arXiv:2304.06838v1 [math.DS] 13 Apr 2023

一类渐近自治时滞微分方程的指数二分性

´ ´ ´
HELI ELORREAGA 和
ADRIAN GOMEZ

Abstract. 在本文中，我们给出一个判据，使延迟系统 $x'(t) = L(t)x_t$ 在所有 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，其中 $L_\pm = \lim_{t\to\pm\infty} L(t)$，且系统 $x'(t) = L_\pm x_t$ 是自治的并且是双曲的。证明基于对加权 Sobolev 空间$L^p(\mathbb{R},\mu)$ 和 $W^{1,\,p}(\mathbb{R},\mu)$ 的恰当选取；其中涉及的微分算子成为 Fredholm 算子，并充分利用了这一性质。

1. Introduction and main result

本文的主要目标是证明，对于一类具有 N 离散时滞的渐近自治延迟微分方程，在整个 $\mathbb{R}$上存在指数二分性。这类二分性在研究线性非自治系统的稳定性，以及围绕某个解线性化的某些非线性系统时发挥作用。稳定性是研究微分方程系统中的一个重要课题。众所周知，对于双曲自治系统，其稳定性由分析相应特征方程的根来确定。然而，对于某些非自治系统，仅考察相应特征方程的根并不能确定其稳定性。事实上，L. Markus 和 H. Yamabe 在 [6] 构造了一个令人意外的反例。因此，研究非自治线性系统的稳定性需要采用另一种方法。Coppel 在 [3], 运用常规二分性和指数二分性的概念，将其推广为非自治情形下的双曲性，并由此建立了稳定性理论中的新结果，使之成为这些替代方法中一种富有成效的工具。在这方面，值得一提的是 Palmer 关于常微分方程的工作 [7, 8, 9] ，以及 Lin 关于泛函微分方程的工作 [4] 。我们还提及 Sacker 和 Sell 的工作 [10] ，他们研究了一般类无限维系统的指数二分性相关性质。

正如 [1], 中所解释的，关于可容许性概念与稳定性之间关系的研究已有大量文献。最近，Luis Barreira 和 Claudia Valls 在 [1] 中通过适当函数空间的可容许性概念，建立了指数二分性的刻画。随后，他们在 [2], 中以 $\mathbb{R}$ 上非自治线性齐次时滞方程存在指数二分性为假设，证明了 Palmer [7]意义下著名 Hartman-Grobman 定理的一个函数版本。

更具体地，设 C 为定义在 $[-r, 0]$ 上的所有连续函数组成的 Banach 空间，并赋予上确界范数: $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$，时滞为 $r > 0$。设齐次时滞方程

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：34K20、34K06、34D09、37B55。
Key words and phrases. 时滞方程、稳定性、指数二分性、非自治系统。1

$$x'(t) = L(t)x_t,\ t \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

其中，$x_t(\theta) := x(t+\theta)$，对于 $\theta \in [-r, 0]$ 和 $x_t \in C$ 和 $L(t) : C \to \mathbb{R}^n$ 均为对所有 $t \in \mathbb{R}$连续的线性算子。
在 [1] 中表明，在整个 $\mathbb{R}$上存在指数二分性，可以通过空间（C_b, M）的可容许性来刻画，其中

$$\begin{aligned} C_b &:= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n / f \text{ is bounded and continuous}\}, \text{and} \\ M &:= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n / f \text{ is measurable and } \int_t^{t+1} |f(s)|ds < \infty, \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

（参见定理 2, [1]。
然而，在实际中，检验（C_b, M）的可容许性并不容易。
沿着这一思路，在本文中我们证明了我们的空间（$W^{1,\ p}$（$\mathbb{R}$, $d\mu$） L^p（$\mathbb{R}$, $d\mu$））的可容许性带有一个适当的有限测度 μ，其定义为

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{1+t^2}, \tag{1.2}$$

等价于对于一族$L(t)$渐近双曲泛函，方程 (1.1) 在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性。此外，定义微分算子 $\Lambda_L : W^{1,\ p}(\mathbb{R}, d\mu) \to L^p(\mathbb{R}, d\mu)$ 为

$$(\Lambda_L x)(t) := x'(t) - L(t)x_t = x'(t) - \sum_{j=0}^{N} A_j(t)x(t - r_j), \tag{1.3}$$

我们证明，我们这对加权空间的可容许性取决于 Λ_L 的 Fredholm 算子性质，而这些性质又包含在以下对 [5] 中定理 A 的非平凡推广里：

定理 1.1. 假设齐次方程 (1.1) 是渐近双曲的，并取有限测度 μ。则

(a) 对任意 $1 \le p \le \infty$，算子 $\Lambda_L : W^{1,\ \mu\ p} \to L^p_\mu$ 是 Fredholm 算子，

(b) $\mathcal{K}_L \subseteq W^{1,\ \mu\ p}$ 和 $\mathcal{K}_{L^*} \subseteq W^{1,\ \mu\ q}$ 的核分别与 Λ_L 和 Λ_{L^*} 无关，其中 $p^{-1} + q^{-1} = 1$

(c) L^p_μ 中 Λ_L 的值域 $\mathcal{R}^p_L \subseteq L^p_\mu$ 为

$$\mathcal{R}^p_L = \Big\{h \in L^p_\mu : \int_{\mathbb{R}} \overline{y(t)}h(t)d\mu = 0,\ \textit{for all } y \in \mathcal{K}_{L^*}\Big\}. \tag{1.4}$$

特别地，

$$\dim \mathcal{K}_{L^*} = \textit{codim } \mathcal{R}^p_L, \quad \dim \mathcal{K}_L = \textit{codim } \mathcal{R}^p_{L^*}, \quad \textit{Ind}(\Lambda_L) = -\textit{Ind}(\Lambda_{L^*}). \tag{1.5}$$

作为上一条定理的补充，我们给出指数二分性的以下刻画：

定理 m 1.2. 假设齐次方程 (1.1) 是渐近双曲的，则一个 d

(a) $\mathrm{Ind}(\Lambda_L) = 0$, (b) $\Lambda_L : W^{1,p}_\mu \to L^p_\mu$ 具有平凡核 $\mathcal{K}_L$

那么，方程 (1.1) 在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性。

本文的组织结构如下：下一节将概述全文所用的一些基本事实和记号。第 3 节证明定理 (1.1)。为此，我们得到与算子 Λ_L 相关的格林函数，并在引理 (3.2) 中对其进行估计，而这又基于引理 (3.1) 中的自治情形。此外，引理 (3.3) 给出了关于方程 (2.2) 和 (2.4) 的解的重要界。最后，第 4 节证明定理 (1.2)。

2. Preliminaries and notation

我们首先定义加权空间。

$$L^p(\mathbb{R}, d\mu) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : f \text{ is measurable and } \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p d\mu < \infty\},$$

对于 $1 \le p < \infty$,

$L^\infty(\mathbb{R}, d\mu) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : f$ 可测，且存在一个常数 C 使得 t

$$|f(t)|\frac{d\mu}{dt} \le C \text{ a.e. on } \mathbb{R}\}, \tag{2.1}$$

and

$$W^{1,p}(\mathbb{R}, d\mu) = \{f \in L^p(\mathbb{R}, d\mu) : f \text{ is absolutely continuous and } f' \in L^p(\mathbb{R}, d\mu)\}.$$

为简单起见，我们将 $L^p_\mu, W^{1,p}_\mu$称为加权空间，将 $L^p, W^{1,p}$称为所有 $\mathbb{R}$ 上的不带权经典空间。

将方程 (1.1) 写成更熟悉的形式

$$x'(t) = \sum_{j=0}^{N} A_j(t)x(t - r_j), \tag{2.2}$$

其中，正如我们所见

$$r = r_N > r_{N-1} > \cdots > r_1 > r_0 = 0 \tag{2.3}$$

是时滞，矩阵 $A_j(t)$ 可测，在 $\mathbb{R}$ 上一致有界，且 $\lim_{t\to\pm\infty} = A_{\pm,j} \in M_n(\mathbb{R})$。与 (2.2) 相关联，我们考虑非齐次方程

$$x'(t) = \sum_{j=0}^{N} A_j(t)x(t - r_j) + h(t), \tag{2.4}$$

其中 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ 是 $L^p(\mathbb{R}, d\mu)$ 中的一个函数。

定义在较大区间上的连续函数 $x : J' \to \mathbb{R}^n$

$$J' = \{t + \theta : t \in J \text{ and } \theta \in [-r, 0]\}$$

是方程 (2.2) 在区间 J 上的一个解，如果 x 在 J 上绝对连续，并且对几乎所有的 $t \in J$ 都满足方程 (2.2)。因此，对于这样的 x，我们有：对每个 $t \in J$， $x_t \in C$。

与方程 (2.2) 相关的线性算子 $\Lambda_L : W^{1,p}_{,\mu} \to L^p_\mu$ 定义如下：

$$(\Lambda_L x)(t) = x'(t) - \sum_{j=0}^{N} A_j(t)x(t - r_j). \tag{2.5}$$

显然，由于系数 A_j 一致有界，算子 Λ_L 对 $1 \le p \le \infty$有界。

回顾一下，有界算子 $A : X \to Y$，其中 X, Y是 Banach 空间，若 dim(ker(A)) 和 dim(ker(A')) 有限，且值域 $\mathcal{R}(A)$ 是 Y的闭子空间，则称其为 Fredholm 算子。若 A 是 Fredholm 算子，则定义其指标为

$$\mathrm{Ind}(A) = \dim(\ker(A)) - \dim(\ker(A'))$$

（例如，参见 [11], 第 101 页）。

指数二分性。设 x 是满足初始数据 $x_s = \phi$的方程 (2.2) 的唯一解，其中$\phi \in C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$。解算子 $T(t, s) : C([-r, 0], \mathbb{R}^n) \to C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ 给出为

$$T(t, s)\phi = x_t, \quad \text{for } t \ge s \text{ and } \phi \in C. \tag{2.6}$$

如果存在强连续投影 $P(s)$、 $Q(s)$、 $= I - P(s)$、 $s \in J$，并满足以下条件，则称方程 (2.2) 在区间 J 上具有指数二分性，其对应的正实常数为 D 和 λ：

(i) $T(t, s)P(s) = P(t)T(t, s)$，对于 $t \ge s$属于 J；(ii) $\overline{T}(t, s) = T(t, s)|_{\mathcal{R}Q(s)}$是从 $\mathcal{R}Q(s)$ 到 $\mathcal{R}Q(t)$ 的同构，适用于 $t \ge s$，而 $\overline{T}(s, t) : \mathcal{R}Q(t) \to \mathcal{R}Q(s)$ 定义为 $\overline{T}(t, s)$ 的逆算子；(iii) $\|T(t, s)P(s)\| \le De^{-\lambda(t-s)}$，对于 $t \ge s$属于 J；(iv) $\|\overline{T}(s, t)Q(t)\| \le De^{-\lambda(t-s)}$，对于 $t \ge s$属于 J。

(2.2) 的伴随方程。称

$$\begin{aligned} \omega(t) &:= (1+t^2)^{-1}, \\ k(t) &:= -\frac{2t}{1+t^2}, \\ M_j^{\pm}(t) &:= \frac{1+t^2}{1+(t\pm r_j)^2} \end{aligned}$$

容易看出,

(P_1) $\omega'(t) = k(t)\omega(t)$.

(P_2) $w(t \pm r_j) = M_j^{\pm}(t)\omega(t)$.

有鉴于此，我们可以按照以下方式计算 Λ_L 的伴随算子。

引理 2.1. 设 Λ_L 为式 (2.5) 中定义的线性算子。其伴随算子 Λ_L^* 为

$$(\Lambda_L^* y)(t) = -y'(t) - \sum_{j=0}^{N} B_j^*(t) y(t+r_j) \tag{2.7}$$

对于 $y \in W^{1,\mu}{}^{q}$，其中矩阵 B_j^* 是.....的转置共轭矩阵。

$$\begin{aligned} B_0(t) &= k(t)I + A_0(t) \\ B_j(t) &= M_j^{+}(t)A_j(t+r_j), \qquad for\ j = 1,2,...,N \end{aligned} \tag{2.8}$$

证明。设 $x \in W^{1,\mu}{}^{p}$ 和 $y \in W^{1,\mu}{}^{q}$，其中 $1 \le p$、$q \le \infty$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$。我们回顾一下，这些加权空间之间的对偶性由下式给出:

$$\langle x, y\rangle_\mu := \int_{\mathbb{R}} \overline{y(t)} x(t) d\mu = \int_{\mathbb{R}} \overline{y(t)} x(t)\omega(t) dt.$$

利用这一点，经过分部积分并应用 (P_1) 性质,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \overline{y(t)} x'(t)\omega(t) dt &= -\int_{\mathbb{R}} \overline{y'(t)}\omega(t)x(t)dt - \int_{\mathbb{R}} \overline{y(t)}\omega'(t)x(t)dt \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \overline{y'(t)}x(t)\omega(t)dt - \int_{\mathbb{R}} \overline{y(t)}x(t)k(t)\omega(t)dt \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \overline{y'(t)}x(t)d\mu - \int_{\mathbb{R}} \overline{y(t)}x(t)k(t)d\mu. \end{aligned} \tag{2.9}$$

现在，我们将证明:

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{y(t)}(\Lambda_L x)(t) d\mu = \int_{\mathbb{R}} \overline{(\Lambda_L^* y)(t)} x(t) d\mu \tag{2.10}$$

由 (2.9) 和 (P_2) 得到：

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \overline{y(t)}(\Lambda_L x)(t)d\mu &= \int_{\mathbb{R}} \overline{y(t)}x'(t)d\mu - \int_{\mathbb{R}} \overline{y(t)}\sum_{j=0}^{N} A_j(t)x(t-r_j)d\mu \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \overline{y'(t)}x(t)d\mu - \int_{\mathbb{R}} \overline{y(t)}x(t)k(t)d\mu \\ &\quad -\sum_{j=0}^{N}\int_{\mathbb{R}} \overline{y(t)}A_j(t)x(t-r_j)w(t)dt \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \overline{y'(t)}x(t)d\mu - \int_{\mathbb{R}} \overline{y(t)}x(t)k(t)w(t)dt \\ &\quad -\sum_{j=0}^{N}\int_{\mathbb{R}} \overline{y(t+r_j)}A_j(t+r_j)x(t)w(t+r_j)dt \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \overline{y'(t)}x(t)d\mu - \int_{\mathbb{R}} \overline{y(t)}[k(t)I + A_0(t)]x(t)w(t)dt \\ &\quad -\sum_{j=1}^{N}\int_{\mathbb{R}} \overline{y(t+r_j)}A_j(t+r_j)x(t)M_j^+(t)w(t)dt \end{aligned} \tag{2.11}$$

将矩阵 B_j 按 (2.8) 定义，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{y(t)}(\Lambda_L x)(t)d\mu = \int_{\mathbb{R}} \overline{\Big[-y'(t) - \sum_{j=0}^{N} B_j^*(t)y(t+r_j)\Big]}x(t)d\mu$$

正如我们所期望的那样。 □

鉴于上一个引理，我们将 (2.2) 的伴随方程定义为

$$y'(t) = L^*(t)y_t = -\sum_{j=0}^{N} B_j^*(t)y(t+r_j) \tag{2.12}$$

其中

$$L^*(t)\varphi = -\sum_{j=0}^{N} B_j^*(t)\varphi(r_j), \qquad \varphi \in C([0,r],\mathbb{C}^d)$$

以及按 (2.8) 定义的矩阵 B_j。注意

$$(\Lambda_L^* y)(t) = -y'(t) + L^*(t)y_t$$

这意味着

$$\Lambda_L^* = -\Lambda_{L^*}.$$

2.1. 渐近双曲系统。与自治系统相关的特征方程

$$x'(t) = L_0 x_t = \sum_{j=0}^{N} A_{j,0}x(t-r_j), \tag{2.13}$$

由 $\det \Delta_{L_0}(s) = 0$ 给出，其中

$$\Delta_{L_0}(s) = sI - \sum_{j=0}^{N} A_{j,0} e^{-sr_j}. \tag{2.14}$$

系统 (2.13) 是双曲的，当且仅当

$$\det \Delta_{L_0}(iz) \neq 0, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{2.15}$$

当我们可以将非自治算子 $L(t)$ 写成以下两项之和时

$$L(t) = L_0 + M(t) \tag{2.16}$$

一项是在 (2.13) 中定义的常系数算子，另一项是满足下列条件的扰动项 $M(t)$

$$\lim_{t \to \pm\infty} \|M(t)\| = 0, \tag{2.17}$$

我们称 (1.1) 在 $\pm\infty$ 处渐近自治（分别地）。用算子的术语来说，若 Λ_L 在 $\pm\infty$ 处渐近自治（分别地），则

$$\Lambda_L = \Lambda_{L_0} + M(t), \tag{2.18}$$

其中，稍微滥用一下记号，将其理解为算子 $M(t) : W^p_\mu \to L^p_\mu$，定义为 $M(t)(x) := M(t)x_t$，其中 $M(t)$ 是 (2.16) 中的泛函扰动，且

$$\lim_{t \to \pm\infty} \|M(t)\| = 0,$$

in t相应的算子范数。我们可以用与 $L(t)$ 相同的方式来表示这个泛函 a s

$$M(t)\phi := \sum_{j=0}^{N} C_j(t)\phi(-r_j),$$

对于满足以下条件的某些可测、一致有界矩阵函数 $C_j(t)$

$$\lim_{t \to \pm\infty} C_j(t) = 0.$$

当然，我们可以将这些概念结合起来：当一个系统在相应极限下同时具有前面所述的两种性质时，就称其分别在 $\pm\infty$ 渐近双曲。

如果一个系统 $x'(t) = L(t)x_t$ 在两个极限 $\pm\infty$ 下都是渐近双曲的，则称其为渐近双曲系统。注意，在 $\pm\infty$ 处的极限系统不一定相同。

3. Proof of Theorem 1.1

假设系统 (2.13) 是双曲的，在 [5], 第 4 节中使用傅里叶逆变换

$$G_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itz} \Delta_{L_0}^{-1}(iz) dz, \tag{3.1}$$

为了构造该系统的格林函数，我们也需要这一工具；在下面的定理中，我们将证明这一结论在我们的加权空间情形下仍然成立。

引理 3.1. 假设由 (2.13) 给出的算子 L_0 是双曲的，则有 e

(a) 函数 $G_0(t)$ 满足以下指数估计：

$$|G_0(t)| \leq K_0 e^{-a_0|t|}, \tag{3.2}$$

其中 $t \in \mathbb{R}$，且 $K_0 > 0$ 和 $a_0 > 0$。

(b) 相应算子 Λ_{L_0} 是从 $W^{1}{}_{,\mu}{}^{p}$到 L^p_μ 的同构，其中 $1 \leq p \leq \infty$.

(c) 逆算子 $\Lambda^{-1}_{L_0}$ 由卷积给出

$$(\Lambda^{-1}_{L_0} h)(t) = (G_0 * h)(t) = \int_{\mathbb{R}} G_0(t-z)h(z)d\mu(z)$$

证明。为方便读者，我们将证明分为若干步骤，并重复和调整定理 4.1 [5] 证明中的一些论证，这些论证在我们的情形下仍然成立。

步骤 **1** G_0 (*t*) 是 $\mathbb{R}-\{0\}$ 上的一个绝对连续函数，具有满足条件的跳跃不连续性。 g

$$G_0(0+) - G_0(0-) = I.$$

事实上，将 $G_0(t)$ 视为缓增分布，并对其应用傅里叶变换，得出的是

$$G_0'(t) - \sum_{j=0}^{N} A_{j,0} G_0(t - r_j) \tag{3.3}$$

我们有

$$\begin{aligned} \left(izI - \sum_{j=0}^{N} A_{j,0} e^{-izr_j} \right) \hat{G}_0(z) &= \Delta_{L_0}(iz)\hat{G}_0(z) \\ &= I, \end{aligned}$$

因此

$$G_0'(t) - \sum_{j=0}^{N} A_{j,0} G_0(t - r_j) = \delta(t) I \tag{3.4}$$

其中 δ 为狄拉克δ分布。

(3.4) 意味着，对于所有 $t \neq 0$， G_0 都是一个绝对连续函数，并且满足

$$G_0'(t) = \sum_{j=1}^{N} A_{j,0} G_0(t + r_j) \quad \text{a. e.}$$

此外，函数 G_0 存在左极限和右极限 $G_0(0–)$ 和 $G_0(0+)$，并且存在一个跳跃间断点

$$G_0(0+) - G_0(0-) = I.$$

步骤 2 存在正常数 $K, a_0 > 0$ ，使得 $|G_0(t)| \leq K e^{-a_0|t|}$。令

$$S(z) := -\sum_{j=0}^{N} A_{j,0} e^{-r_j z},$$

并注意到它在任意垂直带内一致有界。

$$L = \{z \in \mathbb{C}/ \quad |\Re(z)| \leq a_0 < 1\},$$

对于固定的 $0 < a_0 < 1$。这意味着，对于满足 $|\Im(z)| \gg 1$ 的 $z \in L$，矩阵

$$\left| \frac{I - S(z)}{z+1} \right| < 1, \tag{3.5}$$

因此，我们可以写出

$$\begin{aligned}
\Delta_{L_0}^{-1}(z) &= (zI + S(z))^{-1} \\
&= [(z+1)I + S(z) - I]^{-1} \\
&= \frac{1}{z+1}\left[I - \frac{I - S(z)}{z+1}\right]^{-1} \\
&= \frac{1}{z+1}\left\{I + \frac{I - S(z)}{z+1} + \frac{[I - S(z)]^2}{(z+1)^2} + \frac{[I - S(z)]^3}{(z+1)^3} + \cdots\right\} \\
&= \frac{1}{z+1}I + \frac{I - S(z)}{(z+1)^2} + \frac{[I - S(z)]^2}{(z+1)^3} + \frac{[I - S(z)]^3}{(z+1)^4} + \cdots
\end{aligned}$$

这使得可以写出

$$\Delta_{L_0}^{-1}(z) = \frac{1}{z+1}I + R(z), \tag{3.6}$$

其中，函数 $R(z) := \frac{I - S(z)}{(z+1)^2} + \frac{[I - S(z)]^2}{(z+1)^3} + \frac{[I - S(z)]^3}{(z+1)^4} + \cdots$ 在 L 上是解析的，并且当 $|\Im(z)| \to \infty$ 时满足 $R(z) = O(|\Im(z)|^2)$。将 (3.6) 代入 (3.1)

$$\begin{aligned}
G_0(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itz}\Delta_{L_0}^{-1}(iz)dz \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itz}\left[\frac{1}{iz+1}I + R(iz)\right]dz \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itz}\left[\frac{1}{iz+1}I\right]dz + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itz}R(iz)dz \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itz}\left[\frac{1}{iz+1}I\right]dz + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itz}R(iz)dz
\end{aligned}$$

如果 $t > 0$，第一项末项是.....的傅里叶逆变换。

$$E(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0, \\ e^{-t}I & \text{if } t \geq 0. \end{cases}$$

由于 $R(z)$ 在 L 上解析，我们可以在第二项中将积分路径从直线 $\Re(z) = 0$ 改为直线 $\Re(z) = -a_0$。于是可以写成

$$G_0(t) = E(t) + \frac{e^{-a_0 t}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itz}R(-a_0 + iz)dz, \tag{3.7}$$

这表明，对于 $t > 0$ 和某个 $K > 0$，$|G_0(t)| \leq Ke^{-a_0 t}$。
对于 $t < 0$，只需通过 $\Re(z) = a_0$ 改变路径并使用

$$E_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t > 0, \\ e^t I & \text{if } t \leq 0 \end{cases}$$

尽管如此，$E(t)$，从而完成了对 (3.2) 的证明。

步骤 3 给定 $h \in L^p_\mu$，函数 $x(t) := \int_{\mathbb{R}} G_0(t-s)h(s)d\mu(s)$ 属于 $W^{1,\,\mu}{}^p$因此$\Lambda_{L_0} : W^{1,\,\mu}{}^p \to L^p_\mu$ 是满射。

我们开始检验 $x \in L^p_{\mu\circ}$ 设 $\tilde{h}(z) := h(z)(1+z^2)^{-1/p}$

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |G_0(t-z)||\tilde{h}(z)|(1+z^2)^{-1/q}dz \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |G_0(t-z)||\tilde{h}(z)|dz \\ &= (|G_0| * |\tilde{h}|)(t). \end{aligned}$$

因此，利用杨氏不等式，我们得到

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^p(1+t^2)^{-1}dt\right)^{1/p} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} ((|G_0| * |\tilde{h}|)(t))^p(1+t^2)^{-1}dt\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} ((|G_0| * |\tilde{h}|)(t))^p dt\right)^{1/p} \\ &\leq \|G_0\|_{L^1}\|h\|_{L^p_\mu} \end{aligned}$$

这意味着 $x \in L^p_{\mu\circ}$ 为了证明 $x \in W^{1,\,\mu}{}^p$，令 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 为一个测试函数，并将 x 视为正则广义函数，如下所示：

$$T_x(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\varphi(t)d\mu, \tag{3.8}$$

这意味着其广义导数为

$$T'_x(\varphi) = -\int_{\mathbb{R}} x(t)[\varphi(t)k(t) + \varphi'(t)]d\mu. \tag{3.9}$$

为了证明 x 满足 $\Lambda_{L_0}x = h$，我们计算了

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \sum_{j=0}^{N} A_{j,0} x(t-r_j) d\mu(t) \\
= &\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \int_{\mathbb{R}} \left[\sum_{j=0}^{N} A_{j,0} G_0(t-r_j-s) \right] h(s) d\mu(s)\ d\mu(t) \\
= &\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \int_{\mathbb{R}} G_0'(t-s) h(s) d\mu(s)\ d\mu(t) \\
= &\int_{\mathbb{R}} h(s)w(s) \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)[G_0'(t-s)w(t)]dt\ ds \\
= &\int_{\mathbb{R}} h(s)w(s) \left[-\varphi(s)I - \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)w'(t)G(t-s)dt + \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) d_t(G(t-s)w(t)) \right] ds \\
= &-\int_{\mathbb{R}} h(s)\varphi(s)d\mu(s) - \int_{\mathbb{R}} h(s)w(s) \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)w'(t)G(t-s)dtds \\
&+ \int_{\mathbb{R}} h(s)w(s) \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) d_t(G(t-s)w(t))ds \\
= &-\int_{\mathbb{R}} h(s)\varphi(s)d\mu(s) - \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)k(t)w(t) \left[\int_{\mathbb{R}} h(s)G(t-s)w(s)ds \right] dt \\
&+ \int_{\mathbb{R}} h(s)w(s) \left[-\int_{\mathbb{R}} \varphi'(t)G(t-s)w(t)dt \right] ds \\
= &-\int_{\mathbb{R}} h(s)\varphi(s)d\mu(s) - \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)k(t)x(t)d\mu(t) \\
&- \int_{\mathbb{R}} \varphi'(t) \left[\int_{\mathbb{R}} G(t-s)h(s)w(s)ds \right] w(t)dt \\
= &-\int_{\mathbb{R}} h(s)\varphi(s)d\mu(s) - \int_{\mathbb{R}} [\varphi(t)k(t) + \varphi'(t)]x(t)d\mu(t)
\end{aligned}
$$

这意味着 x 满足 $\Lambda_{L_0} x = h$ 的广义版本。

$$
\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \left[\sum_{j=0}^{N} A_{j,0} x(t-r_j) + h(t) \right] d\mu(t) = -\int_{\mathbb{R}} [\varphi(t)k(t) + \varphi'(t)]x(t)d\mu(t). \tag{3.10}
$$

令 $g(t) = \sum_{j=0}^{N} A_{j,\,0} x(t-r_j) + h(t) \in L^p_{\mu\circ}$ 如果我们定义 $u(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)ds$，其中 $t_0 \in \mathbb{R}$ 为某个值，那么 u 是绝对连续的，并通过分部积分及利用 (3.10)

$$
\begin{aligned}
T_u'(\varphi) &= -\int_{\mathbb{R}} u(t)[\varphi'(t) + k(t)\varphi(t)]d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}} u'(t)\varphi(t)d\mu \\
&= T_x'(\varphi).
\end{aligned}
$$

因此

$$\begin{aligned} 0 &= T'_u(\varphi) - T'_x(\varphi) \\ &= \int_{\mathbb{R}} [x(t) - u(t)][\varphi'(t) + k(t)\varphi(t)] d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}} [x(t) - u(t)][\varphi(t)w(t)]' dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} [x(t) - u(t)]\phi'(t) dt, \end{aligned}$$

对于所有的 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$。我们得出，对于某个 $C \in \mathbb{R}$， $x(t) = u(t) + C$，因此x是绝对连续函数，并且几乎处处满足方程

$$x'(t) = \sum_{j=0}^{N} A_{j,0} x(t - r_j) + h(t). \tag{3.11}$$

这意味着 $x \in W^{1,\,\mu\,p}$并且 $\Lambda_{L_0} x = h$，因此 $\Lambda_{L_0}\colon\ W^{1,\,\mu\,p} \to L^p_\mu$是满射。

步骤 4 算子 $\Lambda_{L_0}\colon W^{1,\mu\,p} \to L^p_\mu$ 是单射。

事实上，我们假设对于某个 $x \in W^{1,\mu\,p}$，存在 $\Lambda_{L_0} x = 0$，即 x 在 $\mathbb{R}$ 中满足

$$x'(t) = \sum_{j=0}^{N} A_{j,0} x(t - r_j). \tag{3.12}$$

将 x 解读为缓增广义函数，并对 (3.12) 应用傅里叶变换，我们得到 $\hat{x}$ 满足等式 $\Delta_{L_0}(iz)\hat{x}(z) = 0$。现在由 (2.15) 可知，$\hat{x}$ 是零广义函数，因此 x 是 $W^{1,p}$ 中的零函数，从而完成了一一对应性质的证明。

最后，由步骤 3 和 4 可知 $(\Lambda_0^{-1}h)(t) = \int_{\mathbb{R}} G(t - s)h(s)d\mu$ 从而证明得证。

□

引理 3.2 设

$$x'(t) = L(t)x_t = L_0x_t + M(t)x_t \tag{3.13}$$

其中 $x'(t) = L_0x_t$ 是一个双曲系统。存在正实常数 ϵ、K 和 a，使得

(i) 若

$$\|M(t)\| \leq \varepsilon, \quad for\ all\ t \in \mathbb{R}, \tag{3.14}$$

那么，相应的算子 $\Lambda_L : W^{1,\,p}_{\,\mu} \to L^p_\mu$ 对于 $1 \leq p \leq \infty$ 是一个同构。

(ii) 存在一个函数 $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^d$ 满足

$$|G(t,z)| \leq Ke^{-a|t-z|}, \quad for\ all\ (t,z) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.15}$$

and

$$(\Lambda_L^{-1}h)(t) = \int_{\mathbb{R}} G(t,z)h(z)d\mu(z). \tag{3.16}$$

证明。令 $\Lambda_L = \Lambda_{L_0} - M$，并利用 Λ_{L_0} 根据定理（3.1）存在逆算子，我们选取 $\varepsilon < \|\Lambda_{L_0}^{-1}\|$，这意味着 $\|M\Lambda_{L_0}^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p_\mu, L^p_\mu)} < 1$，因此 $\Lambda_L^{-1}: \ L^p_\mu \to W^{1,\,p}_{\,\mu}$ 存在，因为其 Neumann 级数收敛。

$$\begin{aligned} \Lambda_L^{-1} &= \Lambda_{L_0}^{-1}(I - M\Lambda_{L_0}^{-1})^{-1} \\ &= \Lambda_{L_0}^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}(M\Lambda_{L_0}^{-1})^j, \end{aligned} \tag{3.17}$$

证明（i）。

为证明（3.15），令 G_0 为定理（3.1）中与 Λ_{L_0} 相关联的格林函数，并令 $h \in L^p_\mu$，于是

$$\begin{aligned} (M\Lambda_{L_0}^{-1}h)(t) &= M\left(\int_{\mathbb{R}} G_0(t-z)h(z)\ d\mu(z)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{N} C_j(t)\int_{\mathbb{R}} G_0(t-r_j-z)h(z)\ d\mu(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}}\left[\sum_{j=0}^{N} C_j(t)G_0(t-r_j-z)\right]h(z)\ d\mu(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,z)h(z)\ d\mu(z), \end{aligned} \tag{3.18}$$

使用常数为 a_0、K_0 的（3.2），可得函数

$$\Gamma(t,z) = \sum_{j=0}^{N} C_j(t)G_0(t-r_j-z)$$

满足以下估计

$$|\Gamma(t,z)| \leq \sum_{j=0}^{N} |C_j(t)| K_0 e^{a_0|r_j|} e^{-a_0|t-z|} \leq K_1 e^{-a_0|t-z|}, \tag{3.19}$$

其中

$$K_1 = K_0 \varepsilon e^{a_0 r_N}.$$

如果我们记作

$$((M\Lambda_{L_0}^{-1})^j h)(t) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_j(t,z) h(z) dz,$$

with

$$\Gamma_j(t,z) := \begin{cases} \Gamma(t,z), & \text{if } j = 1, \\ \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,s)\Gamma_{j-1}(s,z) ds, & \text{if } \ j \geq 2, \end{cases}$$

由 (3.17) 可知，我们满足 (ii) 的格林函数候选为

$$G(t,z) = G_0(t-z) + \int_{\mathbb{R}} G_0(t-s) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \Gamma_j(s,z) \right) ds. \tag{3.20}$$

现在我们 w 想要证明 $G(t,z)$ 的指数估计。为此，令 $\psi(t) := K_1 e^{-a_0|t|}$ an d

$$\psi^{*j}(t) := \begin{cases} \psi(t), & \text{if } j = 1 \\ (\psi * \psi^{*(j-1)})(t), & \text{if } j \geq 2. \end{cases}$$

归纳应用 (3.19)，我们得到

$$|\Gamma_j(t,z)| \leq \psi^{*j}(t-z). \tag{3.21}$$

假设 $\varepsilon < \dfrac{a_0 e^{-a_0 r_N}}{2K_0}$，由此可得 $K_1 < \dfrac{a_0}{2}$，根据 [5], 中的引理 5.1，我们有

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\Gamma_j(t,z)| \leq K_2 e^{-a_1|t-z|} \tag{3.22}$$

其中 $a_1 = \sqrt{a_0^2 - 2a_0 K_1}$ 和 $K_2 = \dfrac{K_1}{a_1}$。

由 (3.20) 及 $a_1 = a_0\sqrt{1 - 2K_1/a_0} < a_0$ 可知，存在 K_3 使得

$$\begin{aligned} |G(t,z)| &\leq K_0 e^{-a_0|t-z|} + \int_{\mathbb{R}} K_0 K_2 e^{-a_0|t-s|-a_1|s-z|} ds \\ &\leq K_3 e^{-a_1|t-z|}, \end{aligned}$$

对所有 $(t,z) \in \mathbb{R}^2$ 均成立，从而证明了 (3.15)。

最后，为了证明表示式 (3.16)，任取 $h \in L^p_\mu$，以及相应的 $x \in W^{1,\,p}_{\mu}$，使得 $\Lambda_L x = h$。我们知道，由以下方式定义的序列 $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$。

$$x_k := \Lambda_{L_0}^{-1} \sum_{j=0}^{k} (M\Lambda_{L_0}^{-1})^j h$$

满足 $x_k \to x$ 在 $W^{1,\,\mu}{}^{p}$并且很容易看出的是

$$x_k(t) = \int_{\mathbb{R}} G_k(t,z)h(z)d\mu(z),$$

其中

$$G_k(t,z) = G_0(t-z) + \int_{\mathbb{R}} G_0(t-s)\Big(\sum_{j=1}^{k}\Gamma_j(s,z)\Big)ds.$$

因此，我们想证明 $x(t) = y(t)$，其中

$$y(t) = \int_{\mathbb{R}} G(t,z)h(z)d\mu(z). \tag{3.23}$$

为此，请注意，

$$\begin{aligned}
|x_k(t) - y(t)| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \left[G_k(t,z) - G(t,z)\right] h(z)d\mu(z)\right| \\
&\le \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |G_0(t-s)| \sum_{j=k+1}^{\infty} \psi^{*j}(s-z)\; ds|h(z)|d\mu(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |G_0(t-z-s)| \sum_{j=k+1}^{\infty} \psi^{*j}(s)\; ds|h(z)|d\mu(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}} R_k(t-z)|h(z)|d\mu(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}} R_k(t-z)|h(z)|(1+z^2)^{-1/p}(1+z^2)^{-1/q}dz \\
&\le \int_{\mathbb{R}} R_k(t-z)|h(z)|(1+z^2)^{-1/p}dz \\
&= \int_{\mathbb{R}} R_k(t-z)|\tilde{h}(z)|dz \\
&= (R_k * |\tilde{h}|)(t),
\end{aligned}$$

其中 $R_k(t) = \left(G_0 * \sum_{j=k+1}^{\infty} \psi^{*j}\right)(t)$。因此

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |x_k(t) - y(t)|^p\; d\mu(t) &\le \int_{\mathbb{R}} [(R_k * |\tilde{h}|)(t)]^p(1+t^2)^{-1}dt \\
&\le \int_{\mathbb{R}} [(R_k * |\tilde{h}|)(t)|]^p dt \\
&\le \|R_k\|_{L^1}^p \|\tilde{h}\|_{L^p}^p \\
&= \|R_k\|_{L^1}^p \|h\|_{L^p_\mu}^p
\end{aligned}$$

根据最后一个估计，我们只需证明 $R_k \to 0$ in L_1，即可得出 $x_k \to y$ in L^p_μ。为此，再次应用杨氏不等式，显然有

$$\|R_k\|_{L^1} \leq \|G_0\|_{L^1} \sum_{j=k+1}^{\infty} \|\psi\|_{L^1}^j$$

s表明 $R_k \to 0$ 当 $k \to \infty$ 时，因此 $x_k \to y$ 在 L^p_μ 中，从而 $x = y$. □

引理 3.3. 假设方程

$$x'(t) = L(t)x_t \tag{3.24}$$

在 $+\infty$（分别在 $-\infty$）处渐近双曲。于是

(a) 存在常数 a、K_1 和 K_2，均为正数，使得对于满足 $\Lambda_L x = h$ 的 $x \in W^{1,\mu\,p}$ 和 $h \in L^p_\mu$，我们有

$$|x(t)| \leq K_1 e^{-a|t|}\|x\|_{L^\infty_\mu} + K_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-a|t-z|}|h(z)|d\mu(z) \tag{3.25}$$

$$\leq K_1 e^{-a|t|}\|x\|_{L^\infty_\mu} + K_2\|h\|_{L^p_\mu} \tag{3.26}$$

对于 $t \geq 0$ （分别对于 $t \leq 0$）。

(b) 如果 (3.24) 在两个 $\pm\infty$ 中都是渐近双曲的，那么 (3.25) 和 (3.26) 在所有 $\mathbb{R}$ 上均成立，并且存在 $K_3 > 0$ 使得

$$\|x\|_{W^{1,p}_\mu} \leq K_3(\|x\|_{L^\infty_\mu} + \|h\|_{L^p_\mu}). \tag{3.27}$$

证明。我们假设 (3.24) 在 $+\infty$ 处是渐近双曲的，$-\infty$ 处的情形类似，并且由这两种情形还可以推导出 (3.25) 和 (3.26) 在所有 $\mathbb{R}$ 上成立。因此，我们假设 $t \geq 0$。我们写作 $L(t) = L_0 + M(t)$，其中 $\|M(t)\| \to 0$ 当 $t \to +\infty$ 时成立。令 $\varepsilon > 0$ 如引理 (3.2) 中所示，并取 $\tau > 0$，使得对于所有 $t \geq \tau$， $\|M(t)\| \leq \varepsilon$ 成立。现在我们定义

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ 1, & t \geq \tau \end{cases}, \tag{3.28}$$

$$L_1(t) = L_0 + \alpha(t)M(t),$$

and

$$M_1(t) = (1 - \alpha(t))M(t).$$

注意，如果 $M_1(t) = 0$，则 $t \geq \tau$。根据这些定义，对于满足 $\Lambda_L x = h$ 的 x 和 h，我们将 (3.24) 重写为

$$x'(t) = L_1(t)x_t + M_1(t)x_t + h(t).$$

将引理 (3.2) 应用于 $x'(t) = L_1(t)x_t$，并注意到对于所有 $t \in \mathbb{R}$， $\|\alpha(t)M(t)\| \leq \varepsilon$，且对于相同的 ε，由于它仅依赖于 L_0，存在 $G_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^d$ 一个适用于 Λ_{L_1}的格林函数，以及常数 K、a，使得

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{\mathbb{R}} G_1(t,z)(M_1(z)x_z + h(z))d\mu(z) \\ &= \int_{-\infty}^{\tau} G_1(t,z)M_1(z)x_z(1+z^2)^{-1}dz + \int_{\mathbb{R}} G_1(t,z)h(z)d\mu(z) \end{aligned}$$

因此，对于任意 $t \in \mathbb{R}$，我们有】【。

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq K\int_{-\infty}^{\tau} e^{-a|t-z|}|M_1(z)x_z|(1+z^2)^{-1}dz + K\int_{\mathbb{R}} e^{-a|t-z|}|h(z)|d\mu(z) \\ &\leq K\int_{-\infty}^{\tau} e^{-a|t-z|}\|M_1(z)\|\|x\|_{L_\mu^\infty}dz + K\int_{\mathbb{R}} e^{-a|t-z|}|h(z)|d\mu(z) \\ &\leq K\left\{\sup_{z\in\mathbb{R}}\|M_1(z)\|\right\}\|x\|_{L_\mu^\infty}\int_{-\infty}^{\tau} e^{-a|t-z|}dz + K\int_{\mathbb{R}} e^{-a|t-z|}|h(z)|d\mu(z). \end{aligned}$$

容易看出，对于 $t \geq \tau$,

$$\int_{-\infty}^{\tau} e^{-a|t-z|}dz \leq Ce^{-a|t|},$$

与 $C >$ 0，因此，对于某个 $C_2 \geq C$，当 $t \geq 0$ 时，该不等式仍然成立。因此，根据

$$|x(t)| \leq K\left\{\sup_{z\in\mathbb{R}}\|M_1(z)\|\right\}C_2\|x\|_{L_\mu^\infty}e^{-a|t|} + K\int_{\mathbb{R}} e^{-a|t-z|}|h(z)|d\mu(z) \tag{3.29}$$

我们可以适当地选择 $K_1 > 0$，使得估计式 (3.25) 对所有 $t \geq 0$ 都成立。 K_2 的选取以及不等式 (3.26) 的证明可由以下内容得到。

$$\begin{aligned} K\int_{\mathbb{R}} e^{-a|t-z|}|h(z)|d\mu(z) &\leq K\int_{\mathbb{R}} e^{-a|t-z|}|h(z)|(1+z^2)^{-1/p}dz \\ &\leq K\left[\int_{\mathbb{R}} e^{-aq|t-z|}dz\right]^{1/q}\left[\int_{\mathbb{R}} |h(z)|^p(1+z^2)^{-1}dz\right]^{1/p} \\ &= K_2\|h\|_{L_\mu^p}, \end{aligned}$$

与 $K_2 = K\left[\int_{\mathbb{R}} e^{-aq|z|}dz\right]^{1/q}$ 一起。

为了得到 (3.27)，我们假设 (3.25) 对所有 $t \in \mathbb{R}$ 都成立，并由此记 $\gamma(t) := e^{-a|t|}$,$\tilde{h}(t) := h(t)(1+t^2)^{-1/p}$

$$\begin{aligned} |x(t)|(1+t^2)^{-1/p} &\leq K_1\|x\|_{L_\mu^\infty}\gamma(t)(1+t^2)^{-1/p} + K_1(\gamma * |\tilde{h}|)(t)(1+t^2)^{-1/q} \\ &\leq K_1\|x\|_{L_\mu^\infty}\gamma(t)(1+t^2)^{-1/p} + K_1(\gamma * |\tilde{h}|)(t), \end{aligned}$$

因此，根据闵可夫斯基不等式和杨氏不等式

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^p d\mu(t)\right)^{1/p} &\leq K_1\|x\|_{L_\mu^\infty}\left(\int_{\mathbb{R}} \gamma^p(t)(1+t^2)^{-1}dt\right)^{1/p} + K_1\left(\int_{\mathbb{R}} (\gamma * |\tilde{h}|)^p(t)dt\right)^{1/p} \\ &\leq K_1\|\gamma\|_{L_\mu^p}\|x\|_{L_\mu^\infty} + K_1\|\gamma\|_{L^1}\|h\|_{L_\mu^p}, \end{aligned}$$

并令 $k_1 = K_1\max\{\|\gamma\|_{L_\mu^p}, \|\gamma\|_{L^1}\}$，我们得到

$$\|x\|_{L_\mu^p} \leq k_1\left(\|x\|_{L_\mu^\infty} + \|h\|_{L_\mu^p}\right). \tag{3.30}$$

现在，由微分方程 (2.4) 以及系数的有界性 A_j，对于 $t \in \mathbb{R}$，我们得出结论 $x' \in L^p_\mu$，并且

$$\|x'\|_{L^p_\mu} \le k_2(\|x\|_{L^p_\mu} + \|h\|_{L^p_\mu}), \tag{3.31}$$

对于某个仅依赖于 L 的 k_2。
最后，将 (3.27)、(3.30) 和 (3.31) 相加，并取 $K_3 = \max\{k_1, k_2\}$。 □

以下性质的证明与无权情形下的证明非常相似，见 [5], 。我们在下面的引理中概述这些性质，并省略证明。

引理 3.4。假设方程 (1.1) 是渐近双曲的，且 $1 \le p \le \infty$。

(a) 若存在序列 $x_n \in {W^1_{,\mu}}^p$ 和 $h_n \in L^p_\mu$，满足 $\Lambda_L x_n = h_n$，使得序列x_n 在 ${W^1_{,\mu}}^p$ 中有界，且 $h_n \to h_*$ 在 L^p_μ 中有界。那么存在一个子序列 $x_{n_k} \to x_*$，它在 ${W^1_{,\mu}}^p$ 中收敛到某个元素 x_*，且必有 $\Lambda_L x_* = h_*$。
(b) 算子 Λ_L 的核 $\mathcal{K}^p_L$ 与 p 无关，且是有限维的。
(c) 对于 $1 \le p \le \infty$， Λ_L 的 $\mathcal{R}^p_L \subseteq L^p_\mu$ 值域是闭的。

最后，我们证明定理 1.1。

证明。由于我们假设方程 (1.1) 是渐近双曲的，由上一个引理可知， $\mathcal{K}_L := \mathcal{K}^p_L$ 的核 Λ_L 与 p 无关，且 $\dim \mathcal{K}_L < \infty$。此外，由 ($P_1$)、($P_2$) 和 (2.8) 可知，伴随方程 (2.12) 也是渐近双曲的，因此应用同一引理可知，子空间 $\mathcal{K}_{L^*} \subseteq {W^1_{,\mu}}^q$（其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$）是有限维的，且与 q 无关，这就证明了 (1.1)-(1) 和 (1.1)-(2)。为证明 (1.1)-(3)，我们将集合 $\mathcal{S}^p_L \subseteq L^p_\mu$ 视为子空间。

$$\mathcal{S}^p_L = \Big\{ h \in L^p_\mu : \int_{\mathbb{R}} \overline{y(t)} h(t) d\mu = 0, \text{ for all } y \in \mathcal{K}_{L^*} \Big\},$$

因此，在 L^p_μ 中，余维数为 $\mathcal{S}^p_L = \dim \mathcal{K}_{L^*} < \infty$。我们希望证明 $\mathcal{R}^p_L = \mathcal{S}^p_L$。为此，任取 $h = \Lambda_L x \in \mathcal{R}^p_L$，其中 $x \in {W^1_{,\mu}}^p$，且 $y \in \mathcal{K}_{L^*}$。由（2.10）可得

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{y(t)} h(t) d\mu = \int_{\mathbb{R}} \overline{y(t)} (\Lambda_L x)(t) d\mu = \int_{\mathbb{R}} \overline{(\Lambda^*_L y)(t)} x(t) d\mu = 0,$$

这意味着 $h \in \mathcal{S}^p_L$，因此 $\mathcal{R}^p_L \subseteq \mathcal{S}^p_L$。反过来，首先假设 $p \ne \infty$ 且 $\mathcal{R}^p_L \ne \mathcal{S}^p_L$。在这些条件下，由于根据 (3.4)-(3)，$\mathcal{R}^p_L$ 是闭集，因此在空间 L^p_μ 上存在一个非平凡的连续线性泛函，它在 $\mathcal{R}^p_L$ 上恒为零，但在 $\mathcal{S}^p_L$ 上不恒为零；此外，该泛函可表示为某个 $y \in L^q_\mu$，即

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{y(t)} (\Lambda_L x)(t) d\mu = 0, \qquad \text{for all } x \in W^{1,p}_\mu \tag{3.32}$$

and

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{y(t)} h(t) d\mu \ne 0 \qquad \text{for some } h \in \mathcal{S}^p_L. \tag{3.33}$$

令 $\xi:\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}^d$ 是一个具有紧支撑的 C^∞ 函数，并设 $x(t)=\xi(t)$。于是，由 (3.32) 可得

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{R}} y(t)\overline{(\Lambda_L\bar{\xi})(t)}d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}} y(t)\xi'(t)d\mu - \sum_{j=0}^{N}\int_{\mathbb{R}} y(t)\overline{A_j(t)}\xi(t-r_j)d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}} y(t)\xi'(t)d\mu + \int_{\mathbb{R}} y(t)\xi(t)k(t)d\mu \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}} y(t)\overline{[k(t)I+A_0(t)]}\xi(t)d\mu - \sum_{j=1}^{N}\int_{\mathbb{R}} y(t+r_j)\overline{M_j^+(t)A_j(t+r_j)}\xi(t)d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}} y(t)[\xi'(t)+k(t)\xi(t)]d\mu - \int_{\mathbb{R}}\left[\sum_{j=0}^{N} B_j^*(t)y(t+r_j)\right]\xi(t)d\mu
\end{aligned}$$

按照定理（3.1）证明中第 3 步的相同论证，上述公式表明，按（3.9）定义的 y 的广义导数满足伴随方程（2.12），因此 $y\in W^{1,\,\mu}{}^{q}$ 和 $y\in\mathcal{K}_{L^*}$。这证明了 $\mathcal{R}_L^p=\mathcal{S}_L^p$。

$p=\infty$ 的情形已在 [5] 定理 A 中证明，对我们的空间也可作类似证明。 □

4. Proof of Theorem 1.2

首先注意，由定理 1.1 和引理（3.4）可知，算子 $\Lambda_L:\ W^{1,\,\mu}{}^{p}\to L_\mu^p$ 是一个值域闭的 Fredholm 算子。若假设 $\mathrm{Ind}(\Lambda_L)=\dim(\mathcal{K}_L)=0$，则存在其逆算子 $\Lambda_L^{-1}:\ L_\mu^p\to W^{1,\,\mu}{}^{p}$，且该逆算子必有界。接下来，我们称

$$\begin{aligned}
r &:= r_N,\ \text{ the longest delay},\\
\beta &:= \sup_{t\in\mathbb{R}}\|L(t)\|,\\
\gamma_0 &:= \|\Lambda_L^{-1}\|\beta+1.
\end{aligned}$$

此外，给定任意 $s\in\mathbb{R}$ 和 $\phi\in C$，我们定义两个函数:

(a) $\psi:[s-r,\infty)\to\mathbb{R}^n$,

$$\psi(t)=\begin{cases}\phi(t-s), & \text{if } t\in[s-r,s],\\ \phi(0), & \text{if } t\in(s,+\infty)\end{cases}\tag{4.1}$$

(b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$,

$$g(t)=\begin{cases}0, & \text{if } t\in(-\infty,s),\\ L(t)\psi_t, & \text{if } t\in[s,+\infty)\end{cases}\tag{4.2}$$

注意，g 是可测的，并且

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}|g(t)|\le\beta\|\phi\|<+\infty,\tag{4.3}$$

因此 $g\in L_\mu^p$，其中

$$\|g\|_{L_\mu^p}\le\sqrt[p]{\pi}\beta\|\phi\|\tag{4.4}$$

为了证明在所有 $\mathbb{R}$ 上存在指数二分性，我们将证明分为以下几个引理

引理 4.1. 对每个 $s \in \mathbb{R}$ 令

$$E(s) := \{\phi \in C : \sup_{t \geq s} \|T(t,s)\phi\| < +\infty\} \tag{4.5}$$

and

$$\begin{aligned} F(s) \;:=\; & \{\phi \in C : \textit{ there exists } v : (-\infty, s] \to \mathbb{R}^n \textit{ continuous with} \\ & v_s = \phi, \quad \sup_{t \leq s} |v(t)| < +\infty \textit{ and } v_t = T(t,\tau)v_\tau \textit{ for } s \geq t \geq \tau\}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

于是，我们得到了这种分解。

$$C = E(s) \oplus F(s). \tag{4.7}$$

证明。取 $s \in \mathbb{R}$、 $\phi \in C$ 及其相关函数 $\psi : [s-r, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ and and$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$，我们有存在某个 $v \in W^{1,}{}_{\mu}{}^{p}$使得 $\Lambda_L v = g$。因此，函数$u = v + \psi$ 是方程 $x'(t) = L(t)x_t$的一个解，其中 $u_s = v_s + \phi$。也就是说，

$$u_t = T(t,s)(v_s + \phi) \quad \text{for} \quad t \geq s.$$

由引理 (3.3) 和不等式 (3.26)，我们得到存在正实常数 K_1, K_2 and$a$ ，使得

$$|v(t)| \;\leq\; K_1 e^{-a|t|}\|v\|_{L^\infty_\mu} + K_2\|g\|_{L^p_\mu}$$

这意味着 $\sup_{t\in\mathbb{R}} |v(t)| < +\infty$ 因此

$$\sup_{t \geq s} |u(t)| \leq \sup_{t \geq s} |v(t)| + \sup_{t \geq s} |\psi(t)| < +\infty.$$

综上， $v_s + \phi \in E(s)$。
另一方面，由于 $g(t) = 0$对于 $t < s$，我们有 $\Lambda_L v = 0$对于 $t < s$，也就是说， $v_t = T(t,\tau)v_\tau$，对于 $\tau \leq t \leq s$。因此， $v_s \in F(s)$并且

$$\phi = (v_s + \phi) - v_s \in E(s) + F(s).$$

现在，令 $\phi \in E(s) \cap F(s)$。那么，存在一个连续函数 $v : (-\infty, s] \to \mathbb{R}^n$，其满足$v_s = \phi$，使得 $\sup |v(t)| < +\infty$且 $v_t = T(t,\tau)v_\tau$，对于 $\tau \leq t \leq s$。我们定义一个函数$_{t\leq s}u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$，使得

$$u_t = \begin{cases} T(t,s)\phi, & \text{if } t \geq s, \\ v_t, & \text{if } t < s. \end{cases}$$

注意， u 是连续的，并且由于 $\phi \in E(s)$，我们有 $\sup |u(t)| < +\infty$，因此 $u \in L^p_{\mu t\in\mathbb{R}}$。容易验证，对于任意 $\tau \leq t$， $u_t = T(t,\tau)u_\tau$，这意味着 $\Lambda_L u = 0$，进而得到 $u \in W^{1,}{}_{\mu}{}^{p}$。由 Λ_L 的可逆性可知， $u = 0$ ，因此 $\phi = v_s = u_s = 0$。所以， $E(s) \cap F(s) = \{0\}$。□

引理 4.2. 设

$$P(s), Q(s) : C \to C \tag{4.8}$$

为与分解 $C = E(s) \oplus F(s)$ 相关的投影。那么，对于每个 $t \geq s$，线性算子

$$T(t,s)|F(s) : F(s) \to F(t) \tag{4.9}$$

是满射且可逆的。

证明。考虑到 $T(t,s)\phi = 0$，其中某个 $\phi \in F(s)$。那么存在一个连续函数$v\colon (-\infty, s] \to \mathbb{R}^n$，满足 $v_s = \phi$，使得 $\sup |v(\tau)| < +\infty$ 且 $v_\tau = T(\tau,\overline{\tau})v_{\overline{\tau}}$，对于 $\overline{\tau} \leq \tau \leq s$。$\tau \leq s$。
定义函数 $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ by

$$u_\tau = \begin{cases} 0, & \text{if } t \leq \tau, \\ T(\tau,s)\phi, & \text{if } s \leq \tau < t, \\ v_\tau, & \text{if } \tau \leq s. \end{cases}$$

因此，u 在 $\mathbb{R}$上有界且连续，从而 $u \in L^p_\mu$。此外，对于任意实数$\tau \geq \overline{\tau}$，我们有$u_\tau = T(\tau,\overline{\tau})u_{\overline{\tau}}$。因此，$\Lambda_L u = 0$，进而 $u \in W^{1,p}_\mu$。同样，Λ_L 的可逆性意味着 $u = 0$，从而 $\phi = v_s = u_s = 0$。这表明（4.9）中的算子是一对一的。

现在，取 $\phi \in F(t)$。那么，存在一个连续函数 $v\colon (-\infty, t] \to \mathbb{R}^n$，满足 $v_t = \phi$，使得 $\sup |v(\tau)| < +\infty$ 且 $v_\tau = T(\tau,\overline{\tau})v_{\overline{\tau}}$，对于 $\overline{\tau} \leq \tau \leq t$。特别地，$\tau \leq t$

$$\phi = v_t = T(t,s)v_s$$

并且由于 $v_s \in F(s)$，我们得到 (4.9) 中的算子是满射。 □

在 [1], 引理 4.6 中，已证明

$$P(t)T(t,s) = T(t,s)P(s) \quad \text{for } t \geq s.$$

且该证明对我们的情形仍然有效，因此我们在下文中假设这一点。

引理 4.3. 投影 $P(s)$ 满足

$$\|P(s)\| \leq \gamma_0, \ \textit{for } s \in \mathbb{R}. \tag{4.10}$$

证明。取 $s \in \mathbb{R}$、$\phi \in C$ 和 $v = \Lambda_L^{-1} g$，我们有

$$\|P(s)\phi\| = \|v_s + \phi\| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |v(t)| + \|\phi\| \tag{4.11}$$

$$= \sup_{t\in\mathbb{R}} |(\Lambda_L^{-1} g)(t)| + \|\phi\| \tag{4.12}$$

$$\leq \|\Lambda_L^{-1}\| \sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t)| + \|\phi\| \tag{4.13}$$

$$\leq (\|\Lambda_L^{-1}\|\beta + 1)\|\phi\| \tag{4.14}$$

$$= \gamma_0 \|\phi\|. \tag{4.15}$$

这意味着 (4.10)。 □

引理 4.4. 存在正实常数 λ 和 D，使得

$$\|T(t,s)P(s)\| \leq De^{-\lambda(t-s)} \ \textit{for } t \geq s.$$

*P*证明。设 $\phi \in E(s)$ 和 $u_t = T(t,s)\phi$，其中 $t \geq s$。我们定义函数 $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ a s

$$x(t) = \begin{cases} u(t) - \psi(t) & \text{if } t \geq s - r, \\ 0 & \text{if } t < s - r \end{cases}.$$

显然，x 在 $\mathbb{R}$ 上有界且连续，因此 $x \in L^p_\mu$。此外：

(a) 对于 $t \geq s$, x 可微，且

$$\begin{aligned} x'(t) &= u'(t) - \psi'(t) \\ &= L(t)u_t \\ &= L(t)(x_t + \psi_t) \\ &= L(t)x_t + g(t), \end{aligned}$$

(b) 对于 $t \leq s$, $x(t) = 0$，且当 $g(t) = 0$在同一区间内时，我们还有 $x'(t) = L(t)x_t + g($ {v14}。

I因此 $\Lambda_L x = g$，进而 $x \in W^{1,\,p}_{\,\mu}$。这意味着，特别是对于 $t \geq s$,

$$\begin{aligned} \|u_t\| &= \|x_t + \psi_t\| \\ &\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| + \|\phi\| \\ &\leq \|\Lambda_L^{-1}\|\beta\|\phi\| + \|\phi\| \\ &= \gamma_0\|\phi\|. \end{aligned} \tag{4.16}$$

另请注意，如果 $\tau \in [s,t]$，重复相同的论证，我们可以写出

$$\|u_t\| \leq \gamma_0\|u_\tau\|. \tag{4.17}$$

现在我们将证明，存在一个 $l \in \mathbb{N}$（独立于 s 和 ϕ），使得

$$\|u_t\| \leq \frac{1}{2}\|\phi\| \qquad \text{for } t - s \geq l. \tag{4.18}$$

如果存在某个 $t_* > s$ 满足其中的条件

$$\|u_{t_*}\| > \frac{1}{2}\|\phi\|, \tag{4.19}$$

那么，我们可以找到满足条件的 $t_0 \in [t_* - r, t_*]$。

$$|u(t_0)| = \|u_{t_*}\| > \frac{\|\phi\|}{2} \tag{4.20}$$

因此

$$\|u_{t_0}\| \geq |u(t_0)| > \frac{\|\phi\|}{2} \tag{4.21}$$

另一方面，根据（4.16）、（4.17）和（4.21），对于 $s \leq \tau \leq t_0$，我们得到

$$\frac{1}{2\gamma_0}\|\phi\| < \|u_\tau\| \leq \gamma_0\|\phi\|. \tag{4.22}$$

考虑

$$\begin{aligned} I(t) &:= \int_{-\infty}^{t} \chi_{[s,t_0]}(\tau)\|u_\tau\|^{-1}d\tau, \\ w(t) &:= u(t)I(t), \end{aligned}$$

因此 w 连续且

$$\begin{aligned} |w(t)| &\leq |u(t)| \int_s^{t_0} \|u_\tau\|^{-1}d\tau \\ &\leq \gamma_0\|\phi\| \int_s^{t_0} \|u_\tau\|^{-1}d\tau \\ &\leq 2\gamma_0^2(t_0 - s), \end{aligned}$$

这意味着 $w \in L^p_{\mu\circ}$ 此外

$$w'(t) = L(t)w_t + h(t), \tag{4.23}$$

其中

$$h(t) = I(t)L(t)u_t - L(t)(u_tI_t) + u(t)\chi_{[s,t_0]}(t)\|u_t\|^{-1},$$

对于 $t \in \mathbb{R}\circ$ 如果 $t \leq s$, $h(t) = 0$ ，并且如果 $t \geq s$ ，则容易看出 h 是有界且分段连续的。事实上，利用 (4.22)，我们有

$$\begin{aligned} |h(t)| &= |L(t)[I(t)u_t - u_tI_t] + u(t)\chi_{[s,t_0]}(t)\|u_t\|^{-1}| \\ &\leq \beta \sup_{-r\leq\theta\leq 0} |I(t)u(t+\theta) - u(t+\theta)I(t+\theta)| + 1 \\ &\leq \beta \sup_{-r\leq\theta\leq 0} \left\{ |u(t+\theta)| \int_{t+\theta}^{t} \|u_\tau\|^{-1}d\tau \right\} + 1 \\ &\leq \beta \sup_{-r\leq\theta\leq 0} \left\{ \int_{t+\theta}^{t} \frac{u(t+\theta)}{\sup\limits_{-r\leq z\leq 0} u(\tau+z)} d\tau \right\} + 1 \\ &\leq \beta \sup_{-r\leq\theta\leq 0} \left\{ \int_{t+\theta}^{t} d\tau \right\} + 1 \\ &= \beta r + 1. \end{aligned}$$

因此， $h \in L^p_\mu$ 和 $w \in W^{1,\,p}_{\,\mu}$。这使得我们能够得到一个与 t_0 和 s 无关的如下界。

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |w(t)| \leq \|\Lambda_L^{-1}\|(\beta r + 1) \tag{4.24}$$

由（4.20）和（4.22）可得

$$\begin{aligned} \|\Lambda_L^{-1}\|(\beta r + 1) &\geq |w(t_0)| \\ &\geq |u(t_0)| \int_s^{t_0} \|u_\tau\|^{-1}d\tau \\ &\geq \frac{\|\phi\|}{2} \frac{(t_0 - s)}{\gamma_0\|\phi\|} \\ &\geq \frac{(t_0 - s)}{2\gamma_0}. \end{aligned}$$

因此

$$t_* - s = t_* - t_0 + t_0 - s \leq 2\gamma_0 \|\Lambda_L^{-1}\|(\beta r + 1) + r. \tag{4.25}$$

取定

$$l > 2\gamma_0 \|\Lambda_L^{-1}\|(\beta r + 1) + r \tag{4.26}$$

性质 (4.18) 成立。

现在，对于任意的 $\phi \in C$ 和 $t \geq s$，我们记作 $t - s = kl + \tau$，其中 $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 和 $0 \leq \tau < l$。应用（4.16）和（4.18），我们有

$$\begin{aligned} \|T(t,s)P(s)\phi\| &= \|T(s+kl+\tau,s)P(s)\phi\| \\ &\leq \frac{1}{2^k}\|T(s+\tau,s)P(s)\phi\| \\ &\leq \frac{\gamma_0}{2^k}\|P(s)\phi\| \\ &\leq \gamma_0^2 2^{-k}\|\phi\| \\ &\leq 2\gamma_0^2 2^{-(t-s)/l}\|\phi\| \\ &= 2\gamma_0^2 e^{-\lambda(t-s)}\|\phi\|, \end{aligned}$$

其中 $\lambda = \underline{\ln(2)}\, l$，证明完成。 □

引理 4.5. 存在正实常数 λ 和 D，使得

$$\|\overline{T}(t,s)Q(s)\| \leq De^{-\lambda(s-t)} \text{ for } t \leq s.$$

证明。 证明与前一个类似，对 $s \in \mathbb{R}$ 和 $\phi \in F(s)$ 定义函数 s

$$\psi(t) = \begin{cases} \phi(t-s), & \text{if } t \in [s-r, s], \\ \phi(-r), & \text{if } t \in (-\infty, s-r) \end{cases} \tag{4.27}$$

以及 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$，定义为

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t > s \\ L(t)\psi_t & \text{if } t \leq s \end{cases}.$$

□

结合前面的引理，我们得出方程 (1.1) 在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性。

References

[1] L. Barreira and C. Valls, *Hyperbolicity via admissibility in delay equations*,《印第安纳大学数学杂志》69 (2020) 1155-1179。[2] L. Barreira, C. Valls, *Perturbations of delay equations*,《微分方程杂志》269 (2020) 7015-7041。[3] W. A. Coppel, 《稳定性理论中的二分性》，《数学讲义》，施普林格出版社，柏林/纽约/海德堡，第629卷，1978年。[4] X-B. Lin, *Exponential Dichotomies and Homoclinic Orbits in Functional Differential Equations*,《微分方程杂志》63 (1986), 227-254。[5] J. Mallet-Paret,
The Fredholm alternative for functional-differential equations of mixed type,《动力系统与微分方程杂志》11 (1999), 1-47。

[6] L. Markus and H. Yamabe, *Global stability criteria for differential systems*, 大阪。《大阪数学杂志》12 (1960), 305-317。[7] K. J. Palmer, *A Generalization of Hartman's linearization Theorem*, 《数学分析与应用杂志》41 (1973), 753-758。[8] K. J. Palmer, *Exponential dichotomies and transversal homoclinic points*, 《微分方程杂志》55 (1984), 225-256。[9] K. J. Palmer, *Exponential dichotomies and Fredholm operators*, 《美国数学会会刊》104 (1988), 149–156。[10] R. J. Sacker and G. R. Sell,
Dichotomies for linear evolution equations in Banach spaces, 《微分方程杂志》113 (1994), 17-67。
[11] M. Schechter, *Principles of Functional Analysis*, AMS (2002)。

University of Bío-Bío, Department of Mathematics

Email address: helorreaga@ubiobio.cl

University of Bío-Bío, Department of Mathematics
Email address: agomez@ubiobio.cl