arXiv:2304.06824v1 [physics.class-ph] 31 Mar 2023

无限时域扩散方程的偶对称与奇对称自相似解

L. M ´ATY ´AS 和 I.F. BARNA

Abstract. 在传输现象的描述中，扩散是一个重要方面。在某些情况下，扩散可能与对流同时出现。本文研究采用自相似 Ansatz 的扩散方程。通过适当的变量替换，我们找到了扩散方程在无限时域下的新解。这里我们给出所述边界条件下的偶对称解。为求完整，也提及了作为先前研究一部分的奇对称解。最后，讨论了具有常数源项的扩散方程，它同样具有偶对称解和奇对称解。

1. Introduction

质量扩散或热传导是一种基本物理过程，这一点显而易见；在过去两个世纪里，它引起了数学家、物理学家和工程师的浓厚兴趣。关于质量扩散和热扩散的文献浩如烟海，这里仅列举一些基础教材 [1, 2, 3, 4, 5]。

常规扩散是许多科学领域的基石，例如表面生长 [6, 7, 8], 反应扩散 [9] ，甚至多孔介质中的流动问题。在我们最近的两篇论文中，我们对这类过程及大量相关综述进行了全面总结 [10, 11]。

关于热扩散 [12, 13] ，也可能同时发生热质传递，从而产生交叉效应 [14]。有关传热或工程一般问题的应用，可参见 [15]。宇宙中也存在重要的扩散现象 [16] ，这是另一个值得关注的领域。

种群动力学或生物过程 [17, 18, 19] 也涉及扩散过程，尤其是在空间扩展系统中。在环境科学中，颗粒物或污染物的扩散传播、分布和吸附效应也值得关注 [20, 21, 22, 23]。此外，出于实际应用的需要，食品科学领域也测定了扩散系数 [24]。

近几十年来，扩散也逐渐在社会科学中得到广泛应用。例如，创新扩散 [25, 26], 技术扩散和社会行为 [27] 甚至文化、人类或思想的扩散[28, 29]。定价理论[30, 31]中也能找到与扩散相关的方面。网络的结构也起着关键作用，会影响创新、思想乃至计算机病毒 [32]的传播。与这些扩散活动并行，V´an 及其合作者 [33] 对热输运方程进行了推广，例如，他们构建了四阶偏微分方程（PDE），以深入研究非正则热传导现象。这种精神

时代清楚地表明，对扩散（和热传导）的研究仍然是一项重要任务。

考虑到扩散可以是超越笛卡尔对称性的一般三维过程，这里我们研究一维扩散方程。变量 $C(x,\ t)$ 随时间的变化受其邻域中该变量存在与否的影响：

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2}, \tag{1}$$

其中 D 是扩散系数，其实数值应为正。假设 $C(x,\ t)$ 是一个足够光滑的函数，并且关于两个变量的导数均存在。

由这一一般形式可以看出，若 $C(x,\ t)$ 是一个解，那么 $C(x,\ t)+C_0$ 也是一个解，其中 C_0 是常数。

对于有限区间，若两端的浓度固定为 $C(x=0,\ t)=C_0$ 和 $C(x=L,\ t)=C_0$，则解为

$$C_k(x,t) = C_0 + e^{-D\frac{\pi^2 k^2 t}{L^2}} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \tag{2}$$

其中 $k=1$，2，3.....，可以是任意正整数。一般而言，除此之外，不同 k 对应的指数函数与正弦函数乘积的任意线性组合都是解。对于有限区间，若两端的密度均固定为零，则解变为

$$C_k(x,t) = C_0 + e^{-D\frac{\pi^2 n^2 t}{L^2}} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \tag{3}$$

其中，$n=1$、2、3.....可以是任意正整数。借助傅里叶定理，并利用公式（2）和公式（3），可以在闭区间上近似任意扩散分布。这些都是众所周知的解析结果，在任何常见的物理学教科书中都可以找到，例如 [1, 2]。

在本研究中——借助自相似 Ansatz——我们将展示无限时域下的一般对称解。这些解的根源可以追溯到该理论的最初阶段，即高斯函数 [1, 2]：

$$C(x,t) = \text{Const.} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}. \tag{4}$$

对于无限时域，也有一些研究呈现了扩散的某个方面，并且可能达到比上述经典解稍微更一般的形式 [34]。

在下文中，我们将远远超越这一点，展示并分析全新类型的解。最后，我们将给出相应的格林函数，从而能够处理具有物理意义的任意初始条件问题。

2. Theory and Results

对于无限时域，为了推导相应的解，我们进行如下自相似变换：

$$C(x,t) = t^{-\alpha} f\left(\frac{x}{t^\beta}\right) = t^{-\alpha} f(\eta). \tag{5}$$

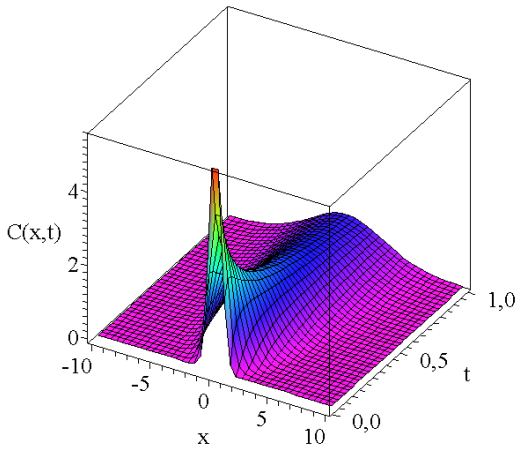


FIGURE 1. 该解 $C(x,t)$ 是式（12）的常见高斯解。

请注意，空间坐标 x 现在沿整个实轴取值。
Sedov 曾采用过这种试探解， [35] 后来 Raizer 和 Zel'dowich 也使用了它， [36] 对于某些系统，Barenblatt 也成功地应用了它， [37]。我们也曾将其用于来自流体力学 [38, 39, 40] 或量子力学系统 [41]的线性或非线性偏微分方程（PDE）系统。在某些情况下，流体的状态方程也会发挥作用[42, 43]。较近期的研究中也能找到与扩散相关的自相似分析法应用 [44, 45, 46]。

该变换考虑了公式（4），在函数f之前，不再是$1/\sqrt{t}$，而是一个广义函数 $1/t^{\alpha}$；在 f的自变量中，可以使用分数 x/t^{β} ，其中的 β 需要稍后确定。

我们对关系式 (5) 求一阶和二阶导数，并将其代入扩散方程 (1)，得到以下常微分方程（ODE）

$$-\alpha t^{-\alpha-1} f(\eta) - \beta t^{-\alpha-1} \eta \frac{df(\eta)}{d\eta} = D t^{-\alpha-2\beta} \frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2}. \tag{6}$$

如果三个项随时间的衰减都相同，那么这一推理便是自洽的。这在以下条件下成立：

$$\alpha = \text{arbitrary real number}, \quad \beta = 1/2, \tag{7}$$

并得到以下常微分方程

$$-\alpha f - \frac{1}{2}\eta f' = D f''. \tag{8}$$

利用上述变量替换，这个常微分方程属于一种特征方程。可以观察到，对于 $\alpha = 1/2$ ，该方程可以写成

$$-\frac{1}{2}(\eta f)'' = D f''. \tag{9}$$

若对该方程积分一次

$$\mathrm{Const}_0 - \frac{1}{2}\eta f = Df', \tag{10}$$

其中 Const_0 是一个任意常数，可能取决于与问题相关的某些条件。若取这个 $\mathrm{Const}_0 = 0$，便可得到一般解

$$f = f_0 e^{-\frac{\eta^2}{4D}}, \tag{11}$$

其中 f_0 是一个常数。将这种形式的 f 代入式（5）给出的 $C(x,t)$ 形式中——如前所述，令 $\alpha = 1/2$ ——即可得到关于空间变量的偶解:

$$C(x,t) = f_0 \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}. \tag{12}$$

由此，我们得到了通常的高斯解，如图（1）所示。

若要寻找更多解，就必须针对一般的α求解方程（8）。方程（8）在无限时域下的一般解可写为:

$$f(\eta) = \eta \cdot e^{-\frac{\eta^2}{4D}} \left(c_1 M\left[1-\alpha, \frac{3}{2}, \frac{\eta^2}{4D}\right] + c_2 U\left[1-\alpha, \frac{3}{2}, \frac{\eta^2}{4D}\right]\right), \tag{13}$$

其中 c_1和 c_2是任意实积分常数，而 $M(,,)$ 和 $U(,,)$ 是库默尔函数。详细内容请参阅 [47]。

如果 α 是正整数，那么两个特殊函数 M 和 U 关于第三个自变量 $\frac{\eta^2}{4D}$ 都是有限多项式

$$f(\eta) = \eta \cdot e^{-\frac{\eta^2}{4D}} \left(\kappa_0 + \kappa_1 \frac{\eta^2}{4D} + ... + \kappa_{n-1} \cdot \left[\frac{\eta^2}{4D}\right]^{n-1}\right). \tag{14}$$

这些给出了当 $\alpha = n$ 时扩散方程关于空间变量的奇对称解 （其中 n 为正整数）。由此可得完整解 $C(x,\ t)$

$$C(x,t) = \frac{1}{t^n} f(\eta) = \frac{1}{t^n} \frac{x}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \cdot \left(\kappa_0 + \kappa_1 \frac{x^2}{4Dt} + ... + \kappa_{n-1} \cdot \left[\frac{x^2}{4Dt}\right]^{n-1}\right). \tag{15}$$

这些奇对称解已由 M´aty´as 和 Barna 在先前的研究中进行了深入研究（[10, 11]）；为求完整起见，我们在附录 A 中给出这些解。

对于偶对称解，我们用 $g(\eta)$ 表示以下函数

$$f(\eta) = \eta \cdot e^{-\frac{\eta^2}{4D}} g(\eta), \tag{16}$$

将该方程代入式 (8)，得到

$$\eta g'' + 2g' - \frac{\eta^2}{2D} g' + (\alpha - 1)\frac{\eta}{D} g = 0. \tag{17}$$

根据式 (13)，我们得到通解

$$g(\eta) = \left(c_1 M\left[1-\alpha, \frac{3}{2}, \frac{\eta^2}{4D}\right] + c_2 U\left[1-\alpha, \frac{3}{2}, \frac{\eta^2}{4D}\right]\right). \tag{18}$$

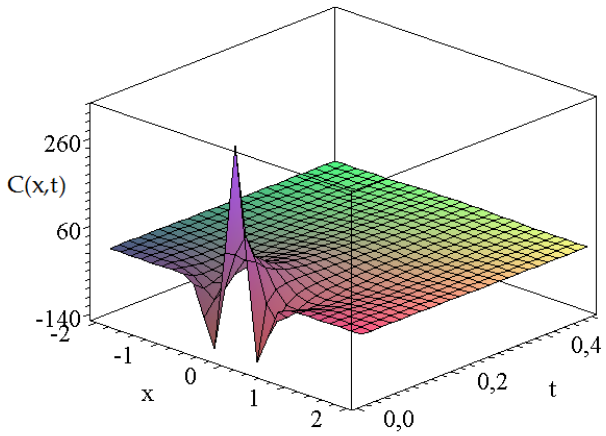


FIGURE 2. 方程（23）形式下的解 $C(x,\ t)$，其中 $\alpha = 3/2$

此时，根据 U 和 M的形式，我们提出如下猜想：如果我们有 $\alpha = 1/2$的经典空间偶解，那么下一个空间偶解对应于 $\alpha = 3/2$，其形式为 g

$$g(\eta) = K_0 \frac{1}{\eta} + K_1 \eta, \tag{19}$$

其中， K_0 和 K_1 是任意常数，稍后将确定其值。将 g 的这一形式代入式（17），可知形式（19）满足方程（17）的条件是

$$K_1 = -\frac{1}{2D} K_0. \tag{20}$$

将以下形式代入后，我们得到相同的结果

$$f(\eta) = \eta \cdot e^{-\frac{\eta^2}{4D}} \left(K_0 \frac{1}{\eta} + K_1 \eta \right), \tag{21}$$

直接代入方程（8）。由此，对于 $\alpha = 3/2$，函数 f为

$$f(\eta) = K_0 \cdot \eta \cdot e^{-\frac{\eta^2}{4D}} \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{2D} \eta \right) = K_0 \cdot e^{-\frac{\eta^2}{4D}} \left(1 - \frac{1}{2D} \eta^2 \right). \tag{22}$$

将此形式代入式（5），得到

$$C(x,t) = K_0 \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \left(1 - \frac{1}{2D} \frac{x^2}{t} \right). \tag{23}$$

这一结果在图（2）中进行了可视化展示。

如果我们考虑情形 $\alpha = 5/2 = 2.5$，则可以考虑函数$g(\eta)$的以下形式

$$g(\eta) = K_0 \cdot \frac{1}{\eta} + K_1 \cdot \eta + K_2 \cdot \eta^3. \tag{24}$$

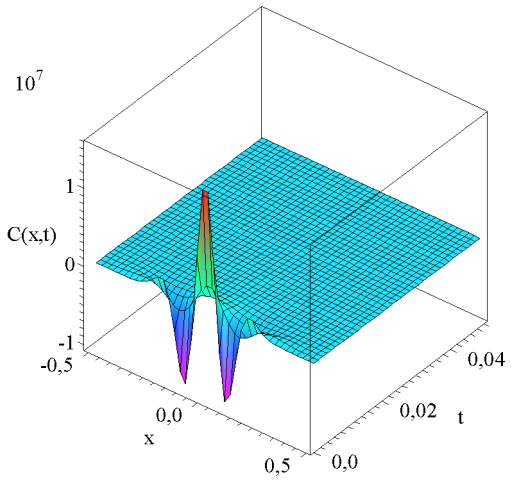


FIGURE 3. 分别代入式（29）中的解 $C(x,\ t)$，适用于 $\alpha = 5/2$

如果我们将此形式代入方程 (17)，则可推导出常数K_0、 K_1 和 K_2 之间的以下关系

$$K_1 = \frac{K_0}{D}, \tag{25}$$

and

$$K_2 = -\frac{K_1}{12D} = \frac{K_0}{12D^2}. \tag{26}$$

由此可得 $g(\eta)$

$$g(\eta) = K_0 \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{D}\eta + \frac{1}{12D^2}\eta^3 \right). \tag{27}$$

相应地， $\alpha = 2.5$ 的 $f(\eta)$ 的最终形式为

$$f(\eta) = K_0 \cdot e^{-\frac{\eta^2}{4D}} \left(1 - \frac{1}{D}\eta^2 + \frac{1}{12D^2}\eta^4 \right). \tag{28}$$

将此形式代入式（5）可得

$$C(x,t) = K_0 \frac{1}{t^{\frac{5}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \left(1 - \frac{1}{D}\frac{x^2}{t} + \frac{1}{12D^2}\frac{x^4}{t^2} \right). \tag{29}$$

这一结果见图（3）。

如果我们考虑情形 $\alpha = 7/2 = 3.5$，则可以采用函数$g(\eta)$ 的以下形式:

$$g(\eta) = K_0 \cdot \frac{1}{\eta} + K_1 \cdot \eta + K_2 \cdot \eta^3 + K_3 \cdot \eta^5. \tag{30}$$

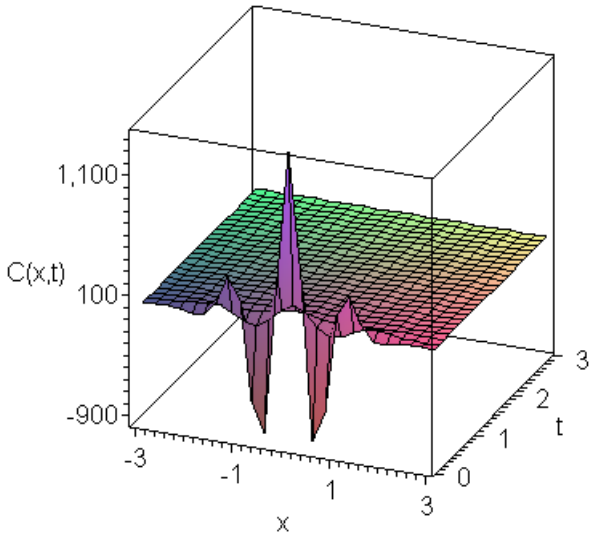


FIGURE 4. 函数 $C(x,\ t)$ 在取值 $\alpha = 7/2$ 时。

如果将此形式代入方程（17），则可得常数 K_0、 K_1、 K_2 和 K_3 之间的以下关系:

$$K_1 = -\frac{3}{2}\frac{K_0}{D}, \tag{31}$$

对于下一个系数

$$K_2 = -\frac{K_1}{6D} = \frac{K_0}{4D^2}. \tag{32}$$

最后，第三个系数为

$$K_3 = -\frac{K_2}{30D} = -\frac{K_0}{120D^3}. \tag{33}$$

将这些系数代入公式 (30)，可得到如下表达式

$$g(\eta) = K_0\left(\frac{1}{\eta} - \frac{3}{2D}\cdot\eta + \frac{1}{4D^2}\cdot\eta^3 - \frac{1}{120D^3}\cdot\eta^5\right). \tag{34}$$

根据式 (16)，这种形式的 g 给出函数 f

$$f(\eta) = K_0\cdot e^{-\frac{\eta^2}{4D}}\left(1 - \frac{3}{2D}\eta^2 + \frac{1}{4D^2}\eta^4 - \frac{1}{120D^3}\eta^6\right). \tag{35}$$

将此形式代入式（5），可得

$$C(x,t) = K_0\frac{1}{t^{\frac{7}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\left(1 - \frac{3}{2D}\frac{x^2}{t} + \frac{1}{4D^2}\frac{x^4}{t^2} - \frac{1}{120D^3}\frac{x^6}{t^3}\right). \tag{36}$$

这一结果在图 4 中得到了直观展示。

显然，将式（30）有限级数中的高阶项纳入后，可以直接求得 $\alpha = 9/2,\ 11/2,$ 等的解。

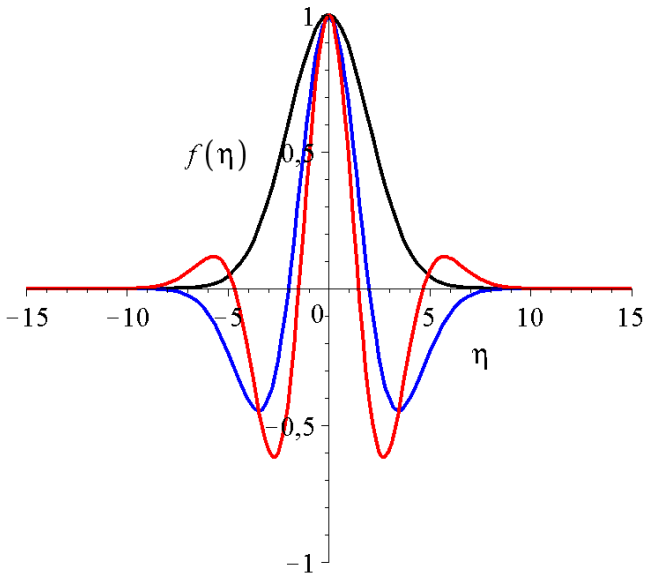


FIGURE 5. 方程（16）的偶形状函数 $f(\eta)$，对应三种不同的自相似 α 指数。黑色、蓝色和红色曲线分别对应 $\alpha = 1/2,\ 3/2$ 以及 $5/2$ 数值，且具有相同的扩散常数（$D = 2$）。请注意，α值较大的形状函数具有更多零点。我们将证明，对于 $\alpha > 0$ 整数值，形状函数在整个轴和半轴上的积分均为零。

为完整起见，我们在图5中给出了形状函数 $f(\eta)$s。请注意， α 值较高的解具有更多振荡，衰减也更快。奇对称解也呈现相同特征。

如我们所见，此时，对于正的 α 值，解满足边界条件 $C() \to 0$当 $x \to \pm\infty$时。

一般的初值问题可以通过使用格林函数形式主义来求解。根据格林函数的标准理论，扩散方程（1）的解可以通过以下卷积积分得到：

$$C(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x_0) G(x - x_0) dx_0, \tag{37}$$

其中， $w(x_0)$ 定义了该问题的初始条件， $C|_{t=0} = w(x_0)$。扩散的格林函数定义良好，可在许多数学教材中找到，例如 [48, 49, 51, 50],

$$G(x - x_0) = exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{4tD}\right]. \tag{38}$$

另一方面，高斯函数是扩散方程的基本解。

接下来我们将看到，对于某些特殊形式的初始条件，例如多项式、高斯函数、正弦函数或余弦函数，卷积积分可以解析求解。

下面我们计算 $\alpha = 1/2$ 的卷积积分。

作为初始条件问题的一个例子，我们可以考虑以下具有紧支撑的光滑函数：

$$w(x_0) = \frac{\text{Heaviside}(3 - x_0) \cdot \text{Heaviside}(3 + x_0) \cdot (9 - x_0^2)}{9}. \tag{39}$$

这个初始条件是扩散问题中一种典型的初始分布，见图6a)。

$\alpha = 1/2$ 的卷积积分：

$$C(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Heaviside}(3 - x_0) \cdot \text{Heaviside}(3 + x_0) \cdot (9 - x_0^2)}{9} \cdot e^{\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}} dx_0. \tag{40}$$

计算结果为

$$\begin{aligned} C(x,t) = \tfrac{1}{2\sqrt{\pi t}} \Bigg[& \sqrt{\pi t}\ \text{erf}\left(\tfrac{3+x}{2\sqrt{t}}\right) + \tfrac{2}{9} x t\ e^{-\frac{6x+x^2+9}{4t}} + \tfrac{2}{3} t\ e^{-\frac{6x+x^2+9}{4t}} - \tfrac{2}{9} t^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}\ \text{erf}\left(\tfrac{3+x}{2\sqrt{t}}\right) \\ & - \tfrac{1}{9} x^2 \sqrt{\pi t}\ \text{erf}\left(\tfrac{3+x}{2\sqrt{t}}\right) - \sqrt{\pi t}\ \text{erf}\left(\tfrac{x-3}{2\sqrt{t}}\right) - \tfrac{2}{9} x t\ e^{-\frac{-6x+x^2+9}{4t}} + \tfrac{2}{3} t\ e^{-\frac{-6x+x^2+9}{4t}} \\ & + \tfrac{2}{9} t^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}\ \text{erf}\left(\tfrac{x-3}{2\sqrt{t}}\right) + \tfrac{1}{9} x^2 \sqrt{\pi t}\ \text{erf}\left(\tfrac{x-3}{2\sqrt{t}}\right) \Bigg], \end{aligned} \tag{41}$$

结果见图6b）。

3. The properties of the shape functions and solutions

下面我们研究形状函数 $f(\eta)$ 和完整解 $C(x,t)$ 的一些性质。首先考虑 L^1 积分范数。

对于 $\alpha = 1/2$ 的情形，其形式为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} f_0 e^{-\frac{\eta^2}{4D}} d\eta = f_0\, 2\sqrt{\pi D}. \tag{42}$$

常数 f_0 会根据具体问题选取。如果 C 表示扩散的密度，那么上述积分中的 f_0 与系统的总质量有关。

相应地

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(x,t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_0 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx = f_0\, 2\sqrt{\pi D}. \tag{43}$$

对于 $\alpha = 3/2$ 的情况

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} K_0 \cdot e^{-\frac{\eta^2}{4D}} \left(1 - \frac{1}{2D}\eta^2\right) d\eta = 0. \tag{44}$$

值得注意的是，高斯函数之后的第一个偶形状函数的积分为零。然而，更显著的特征是，

$$\int_{-\infty}^{0} f(\eta) d\eta = \int_{0}^{\infty} f(\eta) d\eta = 0. \tag{45}$$

因此，振荡以及零点的位置将函数划分成这样：积分不仅在整个实轴 $(-\infty ... \infty)$ 上为零，在半轴 $(0..\infty)$ 或 $(-\infty..0)$ 上也为零。

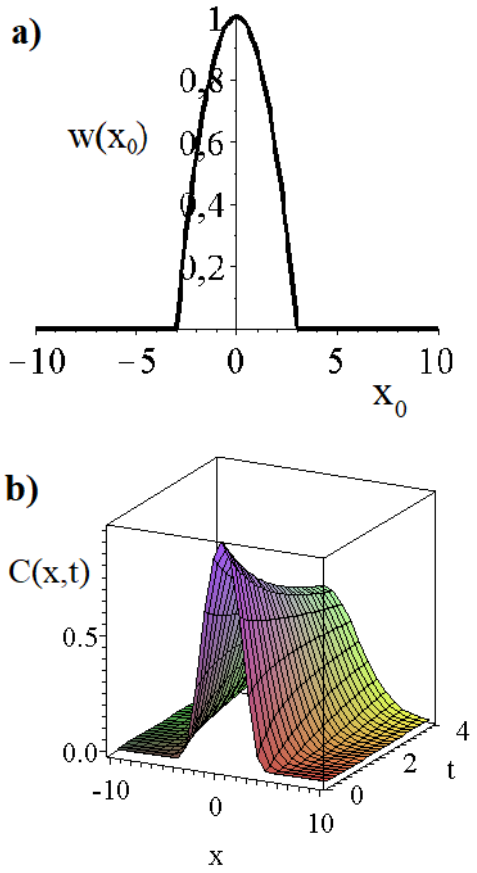


FIGURE 6. a) 初始条件 (39) b) Eq. (40) 中 $\alpha = 1/2$ 的卷积积分。

对相应的解 $C(x,t)$ 计算同类型的积分，我们得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(x,t)dx = \int_{0}^{\infty} C(x,t)dx = \int_{-\infty}^{0} C(x,t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} K_0 \cdot \frac{1}{t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \left(1 - \frac{1}{2D}\frac{x^2}{t}\right) dx = 0,$$

在任意时刻（以及任意扩散系数 D 下）。

当 α 为正半整数 $\alpha = (2n+1)/2$ 且 $(n \,\epsilon\, \mathbb{N})$ 时，所有可能的高次谐波解也都具有相同的性质。这一性质有着深远的影响。常规扩散方程的线性，以及这一偶解序列所具有的附加性质，使我们能够以一种特殊方式扰动通常的高斯函数，从而在扩散过程中保持粒子总数不变，但初始分布可以发生显著改变。从解的最终形式 $C(x,\ t)_\alpha \sim \frac{1}{t^\alpha}$ 可以看出，这些扰动的衰减很短暂，因为它们比标准高斯解衰减得更快。为完整起见，我们给出一个 $C(x,\ t)$ 解，它

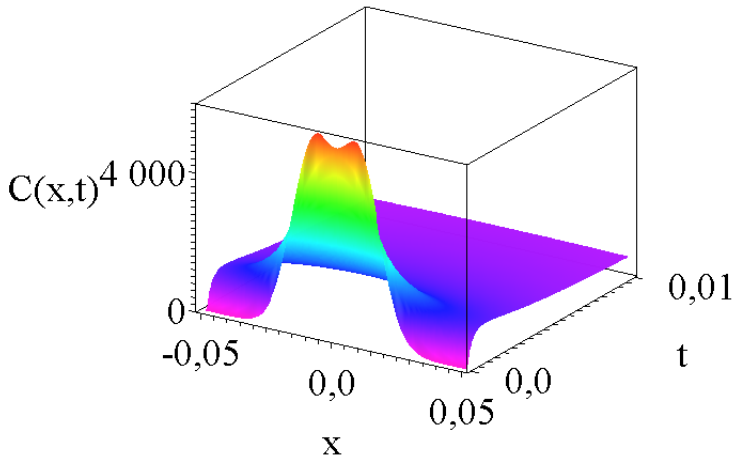


FIGURE 7. 函数 $C(x,\ t)$，即方程（46）的解

是前两个偶对称解 $\alpha = 1/2,\ 3/2$ 的线性组合，形式为

$$C(x,t) = \frac{60}{t^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{-x^2}{4t}} - \frac{0.001}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{-x^2}{4t}} \left(1 - \frac{x^2}{2t}\right), \tag{46}$$

如图（7）所示。请注意，当需要展示两个具有不同幂律衰减的函数之和时，必须使用量级不同的系数，才能获得清晰可见的效果。

作为第二个性质，我们考察形状函数的余弦傅里叶变换：

$$C_\alpha(k) = \int_{-\infty}^{\infty} Cos(k \cdot \eta) f_\alpha(\eta) d\eta. \tag{47}$$

通过直接积分可得，傅里叶变换为

$$C_{\alpha=\frac{2N+1}{2}}(k) \propto l \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{k^{2N} \cdot D^N \cdot e^{-k^2 D}}{\sqrt{\frac{1}{D}}}, \tag{48}$$

对于所有 $N \epsilon \mathbb{N} \backslash 0$ 正整数，且 l 为实常数。这意味着，从定性上看，所有正半整数 α 对应的频谱都相似。它们从零开始，具有一个全局正最大值，并迅速衰减至零。频谱分析通常表明，有限长度的脉冲具有带状频谱，其频率范围有最小值、最大值和一个中心频率。

附录 A 中也给出了对应的奇函数归一化系数。

4. THE DIFFUSION EQUATION WITH CONSTANT SOURCE

此时，我们尝试寻找扩散方程的解，主要采用自相似 Ansatz，其中右端存在一个常数源项。

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2} + n, \tag{49}$$

对于该方程，同样应用自相似变换（5），我们得到一个相对于齐次方程而言的修正方程

$$-\alpha t^{-\alpha-1} f(\eta) - \beta t^{-\alpha-1}\eta\frac{df(\eta)}{d\eta} = Dt^{-\alpha-2\beta}\frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2} + n. \tag{50}$$

右端的自由项没有显式的时间衰减，因此我们预期其他项也不会出现时间衰减，这意味着

$$-\alpha - 1 = 0 \tag{51}$$

$$-\alpha - 2\beta = 0. \tag{52}$$

这两个方程必须同时成立。解这些方程，可得 α 和 β 的以下取值:

$$\alpha = -1 \text{ and } \beta = \frac{1}{2} \tag{53}$$

将这些值代入方程（50），可得以下常微分方程

$$f(\eta) - \frac{1}{2}\eta\frac{df(\eta)}{d\eta} = D\frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2} + n. \tag{54}$$

我们强调，这个方程是通过自相似变换得到的。此时我们注意到，如果将函数 f 平移一个常数，并引入函数 h:

$$h(\eta) = f(\eta) - n \tag{55}$$

我们得到一个略有修改的方程

$$h(\eta) - \frac{1}{2}\eta\frac{dh(\eta)}{d\eta} = D\frac{d^2 h(\eta)}{d\eta^2}. \tag{56}$$

可以观察到，若应用变换 $\eta \to -\eta$ 和 $h(-\eta) = h(\eta)$，方程仍保持不变，因此我们至少可以预期存在一个偶解。

若通过多项式展开求偶解,

$$h(\eta) = A + B\eta^2 + ... \tag{57}$$

则直接代入可得

$$A = 2 \cdot B \cdot D. \tag{58}$$

这意味着，偶解可写为

$$h(\eta) = B(2D + \eta^2) \tag{59}$$

其中 B 是一个取决于初始条件的常数。

此外，我们还观察到，变换 $\eta \to -\eta$ 和 $h(-\eta) = -h(\eta)$ 也使方程（56）保持不变。这意味着，同样值得求取一个奇解。该方程的奇解为

$$h(\eta) = 2D\,\eta\, e^{-\frac{\eta^2}{4D}} + \sqrt{\pi}\,(2D^{3/2} + \sqrt{D}\,\eta^2)\, erf\left(\frac{1}{2}\frac{\eta}{\sqrt{D}}\right) \tag{60}$$

这种奇解的形式如图 8 所示。

如果方程（49）中的 n 为正，我们就可以说方程中存在一个源；如果 n 为负，则说明扩散过程中存在一个汇。当 $C(x,\ t) \geq 0$ 时，这个汇可以被视为具有物理意义。扩散系统

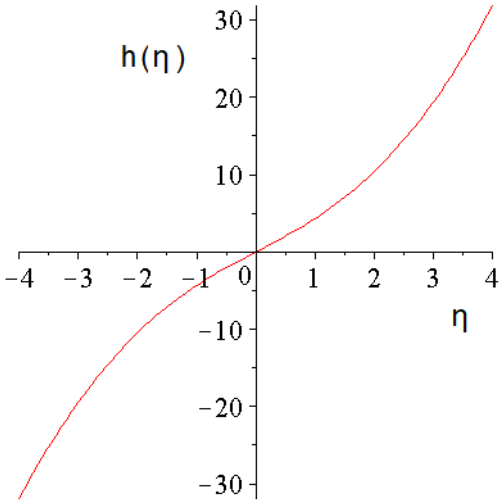


FIGURE 8. 由式（60）描述的形状函数 $h(\eta)$，是式（56）的奇解。

含汇的系统已在文献 [52]，中得到研究，而通过吸附进行水净化也意味着一个浓度随空间变化、随时间降低的过程 [53]。

形状函数的一般解可以由上述偶解和奇解的线性组合得到

$$h(\eta) = \kappa_1 \left[2D\,\eta\, e^{-\frac{\eta^2}{4D}} + \sqrt{\pi}\,(2D^{3/2} + \sqrt{D}\,\eta^2)\, erf\left(\frac{1}{2}\frac{\eta}{\sqrt{D}}\right)\right] + \kappa_2[2D + \eta^2] \tag{61}$$

其中 κ_1 和 κ_2 是取决于问题初始条件或边界条件的常数。

将此形状函数代入一般解（5），即可得到存在恒定源时 $C(x,\ t)$ 的最终形式

$$C(x,t) = t\cdot\left[\kappa_1\left(2D\,\eta\, e^{-\frac{x^2}{4Dt}} + \sqrt{\pi}\,\left(2D^{3/2} + \sqrt{D}\,\frac{x^2}{t}\right)\, erf\left(\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right)\right) + \kappa_2\left(2D + \frac{x^2}{t}\right) + n\right] \tag{62}$$

在相对较短的时间内，一般解会呈现出有趣的特征，这些特征取决于解中偶对称部分或奇对称部分的权重，如图9所示。

长时间行为由偶解的常数项和源项主导。相应地，在足够长的时间内，关系式 $C(x,\ t) \sim (2\kappa_2\, D + n)\ \cdot t$ 刻画了这一动力学过程，如图 9b) 所示。

5. SUMMARY AND OUTLOOK

应用广为人知的自相似试探解，并结合额外的变量替换，我们推导出了一维扩散方程的对称解。借鉴傅里叶级数的类比，我们可以说，这些解可视为基本高斯解可能存在的高次谐波。这些解具有一些不同寻常的性质：它们在半实轴和整个实轴上的积分均为零。由于扩散的线性

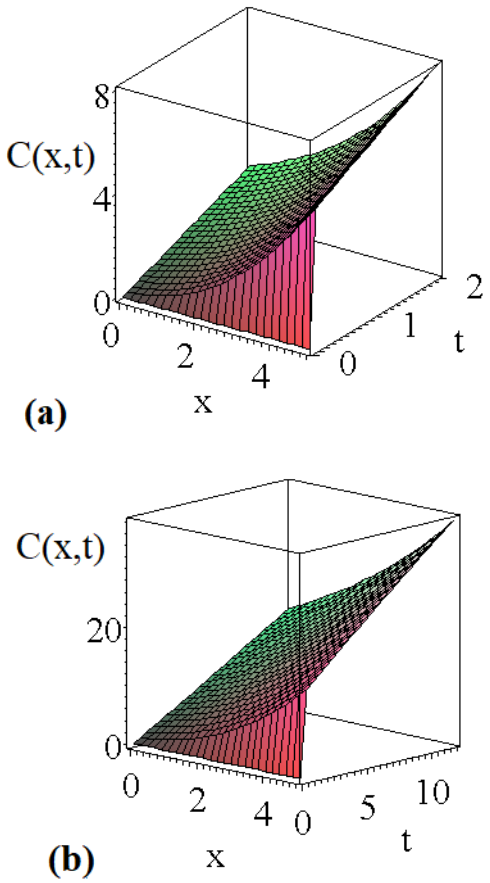


FIGURE 9. 形状函数 $C(x,\ t)$，方程（62）的解，在$D = 1$ 和 $n = 1$的情况下，a) $\kappa_1 = 0.1$ $\kappa_2 = 0.03$ 和 b) $\kappa_1 = 0.2\kappa_2 = 0.2$。

性，这类函数可以叠加到守恒粒子（或能量）的基本高斯解上，因此能够描述新型粒子扩散过程。由于自相似指数较高，这类解仅在较小的时间坐标下具有显著贡献，因为相应的解比通常的高斯解衰减得更快。

这类解也可以用于二维或三维、柱对称或球对称系统。目前，我们正在将这类分析应用于更复杂的扩散系统。我们希望这些新解能产生深远影响，并在不久的将来成功应用于其他科学领域，例如物理学中的量子力学、量子场论、概率论或金融数学。

6. 致谢

我们其中一位作者（I.F. Barna）获得了匈牙利国家研究、发展与创新办公室（NKFIH）的资助。

- 作者声明不存在利益冲突。- 两位作者对研究的每个方面贡献相同。- 没有其他外部资助。

7. Appendix

为求完整并便于直接比较，我们展示前五个奇对称形状函数 $f(\eta)$ 及其对应的解 $C(x,\ t)$:

$$\begin{aligned}
f(\eta) &= erf\left(\frac{\eta}{2\sqrt{D}}\right),\\
f(\eta) &= \kappa_0\cdot\eta\cdot e^{-\frac{\eta^2}{4D}},\\
f(\eta) &= \kappa_0\cdot\eta\cdot e^{-\frac{\eta^2}{4D}}\cdot\left(1-\frac{1}{6D}\eta^2\right),\\
f(\eta) &= \kappa_0\cdot\eta\cdot e^{-\frac{\eta^2}{4D}}\cdot\left(1-\frac{1}{3D}\eta^2+\frac{1}{60}\frac{1}{D^2}\eta^4\right),\\
f(\eta) &= \kappa_0\cdot\eta\cdot e^{-\frac{\eta^2}{4D}}\cdot\left(1-\frac{1}{2D}\eta^2+\frac{1}{20}\frac{1}{D^2}\eta^4-\frac{1}{840}\frac{1}{D^3}\eta^6\right), \qquad (63)
\end{aligned}$$

对于 $\alpha=0$，1，2，3，4..$\mathbb{N}$。采用变量替换 $x/\sqrt{t}$ 且不含 α（或隐含地含有 $\alpha=0$）的首个情形可追溯至玻尔兹曼 [54], , [55]和 [56]也提到了这一点。

式（63）中的函数在整个实数轴上的积分均为零:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(\eta)d\eta=0, \qquad (64)$$

然而，在半轴上:

$$\int_{0}^{\infty} f_{\alpha=0}(\eta)d\eta=\infty, \qquad (65)$$

对于其他非零整数 α，我们得到:

$$\int_{0}^{\infty} f_\alpha(\eta)d\eta=\frac{D}{\alpha-1/2}. \qquad (66)$$

相反半轴上的积分（$-\infty..0$] 分别具有相同的值，但符号相反。奇数 C（x，t）的形式如下:

$$\begin{aligned}
C(x,t) &= erf\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right),\\
C(x,t) &= \left(\frac{\kappa_1 x}{t^{\frac{3}{2}}}\right)e^{-\frac{x^2}{4Dt}},\\
C(x,t) &= \left(\frac{\kappa_1 x}{t^{\frac{5}{2}}}\right)e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\left(1-\frac{x^2}{6Dt}\right),\\
C(x,t) &= \left(\frac{\kappa_1 x}{t^{\frac{7}{2}}}\right)e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\left(1-\frac{x^2}{3Dt}+\frac{x^4}{60(Dt)^2}\right),\\
C(x,t) &= \left(\frac{\kappa_1 x}{t^{\frac{9}{2}}}\right)e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\left(1-\frac{x^2}{2Dt}+\frac{x^4}{20(Dt)^2}-\frac{x^6}{840(Dt)^3}\right), \qquad (67)
\end{aligned}$$

对于所有正整数 α， $\int_{-\infty}^{\infty} C_\alpha\left(x,\ t\right) dx = 0$ 的空间积分。在正半轴上，对于 $\alpha = 0$，误差函数的积分为无穷大；当正数 αa 时，它为：

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_\alpha(x,t) = \frac{Dt^{\frac{1}{2}-\alpha}}{\alpha - \frac{1}{2}}. \tag{68}$$

这些值对于有限的 D、 t 和 α 都是定义良好的。在 $(-\infty..0]$ 半轴上，符号相反。关于奇函数的进一步详细分析已在我们此前的研究中给出 [11]。

References

[1] J. Crank, *The Mathematics of Diffusion*，牛津，Clarendon Press，1956。[2] R. Ghez, *Diffusion Phenomena*，Dover Publication，2001。[3] T.D. Bennett, *Transport by Advection and Diffusion: Momentum, Heat and Mass Transfer*，John Wiley & Sons，2013。[4] J.H. Lienhard IV 和 J.H. Lienhard V, *A heat transfer textbook*，第四版。美国马萨诸塞州剑桥：Phlogiston Press，2017。[5] J. Newman 和 V. Battaglia, *The Newman Lectures on Transport Phenomena*，Jenny Stan- ford Publishing，2021。[6] M. Kardar、G. Parisi、Y.-C. Zhang, 《物理评论快报》56，889（1986）。[7] I.F. Barna、G. Bogn´ar、M. Guedda、K. Hricz´o 和 L. M´aty´as, 《数学建模与分析》25，241（2020）。[8] A.L.Barab´asi 和 E. Stanley, 《表面生长中的分形概念》，剑桥大学出版社，剑桥，1995。[9] L. M´aty´as 和 P. Gaspard, 《物理评论E辑》71，036147（2005）。[10] L. M´aty´as 和 I.F. Barna, 《罗马尼亚物理学杂志》67，101（2022）。[11] I.F. Barna 和 L. M´aty´as, 《数学》10，3281（2022）。[12] J.R. Cannon, 《一维热传导方程》，Addison-Wesley Publishing，马萨诸塞州雷丁，1984。[13] K.D. Cole、J.V. Beck、A. Haji-Sheikh、B. Litkouhi, 《利用格林函数进行热传导》，《力学与热科学中的计算和物理过程系列》（第2版），美国佛罗里达州博卡拉顿，CRC出版社，2011。[14] L. M´aty´as、T. T´el 和 J. Vollmer, 《物理评论E辑》61，R3295，2000。[15] R.K.M. Thambynayagam, 《扩散手册：工程师的应用解》，McGraw-Hill，2011。[16] G. Micahaud、G. Alecian、G. Richer, *Atomic Diffusion in Stars*；《天文学与天体物理学图书馆》；施普林格：美国纽约，2013，第70卷。[17] J.D. Murray, *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*（第三版），纽约、海德堡，施普林格，2003。[18] J. Alebraheem, 《Hindawi数学杂志》2023，文章编号4349573，第1–13页（2023）。[19] B. Perthame, *Parabolic Equations in Biology*，施普林格国际出版公司，海德堡，2015。[20] R. Sz´ep、E. Mateescu、A.C. Nechifor, ´A Keresztesi, 《环境科学与污染研究》24，27288（2017）。[21] D.T. Gillespie、E. Seitaridou, *Simple Brownian Diffusion*，牛津大学出版社，牛津，2013。[22] K. T´alos、Cs. P´ager、Sz. Tonk、C. Majdik、B. Kocsis、F. Kil´ar、T. Pernyeszi, 《智慧大学学报：农业与环境》1，20（2009）。[23] G. Nechifor、S.I. Voicu、A.C. Nechifor、S. Garea, 《脱盐》241，342（2009）。[24] J. Lv、K. Ren 和 Y. Chen, 《物理化学》122(5)，1655（2018）。[25] T. H¨agerstrand, *Innovation Diffusion as a Spatial Process*，芝加哥大学出版社，1967。[26] E. M. Rogers, *Diffusion of Innovations*，The Free Press，1983。[27] N. Nakicenovic 和 A. Gri¨ubler *Diffusion of Technologies and Social Behavior*，施普林格，1991。[28] A. Bunde、J. Caro、J. K ¨ *Diffusive Spreading in Nature Technology and Society* 2018 arger 和 G. Vogl，，，施普林格。

[29] G. Vogel, *Adventure Diffusion*，施普林格，2019。[30] T. Mazzoni, *A First Course in Quantitative Finance*，剑桥大学出版社，剑桥，2018。[31] E. L´az´ar，《智慧大学学报·经济与商业》2，75（2014）。[32] R. Albert 和 Albert-L´aszl´o Barab´asi，《现代物理评论》74，47（2002）。[33] P. Rogolino、R. Kov´acs、P. V´an 和 V.A. Cimmelli，《连续介质力学与热力学》30，1245–1258（2018）。[34] G.W. Bluman 和 J.D. Cole，《数学力学杂志》18，1025（1969）。[35] L. Sedov, *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*，CRC出版社，1993。[36] Ya. B. Zel'dovich 和 Yu. P. Raizer, *Physics of Shock Waves and High Temperature Hydrodynamic Phenomena* 1966 学术出版社，纽约。[37] G.I. Baraneblatt, *Similarity, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics* Consultants Bureau，纽约，1979。[38] I.F. Barna 和 L. M´aty´as，《流体动力学研究》46，055508（2014）。[39] I.F. Barna、M.A. Pocsai、S. Lokos、L. M´aty´as，《混沌、孤子与分形》103，336（2017）。[40] I. F. Barna、M.A. Pocsai 和 G.G. Barnaf¨oldi，《数学》10，3220，2022。[41] I.F. Barna、M.A. Pocsai 和 L. M´aty´as，《广义李理论与应用杂志》11，1000271（2017）。[42] M. Csan´ad 和 M. Vargyas，《欧洲物理学杂志A辑》44，473（2010）。[43] I.F. Barna、L. M´aty´as，《米什科尔茨数学札记》14，785（2013）。[44] G.Nath 和 S. Singh，《天体物理学与天文学杂志》40，50（2019）。[45] P.K. Sahu，《巴西物理学杂志》50，548（2020）。[46] C. Kanchana、Y. Su 和 Y. Zhao，《非线性科学与数值模拟通讯》83，105129（2020）。[47] F.W.J. Olver、D.W. Lozier、R.F. Boisvert 和 C.W Clark, *NIST handbook of mathematical functions* 2010 ，剑桥大学出版社。[48] P.K. Kythe, *Green's Functions and Linear Differential Equations*，《Chapman & Hall/CRC应用数学与非线性科学丛书》；CRC出版社：美国佛罗里达州博卡拉顿，2011。[49] T. Rother, *Green's Functions in Classical Physics*，《物理学讲义》；施普林格国际出版公司：美国纽约州纽约，2017；第938卷。[50] I.N. Bronshtein、K.A. Semendyayev、G. Musiol 和 H M¨uhlig, *Handbook of Mathematics*；施普林格，德国威斯巴登，2007。[51] W. Greiner 和 J. Reinhardt, *Quantum Electrodynamics*，施普林格：柏林/海德堡，德国，2009。[52] I. Claus、P. Gaspard，《物理评论E辑》63，036227，2001。[53] E. R´ap´o、Sz. Tonk，《分子》26，5419，2021。[54] L. Boltzmann，《物理学年鉴》53，959，1894。[55] K.E. Lonngren，《印度科学院学报》86(2)，125（1977）。[56] H. Mehrer 和 N.A. Stolwijk，《扩散基础》11，1（2009）。

Department of Bioengineering, Faculty of Economics, Socio-Human Sciences and En-gineering, Sapientia Hungarian University of Transylvania, Libertăţii sq. 1, 530104Miercurea Ciuc, Romania,
Email address: matyaslaszlo@uni.sapientia.ro

Wigner Research Center for Physics, Konkoly-Thege Miklós út 29 - 33, 1121 Bu-dapest, Hungary*Email address*: barna.imre@wigner.hu