最终结果取决于约化的顺序。这类字被称为歧义。事实上，这些歧义与式（4.1）中的 T_3 项非常相似。还可能存在更高阶歧义，即歧义的歧义，例如式（4.1）中的 T_4 项，依此类推。我们可以将这些思想形式化，并构造一个分解。

$$\mathsf{P}_\bullet: \quad \cdots \to \Lambda \otimes \mathsf{A}_2 \otimes \Lambda \to \Lambda \otimes \mathsf{A}_1 \otimes \Lambda \to \Lambda \otimes \mathsf{A}_0 \otimes \Lambda \to \Lambda \otimes \Lambda \to \Lambda \to 0, \tag{5.1}$$

A_0 项与 T_1，同构，但 A_1 可能已经需要比 T_2，更多的生成元，原因我们将在下一节回顾。我们还将这个分解命名为 $\mathsf{P}_\bullet$。这是因为，对我们而言，所有 Chouhy-Solotar 分解都将明显地收缩到极小分解，因此采用相同的记号似乎是合理的。

5.1 约化系统

我们首先为字的集合赋予一种良序 $<_\omega$，读者可查阅 [CS15] 第 5 页，了解最一般的定义。但对于本文，我们可以采用一个较简单的版本。首先，若 $w_1 <_\omega w_2$ 的长度较短，则 w_1 排在前面；若长度相同，则 w_1 在词典序中排在 w_2 之前。再次强调，我们的字是从右向左读取的。若关系保持字的长度不变或使其减小，这种排序就足够了。

定义 5.1. (定义 2.8 [CS15]) 设 $p \in kQ$ 为一条路径，写成若干单项式之和。尖端记作 tip(p)，是按照阶 $<_\omega$ 排列最大的单项式。

给定 kQ 的一个理想，集合 $S(I)$（或者当 I 明确时，简称 S）由单项式 p 组成，这些单项式是 I 中元素的尖端，并且满足条件：它不包含任何作为 I 中元素尖端的真子路径。

根据定义， $S(I)$ 中的一条路径不可能是 $S(I)$ 中另一元素的子路径。此外，根据定义，给定 $s \in S$，存在另一条路径 f_s 使得 $s - f_s \in I$，且 $f_s <_\omega s$。

备注 5.2. 集合 S 有点类似于 Gr¨obner 基，通常不容易计算。仅仅为 I 选取一组生成元，并取每个生成元的尖端，并不足够。这样通常得到的集合比 S 小。

可以将 $\{(s, f_s) | s \in S\}$ 用作约化系统：扫描一个字，找出与 s 重合的子路径，然后将 s 替换为 f_s。 [CS15] 中的引理 2.9 表明，集合 $s - f_s$ 生成 I；引理 2.10 表明，一个字的约化是唯一的。

我们给出一个示例，以说明上述计算 S 的朴素方法为何不起作用。

例 5.3。 回到我们的 A_1 示例 **4.1**，我们将字母排序。

$$w_1 > w_2 > z^2 > z^1 \tag{5.2}$$

其中我们省略了 ω in $>_\omega$。关系理想 $R = \mathrm{h}e_1z^iw_ie_1, e_0w_iz^ie_0\mathrm{i}$ 的尖端集合为 $S = \{e_1z^1w_1e_1, e_0w_2z^2e_0\}$。字 $e_1z^1w_2z^2e_0$ 的约化为

$$e_1z^1\underline{w_2z^2}e_0 \to -e_1\underline{z^1w_1}z^1e_0 \to e_1z^2w_2z^1e_0.$$

事实上，更一般的字的约化会导致按照上述阶对 z 进行排序， w 也同样如此。

为了便于说明，我们特意选取一个<escape></*escape*>次优<*escape*> </escape>阶。

$$w_2 > w_1 > z^2 > z^1. \tag{5.3}$$

如果以朴素的方式选取 S in $S = \{e_1z^2w_2e_1, e_0w_2z^2e_0\}$，那么 $e_1z^2w_2z^2e_0$ 的约化将取决于具体的处理方式。

$$e_1z^2\underline{w_2z^2}e_0 \to -e_1z^2w_1z^1e_0,$$
$$e_1\underline{z^2w_2}z^2e_0 \to -e_1z^1w_1z^2e_0.$$

右端中的两个字不再是可约的，但它们并不相等，而按理说它们应该相等。这里出错的原因是：这两个字在模 R 的意义下仍然相等：

$$e_1(z^2w_1z^1 - z^1w_1z^2)e_0 = \sum_i e_1(z^2w_iz^i - z^iw_iz^2)e_0. \in R$$

第一项的尖端是 $z^2w_2z^2$，第二项也是如此。因此，两个“首项”尖端相互抵消，留下次首项尖端 $z^1w_1z^2$。这就是我们之前提到的“局部极小值”。因此，必须将这个次首项尖端纳入 S。

$$S = \langle e_1z^2w_2e_1, e_0w_2z^2e_0, e_1z^1w_1z^2e_0, e_0w_1z^1w_2e_1\rangle$$

给出一个约化系统

$$z^2w_2 \to -z^1w_1, \quad w_2z^2 \to -w_1z^1, \quad z^1w_1z^2 \to z^2w_1z^1, \quad w_1z^1w_2 \to w_2z^1w_1.$$

We 也不再写出那些可以从字本身推断出的 e_i's。

一旦得到 S，分解（5.1）中的项 A_1 便恰由集合 S生成。接下来，我们形式化地引入 n-歧义

定义 5.4。 （定义 3.1 [CS15]）若字 $u_0u_1\cdots u_n$ 是左 n-歧义（$n \geq 2$），则满足： u_i， $i = 1$， $\cdots$ n 均不可约，并且 $u_0 \in Q_1$ 满足： u_iu_{i+1} 可约而 u_id 不可约，其中 d 是从 u_{i+1}左端开始的任意真子字。

存在一个对称的右 n-歧义概念，但事实证明，左歧义和右歧义的集合相同。

例 5.5. 接续例 5.3，以下是左侧 2、3、4-歧义。

$$\begin{aligned}&\mathsf{A}_2:\ \langle w_2\cdot z^2\cdot w_2,\ \ z^2\cdot w_2\cdot z^2\rangle,\\&\mathsf{A}_3:\ \langle z^1\cdot w_1z^2\cdot w_2\cdot z^2, w_1\cdot z^1w_2\cdot z^2\cdot w_2, z^2\cdot w_2\cdot z^2\cdot w_2, w_2\cdot z^2\cdot w_2\cdot z^2\rangle,\\&\cdots\end{aligned}$$

这里我们插入 $\cdot$，以显示这些字如何分解成歧义。对于更高次的 A_n，规律是：在适当的位置，将 z^2 或 w_2 加到 A_{n-1} 的右侧。

现在，我们按照 (5.1) 从 A_n 构造分解

$$\cdots\to\Lambda\otimes\mathsf{A}_2\otimes\Lambda\xrightarrow{\partial_3}\Lambda\otimes\mathsf{A}_1\otimes\Lambda\xrightarrow{\partial_2}\Lambda\otimes\mathsf{A}_0\otimes\Lambda\xrightarrow{\partial_1}\Lambda\otimes\Lambda\xrightarrow{\epsilon}\Lambda\to 0, \tag{5.4}$$

接下来定义链映射。低次的显式映射见 [CS15] 第 6 节。这里我们将描述这些映射，以免读者费力查阅那些记号。

首先，增广映射 ϵ： $\Lambda\otimes\Lambda\to\Lambda$ 就是乘法。映射 ∂_1 与极小分解 $\partial_1(1\otimes a\otimes 1) = a\otimes 1 - 1\otimes a$相同，其中 $a\in Q_1$。

为了写出 ∂_2，我们先定义一些关于字的运算。首先，spl 是分裂

$$\mathrm{spl}(c_n\cdots c_1) = \sum_{i=1}^{n}\overline{c_n\cdots c_{i+1}}\otimes c_i\otimes\overline{c_{i-1}\cdots c_1}, \tag{5.5}$$

请读者注意，张量左侧和右侧的因子都属于 Λ，因此会自动对 $c_n\cdots c_{i+1}$和 $c_{i-1}\cdots c_1$施加模 R约化。我们还在上方加一条横线以强调这一点。取$1\otimes s\otimes 1\in\mathsf{A}_1$, 集

$$\partial_2(a\otimes s\otimes b) = a\,\mathrm{spl}(s-f_s)b.$$

由于 $s-f_s\in R$，很容易看出 $\partial_1\partial_2=0$。

为了定义 ∂_3，我们使用右约化映射 red^R。这个映射顾名思义：从右侧约化一个字，即从右向左扫描字，寻找与某个尖端匹配的最右段，例如 $s\in S$，然后将 s 替换为对应的 f_s，再从头开始，直到找不到更多尖端为止。稍显麻烦的是，我们还需要另一个约化映射 $\mathsf{red}^{L'}$：它先从左侧进行第一次约化，之后的约化则从右侧进行。

现在对 A_2 (歧义)应用 $\mathsf{red}^{L'}$ 。在此过程中，收集约化时用到的所有尖端。例如，将 asb 约化为 af_sb 时，会收集到一项 $a\otimes s\otimes b\in\mathsf{A}_1$。再用 red^R 做同样的操作，就会得到另一组尖端。于是我们得到 ∂_3 ，其形式为

$$\partial_3(a\otimes w\otimes b) = a\big(\text{tips from }\ \mathrm{red}^{L'}-\text{tips from }\ \mathrm{red}^{R}\big)b. \tag{5.6}$$

注记 5.6。 人们很容易理解 ∂_3 背后的直观思想。给定一个歧义 w，我们知道 $\mathsf{red}^{L'}(w)$ =$\mathsf{red}^R(w)$，但按照两种不同的阶进行约化时，所收集到的尖端集合会有所不同。因此 $\partial_3(\mathsf{A}_2)$ 给出了关系之间的关系。

映射 $\mathsf{red}^{L'}$ 似乎有些不太自然。但实际上，重要的只是 $\mathsf{red}^{L'}$ 中的第一次约化必须从左侧开始。甚至可以为 A_2, 中的每个元素选择不同的一组约化，参见 [CS15]中的命题 6.6。这里我们采用 [BW20], 的选择，其便利性稍后便会显现。

例 5.7. 接续例 5.5，作用于关系上的微分为

$$\begin{aligned}&\mathsf{A}_1 \ni z^2w_2 \xrightarrow{\partial_2} z^i \otimes w_i \otimes e_1 + e_1 \otimes z^i \otimes w_i,\\&\mathsf{A}_1 \ni z^1w_1z^2 \xrightarrow{\partial_2} z^{[1}w_1 \otimes z^{2]} \otimes e_0 + z^{[1} \otimes w_1 \otimes z^{2]} + e_1 \otimes z^{[1} \otimes w_1z^{2]}.\end{aligned}$$

对于作用于歧义的 ∂，我们将给出一个示例计算

$$\begin{aligned}z^2w_2z^2 &\xrightarrow{\mathrm{red}^{L'}} -z^1w_1z^2 \to -z^2w_1z^1,\\&\xrightarrow{\mathrm{red}^{R}} -z^2w_1z^1.\end{aligned}$$

收集沿途使用的关系的尖端，我们得到

$$\partial(z^2w_2z^2) = e_1 \otimes z^2w_2 \otimes z^1 - e_1 \otimes z^1w_1z^2 \otimes e_0 - z^2 \otimes w_2z^2 \otimes e_0,$$

我们希望提醒读者注意蓝色项。它不属于 $\Lambda_{>0}\mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_1\Lambda_{>0}$，因此该分解不是最小的，参见第 4节开头。事实是，在采用次优排序时，项 $z^1w_1z^2$ 是冗余约化 $z^1w_1z^2 \mapsto z^2w_1z^1$的尖端，而之所以需要它，仅仅是为了让左端在“局部极小值”中向前迈进一步。另一方面，我们刚刚在 $z^2w_2z^2 \in \mathsf{A}_2$ 中发现了一个项，它同构地映射到上述冗余尖端。可以使用收缩，将 A_2 和 A_1 中的这两个项成对“抵消”。

我们再来看一个四字母歧义 $w_1 \cdot z^1w_2 \cdot z^2$,

$$\begin{aligned}w_1z^1w_2z^2 &\xrightarrow{\mathrm{red}^{L'}} w_2z^1w_1z^2 \to w_2z^2w_1z^1 \to -w_1z^1w_1z^1,\\&\xrightarrow{\mathrm{red}^{R}} -w_1z^1w_1z^1.\end{aligned}$$

汇集这些尖端，得到

$$\partial(w_1z^1w_2z^2) = e_0 \otimes w_1z^1w_2 \otimes z^2 + w_2 \otimes z^1w_1z^2 \otimes e_0 + e_0 \otimes w_2z^2 \otimes w_1z^1 - w_1z^1 \otimes w_2z^2 \otimes e_0.$$

接着，三重歧义 $w_2 \cdot z^2 \cdot w_2 \cdot z^2$ 会消去这一项。

注 5.8。事实上，这种消去所有多余项的模式仍然成立：尽管对于所有 n，我们的分解 A_n 都非零，但存在一个简单的链同伦，可将其收缩到极小分解 (4.3)。这种收缩使我们能够将当前的非极小分解视为极小分解。

5.2 $T^*\mathbb{P}^2$ 的分解

我们通过给出与 $T^*\mathbb{P}^2$ 相关的箭图 (4.10) 的 A_1 项和 A_2 项，来结束这一技术性章节。我们先为这些字母选定一个阶

$$z^1 < z^2 < z^3 < w_1 < w_2 < w_3.$$

约化系统由“本质项”和“冗余项”组成，前者与 T_2，一一对应，后者则用于消除“局部极小值”。稍微调整排序，或许能减少冗余项的数量，但我们并未为此投入任何精力。

从约化系统的“本质部分”开始

$$\begin{aligned}
&\langle z^i z^j \mapsto z^j z^i\rangle_{20}, \quad \langle w_j w_i \mapsto w_i w_j\rangle_{02}, \quad i<j,\\
&\langle z^i w_j \mapsto w_j z^i\rangle_{11}, \ \ i\neq j, \quad \langle z^1 w_1 \mapsto w_1 z^1\rangle_{11}, \ \ \langle z^2 w_2 \mapsto w_2 z^2\rangle_{11}\\
&\langle z^3 w_3 \mapsto -w_1 z^1 - w_2 z^2\rangle_{11},\\
&\langle w_3 z^3 \mapsto -w_1 z^1 - w_2 z^2\rangle_{11},\\
&\langle z^3 w_3 \mapsto -z^1 w_1 - z^2 w_2\rangle_{22},\\
&\langle w_3 z^3 \mapsto -w_1 z^1 - w_2 z^2\rangle_{00},
\end{aligned} \tag{5.7}$$

其中，记号 $\mathrm{h}\cdots\mathrm{i}_{ij}$ 是 $e_i\otimes(\cdots)\otimes e_j$ 的节省空间写法。这里的每一项在 (4.11) 的 T_2 中都有明确的对应项，因此都是必要的。

现在来看“多余部分”

$$\begin{aligned}
&\langle w_2 z^1 w_3 \mapsto w_3 z^1 w_2\rangle_{12}, \quad \langle w_1 z^2 w_3 \mapsto w_3 z^2 w_1\rangle_{12}, \quad \langle w_1 z^3 w_2 \mapsto w_2 z^3 w_1\rangle_{12},\\
&\langle w_1 z^1 w_2 \mapsto w_2 z^1 w_1\rangle_{12}, \quad \langle w_1 z^2 w_2 \mapsto w_2 z^2 w_1\rangle_{12}, \quad \langle w_2 z^2 w_3 \mapsto w_3 z^2 w_2\rangle_{12},\\
&\langle w_1 z^1 w_3 \mapsto w_3 z^1 w_1\rangle_{12}.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}
&\langle z^2 w_1 z^3 \mapsto z^3 w_1 z^2\rangle_{21}, \quad \langle z^1 w_2 z^3 \mapsto z^3 w_2 z^1\rangle_{21}, \quad \langle z^1 w_3 z^2 \mapsto z^2 w_3 z^1\rangle_{21},\\
&\langle z^2 w_2 z^3 \mapsto z^3 w_2 z^2\rangle_{21}, \quad \langle z^1 w_1 z^3 \mapsto z^3 w_1 z^1\rangle_{21}, \quad \langle z^1 w_1 z^2 \mapsto z^2 w_1 z^1\rangle_{21},\\
&\langle z^1 w_2 z^2 \mapsto z^2 w_2 z^1\rangle_{21}.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\langle w_3 w_1 z^3 \mapsto -w_2 w_1 z^2 - w_1 w_1 z^1\rangle_{01}, \tag{5.10}$$

$$\langle w_3 w_2 z^3 \mapsto -w_2 w_2 z^2 - w_2 w_1 z^1\rangle_{01}.$$

这些项将由来自 A_2，的项映射到，我们现在转而讨论这些项。

A_2 项同样分为必要部分和多余部分。我们先前关于收缩的注 5.8 同样适用。基于这一理解，在列出所需的 A_2，时，除了与 T_3，对应的项之外，我们只需要那些能够抵消 A_1 中多余项的项。我们有

$$\begin{aligned}
&\langle z^i z^j w_k\rangle_{21}, \quad \langle z^3 w_3 z^3\rangle_{21} \quad i<j,\\
&\langle z^k w_i w_j\rangle_{12}, \quad \langle w_3 z^3 w_3\rangle_{12} \quad i<j,\\
&\langle z^i w_3 z^3\rangle_{10},\\
&\langle w_3 z^3 w_i\rangle_{01}, \quad \langle w_{1,2} w_3 z^3\rangle_{01}.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

我们在下面的引理中总结 A_2 的微分，不再给出证明，因为这不过是一些令人头昏脑胀的计算。

引理 5.9. *(5.11)* 中的 *28* 个歧义映射到 ∂ *to* $\partial\mathsf{T}_3$ （共 *12* 个），并映射到多余的关系式 *Eqs.5.8, 5.9, 5.10*（共 *16* 个）。具体而言

$$\begin{aligned}
&\partial\langle z^i w_3 z^3\rangle_{10} \sim -\partial(\mathsf{T}_3^3)^i, \quad i=1,2,3,\\
&\partial\langle w_3 z^3 w_3\rangle_{01} \sim -\partial(\mathsf{T}_3^2)_3,\\
&\partial\langle w_3 z^3 w_i + w_i w_3 z^3\rangle_{01} \sim -\partial(\mathsf{T}_3^2)_i, \ \ i=1,2\\
&\partial\langle z^1 z^2 w_2 + z^1 z^3 w_3\rangle_{21} \sim -\partial(\mathsf{T}_3^1)^1,\\
&\partial\langle z^1 z^2 w_1 - z^2 z^3 w_3\rangle_{21} \sim \partial(\mathsf{T}_3^1)^2,\\
&\partial\langle -z^3 w_3 z^3 + z^1 z^3 w_1 + z^2 z^3 w_2\rangle_{21} \sim \partial(\mathsf{T}_3^1)^3.
\end{aligned}$$

这里的记号 $(\mathsf{T}_3^2)^j$ 表示 (4.11) 中 T_3 的第二项，即 $\langle w_k z^k w_j - w_k w_j z^k + w_j w_k z^k \rangle_{01}$。

作为一个示例，我们取 $\mathbf{h} z^1 w_3 z^3 \mathbf{i}_{10}$

$$\begin{aligned}\langle z^1 w_3 z^3\rangle_{10} &\overset{\mathrm{red}^{L'}}{\to} w_3 z^1 z^3 \to w_3 z^3 z^1 \to -(w_1 z^1 + w_2 z^2) z^1,\\ &\overset{\mathrm{red}^{R}}{\to} -z^1(w_1 z^1 + w_2 z^2) \to -w_1 z^1 z^1 - w_2 z^1 z^2 \to -w_1 z^1 z^1 - w_2 z^2 z^1,\end{aligned}$$

汇集上述尖端，我们得到

$$\partial\langle z^1 w_3 z^3\rangle_{10} = \langle z^1 w_3\rangle_{11} z^3 + w_3\langle z^1 z^3\rangle_{20} + \langle w_3 z^3\rangle_{11} z^1 - z^1\langle w_3 z^3\rangle_{00} + \langle z^1 w_1\rangle_{11} z^1 + \langle z^1 w_2\rangle_{11} z^2 + w_2\langle z^1 z^2\rangle_{20}.$$

我们提醒读者，$\mathbf{h}\cdots\mathbf{i}_{ij} := e_i \otimes \cdots \otimes e_{j^\circ}$ 在括号中，我们只写出了尖端；若将尖端补全为关系，例如 $z^1 z^2 \sim z^1 z^2 - z^2 z^1$ 和 $w_3 z^3 \sim w_i z^i$，就会发现右端与 $-\partial(\mathsf{T}_3^3)_1$ 相符。

我们来看一个更复杂的示例。我们从 $\mathbf{h} z^i z^j w_k \mathbf{i}_{21}$ 开始

$$\begin{aligned}\langle z^1 z^2 w_1\rangle_{21} &\overset{\mathrm{red}^{L'}}{\to} \to z^2 z^1 w_1 \to z^2 w_1 z^1,\\ &\overset{\mathrm{red}^{R}}{\to} \to z^1 w_1 z^2 \to z^2 w_1 z^1,\\ \partial\langle z^1 z^2 w_1\rangle_{21} &= \langle z^1 z^2\rangle_{20} w_2 + z^2\langle z^1 w_1\rangle_{11} - z^1\langle z^2 w_1\rangle_{11} - \langle z^1 w_1 z^2\rangle_{21},\\ \langle z^2 z^3 w_3\rangle_{21} &\overset{\mathrm{red}^{L'}}{\to} z^3 z^2 w_3 \to z^3 w_3 z^2 \to -(z^1 w_1 + z^2 w_2) z^2 \to -z^2 w_1 z^1 - z^2 w_2 z^2,\\ &\overset{\mathrm{red}^{R}}{\to} -z^2(w_1 z^1 + w_2 z^2),\\ \partial\langle z^2 z^3 w_3\rangle_{21} &= \langle z^2 z^3\rangle_{20} w_3 + z^3\langle z^2 w_3\rangle_{11} + \langle z^3 w_3\rangle_{22} z_2 - \langle z^1 w_1 z^2\rangle_{21} - z^2\langle z^3 w_3\rangle_{11}.\end{aligned}$$

我们看到，尖端 $\mathbf{h} z^1 w_1 z^2 \mathbf{i}_{21}$ 被命中两次，而差 $\mathbf{h} z^1 z^2 w_1 - z^2 z^3 w_3 \mathbf{i}_{21}$ 的微分则重现了 $\partial(\mathsf{T}_3^1)_{2^\circ}$。

6 双模分解之间的映射

同一模的任意两个投射分解之间存在链等价，这一点是众所周知的。然而，关键在于我们将同时运用巴尔分解、极小分解和 Chouhy-Solotar 分解，以处理原本难以应对的变形量子化。因此，我们在此详细说明这些映射。

命题 6.1. *Chouhy-Solotar* 分解 $\mathsf{P}_\bullet \to \Lambda$ 与巴尔分解 $\mathsf{B}_\bullet \to \Lambda$之间存在双模链映射

$$F_\bullet : \mathsf{P}_\bullet \rightleftharpoons \mathsf{B}_\bullet : G_\bullet.$$

存在一个双模链同伦 $h_n : \mathsf{B}_n \to \mathsf{B}_{n+1}$，满足

$$G_\bullet F_\bullet = id, \quad F_\bullet G_\bullet = id - \{\partial, h\} \tag{6.1}$$

$$h_\bullet F_\bullet = G_{\bullet+1} h_\bullet = h_{\bullet+1} h_\bullet = 0. \tag{6.2}$$

证明见 [BW20] 的第 5 节。我们只详细说明这些映射在低次时的情形，并举出一些示例。

首先，在 0 次时，我们有 $\mathbf{P}_0 = \mathbf{B}_0 = \Lambda \otimes \Lambda$，因此设 $F_0 = G_0 = id$ 和 $h_0 = 0$。在 1 次时，$\mathbf{P}_1 = \Lambda \otimes Q_1 \otimes \Lambda$，并设

$$F_1(a \otimes x \otimes b) = a[x]b.$$

另一方向的映射 G_1 是一个分裂：取 $a[x_1 \cdots x_n]b$，其中 $x_1 \cdots x_n$ 不可约，且 x_i 是单字母词，然后

$$\begin{aligned} G_1(a[x_1 \cdots x_n]b) &= a\,\mathrm{spl}(x_1 \cdots x_n)b \\ &= \overline{ax_1 \cdots x_{n-1}} \otimes x_n \otimes b + \overline{ax_1 \cdots x_{n-2}} \otimes x_{n-1} \otimes \overline{x_n b} + \cdots + a \otimes x_1 \otimes \overline{x_2 \cdots x_n b}. \end{aligned}$$

容易验证（6.1），若令 h_1 为

$$\begin{aligned} &h_1(a[x_1 \cdots x_n]b) = -a\,\mathrm{spl}'(x_1 \cdots x_n)b, \\ &\mathrm{spl}'(x_1 \cdots x_n) := [x_1|x_2 \cdots x_n] + x_1[x_2|x_3 \cdots x_n] + \cdots + x_1 \cdots x_{n-2}[x_{n-1}|x_n]. \end{aligned} \tag{6.3}$$

注意，此处的映射 spl' 是为 $\mathbf{B}_\bullet$ 定义的，而上文的 spl 是为 $\mathbf{P}_\bullet$ 定义的。

在 2 次时，考虑 $a \otimes s \otimes b$，其中 $s \mapsto f_s$ 属于约化系统的一部分，我们令

$$F_2(a \otimes s \otimes b) = a\,\mathrm{spl}'(s - f_s)b \tag{6.4}$$

对于更重要的映射 G_2，给定 $[u|v]$，其中 $u,\ v$ 不可约，则 $G_2([u|v])$ 给出了应用 red^R 到 uv 时所用关系的尖端集合。

示例 6.2. 接续第 5.2 节。考虑 $[w_3w_1|z^3w_2]_{02}$，其右约化如下

$$\mathrm{red}^R: \quad w_3\underline{w_1z^3w_2} \overset{(5.8)}{\to} \underline{w_3w_2z^3}w_1 \overset{(5.10)}{\to} -w_2w_1z^1w_1 - w_2w_2z^2w_1.$$

带下划线的术语是在此过程中拾取的尖端。因此 $G_2[w_3w_1|z^3w_2]_{02} = w_3 \otimes w_1z^3w_2 \otimes e_2 + e_0 \otimes w_3w_2z^3 \otimes w_1$。

将其映射回 $\mathbf{B}_2$ 后应用分裂 (6.4)

$$\begin{aligned} F_2G_2[w_3w_1|z^3w_2] &= w_3\,\mathrm{spl}'(w_{[1}z^3w_{2]}) + \mathrm{spl}'(w_3w_2z^3 + w_2w_2z^2 + w_2w_1z^1)w_1 \\ &= w_3[w_{[1}|z^3w_{2]}] + w_3w_{[1}[z^3|w_{2]}] + [w_3|w_2z^3]w_1 + w_3[w_2|z^3]w_1 \\ &\quad + [w_2|w_2z^2]w_1 + w_2[w_2|z^2]w_1 + [w_2|w_1z^1]w_1 + w_2[w_1|z^1]w_1. \end{aligned}$$

稍后将在同伦传递中使用的同伦 h_2 分为两个部分。

$$h_2(a[x|y]b) = \sum_{\ell(d_i)>0} \underbrace{ac_i[\mathrm{spl}'(s_i - f_i)|d_i]b}_{h_2'} - a[\mathrm{spl}'(x)|y]b. \tag{6.5}$$

第二部分相当直观：按照 (6.3) 分裂 x，并将其堆叠到 y 上。为解释第一部分，假设在右约化 xy 时，我们应用了以下关系 $c_is_id_i \to c_if_id_i$。然后，对于每个 i，若其非零长度 d_i 为 $\ell(d_i) > 0$，我们应用 $\mathrm{spl}'(s_i - f_i)$，并将其堆叠到 d_i 上。可以验证 (6.2)，即 $h_2F_2 = 0 = G_2h_1$。

示例 6.3. Tak　　再一次 $[w_3w_1|z^3w_2]_{02}$，我们在上文看到，红色^{R}中使用了以下关系

$$w_3(w_1z^3w_2) \to w_3(w_2z^3w_1), \quad (w_3w_2z^3)w_1 \to -(w_2w_2z^2 + w_2w_1z^1)w_1.$$

第一项不会对 h_2' 作出贡献，因此

$$\begin{aligned} h_2([w_3w_1|z^3w_2]) &= [w_3|w_2z^3|w_1] + w_3[w_2|z^3|w_1] + [w_2|w_2z^2|w_1] \\ &\quad + w_2[w_2|z^2|w_1] + [w_2|w_1z^1|w_1] + w_2[w_1|z^1|w_1] - [w_3|w_1|z^3w_2]. \end{aligned}$$

读者可以验证，此处（6.1）成立。

我们需要关于 G_2 和 h_2' 的递归公式，其意义将在后文变得清晰。

引理 6.4。（参见 *[BW20]* 中的引理 *5.16*）设 u 和 v 是两个不可约词。将 u 写成两部分 $u = u_1u_2$，则

$$G_2[u|v] = u_1G_2[u_2|v] + G_2[u_1|\overline{u_2v}]. \tag{6.6}$$

请记住，u_2v 上的横线强调 u_2v 应当进行约化，尽管这本应是默认的。此外，若 $uv = asb$，其中 s 是 uv 中出现的最右尖端，则

$$G_2[u|v] = a \otimes s \otimes b + aG_2[f_s|b] + G_2[a|\overline{f_sb}]. \tag{6.7}$$

类似地，对于 h_2' （ h_2 在（6.5）中的第一项），我们有

$$\begin{aligned} h_2'[u|v] &= u_1h_2'[u_2|v] + h_2'[u_1|\overline{u_2v}], \\ h_2'[u|v] &= ah_2'[\mathrm{spl}'(s - f_s)|b] + ah_2'[f_s|b] + h_2'[a|\overline{f_sb}]. \end{aligned} \tag{6.8}$$

证明。（略证）我们记住，G_2 的明确描述是收集在对 uv进行右约化时所用关系的尖端。若 u_2v 是可约的，则将其约化为 $\overline{u_2v}$后，继续约化$u_1\overline{u_2v}$。这就得到了第一个结论。

对于 (6.7)，在 uv中遇到第一个尖端 s并将其映射到 $1\otimes s\otimes 1$后，将 $asb \to af_sb$替换掉，然后继续进行剩余的约化。这就是用文字表述的 (6.7) 的右端。

同样的论证也给出了关于 h_2'的陈述，因为 h_2' 和 G_2 都基于右约化过程。

□

现在我们给出 F_3的公式。

引理 6.5. 设 $uvw \in \mathsf{A}_2$ 是一个歧义：u 有一个字母，$uv = s$、$vw = t$ 的约化分别为 $s \mapsto f_s$ 和$t \mapsto f_t$，则

$$F_3(1 \otimes uvw \otimes 1) = -[\mathrm{spl}'(s)|w] - h_2[f_s|w] + h_2[u|f_t]. \tag{6.9}$$

证明。由于我们将构造 F_3 使得 $\partial F_3 = F_2\partial$，因此可以写作 $F_3 = k_2F_2\partial$，其中 k_2 是巴复形 (3.1) 的链同伦。对于歧义 uvw，我们在 (5.6) 中回顾过，$\partial(1 \otimes uvw \otimes 1)$ 的计算方法是收集由 $\mathsf{red}^{L'}$产生的尖端，再减去由 red^{R}产生的尖端。此后，F_2将尖端 $a\otimes s\otimes b$映射到 $a[\mathrm{spl}'(s - f_s)]b$，而 k_2将 b移入巴复形，前提是 b的长度不为零。

将这些字付诸实践，第一次右约化在 $\mathsf{red}^{L'}$ 处从左侧开始，选取尖端$1 \otimes s \otimes w$。剩余的 k_2F_2 作用将其变为 $-[\mathrm{spl}'(s - f_s)|w]$。随后，我们对 f_sw 应用右约化并应用 k_2F_2，可将其写成 $-h_2'[f_s|w]$。

约化 red^{R} 是一个直接的右约化。但请注意，它的第一次约化会得到 $u\otimes t\otimes 1$，而由于 k_2 的特殊作用方式，应用 k_2F_2 后结果为零。总而言之

$$F_3(1 \otimes uvw \otimes 1) = -[\mathrm{spl}'(s - f_s)|w] - h_2'[f_s|w] + h_2'[u|f_t] = -[\mathrm{spl}'(s)|w] - h_2[f_s|w] + h_2[u|f_t].$$

□

6.1 同伦传递

我们用记号 $\mathsf{P}^\bullet = $同态$_{\Lambda^e}(\mathsf{P}_\bullet,\ \Lambda)$ 和 $\mathsf{B}^\bullet = $同态$_{\Lambda^e}(\mathsf{B}_\bullet,\ \Lambda)$ 表示上链复形，并用 δ，$F^\bullet$，$G^\bullet$和$h^\bullet$ 表示作用在上链上的诱导映射

$$G^\bullet:\ \mathsf{P}^\bullet \rightleftharpoons \mathsf{B}^\bullet:\ F^\bullet,$$
$$F^\bullet G^\bullet = id, \quad G^\bullet F^\bullet = id - \{\delta, h\},$$
$$F^\bullet h^{\bullet+1} = h^\bullet G^\bullet = h^\bullet h^{\bullet+1} = 0.$$

正如我们在第 3.1 节回顾的那样，余链复形 $\mathsf{B}^\bullet$ 具有微分分次李代数结构。我们可以将这一结构转移为 $\mathsf{P}^\bullet$ 上的 L_∞-结构（见第 7.2 [BW20] 节）。二元李括号会导出一系列高阶括号。

$$[\underbrace{\bullet, \cdots, \bullet}_{n}]:\ \mathsf{P}^{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathsf{P}^{k_n} \to \mathsf{P}^{k_1+\cdots+k_n-2n+3}$$

满足某种广义雅可比恒等式。高阶括号的公式以树表示，并且存在一个 L_∞-准同构，将 $\mathsf{P}^\bullet$ 上诱导的 L_∞ 结构与 $\mathsf{B}^\bullet$ 上的 dg-Lie 结构联系起来。下文将重点讨论 P^2 和 B^2。给定 $g \in \mathsf{P}^2$, ，我们需要求解 MC 方程。

$$\delta g - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}[\underbrace{g, \cdots, g}_{n}] = 0. \tag{6.10}$$

这是将微分分次李代数的 MC 方程推广到 L_∞-代数，参见 [Get] 的第 4 节。我们引入 L_∞-映射，以便在 $\mathsf{B}^\bullet$ 中改写这个方程。

我们用一个  表示 $\mathsf{B}^\bullet$ 中的李括号 $[-,-]$，并用一个实心圆点表示同伦 $h^3:\ \mathsf{B}^3 \to \mathsf{B}^2$.

 $= [-,-]$,  $= h^3[-,-]$.

现在令 $g \in \mathsf{P}^2$, 我们用 表示 $G^2 g$。采用这些记号， L_∞ 映射将 g 映到

$g \mapsto T(g) =$ $+ \frac{1}{2}$  $+ \frac{1}{2}$  $+ \frac{1}{8}$  $+ \cdots \in \mathsf{B}^2$ (6.11)

求和遍历所有二叉平面树。使用 T 映射，(6.10) 可写为

$$\delta g - \frac{1}{2}F^3[T(g), T(g)] = 0, \tag{6.12}$$

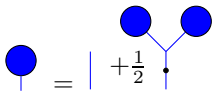
也就是说，(6.10) 中涉及高阶括号的求和由 $[T(g)\ T(g)]$ 诱导得到。 T映射将 MC 方程 (6.10) 与 $\mathsf{B}^\bullet$ 中的 MC 方程相互交织

$$\delta T(g) - \frac{1}{2}[T(g), T(g)] = 0. \tag{6.13}$$

这意味着 T 是一个 L_∞-拟同构，即 (6.13) 与 (6.12) 可以相互推出。由于验证 (6.12) 要容易得多，这一点将至关重要。

备注 6.6. 1. 我们发现，从根向上阅读树公式 (6.11) 更为有用。给定 $[u|v] \in \mathsf{B}_2$,，将其代入树的根部，从叶子向外便可得到 Λ 中的一个元素。(6.11) 中的第一项作用于 G_2，并利用 g 进行求值： $[u|v] \mapsto g(G_2[u|v])$。第二项使用 h_2 将 $[u|v]$ 分裂为三个部分，并利用 $[G^2 g, G^2 g] \in \mathsf{B}^3$, 进行求值，即 $[u|v] \mapsto [G^2 g, G^2 g](h_2[u|v])$，依此类推。

2. 跟踪树的组合因子的最简单方法，是记住树是自相似的：在树的每个节点处，迄今为止发生的一切也正是接下来将要发生的。这也很容易用图示表示。

$T(g) =$  (6.14)

也就是说，每个团块都被定义为直线与一个连接到两个团块，并且这种情况无限持续下去。

3. 我们还默认假设 g 内置了某个小参数或形式参数 $\hbar$，且结果 $T(g)$ 要么是收敛幂级数，要么是形式级数。

6.2 组合变形量子化

回顾一下，P_2 由约化系统中的尖端生成。设 $g \in \mathsf{P}^2$ 为一个 2-上链，它将$1 \otimes s \otimes 1$ （其中 s 是一个尖端）映射到 g_s。那么， $m + T(g) \in \mathsf{B}^2$ 给出了 m的一个变形，其结合律将由 MC 方程 (6.13) 确定。但在讨论这一点之前，我们先对这一变形乘积给出一个组合描述。事实上，我们将陈述一个定理，它是当前工作的技术基础。

定理 6.7. （ *[BW20]* 中的定理 *7.21*）给定任意 $g \in \mathsf{P}^2,$ ，我们可以定义一个乘法规则，如下所示】【。

$$u \star v := \overline{uv} + T(g)([u|v]). \tag{6.15}$$

目前，这个乘法不满足结合律，但可以描述为使用变形约化系统进行右约化

$$s \mapsto f_s + g_s. \tag{6.16}$$

直到 uv 变为不可约。

证明。（略述）在证明中，放在字上的横线（例如 $u_1 \cdots \overline{u_n}$）表示该字已被约化。注意，未变形约化系统允许以任意方式约化一个字，但所得结果相同。我们还使用简写 $T(g) \to T$。

我们首先证明，若 uv 也不可约，则 $T([u|v]) = 0$。事实上，将 $[u|v]$ 代入图 6.14 中树的根处。该项给出的求值为 $gG_2[u|v]$，根据假定的不可约性，它等于零。接下来，将 h_2 作用于 $[u|v]$ ，得到的只有 $-[\mathrm{spl}'(u)|v]$ 。我们记作 $[\mathrm{spl}'(u)|v] = \sum_i x_i[y_i|z_i|v]$。递归关系表明，我们要求值的是 $T[y_i|z_i]$和 $T[z_i|v]$。对于这两项，我们重复同样的论证；不过此时 y_i、 z_i 的长度更短，最终 spl' 在它们上面将变为零。

现在假设 uv是可约的，而 u只有一个字母。我们将 $v = v_1 \cdots v_n$ 和 $uv = sb$记作 s，其中最右尖端出现在 uv

$$uv = \underbrace{uv_1 \cdots v_i}_{s} \underbrace{v_{i+1} \cdots v_n}_{b}$$

注意， b 在此处是不可约的。为了计算 $gG_2[u|v]$，我们使用（6.7）式，得到 $\overline{g_s b} + gG_2[f_s|b]$。 T 中的剩余项给出

$$\frac{1}{2}[T,T](h_2[u|v]) = \frac{1}{2}[T,T]\big([\mathrm{spl}'(s - f_s)|b] + h_2'[f_s|b]\big) = \frac{1}{2}[T,T]\big([\mathrm{spl}'(s)|b]\big) + \frac{1}{2}[T,T](h_2[f_s|b]).$$

我们回顾一下式 (3.2)，即

$$\frac{1}{2}[T,T] = T \circ_1 T - T \circ_2 T,$$

从而得到

$$\frac{1}{2}[T,T]([\mathrm{spl}'(s)|b]) = T \circ_1 T([\mathrm{spl}'(s)|b]) = T([g_s|b]).$$

为看清最后两个等式，我们将 $[\mathrm{spl}'(s)|b]$ 展开为

$$[\mathrm{spl}'(s)|b] = [u|v_1 \cdots v_i|b] + u[v_1|v_2 \cdots v_i|b] + \cdots + \overline{uv_1 \cdots v_{i-2}}[v_{i-1}|v_i|b].$$

在 T上计算 $[v_j \cdots v_i|b]$ 的结果为零，因为 $v_j \cdots v_i b$ 不可约，因此 $T \circ_2 T[\mathrm{spl}'(s)|b] = 0$。至于 $T \circ_1 T[\mathrm{spl}'(s)|b]$，我们需要计算 $T[\mathrm{spl}'(s)]$。只有求和项 $[u|v_1 \cdots v_i]$的结果非零，其他项均因不可约性而为零。我们有 $T[u|v_1 \cdots v_i] = gG_2[u|v_1 \cdots v_i] = g_s$。综合以上结果

$$\begin{aligned} u \star v &= \overline{uv} + \overline{g_s b} + gG_2[f_s|b] + T([g_s|b]) + \frac{1}{2}[T,T](h_2[f_s|b]) \\ &= \overline{f_s b} + \overline{g_s b} + T([f_s + g_s|b]) = (f_s + g_s) \star b. \end{aligned}$$

这个公式说明，将 u 与 v相乘时，先将遇到的第一个尖端 s 化简为 $f_s + g_s$，然后从头开始处理$(f_s + g_s) \star b$。接下来将证明，对于长度大于 1 的 u，总能将其化简为长度为 1 的情形。特别地，要计算$(f_s + g_s) \star b$，可以先将 $f_s + g_s$ 分裂成单字母词，再逐个与 b 相乘。这样便完成了证明。

将 u 写为 u_1u_2，其中 u_1 只有一个字母。

$$\begin{aligned} (u_1u_2) \star v &= \overline{u_1u_2v} + \underbrace{\overline{u_1 gG_2([u_2|v])} + gG_2([u_1|\overline{u_2v}])}_{(6.6)} + \frac{1}{2}[T,T]\big(\underbrace{u_1 h_2'[u_2|v] + h_2'[u_1|\overline{u_2v}]}_{(6.8)} - [\mathrm{spl}'(u_1u_2)|v]\big) \\ &= \overline{u_1u_2v} + \overline{u_1 T[u_2|v]} + gG_2([u_1|\overline{u_2v}]) + \frac{1}{2}[T,T]\big(h_2'[u_1|\overline{u_2v}] - [u_1|u_2|v]\big) \\ &= \overline{u_1u_2v} + \overline{u_1 T[u_2|v]} + T([u_1|\overline{u_2v}]) + \frac{1}{2}[T,T]\big(-[u_1|u_2|v]\big) \end{aligned}$$

其中我们使用了 $[\mathrm{spl}'(u_1u_2)|v] = u_1[\mathrm{spl}'(u_2)|v] + [u_1|u_2|v]$。注意，

$$\frac{1}{2}[T,T]\big(-[u_1|u_2|v]\big) = T \circ_2 T([u_1|u_2|v]) = T([u_1|u_2 \star v - \overline{u_2v}]),$$

因此

$$\begin{aligned} (u_1u_2) \star v &= \overline{u_1u_2v} + \overline{u_1 T[u_2|v]} + T([u_1|\overline{u_2v}]) + T([u_1|u_2 \star v]) - T([u_1|\overline{u_2v}]) \\ &= \overline{u_1(u_2 \star v)} + T([u_1|u_2 \star v]) = u_1 \star (u_2 \star v). \end{aligned}$$

通过这一过程，可以逐步缩短 u 的长度，直至其长度为 1。 . □

正如我们所回顾的，如果 $T(g)$ 满足 MC 方程 (6.13)，那么 $\star$ 将是结合的。求解 MC 方程是一项艰巨的任务，而接下来的定理使我们能够避开这一过程。回顾一下，Chouhy-Solotar 分解 (5.1) 的三次项由歧义 A_2 生成（见第 5.1 节）。如果 $\star$ 是结合的，那么至少对于所有歧义 uvw，我们必须有

$$(u \star v) \star w = u \star (v \star w). \tag{6.17}$$

定理 6.8。 （*[BW20]* 中的定理 *7.37*）条件 (6.17) 也是充分条件，即星乘积(6.15) 是结合的，当且仅当对于生成A_2 的所有歧义，(6.17) 均成立。

这个结果在某种程度上是意料之中的：因为歧义可能会使我们的基于归约的乘法规则依赖于加括号方式，但如果能确保所有歧义都满足结合律，我们就大功告成了。

证明。（概要）这里的关键在于，L_∞-映射 T 必须是可逆的，因此 $g \in \mathsf{P}^2$ 满足（6.12）当且仅当 $T(g) \in \mathsf{B}^2$满足（6.13）。因此，我们只需检查 $\mathsf{P}_3 = \mathsf{A}_2$的所有生成元是否满足前一个条件。设 uvw 为一个歧义，根据定义 5.4，u 只有一个字母，且 $uv = s$ 是一个尖端，$vw = t$ 也同样是一个尖端。这些尖端具有约化 $s \mapsto f_s$ 和 $t \mapsto f_t$，而余链 g 具有 $g(1 \otimes s \otimes 1) = g_s$ 和 $g(1 \otimes t \otimes 1) = g_t$。

我们需要进行检查。

$$(\delta g - \frac{1}{2}F^3[T,T])(1 \otimes uvw \otimes 1) \stackrel{?}{=} 0. \tag{6.18}$$

第一项根据（5.6）中对 ∂_3 的描述，给出 $g(1 \otimes s \otimes w - u \otimes t \otimes 1) + gG_2[f_s|w] - gG_2[u|f_t]$。因此

$$(\delta g)(1 \otimes uvw \otimes 1) = \overline{g_s w} - \overline{u g_t} + gG_2[f_s|w] - gG_2[u|f_t].$$

对于（6.18）中的其余项，我们对 F_3 使用（6.9）

$$-F_3(1 \otimes uvw \otimes 1) = [\mathrm{spl}'(s)|w] + h_2[f_s|w] - h_2[u|f_t]$$

我们计算每一项

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}[T,T]([\mathrm{spl}'(s)|w]) &= (T \circ_1 T - T \circ_2 T)[\mathrm{spl}'(s)|w] \\
&= T \circ_1 T([u|v|w] + \cancel{u[\mathrm{spl}'(v)|w]}) - T \circ_2 T(([u|v|w] + \cancel{u[\mathrm{spl}'(v)|w]}) \\
&= T[g_s|w] - T[u|g_t], \qquad (6.19) \\
\frac{1}{2}[T,T](h_2[f_s|w] - h_2[u|f_t]) &\overset{(6.14)}{=} T[f_s|w] - gG_2[f_s|w] - T[u|f_t] + gG_2[u|f_t]
\end{aligned}$$

其中，划去的项是由于 $T[a|b] = 0$ if a，b，ab均为不可约而产生的，这一点已在定理 6.7 中得到证明。因此，综上可得

$$\begin{aligned}
MC(g)(1 \otimes uvw \otimes 1) &= \overline{g_s w} - \overline{u g_t} + gG_2[f_s|w] - gG_2[u|f_t] \\
&\quad + T[g_s|w] - T[u|g_t] + T[f_s|w] - gG_2[f_s|w] - T[u|f_t] + gG_2[u|f_t] \\
&= \overline{(f_s + g_s)w} - \overline{u(f_t + g_t)} + T[f_s + g_s|w] - T[u|f_t + g_t] \\
&= (f_s + g_s) \star w - u \star (f_t + g_t) \\
&= (u \star v) \star w - u \star (v \star w).
\end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

7 热身示例

7.1 A_1

现在我们处理 wit 回顾一下 A_1 奇点示例。我们最终的目标是变形后的奇点 y

$$X_{r^2} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 | f_{r^2}(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - r^2 = 0\}.$$

对于一般的 r，我们称实轨迹为 M_{r^2}，并对嵌入 $M_{r^2} \hookrightarrow X_{r^2}$ 应用通过膜的量子化过程。注意，实轨迹可以有不同的取法。例如，经过变量替换后，可以写成 $f(x) = x_+x_- + 4x_3^2$，其中 $x_\pm = (x_1 \pm ix_2)/2$。令 $x_\pm$, x_3 为实数会得到一个不同的M'（非紧致）。 [GW09], 对此有详尽的讨论，但我们将聚焦于紧致的 M。

然而，我们不是从 f_{r^2} 而是从 f_0开始，并得到一个作为 f_0的非交换保典解析的箭图代数。我们将计算该代数的 HH^2 并进行变形量子化。我们得到两个变形参数，其中一个对应于泊松结构，另一个则是 Kodaira-Spencer 型变形，并将进入上述变形中的 r^2 参数（也就是说，我们通过消解奇点到达变形奇点）。总而言之，对于任意参数q, t, $x_\pm$, x_3的多项式代数变形为

$$\begin{aligned} &x_+ \star x_- = x_- \star x_+ + (q - q^{-1})x_3, \\ &x_3 \star x_+ = x_+ \star x_3 + 2(q - q^{-1})x_+ \\ &x_3 \star x_- = x_- \star x_3 - 2(q - q^{-1})x_-, \\ &2(x_+ \star x_- + x_- \star x_+) + x_3 \star x_3 = (t - q)(t + q - 2q^{-1}). \end{aligned} \tag{7.1}$$

此外，如果 t 满足整性条件

$$\frac{t-q}{q-q^{-1}} = -(n+2),$$

然后我们就恢复了 $(S^2, \omega = \text{Re } \Omega)$ 上的几何量子化，其中 $\omega/2\pi$ 的周期为 n。

我们从例4.1中将 $D^b(X)$ 表示为箭图代数的组合模型开始。变量 $x_{1,2,3}$ 与 $z^{1,2}, w_{1,2}$ 的关系如下:

$$(x_1, x_2, x_3) = [w_1, w_2]\sigma^{1,2,3} \begin{bmatrix} z^1 \\ z^2 \end{bmatrix} = (w_1 z^2 + w_2 z^1, iw_2 z^1 - iw_1 z^2, w_1 z^1 - w_2 z^2) \tag{7.2}$$

其中 $\sigma^{1,2,3}$ 是三个泡利矩阵。关系 $w_i z^i = 0$ 蕴含 $f_0 = 0$。

作为第一步，我们将考察霍赫希尔德上同调 $HH^2(\Lambda)$，以捕捉无穷小变形。虽然可以通过 HKR 映射 (2.1) 轻易计算出来，但我们需要$HH^2(\Lambda)$在上链层面的显式代表元。

命题 7.1. 霍赫希尔德上同调按路径长度分次；在分次 -2处，我们有以下显式余循环

$$\begin{aligned} g(e_1 \otimes z^2 w_2 \otimes e_1) = t_1 e_1, \quad g(e_0 \otimes w_2 z^2 \otimes e_0) = t_0 e_0, \\ g(e_0 \otimes w_1 z^1 w_2 \otimes e_1) = (t_0 - t_1) e_0 w_2 e_1, \quad g(e_1 \otimes z^1 w_1 z^2 \otimes e_0) = (t_1 - t_0) e_1 z^2 e_0. \end{aligned}$$

第二行由第一行确定，因为第二行中出现的关系是冗余的。

证明. 要计算霍赫希尔德上同调，我们可以使用由最优排序 (5.2) 得出的极小分解，也可以使用次优的分解 (5.3)。为作说明，我们采用后者。

令 $g \in HH^2$ 为 2-上链。在分次 -2下，即 g 将路径长度缩短 2 时，很容易验证这一赋值

$$g(e_0 \otimes w_2 z^2 \otimes e_0) = t_0, \quad g(e_1 \otimes z^2 w_2 \otimes e_1) = t_1, \tag{7.3}$$

会导出一个余循环。此外，注意到尖端 $e_1z^1w_1z^2e_0$, $e_0w_1z^1w_2e_1$ 从 $e_1z^2w_2z^2e_0$ 和 $e_0w_2z^2w_2e_1$（它们属于 $\mathbb{P}^3$）映射到其同构像。因此， g 在 $e_1z^1w_1z^2e_0$, $e_0w_1z^1w_2e_1$上的取值完全由 (7.3) 决定。显然，(7.3) 不可能是余边界，因为余边界不可能具有分次 -2。

□

我们可以将 这两个余循环与泊松括号对应起来。根据 HKR 映射，我们预期如下

$$gG_2([a|b]-[b|a]) \sim \{a,b\}.$$

在左端， a， b 是路径；在右端，它们通过（7.2）被视为函数。泊松括号由全纯辛形式诱导

$$\Omega = \frac{1}{x_3}dx_1\wedge dx_2 \quad \Rightarrow \quad \{x_1,x_2\}=x_3 \;\; \{x_2,x_3\}=x_1, \;\; \{x_3,x_1\}=x_2. \tag{7.4}$$

注意，泊松括号有 $\{f_0, -\} = 0$，因此可下降到 X_0。

现在计算“交换子” $gG_2([w_2z^1|w_1z^2]-[w_1z^2|w_2z^1])$ 和 $gG_2([w_2z^1|w_1z^1]-[w_1z^1|w_2z^1])$，为此我们需要（如往常一样，在含义明确时省略 e_i）

$$\begin{aligned}
gG_2[w_2z^1|w_1z^2] &= -(t_1-t_0)w_1z^1+t_0w_1z^1,\\
gG_2[w_1z^2|w_2z^1] &= w_1z^1t_1\\
gG_2[w_2z^1|w_1z^1] &= 0,\\
gG_2[w_1z^1|w_2z^1] &= (t_0-t_1)w_2z^1.
\end{aligned}$$

将这些转化为泊松括号

$$\begin{aligned}
\{x_+,x_-\} &= (t_1-t_0)x_3\\
\{x_3/2,x_-\} &= (t_0-t_1)x_-,
\end{aligned}$$

与（7.4）比较，我们得到

$$gG_2([a|b]-[b|a]) = 2i(t_1-t_0)\{a,b\}.$$

目前我们看到，差值 t_0-t_1 控制了泊松结构所引起的变形。另一个线性组合 t_0， t_1 则控制 Kodaira-Spencer 变形。回想一下，对于代数簇 X，上同调群 $H^1(X, TX)$ 控制着复结构的无穷小变形。但如果 X是仿射的，由多项式 f_0的零点定义，那么 $H^1(X, TX)$ 也可以看作是对 f的变形。根据 [Tju 69], ，这类变形由下式给出

$$H^1(X,TX) \simeq \frac{\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]}{\langle f, \partial_{x_i}f\rangle}. \tag{7.5}$$

对于我们的 f_0，上述商为 $\mathbb{C}$，即一个常数变形 $f_0 \to f_0+\epsilon$。

确定了无穷小变形后，我们在第 6.2 节使用变形量子化的组合版本来得到一个有限变形。根据定理 6.8 的判据，整个过程轻而易举。我们得到如下约化系统的变形

$$\begin{aligned}
&z^2w_2 \to -z^1w_1+(t-q^{-1})e_1,\\
&w_2z^2 \to -w_1z^1+(t-q)e_0,\\
&z^1w_1z^2 \to z^2w_1z^1+(q-q^{-1})z^2,\\
&w_1z^1w_2 \to w_2z^1w_1-(q-q^{-1})w_2.
\end{aligned} \tag{7.6}$$

使用变形约化系统进行右约化会得到 $\star$ 乘积。这里，参数 q 对应于泊松结构，而 $t-q$ 对应于 $f_0 \rightsquigarrow f_{r^2}$。为确保这给出一个结合代数，我们只需检查歧义 $z^2w_2z^2$ 和 $w_2z^2w_2$ 上的结合律；而接下来的备注指出，连这一步也不必做。

注 7.2. 我们指出，要求在 $z^2w_2z^2$ 和 $w_2z^2w_2$ 上满足结合律后，（7.6）的第三行和第四行便由前两行完全确定。这并不令人意外，因为这两个歧义分别同构映射到 $z^1w_1z^2$ 和 $w_1z^1w_2$（见例 5.7 及其中的备注）。事实上，若采用排序 (5.2)，该代数就有一个长度为 2 的极小分解。在这种情况下，一开始就不存在歧义。我们将在下文对其他全局维数为 2 的代数（如 A_n 和 D_4）采用同样的推理。

我们可以将其转 换为写在 $x_{1,\ 2,\ 3}$ 中的变形乘法。首先需要重写 (7.2)。 g

$$(x_+, x_-, x_3) = (w_1z^2, w_2z^1, 2w_1z^1 - t + q).$$

然后我们计算星乘积

$$\begin{aligned}
x_+ \star x_- &= (w_1z^2) \star (w_2z^1) = -w_1z^1w_1z^1 + (t-q^{-1})w_1z^1, \\
x_- \star x_+ &= (w_2z^1) \star (w_1z^2) = w_2 \star (z^2w_1z^1) + w_2 \star z^2(q-q^{-1}) \\
&= -w_1z^1w_1z^1 + (t-q)w_1z^1 - w_1z^1(q-q^{-1}) + (t-q)(q-q^{-1}), \\
x_3 \star x_+ &= 2w_1z^2w_1z^1 + 2(q-q^{-1})x_+ - (t-q)x_+, \\
x_+ \star x_3 &= 2w_1z^2w_1z^1 - (t-q)x_+, \\
x_3 \star x_- &= 2w_2z^1w_1z^1 - 2(q-q^{-1})x_- - (t-q)x_-, \\
x_- \star x_3 &= 2w_2z^1w_1z^1 - (t-q)x_-.
\end{aligned}$$

由这些关系可得 (7.1)。本节余下部分中，我们省略 $\star$。

到目前为止， q, t 都是任意的，但由于 $t-q$ 对应于f_{r^2} 中的变形参数，因而控制着 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=r^2$的实轨迹的大小，而 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=r^2$是一个 2-球面。这里的大小对应于几何量子化中 K¨ahler 形式的大小，因此我们预期会出现某种整性。

我们令$\Lambda_{q,t}$ 为变形路径代数，并且

$$e_i\Lambda_{q,t}e_j = \{\text{Deformed paths from } e_j \text{ to } e_i\}.$$

由这一识别引出了膜图景：

$$e_0\Lambda_{q,t}e_0 \sim \hom(B_{cc}, B_{cc}).$$

路径 $e_0\Lambda e_0$ 已被识别为 X_0 上的全纯函数，如式 (7.2) 所示，因此$e_0\Lambda_{q,t}e_0$ 是X_{r^2}上的q,t-变形函数。用第 2 节的术语来说，人们将它们视为在 B_{cc}之间延伸的弦。为了理解这个代数，我们作一些重新定义

$$E = \frac{1}{q-q^{-1}}w_1z^2, \quad F = \frac{1}{q-q^{-1}}w_2z^1, \quad H = \frac{1}{q-q^{-1}}(w_1z^1 - \frac{1}{2}(t-q)),$$

这些满足 $\mathfrak{sl}(2)$ 的标准对易关系

$$[E,F] = 2H, \quad [H,E] = E, \quad [H,F] = -F. \tag{7.7}$$

鉴于关系 (7.7)，我们得到如下对应关系

$$e_0\Lambda_{q,t}e_0 \sim U_{\mathfrak{sl}(2)}$$

$\mathfrak{sl}(2)$ 的泛包络代数。

接下来，我们希望找到一些有趣的商模，即膜，尤其是与 S^2 的几何量子化相对应的膜。我们对 $e_0\Lambda_{q,t}e_0$ 施加以下条件。

$$e_0w_1z^1 = \lambda e_0,\quad e_0w_2z^2 = (t-q-\lambda)e_0,\quad e_0w_2z^1 = 0.$$

仅当 $\lambda = -q+q^{-1}$ 时，这才是自洽的:

$$0 = e_0w_2z^1w_1 = -e_0w_2z^2w_2 + (t-q^{-1})e_0w_2 = -(t-q-\lambda)e_0w_2 + (t-q^{-1})e_0w_2 = (q-q^{-1}+\lambda)e_0w_2$$

在一条路径中，我们总是可以使用 (7.7) 将 H 和 F 移到左边，它们作用于 e_0 时会带有权 λ，或者将其消去。读者应该已经注意到，这正是 Verma 模。

$$\mathbb{C}_\mu \otimes_{B_-} U_{\mathfrak{sl}(2)}. \tag{7.8}$$

这里，B_- 由 H, F生成。对 B_- 取张量积意味着 H, F可以移过去作用于$\mathbb{C}_\mu$，其中 H 以权 μ 作用，而 F 将其消去。唉，我们的 Verma 模看起来是倒过来的，因为我们的路径是向左走的。不过无论如何，这被视为同态(B, B_{cc})：在某个膜B 与 B_{cc}之间拉伸的弦。

要找到与几何量子化中的膜对应的 B，我们需要找到一些有限维商模，这正是整性发挥作用的地方。

引理 7.3。如果我们令

$$\frac{t-q}{q-q^{-1}} = -(n+2)$$

那么我们可以从左侧对 $e_0\Lambda_{q,t}e_0$ 取商 $e_0(w_1z^2)^{n+1}e_0$，得到一个维数为 $n+1$ 的模。

事后看来，我们本应使用 $t-q$ 作为变形参数，这样（7.1）看起来也会更美观。此外，也可以对 $e_1\Lambda_{q,t}e_0$ 完全进行同样的分析。

证明。 我们只需检查一致性。由于 e_0E^{n+1} 被设为零，我们从右侧将 F 乘到它上面

$$e_0E^{n+1}F = (n+1)e_0(2H-n)E^n.$$

一致性要求 $2e_0H = ne_0$，因此

$$\frac{1}{q-q^{-1}}(-q+q^{-1}-\frac{1}{2}(t-q)) = \frac{n}{2}$$

解此条件即可得到所述条件。 □

我们在此处取的商在 Verma 模的语境中是很熟悉的。注意，H 以权为 e_0 作用于

$$\mu = -1-\frac{1}{2}\frac{t-q}{q-q^{-1}}.$$

对于一般的 μ，Verma 模 (7.8) 是单的。但如果 μ 恰好是 $\mathfrak{sl}(2)$ 的支配权，那么就存在一个有限维商模，它正是权为 μ 的最高权表示。这也与几何量子化的图景相符，而几何量子化本身是 Borel-Weil 定理的一个特例。

7.2 A_n

A_n 情形是对 A_1的一种相当简单的推广。从{$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 | f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^{n+1} = 0$}出发，我们得到其 McKay–Auslander–Reiten 箭图（ 4.6 ）。该箭图代数的极小分解也非常简单（对于整体维数为 2 的箭图代数，其极小分解具有相同的形式）。利用这一分解，我们将得到 $HH^2(\Lambda)$，并继续进行变形量子化。

首先，箭图的关系见式（4.7）

$$R_i = (e_i \leftarrow e_{i-1} \leftarrow e_i) - (e_i \leftarrow e_{i+1} \leftarrow e_i) = 0,$$

为便于记号，我们将这些命名为 R_i。分解如下

$$\mathsf{P}_\bullet: \quad \bigoplus_i \Lambda e_i \otimes R_i \otimes e_i\Lambda \to \bigoplus_i (\Lambda e_{i+1} \otimes e_i\Lambda \oplus \Lambda e_{i-1} \otimes e_i\Lambda) \to \bigoplus_i \Lambda e_i \otimes e_i\Lambda.$$

根据　　在 A_1 情形中积累的经验，我们考虑表示 HH^2 的显式余循环

$$g(e_i \otimes R_i \otimes e_i) = t_i e_i.$$

这将导出一个变形

$$(e_i \leftarrow e_{i-1} \leftarrow e_i) = (e_i \leftarrow e_{i+1} \leftarrow e_i) + t_i e_i \tag{7.9}$$

从而得到一个无需进一步检查的结合代数。

要将箭图代数转换回 X 上的函数，我们令

$$\begin{aligned} x_+ &= e_0 \leftarrow e_n \leftarrow e_{n-1} \leftarrow \cdots \leftarrow e_1 \leftarrow e_0, \\ x_- &= e_0 \leftarrow e_1 \leftarrow \cdots \leftarrow e_{n-1} \leftarrow e_n \leftarrow e_0, \\ x_3 &= e_0 \leftarrow e_1 \leftarrow e_0. \end{aligned}$$

变形后的关系 (7.9) 立即给出

$$\begin{aligned} x_3 \star x_+ &= x_+ \star x_3 - \sum_0^n t_i x_+, \\ x_3 \star x_- &= x_- \star x_3 + \sum_0^n t_i x_-, \\ x_- \star x_+ &= (x_3 - \sum_1^n t_i)(x_3 - \sum_1^{n-1} t_i) \cdots (x_3 - t_1)x_3, \\ x_+ \star x_- &= (x_3 + t_0 + \sum_1^n t_i)(x_3 + t_0 + \sum_2^n t_i) \cdots (x_3 + t_0). \end{aligned} \tag{7.10}$$

Smith 在 [Smi90] 中研究了这个代数，并定义了一个类似于 $U\mathfrak{sl}(2)$ 的代数

$$[H, E] = E, \quad [H, F] = -F, \quad [E, F] = f(H),$$

对于某个多项式函数 f。令 $\sum_0^n t_i = t$ 并将 $x_+ = E$、 $x_- = F$ 和 $x_3 = H$ 视为相同，则由 (7.10) 得到

$$\begin{aligned} &[H, E] = E, \quad [H, F] = -F, \quad FE = v(H), \quad EF = v(H + t), \\ &v(x) = (x - \sum_1^n t_i)(x - \sum_1^{n-1} t_i) \cdots (x - t_1)x. \end{aligned}$$

因此，我们可以令 $f(x) = v(x+t) - v(x)$。这一结果已在 [HOD93], 中指出，其中也研究了这一代数的各种性质。

现在我们对 A_1 情形重复上述推理，并识别出一些膜。再次考虑 $e_0\Lambda_{\bar{t}}e_0$，我们希望施加

$$e_0H = \lambda e_0, \quad e_0F = 0, \quad e_0E^N = 0.$$

一致性要求

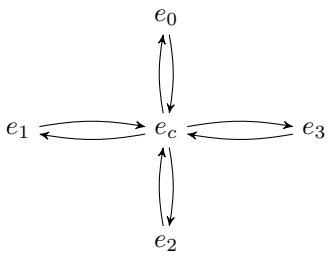
$$\begin{aligned} 0 = e_0F &\Rightarrow 0 = e_0FE = e_0v(H), \\ 0 = e_0E^N &\Rightarrow 0 = e_0E^NF = e_0E^{N-1}v(H+t) = e_0v(H+Nt)E^{N-1} \end{aligned}$$

这表明 λ 和 $\lambda + Nt$ 都必须是 $v(x)$ 的根。

7.3 D_4

在 [HOD93] 中研究 A_n-奇点变形的方法，对于其他克莱因奇点而言不太实用。在 [CBH98] 中，则采用了另一种更简单的方法，即直接对斜群代数进行变形。这里我们以 D_4 为例，说明这种变形也可由变形量子化得到。

D_4 奇点由 $X = \{(u, v, w) \in \mathbb{C}^3 | f = v^2 - u^2w + 4w^3 = 0\}$ 给出。麦凯-奥斯兰德-雷滕箭图如 (4.8) 所示，



$$\begin{gathered} (e_i \leftarrow e_c \leftarrow e_i) = 0, \quad i = 0,1,2,3 \\ \textstyle\sum_i (e_c \leftarrow e_i \leftarrow e_c) = 0 \end{gathered} \tag{7.11}$$

我们将关系变形为

$$\begin{aligned} &(e_i \leftarrow e_c \leftarrow e_i) = t_ie_i, \quad i = 0,1,2,3, \\ &\sum_i (e_c \leftarrow e_i \leftarrow e_c) = se_c. \end{aligned}$$

我们将箭图代数转换回 u, v, w 变量。考虑以下起点和终点均为 e_0的路径。

$$\begin{aligned} &z_1 = (e_0 \leftarrow e_c \leftarrow e_1 \leftarrow e_c \leftarrow e_0), \quad z_2 = (e_0 \leftarrow e_c \leftarrow e_2 \leftarrow e_c \leftarrow e_0), \\ &z_{21} = (e_0 \leftarrow e_c \leftarrow e_2 \leftarrow e_c \leftarrow e_1 \leftarrow e_c \leftarrow e_0). \end{aligned}$$

沿着 (4.8)、(4.9) 中给出的映射，我们得到它们与 u、v、w 的关系。

$$\begin{gathered} w = z_1, \quad u = -4z_2 - 2z_1, \quad v = 4z_{21}, \\ v^2 - u^2w + 4w^3 = 0 \Leftrightarrow z_{21}z_{21} = z_2z_1z_1 + z_2z_2z_1. \end{gathered}$$

变形后，这些关系变成

$$\begin{aligned}
z_1 \star z_2 &= z_2 \star z_1 - 2s_t z_{21} - s_t(s_{03}s_0t_0 - (s_{01}+s_{03})z_1 - (s_{02}+s_{03})z_2),\\
z_1 \star z_{21} &= z_{21} \star z_1 - s_t(z_1 \star z_1 + 2z_2 \star z_1 - (s_{12}+s_{13})z_{21})\\
&\quad -\big(-(s_{12}+s_{13}+s_{03})s_0t_0 + s_{13}s_1t_1 + (s_{12}+s_{13})(s_{01}s_{13})\big)z_1,\\
z_2 \star z_{21} &= z_{21}z_2 + s_t z_2 \star z_2 + s_t(2z_2 \star z_1 - (s_{12}+s_{23})z_{21} + (-s_0t_0 + s_{23}s_{02})z_2),\\
z_{21} \star z_{21} &= z_2 \star z_1 \star z_1 + z_2 \star z_2 \star z_1 - (s_{23}+s_{12})z_{21} \star z_1 - (s_{12}+s_{13})z_{21} \star z_2\\
&\quad +(-s_t(s_{12}+s_{13}) + s_{02}s_{23} - s_0t_0)z_2 \star z_1 - s_t(s_{12}+s_{13})z_2 \star z_2\\
&\quad +\big((s_{12}+s_{13})(s_2t_2 + s_{02}s_{12} + s_ts_{23}) - s_{13}s_1t_1\big)z_{21}\\
&\quad -s_t(s_{12}+s_{13})(-s_0t_0 + s_{23}s_{02})z_2,
\end{aligned} \tag{7.12}$$

其中 $s_{i\cdots k} := s - t_i - \cdots - t_k$ 和 $s_t = s_{01} + s_{23}$。不建议读者手动验证结合律，写几行代码可能会有所帮助。

最后，我们希望已经使读者信服我们在引言中提出的口号："做得更多，就是做得更少"。我们并非仅仅对交换代数 $\mathbb{C}[u,v,w]/\mathrm{h}f\mathrm{i}$ 进行变形，而是对整个层的导出范畴进行变形，这反而需要更少的工作量，然而由此得到的变形代数 (7.12) 却相当复杂。不过，我们尚不清楚代数 (7.12) 本身是否具有独立的研究价值。

8 $T^*\mathbb{P}^2$

在上述预备章节中，所有箭图代数的整体维数均为 2，因此不存在按阶求解 MC 方程（3.4）的潜在障碍。本节将讨论一个整体维数为 4 的示例，以展示第 6.2 节中回顾的组合变形量子化方法的优越性。我们首先介绍其研究动机。

8.1 动机：广义 Kähler 结构

广义Kähler结构（GKS）出现在某些二维超对称σ模型的目标空间中。这种几何结构以一种自然的方式融合了复几何与辛几何，并被寄望于在理解镜像对称方面发挥重要作用。

在 [Gua14] 中已证明，GKS 等价于双厄米几何 $(M,\ g,\ I_+,\ I_-)$，其中 $I_\pm$ 是两个复结构，其挠率满足某些约束。在 [BGZ18], 的工作中，Bischoff、Gualtieri 和 Zabzine 阐明了广义 K¨ahler 势的几何本质，从而"解决"了 GKS。他们构造中的关键要素是一个全纯辛群胚 $(X,\ J,\ \Omega)$，其中 $M \hookrightarrow X$ 作为单位空间。从该群胚可以相当简洁地写出两个复结构 $I_\pm$；更重要的是，[BG22] 指出，嵌入 $M \hookrightarrow X$ 是对 [GW09] 中膜量子化所需复化的一种更好的实现。

在这一设定中，量子化的膜图景由此产生，因为可以将 M 及其预量子化线丛视为膜 B，而 B_{cc} 则充满整个 X。弦，即同态$(B,\ B_{cc})$或同态$(B_{cc},\ B_{cc})$，会因 Ω 而发生变形。还需要将 Ω 变形为 $\Omega + F$，其中 $\to$ 是某个闭实二形式（这是求解 $I_\pm$ 时所用数据的一部分，见 [BGZ18] 第 1 节。此处不会涉及 F 的细节），它会使 X 的复结构发生变形。这两种变形都可以纳入我们当前的框架。

另请注意， X 并非只是 M 的某种普通“复化”，因为它还具有辛群胚结构，因此其量子化也与辛群胚方法的量子化 [Haw06]相关。Bischoff 和 Gualtieri 在 [BG22] 中针对环面曲面实现了这一量子化思想。在当前的工作中，我们无法达到他们那样的普遍性，但对于 $\mathbb{P}^2$上的某些 GKS，我们可以应用通过极小分解实现膜量子化的思想。

在 [BQT23], 中，构造了一种新颖的 GKS，其中 $I_\pm$ 用椭圆函数表示。现在让我们转向真正与我们相关的几何背景。这个故事中的全纯辛群胚 (X,Ω_0) 在拓扑上是 $T^*\mathbb{P}^2$，但 Ω_0 并非典范形式，它在局部坐标中写作

$$i\Omega_0 = -\xi_1\xi_2 dx^1\wedge dx^2 - \xi_1 x^2 dx^1\wedge d\xi_2 + dx^1\wedge d\xi_1 + dx^2\wedge d\xi_2 + \xi_2 x^1 dx^2\wedge d\xi_1 - x^1x^2 d\xi_1\wedge d\xi_2. \tag{8.1}$$

这里的记号如下：若 $[z^1,z^2,z^3]$ 是齐次坐标，则 $x^1=z^1/z^3$、 $x^2=z^2/z^3$ 是开集 $\{z^3\neq 0\}$ 上的非齐次坐标。$\xi_{1,2}$ 是点 (x^1,x^2) 上方余切纤维的坐标。Ω_0 的逆写作

$$-i\Pi = \underline{\partial_{\xi_1}\wedge\partial_{x^1} + \partial_{\xi_2}\wedge\partial_{x^2}} - \xi_1\xi_2\partial_{\xi_1}\wedge\partial_{\xi_2} + \xi_1 x^2\partial_{\xi_1}\wedge\partial_{x^2} - \xi_2 x^1\partial_{\xi_2}\wedge\partial_{x^1} - x^1x^2\partial_{x^1}\wedge\partial_{x^2} \tag{8.2}$$

带下划线的项对应余切丛上的典范泊松结构。(8.2) 的两部分可以取任意相对系数，仍然是泊松的。我们将 Ω_0 和 Π 在全局上有定义这一点留给读者验证。

如前所述，我们需要考虑一种变形

$$\Omega_0 \to \Omega_t = \Omega_0 + tF. \tag{8.3}$$

这里 F 是一个闭实二形式；这种非全纯对象可能会成为我们这种高度依赖代数方法的研究途径的致命弱点。我们需要设法绕过这一障碍。

总结本节并明确目标：我们将在 $(X=T^2\mathbb{P}^2,\ \Omega_0)$ 的函数上进行变形量子化，同时考虑变形 (8.3)。

8.2 $T^*\mathbb{P}^2$的霍赫希尔德上同调

我们首先研究 究 $HH^2(X)$，以了解 $D^b(X)$ 的无穷小变形。根据 HKR 定理，

$$HH^2(X) = H^2(X,\mathcal{O}_X)\oplus H^1(X,TX)\oplus H^0(X,\wedge^2 TX).$$

设 V 为一个 3 维复向量空间， $\mathbb{P}(V)$ 为射影空间， $X=T^*\mathbb{P}(V)$。这些上同调群很容易计算，部分结果汇集于附录中。特别地，它们带有分次（本质上由纤维幂给出）。我们用 u^2 作为形式参数来记录这个分次。由命题 A.2，对于最低的分次，我们有

$$\begin{aligned} HH^2\big|_{u^{-4}} &= 0,\\ HH^2\big|_{u^{-2}} &= \mathbb{C}\oplus\mathbb{C},\\ HH^2\big|_{u^{0}} &= \ydiagram{3}\oplus\ydiagram{3,3}\oplus 2\ydiagram{2,2}. \end{aligned} \tag{8.4}$$

这里，两个求和项 $\mathbb{C}$ 中的一个对应于 $H^1(X,TX)$，并且是唯一一个非零的 H^1。这一点，即 $H^1(X,TX)$ 的维数为 1，将在稍后我们尝试匹配变形 (8.3) 时发挥重要作用。

仅有 HH^2 还不够，我们还需要它在巴复形和极小分解中的显式余链代表元。不幸的是，我们没有找到巧妙的方法来完成这一工作，因此在附录中，我们采用极小分解给出了一项蛮力计算。最终，对于 (8.4) 中的每一项，我们都在 $SL(3)$ 表示中找到了一个显式余链，并将其列于命题 8.3 中，而 $\times 2$ 与 (8.4) 中的结果相匹配。

接下来需要解决的问题是，如何将泊松结构 (8.2) 与 HH^2 相匹配。为此，我们尝试将 (8.2) 分解为 $SL(3)$ 的表示，并与 (8.4) 相匹配。

引理 8.1. Π 的第一部分在平凡表示下变换，而 (8.2) 的其余项则在 $\oplus$ 下变换。

证明. 我们不使用 $x^{1,2}$ 和 $\xi_{1,2}$ 作为局部坐标，因为这会掩盖 $SL(3)$ 对称性，而改用齐次坐标 $[z^1, z^2, z^3; w_1, w_2, w_3]$，其中 $z^i w_i = 0$。我们声称，Π 可以写成

$$\begin{aligned} -i\Pi &= \frac{1}{3}\sum_{a=1}^{3}\Big(- z^a\partial_{z^a}\wedge z^{a+1}\partial_{z^{a+1}} + z^a\partial_{z^a}\wedge(w_{a+1}\partial_{w_{a+1}} - w_{a-1}\partial_{w_{a-1}}) - w_a\partial_{w_a}\wedge w_{a+1}\partial_{w_{a+1}}\Big) \\ &\quad + \partial_{w_a}\wedge\partial_{z^a}. \end{aligned} \tag{8.5}$$

第一行变换为 或 。为此，注意 $SL(3)$ 的不可约张量表示为 $T^{a_1\cdots}{}_{b_1}{}^{a_m}{}_{\cdots b_n}$，其中 a, b 指标对称，且 T 在任意一对 a, b 指标上均无迹（例如参见 [Col65]）。考察 $z^a\partial_{z^a}\wedge z^{a+1}\partial_{z^{a+1}}$，它的张量分量为 T^{ab}_{cd}，其中 ab 对称，cd 反对称，且 $T^{a,a+1}{}_{,a+1} = 1$。一对反对称逆变指标可以换成一个协变指标：$T^{ab}_{cd}\epsilon^{cde} := D^{abe}$。容易看出，$D$ 关于 $D^{123} = 1$ 完全对称，因此 $D \in \mathfrak{h}$ 类似地，考察对应于张量结构 T^{ab}_{cd} 的中间项，使得 $T^{ba}_{dc} = -T^{ab}_{cd}$ 且 $T^{a,a+1}{}_{,a+1} = 1$。因此，a, b 要么对称而 c, d 反对称，要么反之。两种情况下分别得到 或 。

最后，对于这一论断，如果我们在 (8.5) 中将坐标变换为

$$x^{1,2} = z^{1,2}/z^3, \quad \xi_{1,2} = w_{1,2}z^3, \quad \lambda = z^3, \quad \mu = z^i w_i,$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} (8.5) &= -x^1x^2\partial_{x^1}\wedge\partial_{x^2} - \partial_{x^i}\wedge\partial_{\xi_i} + x^1\xi_2\partial_{x^1}\wedge\partial_{\xi_2} - x^2\xi_1\partial_{x^2}\wedge\partial_{\xi^1} - \xi_1\xi_2\partial_{\xi_1}\wedge\partial_{\xi_2} \\ &\quad + \lambda\partial_\lambda\wedge\partial_\mu + \frac{1}{3}\lambda\partial_\lambda\wedge\big(- x^1\partial_{x^1} + x^2\partial_{x^2} + \xi_1\partial_{\xi_1} - \xi_2\partial_{\xi_2}\big). \end{aligned}$$

当限制为在缩放变换下保持不变的函数时

$$[z^1, z^2, z^3; w_1, w_2, w_3] \to [z^1\lambda, z^2\lambda, z^3\lambda; w_1/\lambda, w_2/\lambda, w_3/\lambda]$$

那么 (8.5) 等于 Π。 □

那么变形 (8.3) 呢？由于 F 不是全纯的，我们需要折中处理，以便纳入 F，同时仍能使用代数方法。但 F 的主要目的是使 X 上的复结构发生变形。事实上，对于任何反全纯的 v，都有 $\iota_v\Omega = 0$，因此我们通过规定：若 $\iota_v(\Omega + tF) = 0$，则称 v 为反全纯的，以此定义新的复结构。Ω F 是闭的，这意味着新的复结构是可积的。还要记住，复结构的无穷小变形由 $H^1(X, TX)$ 编码。下文中，我们将把 F 仅仅视为使复结构发生变形的工具，从而使其与 $H^1(X, TX)$ 相匹配，继而与 $HH^2(X)$ 相匹配。

引理 8.2。 上同调 $H^1(X,TX)$ 对于 $X=T^*\mathbb{P}(V)$而言是一维的。它对应于从 $w_iz^i=0$ 到 $w_iz^i=t$的变形。

证明。 在命题 A.2 中证明了 $H^1(X,\ TX)$ 是 1 维的；我们在那里证明， $H^1(\mathbb{P}(V)\ T\otimes T^*\mathbb{P}(V))\ =\mathbb{C}$ 是对 $H^1(X,\ TX)$ 的唯一贡献项。

我们还回顾一下，对于超曲面， $H^1(X,\ TX)$ 可实现为定义 X 的方程的一种变形。对于我们的 X，它可以如下实现。考虑带有坐标 $z^{1,\ 2,\ 3}$，$w_{1,\ 2,\ 3}$的 $(V\backslash\{0\})\times V^*$，使得 $w_iz^i=0$。然后对一个 $\mathbb{C}^*$ 作用 $[\vec{z},\vec{w}]\to[\lambda\vec{z},\lambda^{-1}\vec{w}]$取商。由于商的存在，我们需要转而使用 Čech 覆盖，并找出 $H^1(X,\ TX)$ 的显式 Čech 代表元。

我们选取开集 $U_i=\{z^i\neq0\}$ 和 $U_{ij}=U_i\cap U_j$，于是 $H^1(X,\ TX)$ 可表示为在 U_{ij} 上局部定义并满足余循环条件的向量场。明确地，令

$$V\big|_{U_{23}}=\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial\xi_2}$$

其中 $\xi_{1,2}=w_{1,2}z^3$ 以及 $x^{1,2}=z^{1,2}/z^3$。对于其他 U_{ij}，选择循环对称的形式，可以验证这给出了 $H^1(X,\ TX)$ 的唯一代表元。这些定义在交集上的向量场U_{ij} 使过渡函数 $U_i\to U_j$发生变形。例如，在 U_2 中，选取局部坐标 $y^{1,3}=z^{1,3}/z^2$ 和 $\eta_{1,3}=w_{1,3}z^2$，过渡函数为

$$\eta_3=-x^2(x^1\xi_1+x^2\xi_2),\quad \eta_1=\xi_1x^2,\quad y^1=x^1/x^2,\quad y^3=1/x^2,\quad V|_{U_{23}}=(1/x^2)\partial_{\xi_2}=-(1/y^3)\partial_{\eta_3}.$$

变形后的过渡函数为

$$\eta_3=-x^2(x^1\xi_1+x^2\xi_2)+\epsilon(-1/y^3).$$

将方程改写为关于 z,w 的形式： $w_3z^2=-(z^2/z^3)(z^1w_1+z^2w_2)+\epsilon(-z^2/z^3)$，得到 $\sum w_iz^i=-\epsilon$。 □

8.3 表示 HH^2的显式余循环

在附录第 A.2 节中，我们得到表示 $HH^2(T^*\mathbb{P}^2)$ 的显式余链

命题 8.3。 在阶 u^{-2}，$HH^2(T^*\mathbb{P}^2)$ 时，其维数为 *2*，其生成元记为 $g_{\emptyset,\ 0}$ 和$g_{\emptyset,\ 1}$。它们在 T_2 上的取值由 (4.11) 给出。

	$[z\cdot\ w]_{11}$	$[w\cdot\ z]_{11}$	$[z\cdot\ w]_{22}$	$[w\cdot\ z]_{00}$
$g_{\emptyset,0}$	e_1	$-e_1$	$\frac{1}{3}e_2$	$-\frac{1}{3}e_0$
$g_{\emptyset,1}$	e_1	e_1	e_2	e_0

其中， $[z\cdot\ w]_{11}$ 是 $e_1\otimes z\cdot w\otimes e_1$ 的简写。

在阶 u^0，$HH^2(T^*\mathbb{P}^2)$ 有四个分量，按其在 $SL(3)$ 下的表示排列：

$g_{\square\square\square}$, $g_{\square\square\\\square\square}$ 和 $g_{\square\square\\\square}$。它们在 $\mathsf{T}_{\square\square\\\square}$ 上取值，得到s $\quad$ $_{,a}$

	$[z^{\bullet}\ w]_{11}$	$[w^{\bullet}\ z]_{11}$	$[z^{\bullet}\ w]_{22}$	$[w^{\bullet}\ z]_{00}$	$[z^{[i}z^{j]}]_{20}$	$[w_{[i}w_{j]}]_{02}$
$\square\square\square$	0	0	0	0	$\epsilon^{ijr}D_{rkl}[z^k z^l]_{20}$	0
$\square\square\\\square\square$	0	0	0	0	0	$-\epsilon_{ijr}\bar{D}^{rkl}[w_k w_l]_{02}$
$\square\square\\\square$	$U^i_j[w_i z^j]_{11}$	$-U^i_j[w_i z^j]_{11}$	$X^i_j[z^j w_i]_{22}$	$-X^i_j[w_i z^j]_{00}$	0	0

	$[w_i, z^j]_{tf,11}$
$\square\square\square$	$\epsilon^{jlr}D_{rik}[w_l z^k]_{11}$
$\square\square\\\square\square$	$\epsilon_{rik}\bar{D}^{rjl}[w_l z^k]_{11}$
$\square\square\\\square$	$(3X-U)^k_i[w_k z^j]_{11}+(3X-U)^j_l[w_i z^l]_{11}-(2X-\frac{2}{3}U)^k_l\delta^j_i[w_k z^l]_{11}$

其中， $\bar{D}^{ijk}$、 D_{ijk} 是完全对称的，而 X^i_j、 U^i_j 是无迹张量。

我们已在引理8.1中证明， Π在平凡表示中变换，而 $\mathbf{10}\oplus\mathbf{10}^*$亦如此。因此，我们列出下列2-余循环的求值表。

$$g = a g_{\square\square\square} + b g_{\square\square\\\square\square} + c g_{\emptyset,0} + t g_{\emptyset,1} \tag{8.6}$$

与 $\bar{D}^{123}=1=D_{123}$ 有关。

引理 8.4. 在约化系统的尖端上， g 取值为

$$\begin{aligned}
1:&\quad \langle z^1 z^2\rangle_{20}\to(2a)z^2z^1,\quad \langle z^2z^3\rangle_{20}\to(2a)z^3z^2,\quad \langle z^1z^3\rangle_{20}\to(-2a)z^3z^1\\
2:&\quad \langle w_1w_2\rangle_{02}\to(-2b)w_2w_1,\quad \langle w_2w_3\rangle_{02}\to(-2b)w_3w_2,\quad \langle w_1w_3\rangle_{02}\to(2b)w_3w_1\\
3:&\quad \langle z^1w_2\rangle_{11}\to(b-a)w_2z^1,\quad \langle z^1w_3\rangle_{11}\to(a-b)w_3z^1,\quad \langle z^2w_3\rangle_{11}\to(b-a)w_3z^2\\
4:&\quad \langle z^2w_1\rangle_{11}\to(a-b)w_1z^2,\quad \langle z^3w_1\rangle_{11}\to(b-a)w_1z^3,\quad \langle z^3w_2\rangle_{11}\to(a-b)w_2z^3\\
5:&\quad \langle z^1w_1\rangle_{11}\to(a+b)w_3z^3+(-a-b)w_2z^2+\frac{2c}{3}\\
6:&\quad \langle z^2w_2\rangle_{11}\to(a+b)w_1z^1+(-a-b)w_3z^3+\frac{2c}{3}\\
7:&\quad \langle z^3w_3\rangle_{11}\to(-a-b)w_1z^1+(a+b)w_2z^2+(t-\frac{c}{3})\\
8:&\quad \langle w_3z^3\rangle_{11}\to(t-c),\quad \langle w_3z^3\rangle_{00}\to(t-\frac{c}{3}),\quad \langle z^3w_3\rangle_{22}\to(\frac{c}{3}+t).
\end{aligned}\tag{8.7}$$

我们强调，每一项的左端都是约化系统的尖端，而右端属于 Λ （即 Λ 中的所有关系都得到满足）。此外，我们没有在右端写出幂等元，因为它们与左端一致。

证明。 证明只是对表 8.3 的应用。由于其中存在一些微妙之处，我们将给出一些如何得到 (8.7) 的示例。对于尖端 $\mathbf{h}z^1z^2\mathbf{i}_{20},$ ，回想一下，它表示 (4.11) 中的关系 $[z^{[1}z^{2]}]_{20}=e_2\otimes z^{[1}z^{2]}\otimes e_0$ ； 查看该表，它计算为

$$[z^{[i}z^{j]}]_{20}\xrightarrow{g}\epsilon^{ijr}C_{rkl}[z^kz^l]_{20}=2\epsilon^{123}D_{312}[z^1z^2]_{20}=2[z^2z^1]_{20}.$$

再看一个示例 $[z^1w_1]_{11}$，它表示关系 $e_1\otimes[z^1,w_1]\otimes e_1=e_1\otimes[z^1,w_1]_{tf}\otimes e_1+(1/3)e_1\otimes(z^iw_i-w_iz^i)\otimes e_1$, 其中我们将无迹部分和迹部分分开了。其计算结果为

$$\begin{aligned}
[z^1w_1-w_1z^1]_{11}&\xrightarrow{g}-a\epsilon^{1lr}D_{r1k}[w_lz^k]_{11}-b\epsilon_{r1k}\bar{D}^{r1l}[w_lz^k]_{11}+\frac{1}{3}(c+t)-\frac{1}{3}(-c+t)\\
&=-a[w_2z^2-w_3z^3]_{11}-b[-w_3z^3+w_2z^2]_{11}+\frac{2}{3}c.
\end{aligned}$$

□

在公式（5.8）、（5.9）和（5.10）中列出的其余多余尖端上计算得到的 2-余循环，已由上述列表完全确定，但为方便读者起见，我们仍将其记录如下

$$
\begin{aligned}
9: &\quad \langle z^1 w_1 z^2\rangle_{21} \to (-2a-2b) z^2 w_2 z^2 + (\frac{2c}{3}) z^2 \\
10: &\quad \langle z^1 w_2 z^2\rangle_{21} \to (-2a-2b) z^1 w_1 z^1 + (-\frac{2c}{3}) z^1 \\
11: &\quad \langle z^1 w_3 z^2\rangle_{21} \to (4a-2b) z^2 w_3 z^1 \\
12: &\quad \langle z^1 w_1 z^3\rangle_{21} \to (-2a-2b) z^3 w_2 z^2 + (\frac{2c}{3}) z^3 + (-2a-2b) z^3 w_1 z^1 \\
13: &\quad \langle z^1 w_2 z^3\rangle_{21} \to (2b-4a) z^3 w_2 z^1 \\
14: &\quad \langle z^2 w_1 z^3\rangle_{21} \to (4a-2b) z^3 w_1 z^2 \\
15: &\quad \langle z^2 w_2 z^3\rangle_{21} \to (2a+2b) z^3 w_1 z^1 + (\frac{2c}{3}) z^3 + (2a+2b) z^3 w_2 z^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
16: &\quad \langle w_1 z^1 w_2\rangle_{12} \to (2a+2b) w_2 z^2 w_2 + (-\frac{2c}{3}) w_2 \\
17: &\quad \langle w_1 z^2 w_2\rangle_{12} \to (2a+2b) w_1 z^1 w_1 + (\frac{2c}{3}) w_1 \\
18: &\quad \langle w_1 z^3 w_2\rangle_{12} \to (2a-4b) w_2 z^3 w_1 \\
19: &\quad \langle w_1 z^1 w_3\rangle_{12} \to (-\frac{2c}{3}) w_3 + (2a+2b) w_3 z^1 w_1 + (2a+2b) w_3 z^2 w_2 \\
20: &\quad \langle w_1 z^2 w_3\rangle_{12} \to (4b-2a) w_3 z^2 w_1 \\
21: &\quad \langle w_2 z^1 w_3\rangle_{12} \to (2a-4b) w_3 z^1 w_2 \\
22: &\quad \langle w_2 z^2 w_3\rangle_{12} \to (-\frac{2c}{3}) w_3 + (-2a-2b) w_3 z^2 w_2 + (-2a-2b) w_3 z^1 w_1 \\
23: &\quad \langle w_3 w_1 z^3\rangle_{01} \to (t-c) w_1 + (4b) w_2 w_1 z^2 + (2b) w_1 w_1 z^1 \\
24: &\quad \langle w_3 w_2 z^3\rangle_{01} \to (t-c) w_2 + (-2b) w_2 w_1 z^1 + (-2b) w_2 w_2 z^2 .
\end{aligned} \tag{8.8}
$$

引理 8.5. 泊松结构（回顾一下，对于任意 s， Π_s 都是泊松的）

$$-i\Pi_s = s(\partial_{\xi_1}\wedge\partial_{x^1} + \partial_{\xi_2}\wedge\partial_{x^2}) - \xi_1\xi_2\partial_{\xi_1}\wedge\partial_{\xi_2} + \xi_1 x^2\partial_{\xi_1}\wedge\partial_{x^2} - \xi_2 x^1\partial_{\xi_2}\wedge\partial_{x^1} - x^1x^2\partial_{x^1}\wedge\partial_{x^2}$$

对应这些参数

$$a = -\frac{1}{6},\quad b = \frac{1}{6},\quad c = -\frac{3s}{2}.$$

最后，参数 t 对应于 *Kodaira-Spencer* 变形 $w_i z^i = 0 \to w_i z^i = t$。

证明。 首先，关于 t 和 $g_{\emptyset,\ 1}$ 的陈述相当明显。

接下来，我们考虑以 e_0 为起点和终点的路径，它们是 X 上的函数。然后，我们将泊松括号（例如 $\{w_1z^3,\ w_3z^1\}$）与在 (8.6) 上求得的交换子 $[w_1z^3|w_3z^1]_{00} - [w_3z^1|w_1z^3]_{00}$ 相匹配。首先$w_1z^3 = \xi_1$ 和 $w_3z^1 = -\xi_1(x^1)^2 - \xi_2x^1x^2$，因此

$$\{w_1z^3, w_3z^1\} = -s(2\xi_1x^1 + \xi_2x^2) = -s(2w_1z^1 + w_2z^2). \tag{8.9}$$

另一方面， $[w_1z^3|w_3z^1]_{00}$ 求得

$$\begin{aligned}
[w_1z^3|w_3z^1]_{00} &\xrightarrow{G_2} w_1\otimes z^3w_3\otimes z^1 - e_0\otimes w_1w_2\otimes z^2z^1\\
&\xrightarrow{g} (-a-b)w_1w_1z^1z^1 + (a+3b)w_2w_1z^2z^1 + (t-\frac{c}{3})w_1z^1,\\
\big[w_3z^1|w_1z^3\big]_{00} &\xrightarrow{G_2} w_3\otimes z^1w_1\otimes z^3 + w_3w_1\otimes z^1z^3\otimes e_0 + e_0\otimes w_3w_1z^3\otimes z^1\\
&\xrightarrow{g} (t-\frac{5c}{3})w_1z^1 - \frac{2c}{3}w_2z^2 + 3(a+b)w_1w_1z^1z^1 + (5a+7b)w_2w_1z^2z^1 + 2(a+b)w_2w_2z^2z^2
\end{aligned}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}
&gG_2(\big[w_1z^3|w_3z^1\big]_{00} - \big[w_3z^1|w_1z^3\big]_{00})\\
&\qquad = \frac{4c}{3}w_1z^1 + \frac{2c}{3}w_2z^2 - 2(a+b)w_2w_2z^2z^2 - 4(a+b)w_1w_1z^1z^1 - 4(a+b)w_2w_1z^2z^1.
\end{aligned}$$

为了使其与 (8.9) 相符，我们需要 $a=-b, c=-3s/2$。为了进一步确定 a， b，我们考虑

$$\begin{aligned}
\big[w_1z^3|w_2z_1\big]_{00} &\xrightarrow{G_2} w_1\otimes z^3w_2\otimes z^1 + e_0\otimes w_1w_2\otimes z^3z^1\\
&\xrightarrow{g} (a-3b)w_2w_1z^3z^1,\\
\big[w_2z_1|w_1z^3\big]_{00} &\xrightarrow{G_2} w_2\otimes z^1w_1\otimes z^3 + w_2w_1\otimes z^1z^3\otimes e_0\\
&\xrightarrow{g} \frac{2c}{3}w_2z^3 - (3a+b)w_2w_1z^3z^1 - 2(a+b)w_2w_2z^3z^2
\end{aligned}$$

因此，如果

$$gG_2(\big[w_1z^3|w_2z_1\big]_{00} - \big[w_2z_1|w_1z^3\big]_{00}) = (4a-2b)w_2w_1z^3z^1 - \frac{2c}{3}w_2z^3 + 2(a+b)w_2w_2z^3z^2$$

要与 $\{w_1z^3,\ w_2z_1\} = \{\xi_1,\ \xi_2x^1\} = s\xi_2 - \xi_1\xi_2x^1 = sw_2z^3 - w_2w_1z^3z^1$ 相符，我们需要 $b=-a=1/6$。

我们已验证，同样的 a， b， c 适用于所有长度为二的路径。我们指出，这种匹配之所以可能，源于 HKR 映射 (2.1)、 $SL(3)$ 表示的匹配 (8.4) 以及引理8.1。但这些额外的验证确实让我们的结果更令人安心。 □

从这些显式余循环出发，可以为组合星积作一番辩护。实际上，为了确保代码中没有潜藏任何意外情况，我们将 MC 方程求解到了 $\hbar$ 的五阶

定理8.6。 我们得到如下适用于所有阶的乘法规则（其中 $q=\exp(\hbar/3)$，并省略了 $\star$）

$$\begin{aligned}
1:&\quad (z^1z^2)_{20} = q^{-1}z^2z^1,\quad (z^2z^3)_{20} = q^{-1}z^3z^2,\quad (z^1z^3)_{20} = qz^3z^1\\
2:&\quad (w_1w_2)_{02} = q^{-1}w_2w_1,\quad (w_2w_3)_{02} = q^{-1}w_3w_2,\quad (w_1w_3)_{02} = qw_3w_1\\
3:&\quad (z^1w_2)_{11} = qw_2z^1,\quad (z^1w_3)_{11} = q^{-1}w_3z^1,\quad (z^2w_3)_{11} = qw_3z^2\\
4:&\quad (z^2w_1)_{11} = q^{-1}w_1z^2,\quad (z^3w_1)_{11} = qw_1z^3,\quad (z^3w_2)_{11} = q^{-1}w_2z^3\\
5:&\quad (z^1w_1)_{11} = w_1z^1 - s,\quad (z^2w_2)_{11} = w_2z^2 - s\\
6:&\quad (z^3w_3)_{11} = -w_1z^1 - w_2z^2 + t + \frac{s}{2}\\
7:&\quad (w_3z^3)_{11} = -w_1z^1 - w_2z^2 + (t+\frac{3s}{2})\\
8:&\quad (w_3z^3)_{00} = -w_1z^1 - w_2z^2 + (t+\frac{s}{2})\\
9:&\quad (z^3w_3)_{22} = -z^1w_1 - z^2w_2 + (t-\frac{s}{2}).
\end{aligned}\tag{8.10}$$

上文对记号有所简略，若完整写出，该规则应例如表示为 $e_2z^1\star z^2e_0=q^{-1}e_2z^2\star z^1e_0$，等等。

对于其余的多余尖端，其约化由 (8.10) 确定，不过我们仍将它们列出

$$\begin{aligned}
10:&\quad (z^1w_1z^2)_{21}=z^2w_1z^1-sz^2,\quad (z^1w_2z^2)_{21}=z^2w_2z^1+sz^1\\
11:&\quad (z^1w_3z^2)_{21}=q^{-3}z^2w_3z^1,\quad (z^1w_1z^3)_{21}=z^3w_1z^1-sz^3\\
12:&\quad (z^1w_2z^3)_{21}=q^3z^3w_2z^1,\quad (z^2w_1z^3)_{21}=q^{-3}z^3w_1z^2\\
13:&\quad (z^2w_2z^3)_{21}=-sz^3,\quad (w_1z^1w_2)_{12}=sw_2\\
14:&\quad (w_1z^2w_2)_{12}=-sw_1,\quad (w_1z^3w_2)_{12}=q^{-3}w_2z^3w_1\\
15:&\quad (w_1z^1w_3)_{12}=sw_3,\quad (w_1z^2w_3)_{12}=q^3w_3z^2w_1\\
16:&\quad (w_2z^1w_3)_{12}=q^{-3}w_3z^1w_2,\quad (w_2z^2w_3)_{12}=sw_3\\
17:&\quad (w_3w_1z^3)_{01}=q^{-1}(t+\frac{3s}{2})w_1-q^{-2}w_2w_1z^2-q^{-1}w_1w_1z^1\\
18:&\quad (w_3w_2z^3)_{01}=q(t+\frac{3s}{2})w_2-qw_2w_1z^1-qw_2w_2z^2.
\end{aligned}\tag{8.11}$$

证明。 这个定理的证明在于检验乘法在歧义集合 (5.11) 上是否满足结合律。我们只给出一个示例 $\mathbf{h}w_3z^3w_1\mathbf{i}_{01}$。

$$\begin{aligned}
(w_3z^3)w_1&=(-w_1z^1-w_2z^2+t+\frac{s}{2})w_1=-w_1(w_1z^1-s)-q^{-1}w_2w_1z^2+(t+\frac{s}{2})w_1\\
w_3(z^3w_1)&=qw_3w_1z^3=(t+\frac{3s}{2})w_1-q^{-1}w_2w_1z^2-w_1w_1z^1.
\end{aligned}$$

我们得到了匹配。或者，如果我们取 $\mathbf{h}z^1z^3w_3\mathbf{i}_{21}$，

$$\begin{aligned}
(z^1z^3)w_3&=qz^3z^1w_3=z^3w_3z^1=(-z^1w_1-z^2w_2+(t-\frac{s}{2}))z^1,\\
z^1(z^3w_3)&=z^1(-w_1z^1-w_2z^2+t+\frac{s}{2})=-z^1w_1z^1-(z^2w_2z^1+sz^1)+tz^1+\frac{s}{2}z^1.
\end{aligned}$$

但让我们回顾一下，得出这个简单证明的推理过程。对于变形量子化，需要在巴复形 $\mathbf{B}^\bullet$ 中求解 MC 方程 (3.3)。较小的 Chouhy-Solotar 模型 $\mathbf{P}^\bullet$ 有映射到 $\mathbf{B}^\bullet$，由树公式 (6.11) 给出。从根部向上读取一棵树，可得到乘法规则 $\star$，如 (6.15) 所示：将两个字叠放在一起，并使用约化系统将拼接后的字约化为不可约字。最后，定理 6.8 指出，检验 MC 方程等同于检验 $\star$ 在歧义集合上的结合律。

□

备注 8.7. 在 $\hbar$ 的每一阶求解 MC 方程时，通常会存在一些自由度。其中一些可以通过使用规范变换（见 [Get]）“规范消去”。另一些则只是每一阶重新定义参数的自由度，这颇像物理学中的“质量和耦合常数的重整化”。不过，我们尚未系统地分析 MC 方程的规范不等价解是否构成一个模空间，也就是说，$\star$ 乘积是否构成一个模空间。

推论 8.8. 由变形后的箭图代数$\Lambda_{q,s,t}$，我们得到 $X=T^*\mathbb{P}^2$ 上全纯函数的一个变形，列于 (1.1) 中。

证明。 我们只需考虑 $e_0\Lambda e_0$，它们恰好是 X 上的全纯函数 $H^0(X)$。我们指出，$H^0(X)$ 作为 $SL(3)$ 表示具有如下分解

$$H^0(X)=\emptyset\oplus\ydiagram{2,1}\oplus\ydiagram{3,2}\oplus\ydiagram{4,3}\oplus\cdots$$

并由 . 的对称张量积生成。

我们将 $\sim(V\otimes V^*)^{tf}$ 的基命名为 X_i^j，其中 $\mathrm{Tr}[X]=0$。事实上，$X_i^j\simeq e_0w_iz^je_0$。根据（8.10），我们可以轻松写出各个 X 之间的变形乘法规则。 □

为了得到 $\Lambda_{q,s,t}$ 上的一些模，我们再次考虑 $e_0\Lambda_{q,s,t}e_0$，并施加

$$\begin{aligned}&e_0X_i^j=0,\quad i>j,\\&e_0X_2^3=e_0X_2^2=e_0X_3^3=0,\\&e_0X_1^1=-ns,\quad e_0(X_1^2)^{n+1}=0\end{aligned}$$

以模拟 $U_{\mathfrak{sl}(3)}$ 上的最高权模。只有满足下述整性条件时，才能得到一个模

$$t=-(n+\frac{1}{2})s.$$

该模对应于 $SL(3)$ 的表示 S^nV^*，因此给出支撑在零截面 $\mathbb{P}(V)\subset T^*\mathbb{P}(V)$ 上的膜，并附有预量子化线丛 $O(n)$。

变形代数（1.1）与量子群 $U_q\mathfrak{sl}(3)$ 有某些相似之处，但也相当不同。例如，我们可以将

$$e_1=-\frac{1}{s}X_1^2,\quad f_1=-\frac{1}{s}X_2^1;\quad e_2=-\frac{1}{s}X_2^3,\quad f_2=-\frac{1}{s}X_3^2;\quad e_3=-\frac{1}{s}X_1^3,\quad f_3=-\frac{1}{s}X_3^1.$$

那么，e_3（以及 f_3）由 q-交换子给出

$$e_1e_2-q^{-3}e_2e_1=e_3,\quad e_1e_3-q^{-3}e_3e_1=0=e_2e_3-q^3e_3e_2.$$

例如，与.....进行比较 [Bur90]中的公式9。但剩余的Serre关系，例如 $[e_1,f_1]$ 无法重现 .

最后总结一下，在本文中，所有箭图代数都是齐次的，这似乎确保了变形量子化给出关于 $\hbar$ 的收敛幂级数。人们可以尝试将同样的技术应用于 Higgs模空间的量子化，例如 Gaiotto 和 Witten 在 [GW21] 中所做的工作，他们研究了 Langland对偶的解析版本。或许更有意思的是，如果在某些情形下得到发散幂级数，那么可以应用重求和理论进行重新求和。由于量子化据称可以从 $(X,\mathrm{Im}\,\Omega)$ 上的 A模型计算得到，因此重求和理论或许能捕捉到 A模型 [GM22] 中一些有趣的瞬子效应。

A HH^2 的显式余链代表元$(T^*\mathbb{P}^2)$

Hochschild上同调群本身并不难计算，但对于变形量子化，我们需要它们在巴分解和极小分解中的显式余链代表元。不过，我们先从较简单的任务入手，计算一些层上同调。

A.1 $T^*\mathbb{P}^2$ 上的一些层上同调群汇总

对于某个 3维向量空间 V，记作 $\mathbb{P}^2=\mathbb{P}(V)$ 和 $X=T^*\mathbb{P}(V)$。我们的目标是计算

$$H^1(X,TX),\quad H^0(X,\wedge^2TX).$$

我们显然已经有了

$$TX \simeq \pi^*(T\mathbb{P}(V) \oplus T^*\mathbb{P}(V)),$$
$$\wedge^2 TX \simeq \pi^*(\wedge^2 T\mathbb{P}(V) \oplus \wedge^2 T^*\mathbb{P}(V) \oplus (T \otimes T^*)\mathbb{P}(V)),$$

其中 π： $T^*\mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ 是投影。接下来我们将省略 π^*。计算的主要工具是投影公式

$$H^\bullet(T^*\mathbb{P}(V), \pi^* F) = \oplus_{n\geq 0} H^\bullet(\mathbb{P}(V), S^n T\mathbb{P}(V) \otimes F) \tag{A.1}$$

其中 F 是底空间上的一个层。这样，我们就将所有计算从 X 化简为 $\mathbb{P}(V)$，其中两条欧拉列是主要工具

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \to V \otimes \mathcal{O} \to T(-1) \to 0 \tag{A.2}$$
$$0 \to \Omega(1) \to V^* \otimes \mathcal{O} \to \mathcal{O}(1) \to 0. \tag{A.3}$$

我们有一些经典结果，例如 $H^0(\mathbb{P}(V), \mathsf{O}(n)) = S^n V^*$、 $H^{>0}(\mathbb{P}(V), \mathsf{O}(n)) = 0$，适用于 $n \geq 0$ 和 $H^\bullet(\mathbb{P}(V), \mathsf{O}(-1)) = H^\bullet(\mathbb{P}(V), \mathsf{O}(-2)) = 0$。结合欧拉列，我们可以计算

命题 A.1. *1.* $H^\bullet(\mathbb{P}(V)\ T^*(1)) = 0$,

2. $H^\bullet(\mathbb{P}(V), T) = (V \otimes V^*)_{tf}[0]$,

3. $H^\bullet(\mathbb{P}(V), T^*) = \mathbb{C}[1]$,

4. $H^\bullet(\mathbb{P}(V), T \otimes T^*) = \mathbb{C}[0]$,

5. $H^\bullet(\mathbb{P}(V), T^*(2)) = \wedge^2 V^*[0]$,

6. $H^\bullet(\mathbb{P}(V), T^*(3)) = \ker(V^* \otimes S^2 V^* \to S^3 V^*)[0]$,

7. $H^{>0}(\mathbb{P}(V), T^*(n)) = 0$, $n \geq 1$.

我们可以使用杨表记号

$$V^* \simeq \square, \quad S^3 V^* = \square\square\square, \quad (V \otimes V^*)_{tf} \simeq \begin{array}{|c|c|}\hline \ \ \\ \hline \ \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad \ker(V^* \otimes S^2 V^* \to S^3 V^*) \simeq \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ \ & \ \\ \hline \ \\ \cline{1-1}\end{array}.$$

证明。 首先，与 (A.3) 相关的长正合列给出

$$0 \to H^0(\mathbb{P}(V), T^*(1)) \to V^* \xrightarrow{\simeq} V^* \to H^1(\mathbb{P}(V), T^*(1)) \to 0 \to \cdots$$

这表明 $H^\bullet(\mathbb{P}(V)\ T^*(1)) = 0$。

现在将 $\mathsf{O}(1)$ 张量积到 (A.2)，所得长正合列给出

$$0 \to \mathbb{C} \to V \otimes V^* \to H^0(\mathbb{P}(V), T) \to 0$$

这表明 $H^0(\mathbb{P}(V)\ T)$ 是 $V \otimes V^*$ 的无迹部分，且高阶上同调消失。类似地，将 $\mathsf{O}(-1)$ 张量积到 (A.3) 得到第三个结果。

将 $T^*(1) = \Omega(1)$ 张量积到 (A.2)： $0 \to T^* \to V \otimes T^*(1) \to T \otimes T^* \to 0$。由于 $H^\bullet(\mathbb{P}(V)\ T^*(1)) = 0$，我们得到

$$H^i(T \otimes T^*) \simeq H^{i+1}(T^*).$$

由第 3 项，我们得到第四个结果。

对于第 5、6 项，我们..... 将 $\mathsf{O}(1)$，$\mathsf{O}(2)$ 张量到 (A.3)，其余部分类似。最后，第 7 项也可由 (A.3) 得出。 □

除了上述计算外，还需要像 (A.1) 中那样与 S^nT 张量。用欧拉序列进行同样的计算会变得很繁琐。但当 n 足够大时，Kodaira 消失定理便适用，此时只需通过指标定理计算上同调。上述计算只是为了跟踪较低 n 时出现的高阶上同调。

Prop命题 A.2。 我们有以下对 HH^2（$T^*\mathbb{P}$（V））在 u^{-2} 阶和 u 的贡献项 ^{0}

$$\begin{aligned} -2: &\quad H^0(\mathbb{P}(V), T^*\otimes T)=\mathbb{C},\quad H^1(\mathbb{P}(V),T^*)=\mathbb{C},\\ 0: &\quad H^0(\mathbb{P}(V),T\otimes(T^*\otimes T))=2\square\!\square\oplus\square\!\square\!\square,\quad H^0(\mathbb{P}(V),\wedge^2 T)=\square\!\square\!\square \end{aligned}$$

重要的是，对于所有 $n>0$，$H^{>0}$（$\mathbb{P}$（V） $S^nT\otimes T^*$）$=0$。

这里的分次对应于纤维幂，最终将对应于与 $T^*\mathbb{P}(V)$ 相关联的箭图中的路径长度。

证明。 我们计算

$$H^0(\mathbb{P}(V),T\otimes(T^*\otimes T))=H^0(\mathbb{P}(V),\wedge^2T\otimes T^*)\oplus H^0(\mathbb{P}(V),S^2T\otimes T^*)$$

第一项等于 $H^0(\mathbb{P}(V)\ T^*(3))=$ ¦，正如我们已经计算过的。对于第二项，我们将 (A.2) 与自身取张量积，得到

$$0\to V(-1)\to S^2V\to S^2T(-2)\to 0\quad\Rightarrow\quad 0\to V(1)\to S^2V(2)\to S^2T\to 0.$$

与 T^* 取张量积，计算长正合列

$$\to V\otimes H^\bullet(\mathbb{P}(V),T^*(1))\to S^2V\otimes H^\bullet(\mathbb{P}(V),T^*(2))\to H^\bullet(\mathbb{P}(V),S^2T\otimes T^*)\to$$

利用 $H^\bullet(\mathbb{P}(V)\ T^*(1))=0$，我们得到

$$H^0(\mathbb{P}(V),S^2T\otimes T^*)\simeq S^2V\otimes H^0(\mathbb{P}(V),T^*(2))=\square\!\square\otimes\square=\square\!\square\oplus\square\!\square\!\square$$

并且进一步有 $H^{>0}(\mathbb{P}(V)\ S^2T\otimes T^*)=0$。

最后，为了证明对所有 $n>1$（$n=2$ 已经证明）都有 $H^{>0}(\mathbb{P}(V)\ S^nT\otimes T^*)=0$，我们可以利用 Kodaira 消失定理，也可以直接论证。考虑 $0\to S^{n-1}V\otimes\mathsf{O}(-1)\to S^nV\otimes\mathsf{O}\to S^nT(-n)\to 0$，将它与 $T^*(n)$ 张量起来：$0\to S^{n-1}V\otimes T^*(n-1)\to S^nV\otimes T^*(n)\to S^nT\otimes T^*\to 0$。左边项和中间项在 $n\geq 2$ 上都没有 $H^{>0}$，因此 $H^{>0}(\mathbb{P}(V)\ S^nT\otimes T^*)=0$。 □

A.2 使用极小分解显式计算 HH^2

本节将给出命题 8.3 的高难度证明。

我们首先计算 $\partial\mathsf{T}_3$,

$$\begin{aligned} \partial(\mathsf{T}_3^1)^j &= \partial e_2\otimes(z\cdot wz^j-z^kz^jw_k+z^jz^kw_k)\otimes e_1\\ &= e_2z^k\otimes[w_k,z^j]\otimes e_1+e_2z^j\otimes(z\cdot w)\otimes e_1-e_2\otimes(z\cdot w)\otimes z^je_1-e_2\otimes[z^j,z^k]\otimes w_ke_1\\ &= e_2z^k\otimes[w_k,z^j]_{t.f.}\otimes e_1+\frac{1}{3}e_2z^j\otimes w\cdot z\otimes e_1+\frac{2}{3}e_2z^j\otimes(z\cdot w)\otimes e_1\\ &\quad -e_2\otimes(z\cdot w)\otimes z^je_1-e_2\otimes[z^j,z^k]\otimes w_ke_1. \end{aligned}\tag{A.4}$$

<escape>计算$g_{\emptyset}$的右端，0 和 $g_{\emptyset}$的右端，1</escape>

$$g_{\emptyset,0}(\partial(\mathsf{T}_3^1)^j) = (-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3})e_2 z^j e_1 = 0,$$
$$g_{\emptyset,1}(\partial(\mathsf{T}_3^1)^j) = (\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-1)e_2 z^j e_1 = 0.$$

同样可以检查 T_3 中其他项的闭合性。注意，$g_{\emptyset,0}, g_{\emptyset,1}$ 不可能是余边界，因为余边界无法将路径长度缩短 2。

现在我们来考虑阶为 u^0 的余循环，即那些不会改变路径长度的余循环。因此，例如，$[z\cdot w]_{11}$ 必须等于一条长度为 2 的路径 $e_1 \leftarrow\leftarrow e_1$。这两个箭头必须由一个 $z^i \in V^* \simeq$ 和一个 $w_i \in V \simeq$ 组成。Λ 中的无迹条件 $z^i w_i$ 表示 $e_1 \leftarrow\leftarrow e_1 \in$。由此我们得出结论

$$\hom_{\Lambda^e}([z\cdot w]_{11}, \Lambda)\big|_{u^0} = U_j^i [w_i z^j]_{11} \in$$

其中 U 是无迹张量。对 $[w\cdot z]_{11}, [w\cdot z]_{00}, [z\cdot w]_{22}$ 的分析完全相同。

同理，对于 $[z^{[i}z^{j]}]_{20} \in$，它必须映射到 $e_2 \xleftarrow{z^k} \xleftarrow{z^l} e_0$，并满足 k，l 对称，因此

$$\hom_{\Lambda^e}([z^{[i}z^{j]}]_{20}, \Lambda)\big|_{u^0} \in \otimes \simeq \oplus, \tag{A.5}$$
$$\hom_{\Lambda^e}([w_{[i}w_{j]}]_{02}, \Lambda)\big|_{u^0} \in \otimes \simeq \oplus.$$

最后对于 $([w_i, z^j]_{tf})_{11} \in$，它也必须等于 $e_1 \leftarrow\leftarrow e_1 \in$，因此

$$\hom_{\Lambda^e}(([w_i, z^j]_{tf})_{11}, \Lambda)\big|_{u^0} \in \otimes \simeq {}_{27,s} \oplus {}_{10,a} \oplus {}_{10^*,a} \oplus 2\,{}_{8,s,a} \oplus \emptyset_{1,s}. \tag{A.6}$$

其中，脚标表示维数，而 a, s 表示交换张量乘积中的两个副本时，右端是否（反）对称。

我们现在考虑 T_3 以及映射 $\partial : \mathsf{T}_3 \to \mathsf{T}_2$。取 T_3^1，，一个 0-分次余链必须将其映射为一条长度为 3 的路径 $e_2 \leftarrow\leftarrow\leftarrow e_1$。这三个箭头由两个 z 和一个 w 组成。由于 z 之间的交换性，这两个 z 在$S^2 V^* \simeq$中变换，而 w 则属于 $V \simeq$。因此 $e_2 \leftarrow\leftarrow\leftarrow e_1 \in \oplus$。但最后一个分量由于 $z^i w_i = 0$ 的无迹性而消失。由于 $\mathsf{T}_3^1 \in$，我们得出结论：

$$\hom_{\Lambda^e}(\mathsf{T}_3^1, \Lambda)\big|_{u^0} \in \otimes = \oplus \oplus .$$

接下来，我们考虑.....的像

$$\hom_{\Lambda^e}(\mathsf{T}_2, \Lambda)\big|_{u^0} \to \hom_{\Lambda^e}(\mathsf{T}_3, \Lambda)\big|_{u^0} \tag{A.7}$$

由 ∂ 诱导。由于 ∂ 是 $SL(3)$ 表示的映射，我们可以分别分析上述映射在每个表示上的情况。

我们从 $\mathbf{27} =$ 开始，因为它只出现在 (A.6) 中。明确地说，它映射至

$$\left[w_i, z^j\right]_{tf,11} \to Z_{ik}^{jl} [w_l z^k]_{11},$$

其中，Z_{ik}^{jl} 关于 jl 和 ik 对称且为无迹的（这符合张量表示**27**的性质）。根据映射（A.7），利用 $\partial(\mathsf{T}_3^1)^j$ 的显式公式（A.4），我们得到

$$\partial(\mathsf{T}_3^1)^j \to Z_{ik}^{jl} [z^i w_l z^k]_{21} \neq 0.$$

我们得出结论，**27** 分量必须不存在。

我们处理（A.6）中的单态。具体而言，它给出的求值为

$$\left[w_i, z^j\right]_{tf,11} \to [w_i z^j]_{11}.$$

在映射（A.7）下，我们得到

$$\partial(\mathsf{T}_3^1)^j \to [z^k w_k z^j]_{21} = 0.$$

因此，该单态是一个余循环，但稍后将证明它是一个余边界。

我们处理 $\mathbf{10} = $ 或 $\overline{\mathbf{10}^*} = $，回顾 ，它们是对称的三阶协变或逆变张量 D_{ijk}， $\overline{D}^{ijk}$。

We n将（A.5）和（A.6）中的 **10** 分量分别记为 C_{ijk} 和 D_{ijk}，具体而言，这意味着

$$[z^{[i} z^{j]}]_{20} \to \epsilon^{ijr} C_{rkl} [z^k z^l]_{20},$$
$$\left[w_i, z^j\right]_{tf,11} \to \epsilon^{jlr} D_{rik} [w_l z^k]_{11}.$$

在映射（A.7）下，我们得到

$$\begin{aligned}
\partial(\mathsf{T}_3^1)^j &= e_2 z^k \otimes [w_k, z^j]_{t.f.} \otimes e_1 + \frac{1}{3} e_2 z^j \otimes w \cdot z \otimes e_1 + \frac{2}{3} e_2 z^j \otimes (z \cdot w) \otimes e_1 \\
&\quad - e_2 \otimes (z \cdot w) \otimes z^j e_1 - e_2 \otimes [z^j, z^k] \otimes w_k e_1, \\
&\to \epsilon^{jlr} D_{rik} [z^i w_l z^k]_{21} + 0 + 0 + 0 + \epsilon^{ijr} C_{rkl} [z^k z^l w_i]_{21}.
\end{aligned}$$

要使其为零，我们需要 $C = D$。对于 $\mathbf{10}^*$ 的分析类似：我们取

$$[w_{[i} w_{j]}]_{02} \to \epsilon_{ijr} \bar{C}^{rkl} [w_k w_l]_{02},$$
$$\left[w_i, z^j\right]_{tf,11} \to \epsilon_{rik} \bar{D}^{rjl} [w_l z^k]_{11}.$$

在映射 **(A.7)** 下，我们得到

$$\begin{aligned}
\partial(\mathsf{T}_3^2)_i &= e_0 w_j \otimes [z^j, w_i] \otimes e_1 + e_0 w_i \otimes w \cdot z \otimes e_1 - e_0 \otimes w \cdot z \otimes w_i e_1 - e_0 \otimes [w_i, w_j] \otimes z^j e_1 \\
&\to -\epsilon_{rik} \bar{D}^{rjl} [w_j w_l z^k]_{01} - \epsilon_{ijr} \bar{C}^{rkl} [w_k w_l z^j]_{01},
\end{aligned}$$

，并得到 $C = -D$。

最繁琐的是 $\mathbf{8} = $ 分量。为说明这个问题，我们以 $[w_i, z^j]_{tf} \in \mathsf{T}_2$, 为例，它将得到 $T_{ik}^{jl} w_l z^k$，其中 T 是张量积 $\mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$ 中的某个张量（因为对 i， j 和 k， l 的迹为零）。并非所有这样的张量都是必需的；我们希望它对应于表示 **8**。类似地， $z^{[i} z^{j]}$ 将得到 $T_{kl}^{ij} z^k z^l$，我们也需要 T 属于 **8**。因此我们陈述如下引理：

引理 A.3. 设 X_i^j 为无迹的，即它属于 **8**，则

$$X \mapsto \frac{1}{20} X_{(i}^{(j} \delta_{l)}^{k)} - \frac{1}{4} X_{[i}^{[j} \delta_{l]}^{k]} \tag{A.8}$$
$$X \mapsto -\frac{1}{12} X_{[i}^{(j} \delta_{l]}^{k)} + \frac{1}{12} X_{(i}^{[j} \delta_{l)}^{k]} \tag{A.9}$$

8 到 $\mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$ 有两个嵌入，而

$$X \mapsto \frac{1}{3} X_{[i}^{(j} \delta_{l]}^{k)}, \quad X \mapsto \frac{1}{3} X_{(i}^{[j} \delta_{l)}^{k]}$$

分别是 $\mathbf{6} \otimes \mathbf{3}$ 和 $\mathbf{6}^* \otimes \mathbf{3}^*$ 的嵌入。

证明。注意，在 $\mathbf{8}\otimes^s\mathbf{8}$ 和 $\mathbf{8}\otimes^a\mathbf{8}$ 中分别有一份$\mathbf{8}$，其中 s,a 表示对称张量积或反对称张量积。将指标显式写出，则 T^{jk}_{il} 满足 $T^{pk}_{pl}=T^{jp}_{ip}=0$。投影到两份$\mathbf{8}$ 的映射为

$$T\overset{pr_s}{\to}T^{jp}_{pi}+T^{pj}_{ip},\quad T\overset{pr_a}{\to}T^{jp}_{pi}-T^{pj}_{ip}.$$

现在令 T为 (A.8) 的右端，那么可以验证确实有 $T^{pk}_{pl}=T^{jp}_{ip}=0$，且 T在pr_a 作用下消失，而在 pr_s作用下投影回 X。同理可以验证 (A.9)。

对于到 $\mathbf{6}\otimes\mathbf{3}$ 的嵌入，相应的张量 T^{jk}_{il}需要关于 $j,\ k$对称，并关于 $i,\ l$反对称，此外还需满足 $T^{(jk}_{pq}\epsilon^{i)pq}=0$。可以验证 $X^{(j}_{[i}\delta^{k)}_{l]}$ 满足这些性质。诸如 $1/3$ 这样的系数并不重要；我们选择它们是为了使嵌入等距。 □

现在我们可以继续处理 2-上链中的 $\mathbf{8}$。我们令 2-上链为

$$\begin{aligned}
&[z\cdot w]_{11}\to U^i_j[w_iz^j]_{11},\quad [w\cdot z]_{11}\to V^i_j[w_iz^j]_{11},\\
&[z\cdot w]_{22}\to X^i_j[z^jw_i]_{22},\quad [w\cdot z]_{00}\to Y^i_j[w_iz^j]_{00},\\
&\big[w_i,z^j\big]_{tf,11}\to\big(\frac{1}{20}S^{(j}_{(i}\delta^{k)}_{l)}-\frac{1}{4}S^{[j}_{[i}\delta^{k]}_{l]}-\frac{1}{12}A^{(j}_{[i}\delta^{k)}_{l]}+\frac{1}{12}A^{[j}_{(i}\delta^{k]}_{l)}\big)[w_kz^l]_{11}\\
&\qquad\qquad=(\frac{3}{10}S-\frac{1}{6}A)^k_i[w_kz^j]_{11}+(\frac{3}{10}S+\frac{1}{6}A)^j_l[w_iz^l]_{11}-\frac{1}{5}S^k_l\delta^j_i[w_kz^l]_{11}\\
&\big[z^i,z^j\big]_{20}\to\frac{1}{3}P^{[i}_{(k}\delta^{j]}_{l)}[z^kz^l]_{20},\quad [w_i,w_j]_{02}\to\frac{1}{3}Q^{(k}_{[i}\delta^{l)}_{j]}[w_kw_l]_{02}
\end{aligned}$$

其中 $U,\ V,\ X,\ Y,\ S,\ A,\ P,\ Q$ 均为无迹；特别是对于 $S,\ A,\ P,\ Q$，我们用到了最后一个引理。再次在上述上链上计算 $\partial(\mathsf{T}^1_3)^j$，得到

$$\begin{aligned}
\partial(\mathsf{T}^1_3)^j\quad\to\quad&\big(\frac{1}{20}S^{(j}_{(i}\delta^{k)}_{l)}-\cancel{\frac{1}{4}S^{[j}_{[i}\delta^{k]}_{l]}}-\cancel{\frac{1}{12}A^{(j}_{[i}\delta^{k)}_{l]}}+\frac{1}{12}A^{[j}_{(i}\delta^{k]}_{l)}\big)[z^iw_kz^l]_{21}\\
&+\frac{1}{3}V^k_l[z^jw_kz^l]_{21}+\frac{2}{3}U^k_l[z^jw_kz^l]-X^k_l[z^lw_kz^j]_{21}+\frac{1}{3}P^{[i}_{(k}\delta^{j]}_{l)}[z^kz^lw_i]_{21}\\
=\quad&(\frac{1}{10}S^k_i-\frac{1}{6}A^k_i+\frac{1}{3}V^k_i+\frac{2}{3}U^k_i-X^k_i+\frac{2}{3}P^k_i)[z^iw_kz^j]_{21}.
\end{aligned}$$

该 $\partial(\mathsf{T}^1_3)^j$ 应当等于零，这给出

$$\frac{1}{10}S-\frac{1}{6}A+\frac{1}{3}V+\frac{2}{3}U-X+\frac{2}{3}P=0. \tag{A.10}$$

写出全部四个 $\partial\mathsf{T}_3$ 的求值过程实在太繁琐，我们只记录方程

$$\frac{1}{3}U+\frac{2}{3}V-Y-(\frac{1}{10}S+\frac{1}{6}A)+\frac{2}{3}Q=0, \tag{A.11}$$

$$-\frac{1}{3}U-\frac{2}{3}V+Y+(\frac{1}{10}S-\frac{1}{6}A)+\frac{2}{3}P=0, \tag{A.12}$$

$$-\frac{2}{3}U-\frac{1}{3}V+X-(\frac{1}{10}S+\frac{1}{6}A)+\frac{2}{3}Q=0. \tag{A.13}$$

这四个方程意味着

$$0=-\frac{1}{3}A+\frac{2}{3}(P+Q)=U+V-X-Y. \tag{A.14}$$

其中一些分量将作为余边界被移除。

为了研究余边界，我们考虑 1-余链

$$[z^i]_{10} \to T^i_j[z^j]_{10}$$

以及由此得到的 2-余边界，例如，

$$\begin{aligned}
&\partial[z\cdot w]_{11} = \cancel{e_1 z^j \otimes w_i \otimes e_1} + e_1 \otimes z^i \otimes w_i e_1 \to T^i_j[z^j w_i]_{11},\\
&\partial[z^{[i}z^{j]}]_{20} = e_2 z^{[i} \otimes z^{j]} \otimes e_0 + \cancel{e_2 \otimes z^{[i} \otimes z^{j]} e_0} \to T^{[j}_k[z^{i]}z^k]_{20},\\
&\partial[w_i, z^j]_{11} = \cancel{e_1 w_i \otimes z^j \otimes e_1 - e_1 z^j \otimes w_i \otimes e_1 + e_1 \otimes w_i \otimes z_j e_1} - e_1 \otimes z^j \otimes w_i e_1 \to -T^j_k[z^k w_i]_{11}.
\end{aligned}$$

最后一项需要分解为迹部分和无迹部分。因此，这个特定的 1-余链得到一个余边界

$$(U, Y, S, A, P) = (T_{tf}, T_{tf}, -\frac{5}{3}T_{tf}, -3T_{tf}, -\frac{3}{2}T_{tf}) \in \mathbf{8} \tag{A.15}$$

而 T 的迹部分给出余边界

$$[w_i, z^j]_{11} \to \partial[w_i, z^j]_{11} \to -[z^j w_i]_{11}$$

它消去了（A.6）中的单态。在此阶段，通过将余边界（A.15）代入方程 A.10、A.11、A.12 和 A.13，检查它是否闭合是有帮助的，以确保所有系数都正确。

我们在此列出所有 2-余边界

$$(V, X, S, A, P) = (T_{tf}, T_{tf}, \frac{5}{3}T_{tf}, 3T_{tf}, \frac{3}{2}T_{tf}), \tag{A.16}$$

$$(U, Y, S, A, Q) = (T_{tf}, T_{tf}, -\frac{5}{3}T_{tf}, 3T_{tf}, \frac{3}{2}T_{tf}) \tag{A.17}$$

$$(V, X, S, A, Q) = (T_{tf}, T_{tf}, \frac{5}{3}T_{tf}, -3T_{tf}, -\frac{3}{2}T_{tf}). \tag{A.18}$$

分别来自 $[z^i]_{21} \to T^i_j[z^j]_{21}$、$[w_i]_{01} \to T^j_i[w_j]_{01}$ 和 $[w_i]_{01} \to T^j_i[w_j]_{12}$。

现在我们终于可以完成 $HH^2|_{u^0}$ 的计算了。注意，余边界不可能位于 **10** 或 $\mathbf{10}^*$ 中，因此这些表示中的余循环在上同调中得以保留。而对于 **8** 表示，我们可以使用 (A.15) 将 $P = 0$ 设为，然后使用 (A.15) + (A.16) 将 $U + V + X + Y = 0$ 设为。由 (A.14)，我们得到$U+V = X+Y = 0$。类似地，我们使用 (A.17)–(A.18) 将 $Q = 0$ 设为，随后得到 $A = 0$ 和 $S = 10X - 10U/3$。因此，**8** 中的上同调仅由 U, X 参数化，于是我们得到显式余循环

$$\begin{aligned}
&[z\cdot w]_{11} \to U^i_j[w_i z^j]_{11}, \quad [w\cdot z]_{11} \to -U^i_j[w_i z^j]_{11},\\
&[z\cdot w]_{22} \to X^i_j[z^j w_i]_{22}, \quad [w\cdot z]_{00} \to -X^i_j[w_i z^j]_{00},\\
&\left[w_i, z^j\right]_{tf,11} \to (3X-U)^k_i[w_k z^j]_{11} + (3X-U)^j_l[w_i z^l]_{11} - (2X - \frac{2}{3}U)^k_l \delta^j_i[w_k z^l]_{11}.
\end{aligned}$$

这些是**8**中的两个分量。还有**10** 和 $\mathbf{10}^*$ 中的分量，是我们之前得到的

$$\begin{aligned}
\mathbf{10}: &\quad [z^{[i}z^{j]}]_{20} \to \epsilon^{ijr} D_{rkl}[z^k z^l]_{20}, \quad \left[w_i, z^j\right]_{tf,11} \to \epsilon^{jlr} D_{rik}[w_l z^k]_{11},\\
\mathbf{10}^*: &\quad [w_{[i}w_{j]}]_{02} \to -\epsilon_{ijr}\bar{D}^{rkl}[w_k w_l]_{02}, \quad \left[w_i, z^j\right]_{tf,11} \to \epsilon_{rik}\bar{D}^{rjl}[w_l z^k]_{11}.
\end{aligned}$$

参考文献

[BG22] Francis Bischoff 和 Marco Gualtieri。《环面泊松簇的膜量子化》。《数学物理通讯》，391(2)：357–400，2022。[BGZ18] Francis Bischoff、Marco Gualtieri 和 Maxim Zabzine。Morita 等价与广义 K¨ahler 势。2018。[BK99] M.C.R. Butler 和 A.D. King。代数的极小分解。《代数杂志》，212(1)：323–362，1999。[BQT23] Francesco Bonechi、Jian Qiu 和 Marco Tarlini。$\mathbb{C}P^2$ 上的广义 K¨ahler 结构与椭圆函数。《几何力学杂志》，15(1)：188–223，2023。[Bur90] Nigel Burroughs。U(q) SL(3) 及更广范围的泛 R 矩阵！《数学物理通讯》，127：109，1990。[BW20] Severin Barmeier 和 Zhengfang Wang。带关系的箭图路径代数的变形。arXiv 预印本，页码 arXiv:2002.10001，2020年2月。[CBH98] William Crawley-Boevey 和 Martin P. Holland。Kleinian 奇点的非交换变形。《杜克数学杂志》，92(3)：605–635，1998。[Col65] Sidney Coleman。SU(3) 趣谈。载于《高能物理与基本粒子研讨会》，第331–352页，1965。[CS15] Sergio Chouhy 和 Andrea Solotar。结合代数的投射分解与歧义。《代数杂志》，432：22–61，2015。[Eis95] David Eisenbud。《交换代数：以代数几何为视角》。《数学研究生文本》。施普林格，纽约、柏林、海德堡，1995。R´1996年修订版。其他印次：1999、2004。[Get] Ezra Getzler。幂零 l_∞ -代数的李理论。《数学年刊》，(1)：271–301。[GM22] Jie Gu 和 Marcos Marino。拓扑弦理论中的孔雀图样与新的整数不变量。《SciPost 物理》，12(2)：058，2022。[Gua14] Marco Gualtieri。广义 K¨ahler 几何。《数学物理通讯》，331(1)：297–331，2014年10月。[GW09] Sergei Gukov 和 Edward Witten。膜与量子化。《理论与数学物理进展》，13(5)：1445–1518，2009。[GW21] Davide Gaiotto 和 Edward Witten。通过膜探测量子化。2021年7月。[Haw06] Eli Hawkins。量子化的群胚方法。arXiv 数学预印本，页码 math/0612363，2006年12月。[HKR62] Gerhard Hochschild、Bertram Kostant 和 Alex Rosenberg。正则仿射代数上的微分形式。《美国数学会汇刊》，(102)：383–408，1962。

[HOD93] A 型克莱因奇点的非交换变形。《代数杂志》，161(2):271–290，1993。[KO03] Anton Kapustin 和 Dmitri Orlov。关于 A 膜、镜像对称与 Fukaya 范畴的备注。《几何与物理杂志》，48:84，2003。[Kon01] Maxim Kontsevich。代数簇的变形量子化。《数学物理快报》，56(3):271–294，2001。[Kon03] Maxim Kontsevich。泊松流形的变形量子化。1。《数学物理快报》，66:157– 216，2003。[Kro89] Peter B. Kronheimer。将 ALE 空间构造为超凯勒商。《微分几何杂志》，29:665–683，1989。[Low08] Wendy Lowen。霍赫希尔德上同调、特征态射与导出变形。Compositio Mathematica，144(6):1557–1580，2008。[LY23] NaiChung Conan Leung 和 YuTung Yau。超凯勒流形上的隐藏 sp(1) 对称性与膜量子化。arXiv 预印本 arXiv:2303.14992，2023。[Qiu22] Jian Qiu。Rozansky–Witten 理论：先局域化，再倾斜。《数学物理通讯》，389(2):813– 874，2022。[Smi90] S. P. Smith。一类类似于 sl(2) 包络代数的代数。美国数学会会刊，322(1):285–314，1990。[Swa96] Richard G. Swan。拟射影概形的霍赫希尔德上同调。纯粹与应用代数杂志，110(1):57–80，1996。[Tju69] G N Tjurina。复空间孤立奇点的局部半通用平坦变形。苏联数学汇刊，3(5):967，1969年10月。[TU10] Yukinobu Toda 和 Hokuto Uehara。通过丰沛线丛构造倾斜生成元。数学进展，223(1):1–29，2010。[Wem12] M. Wemyss。《非交换解消讲义》。arXiv 电子印本，2012年10月。