arXiv:2304.06874v1 [math.AP] 14 Apr 2023

尖锐加权 CR 迹 Sobolev 不等式

GUNHEE CHO 和 ZETIAN YAN

ABSTRACT. 我们在 Siegel 域 Ω_{n+1} 上建立了一个尖锐 Sobolev 迹不等式，其中涉及加权范数-$W^{2,\,2}(\Omega_{n+1},\rho^{1-2[\gamma]})$。该不等式与次拉普拉斯算子在 $\mathbb{H}^n=\partial\Omega_{n+1}$ 上的分数次幂实现为与加权多重次拉普拉斯算子相关的广义 Dirichlet-to-Neumann 算子密切相关，从而推广了 Frank–Gonz´alez–Monticelli–Tan 的观察结果。

1. INTRODUCTION

在 [Cas20], Case 将分数阶拉普拉斯算子 $(-\overline{\Delta})^{\gamma}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上恢复为与加权多重拉普拉斯算子相关的 Dirichlet-to-Neumann 算子$L_{2k}:=\Delta_m^k$ 由 $\gamma\in(0,\infty)\backslash\mathbb{N}$确定，其中 $\Delta_m:=\Delta+my^{-1}\partial_y$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}_+$上的加权拉普拉斯算子$=\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$，适用于 $m=1-2[\gamma]$和 $k:=\lfloor\gamma\rfloor+1$。具体而言，给定函数 $f^{(2j)}\in C^\infty(\mathbb{R}^n)\cap H^{\gamma-2j}(\mathbb{R}^n)$, $j\in[0,\lfloor\gamma/2\rfloor]$以及$\phi^{(2j)}\in C^\infty(\mathbb{R}^n)\cap H^{\lfloor\gamma\rfloor-[\gamma]-2j}(\mathbb{R}^n)$, $j\in[0,\lfloor\gamma\rfloor-\lfloor\gamma/2\rfloor-1]$, 若 V是以下方程的一个解

$$\begin{cases} L_{2k}V=0, & \text{in } \mathbb{R}^{n+1}_+,\\ B^{2\gamma}_{2j}(V)=f^{(2j)}, & \text{for } j\in[0,\lfloor\gamma/2\rfloor],\\ B^{2\gamma}_{2[\gamma]+2j}(V)=\phi^{(2j)}, & \text{for } j\in[0,\lfloor\gamma\rfloor-\lfloor\gamma/2\rfloor-1], \end{cases}\tag{1.1}$$

存在常数 $c_{\gamma,j}$ 和 $d_{\gamma,j}$ ，使得

$$\begin{aligned} B^{2\gamma}_{2\gamma-2j}(V)&=c_{\gamma,j}(-\overline{\Delta})^{\gamma-2j}f^{(2j)},\ \text{for } j\in[0,\lfloor\gamma/2\rfloor],\\ B^{2\gamma}_{2\lfloor\gamma\rfloor-2j}(V)&=d_{\gamma,j}(-\overline{\Delta})^{\lfloor\gamma\rfloor-[\gamma]-2j}\phi^{(2j)},\ \text{for } j\in[0,\lfloor\gamma\rfloor-\lfloor\gamma/2\rfloor-1], \end{aligned}\tag{1.2}$$

其中 $B^{2\gamma}_{2j}$ 和 $B^{2\gamma}_{2[\gamma]+2j}$ 是根据[Cas20，定义 3 中构造的1]。

Date：2023年4月17日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号：39B62；次分类号：32V20、32V40、35B38。*Key words and phrases.* CR 延拓问题；CR 分数阶 GJMS 算子；迹 Sobolev 不等式。

应用狄利克雷原理，可推得

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{2\gamma}(U) \geqslant & \sum_{j=0}^{\lfloor\gamma/2\rfloor} c_{\gamma,j} \oint_{\mathbb{R}^n} f^{(2j)}(-\overline{\Delta})^{\gamma-2j} f^{(2j)} dx \\ & + \sum_{j=0}^{\lfloor\gamma\rfloor-\lfloor\gamma/2\rfloor-1} d_{\gamma,j} \oint_{\mathbb{R}^n} \phi^{(2j)}(-\overline{\Delta})^{\lfloor\gamma\rfloor-\lceil\gamma\rceil-2j} \phi^{(2j)} dx,\end{aligned} \tag{1.3}$$

对于任意 $U \in \mathcal{C}^{2\gamma} \cap W^{k,\ 2}(\mathbb{R}^{n+1}_+, y^{1-2\lceil\gamma\rceil})$，其中狄利克雷能量 $\mathcal{E}_{2\gamma}(U)$ 定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{2\gamma}(U) := & \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} UL_{2k}U y^m dxdy + \sum_{j=0}^{\lfloor\gamma/2\rfloor} \oint_{\mathbb{R}^n} B_{2j}^{2\gamma}(U) B_{2\gamma-2j}^{2\gamma}(U) dx \\ & - \sum_{j=0}^{\lfloor\gamma\rfloor-\lfloor\gamma/2\rfloor-1} \oint_{\mathbb{R}^n} B_{2\lceil\gamma\rceil+2j}^{2\gamma}(U) B_{2\lfloor\gamma\rfloor-2j}^{2\gamma}(U) dx;\end{aligned}$$

参见 [Cas20] 以了解更多细节。我们可以将 (1.3) 视为索伯列夫迹嵌入的一个泛函不等式

$$W^{k,2}(\mathbb{R}^{n+1}_+, y^{1-2\lceil\gamma\rceil}) \hookrightarrow \bigoplus_{j=0}^{\lfloor\gamma/2\rfloor} H^{\gamma-2j}(\mathbb{R}^n) \oplus \bigoplus_{j=0}^{\lfloor\gamma\rfloor-\lfloor\gamma/2\rfloor-1} H^{\lfloor\gamma\rfloor-\lceil\gamma\rceil-2j}(\mathbb{R}^n).$$

将 (1.3) 与 Lieb 的尖锐分数阶 Sobolev 不等式 [Lie83] 结合，可得到该嵌入的尖锐 Sobolev 迹不等式

$$W^{k,2}(\mathbb{R}^{n+1}_+, y^{1-2\lceil\gamma\rceil}) \hookrightarrow \bigoplus_{j=0}^{\lfloor\gamma/2\rfloor} L^{\frac{2n}{n-2\gamma+4j}}(\mathbb{R}^n) \oplus \bigoplus_{j=0}^{\lfloor\gamma\rfloor-\lfloor\gamma/2\rfloor-1} L^{\frac{2n}{n-2\lfloor\gamma\rfloor+2\lceil\gamma\rceil+4j}}(\mathbb{R}^n)$$

当 $n > 2\gamma$ 时。

（1.3）的尖锐形式适用于 $\gamma \in (0,1)$，源自 Caffarelli 和 Silvestre 的开创性论文 [CS07]。此外，特殊情形 $\gamma = \frac{3}{2}$ 由 Ache–Chang 证明 [AC17]；特殊情形 $\gamma = \mathbb{N}_0 + \frac{1}{2}$ 由 Yang 证明 [Yan19]；一般情形 $\gamma \in (0,\infty)\backslash\mathbb{N}$ 由 Case 证明 [Cas20]。

Cas[2020] 的一个重大突破是构造了与加权多重拉普拉斯算子相关的边界算子。它们通过加权拉普拉斯算子 Δ_m 和加权导数 $y^m\partial_y$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}_+$中的递归方式定义，并由此在 $\overline{\Delta}$ 上诱导出拉普拉斯算子 $\mathbb{R}^n$，如下所示：

$$\iota^* \circ \Delta_m^j = \sum_{l=0}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} \frac{(\lfloor\gamma\rfloor - l)!\Gamma(\gamma - j - l)}{(\lfloor\gamma\rfloor - j)!\Gamma(\gamma - 2l)} \overline{\Delta}^{j-l} B_{2l}^{2\gamma},$$

$$\iota^* \circ y^m\partial_y \Delta_m^j = (-1)^{j+1} \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} \frac{(\lfloor\gamma\rfloor - l)!\Gamma(1 + 2l - \lfloor\gamma\rfloor + \lceil\gamma\rceil)}{(\lfloor\gamma\rfloor - j)!\Gamma(1 + j + l - \lfloor\gamma\rfloor + \lceil\gamma\rceil)} \overline{\Delta}^{j-l} B_{2\lceil\gamma\rceil+2l}^{2\gamma},$$

其中 $\iota^*: C^\infty(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是限制算子。这些定义由三项性质加以证明。首先，由此得到的狄利克雷型 $\mathcal{Q}_{2\gamma}(U,V) := \frac{1}{2}(\mathcal{E}_{2\gamma}(U+V) - \mathcal{E}_{2\gamma}(U) - \mathcal{E}_{2\gamma}(V))$ 是对称的。其次，边界算子相对于 $(\mathbb{R}^{n+1}_+; \mathbb{R}^n)$ 的共形等距变换群具有协变性；精确表述见 [Cas20，第 4] 节。第三，如 (1.2) 所示，这些定义使广义 Dirichlet-to-Neumann 算子能够还原分数阶拉普拉斯算子。

在 CR 情形中，阶数为 2γ 对于 $\gamma \in \mathbb{R}$，由散射理论在 K¨ahler–Einstein 流形 $\mathcal{X}$[GSB08，HPT08，EMM91]定义了分数阶协变算子。它们是伪微分算子，其主符号与 CR 次拉普拉斯算子的纯分数阶幂（$-\Delta_b$）$^\gamma$ 在边界 $M = \partial\mathcal{X}$。在海森堡群的特殊情形下 $\mathbb{H}^n$，它们就是利用经典表示论在 CR 球面上计算的 [BFM13] 中的交织算子。

秉承 Caffarelli 和 Silvestre 的研究思路，Frank、Gonz´alez、Monticelli 和 Tan 在 Ω_{n+1} 上提出了一个延拓问题，并利用傅里叶变换和算子的谱分解，将 $\mathbb{H}^n$ 上次拉普拉斯算子的纯分数阶幂构造为一个退化椭圆方程的 Dirichlet-to-Neumann 算子。此外，我们还有如下尖锐 Sobolev 迹不等式。

定理 1.1 ([FdMGMT15])。给定 $\gamma \in (0,1)$，对于任意 $U \in \mathcal{C}^{2\gamma}_D$，$\phi \in S^{\gamma,2}(\mathbb{H}^n)$，有

$$\mathcal{E}_{2\gamma}(U) \geqslant 2^{1-2\gamma}\gamma\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)}\oint_{\mathbb{H}^n}\phi P^\theta_\gamma \phi dzdt., \quad \phi = \iota^* U, \tag{1.4}$$

其中 $\iota^*: C^\infty(\overline{\Omega_{n+1}}) \to C^\infty(\mathbb{H}^n)$ 是限制算子，相应的函数空间 $\mathcal{C}^{2\gamma}_D$ 在定理 *6.1* 中定义，而狄利克雷能量$\mathcal{E}_{2\gamma}(U)$ 定义为

$$\mathcal{E}_{2\gamma}(U) = \int_{\Omega_{n+1}}\left(|\partial_\rho U|^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n |X_j(U)|^2 + |Y_j(U)|^2 + \rho^2|\partial_t U|^2\right)\rho^{1-2\gamma}dzdtd\rho.$$

当且仅当 U 是该延拓问题的唯一解时，等号成立

$$\begin{cases} \left(\partial^2_\rho + (1-2\gamma)\rho^{-1}\partial_\rho + \rho^2\partial^2_t + \Delta_b\right)U = 0, & in\ \Omega_{n+1}, \\ U = \phi, & on\ \mathbb{H}^n. \end{cases} \tag{1.5}$$

我们的主要结果给出了 $\gamma \in (1,2)$ 的尖锐 Sobolev 迹不等式。

定理 1.2。给定 $\gamma \in (1,2)$，对于任意 $U \in \mathcal{C}^{2\gamma}_D$，$\phi \in S^{\gamma,2}(\mathbb{H}^n)$，我们有

$$\mathcal{E}_{2\gamma}(U) \geq 2^{3-2\gamma}\frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\oint_{\mathbb{H}^n}\phi P^\theta_\gamma \phi dzdt, \quad \phi = \iota^* U, \tag{1.6}$$

其中 $\iota^*: \quad C^\infty(\Omega_{n+1}) \to C^\infty(\mathbb{H}^n)$ 是限制算子，相应的函数空间 $\mathcal{C}_D^{2\gamma}$ 定义于定理 *6.1*中。狄利克雷能量$\mathcal{E}_{2\gamma}(U)$ 在 (*1.6*) 中定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{2\gamma}(U) := &\int_{\Omega_{n+1}} UL_4U\rho^{1-2[\gamma]}dzdtd\rho \\ &+ \oint_{\mathbb{H}^n} B_0^{2\gamma}(U)B_{2\gamma}^{2\gamma}(U)dzdt - \oint_{\mathbb{H}^n} B_{2[\gamma]}^{2\gamma}(U)B_2^{2\gamma}(U)dzdt,\end{aligned}$$

其中相应的边界算子为

$$\begin{aligned}&B_0^{2\gamma} = \iota^*, \quad B_2^{2\gamma} = -\iota^* \circ \mathcal{T} + \frac{1-[\gamma]}{[\gamma]}\Delta_b \circ B_0^{2\gamma}, \\ &B_{2[\gamma]}^{2\gamma} = -\iota^* \circ \rho^{1-2[\gamma]}\partial_\rho, \quad B_{2\gamma}^{2\gamma} = \iota^* \circ \rho^{1-2[\gamma]}\partial_\rho\mathcal{T} - \frac{1+[\gamma]}{[\gamma]}\Delta_b \circ B_{2[\gamma]}^{2\gamma},\end{aligned} \tag{1.7}$$

如果我们设定

$$\mathcal{T} := \partial_\rho^2 + (1-2[\gamma])\partial_\rho + \rho^2\partial_t^2.$$

<escape>（*1.6*）当且仅当 U 是该延拓问题的唯一解时，等号成立</escape>

$$\begin{cases} L_4V = 0, & on\ \Omega_{n+1}, \\ B_0^{2\gamma}(V) = \phi, & on\ \mathbb{H}^n, \\ B_{2[\gamma]}^{2\gamma}(V) = 0, & on\ \mathbb{H}^n, \end{cases} \tag{1.8}$$

其中

$$L_4 := L_{[\gamma]}^2 + T^2,$$

$$L_{[\gamma]} = \partial_\rho^2 + (1-2[\gamma])\rho^{-1}\partial_\rho + \rho^2\partial_t^2 + \Delta_b, \quad T = 2\frac{\partial}{\partial t}.$$

特别地， P_γ^θ 可以通过求解（*1.8*）得到

$$P_\gamma^\theta\phi = 2^{-3+2\gamma}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(2-\gamma)}\lim_{\rho\to 0^+}\rho^{1-2[\gamma]}\partial_\rho L_{[\gamma]}U.$$

本文结构安排如下：

第 2 节回顾海森堡群$\mathbb{H}^n$ 作为 CR 流形以及作为 Siegel 域边界的一些基本概念。

在第 3 节中，我们通过 $\mathbb{H}^n$ Siegel 域 Ω_{n+1} [HPT08]上双曲拉普拉斯算子的散射理论，回顾次拉普拉斯算子分数次幂的识别。在 [Cas20], 中，我们沿用相同思路，定义了 Ω_{n+1} 上的加权多重次拉普拉斯算子，并在引理 3.5中证明了一个优美的因式分解。我们还给出了 Ω_{n+1} 上的加权多重次拉普拉斯算子与双曲空间中的复双曲多次泊松算子之间的直接关系。

在第 4 节中，我们介绍与 $\gamma \in (0,2)$ 相对应的加权多重次拉普拉斯算子的边界算子，并研究它们在作为广义狄利克雷到诺伊曼算子恢复次拉普拉斯算子分数次幂中的作用。此处的关键结果将我们的边界算子与散射理论 [HPT08] 相关的泊松方程解的渐近行为联系起来，并证明由我们的边界算子确定的狄利克雷型是对称的。

由于延拓问题中的额外项 $\rho^2\partial_t^2$，很难构造满足“互斥”性质的高阶边界算子；精确表述见注 4.4 。

在第 5 节中，我们证明了扩张问题（5.1）和（5.2）的解的存在性和唯一性，这些问题是退化椭圆边值问题。这使我们能够证明本节的主要结果，即定理 5.3。

在第 6 节中，我们证明了若干尖锐迹不等式。首先，定理6.1 断言，对于狄利克雷问题（5.1）和（5.2）的解，存在一个狄利克雷原理。因此，我们在推论 1.1 中重新得到定理 6.2 ，并将尖锐 Sobolev 迹不等式（1.6）作为推论6.3 的直接结果予以证明。结合推论 6.2 和推论 6.3 以及 $\mathbb{H}^n$ [FL12] 上的尖锐 Sobolev 不等式，我们得到一个尖锐 Sobolev 迹不等式，该不等式陈述于推论 6.4中。

致谢。我们谨向 Jeffrey S. Case 教授表示感谢，感谢他提供的宝贵讨论。

2. Prelimiaries

2.1. 作为 CR 流形的海森堡群。 n维海森堡群 $\mathbb{H}^n$ 定义为赋予群运算的集合 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ 。

$$\left(\hat{z},\hat{t}\right)\cdot(z,t)=\left(\hat{z}+z,\hat{t}+t+2\mathrm{Im}\langle\hat{z},z\rangle_{\mathbb{C}^n}\right)$$

对于 $\left(\hat{z}、\hat{t}\right)$、$(z,t) \in \mathbb{H}^n$，其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}^n}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的标准内积。海森堡群 $\mathbb{H}^n$ 上的 CR 结构继承自嵌入$\mathbb{H}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$。全纯切丛 $T^{1,0}\mathbb{H}^n$ 定义为

$$T^{1,0}\mathbb{H}^n = T^{1,0}\mathbb{C}^{n+1}\cap\mathbb{C}T\mathbb{H}^n = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\langle Z_1,\cdots,Z_n\rangle,$$

其中

$$Z_j=\frac{\partial}{\partial z_j}+i\bar{z}_j\frac{\partial}{\partial t},\qquad \bar{Z}_j=\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}-iz_j\frac{\partial}{\partial t},\quad j=1,\cdots,n. \tag{2.1}$$

我们还定义

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + 2y_j \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} - 2x_j \frac{\partial}{\partial t}, \quad j = 1, \cdots, n, \quad T = 2\frac{\partial}{\partial t}, \tag{2.2}$$

它们构成了 $\mathbb{H}^n$ 上向量场李代数的一组基，并且相对于群作用是左不变的。我们立即观察到，与之相关的极大复分布 $H(\mathbb{H}^n) = \mathrm{Re}\left\{T^{1,0}\mathbb{H}^n \oplus T^{0,1}\mathbb{H}^n\right\}$ 仅仅是

$$H(\mathbb{H}^n) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\langle X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n\rangle,$$

其具有由以下关系定义的复结构 J_b： $H(\mathbb{H}^n) \to H(\mathbb{H}^n)$。

$$J_b X_j = Y_j, \quad J_b Y_j = -X_j, \quad j = 1, \cdots, n.$$

实切丛 $T\mathbb{H}^n$ 满足

$$T\mathbb{H}^n = H(\mathbb{H}^n) \oplus \mathbb{R}T. \tag{2.3}$$

$\mathbb{H}^n$ 上的典范接触形式正是 θ

$$\theta = \frac{1}{2}\left[dt + i\sum_{j=1}^{n}(z_j d\bar{z}_j - \bar{z}_j dz_j)\right], \tag{2.4}$$

且向量场 T 是满足条件的特征方向。

$$\theta(T) = 1, \qquad T \rfloor d\theta = 0.$$

与 θ 相关联的 Levi形式 L_θ 由下式给出。

$$L_\theta = -id\theta = \sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\bar{z}_j,$$

这是一个正定矩阵。这说明 $(\mathbb{H}^n, \theta)$ 是严格伪凸的。

与 θ 相关联的次拉普拉斯算子定义为

$$\Delta_b u := \sum_{j=1}^{n}\left[\bar{Z}_j Z_j + Z_j \bar{Z}_j\right] u = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left[X_j^2 + Y_j^2\right] u; \tag{2.5}$$

该微分算子是线性的、二阶的、退化椭圆的，并且由于它是满足 H¨ ormander 条件的光滑向量场的平方和，因此是次椭圆的。

2.2. 作为 Siegel 域边界的海森堡群。海森堡群 $\mathbb{H}^n$ 可视为 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中某个域的边界。事实上，令 Ω_{n+1} 为 Siegel 域，定义为。

$$\Omega_{n+1} := \left\{\zeta = (z, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} | q(\zeta) > 0\right\}, \tag{2.6}$$

其中

$$q(\zeta) = \mathrm{Im} z_{n+1} - |z|^2.$$

边界 $\partial\Omega_{n+1} = \left\{\zeta \in \mathbb{C}^{n+1} | q(\zeta) = 0\right\}$ 是一个具有由 $\mathbb{C}^{n+1}$诱导的 CR 结构的超曲面型定向 CR 流形，它通过 CR 同构 $\mathcal{G} : \mathbb{H}^n \to \partial\Omega_{n+1}$与 $\mathbb{H}^n$ CR 同构，

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(z,t) &= \left(z, t + i|z|^2\right), \quad (z,t) \in \mathbb{H}^n,\\ \mathcal{G}^{-1}(\zeta) &= (z, \mathrm{Re} z_{n+1}), \quad \zeta \in \partial\Omega_{n+1}.\end{aligned}$$

边界流形 $\partial\Omega_{n+1}$ 从环境流形 $\mathbb{C}^{n+1}$的复结构继承了自然的 CR 结构，$-q$ 作为定义函数。 $\mathbb{H}^n$ 上的伪Hermite结构随后由接触形式（经拉回）给出

$$\theta = \frac{i}{2}\left(\bar{\partial} - \partial\right)(-q) = \frac{1}{4}(dz_{n+1} + d\bar{z}_{n+1}) + \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(z_j d\bar{z}_j - \bar{z}_j dz_j\right),$$

这与（2.4）中给出的定义一致。

为了构成 $T\Omega_{n+1}$的一组基，我们定义

$$\xi_{n+1} = \frac{1}{2}(N - iT), \qquad \bar{\xi}_{n+1} = \frac{1}{2}(N + iT),$$

其中

$$T = 2\frac{\partial}{\partial t}, \qquad N = -2\frac{\partial}{\partial q}.$$

于是，Ω_{n+1}中的一个标架由$\left\{Z_j, \bar{Z}_j, \xi_{n+1}, \bar{\xi}_{n+1}\right\}_{j=1}^{n}$给出，而该基的对偶余标架为 $\left\{\theta^j, \theta^{\bar{j}}, \theta, dq\right\}$，其中 $dq = \partial q + \bar{\partial} q$。特别地，$\left\{Z_j, \bar{Z}_j, T\right\}$在 $\mathbb{C}T\mathbb{H}^n$ 中的对偶余标架简单地为 $\left\{\theta^j, \theta^{\bar{j}}, \theta\right\}$。

另一方面，函数 $t = \mathrm{Re} Z_{n+1} \in \mathbb{R}$、 z_1、 $\cdots$、 $z_n \in \mathbb{C}^n$ 和 $\rho = (2q)^{1/2} \in \mathbb{R}_+$ 给出了 $\Omega_{n+1} \simeq \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}_+$ 中的坐标。对于定义函数 $-q$，我们可以在 Ω_{n+1} 中构造一个 K¨ahler 形式，如下：

$$\omega_+ = -\frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\log(q) = \frac{i}{2}\left(-\frac{\partial\bar{\partial}q}{q} + \frac{\partial q \wedge \bar{\partial} q}{q^2}\right).$$

通过直接计算，我们观察到

$$-\partial\bar{\partial}q = \sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\bar{z}_j, \qquad \partial q \otimes \bar{\partial} q + \bar{\partial} q \otimes \partial q = \frac{1}{2}\left[(dq)^2 + 4\theta^2\right]. \tag{2.7}$$

随后经过变换 $q = \frac{\rho^2}{2}$，与 ω_+相关联的黎曼度量 g^+ 由下式给出。

$$g^+ = \frac{1}{2}\left(\frac{d\rho^2}{\rho^2} + \frac{2\delta_{\alpha\bar{\beta}}\theta^\alpha \otimes \theta^{\bar{\beta}}}{\rho^2} + \frac{4\theta}{\rho^2}\right).$$

那么 $(\Omega_{n+1},\ \omega_+)$ 是一个具有常全纯曲率的凯勒流形。我们根据¨ahler 流形（Ω [FdMGMT15] 回忆，凯勒流形上的拉普拉斯算子（Ω¨ahler 流形 $(\Omega_{n+1},\ \omega_+)$）计算如下

$$\Delta_+ u = \operatorname{Tr}\left(i\partial\bar{\partial}u\right),$$

并且，以下公式将拉普拉斯算子分解为相对于 q 的水平集的切向分量和法向分量：

$$\Delta_+ = q\left[q(\partial_q^2+\partial_t^2)+\frac{1}{2}\Delta_b - n\partial_q\right], \tag{2.8}$$

伴有 Δ_b 次拉普拉斯算子（2.5）。拉普拉斯算子的谱 $-\Delta_+$ 由一个绝对连续部分构成

$$\sigma_{ac}(-\Delta_+) = \left[\frac{(n+1)^2}{4},\infty\right),$$

且纯点谱满足

$$\sigma_{pp}(-\Delta_+) \subset \left(0,\frac{(n+1)^2}{4}\right),$$

此外，它由有限个 L^2-特征值组成。

3. Scattering theory on the Siegel domain

给定 $\gamma\in(0,m)\backslash\mathbb{N}$, $m=n+1$，对于每个 $f\in C^\infty(\mathbb{H}^n)\cap S^{\gamma,2}(\mathbb{H}^n)$，其中$S^{\gamma,2}(\mathbb{H}^n)$ 是 BFM 中所刻画的 Folland–Stein空间 [BFM13]，，存在唯一的解 u_s，满足泊松方程

$$\Delta_+ u_s + s(m-s)u_s = 0, \quad s=\frac{m+\gamma}{2}. \tag{3.1}$$

于是泊松映射定义为 $\mathcal{P}(s):\ C^\infty(\mathbb{H}^n)\ \to C^\infty(\Omega_{n+1})$ 如下 $f\to u_s$;¯有关（ [HPT08] ）的泊松核，见 3.1。就我们的目的而言，只需知道存在函数 F，$G\in C^\infty(\Omega_{n+1})$ 满足

$$\begin{cases} u_s = \mathcal{P}(s)(f) = q^{m-s}F + q^s G, \\ F|_{\mathbb{H}^n} = f. \end{cases} \tag{3.2}$$

定义散射算子 $\mathcal{S}(s)(f) := G|_{\mathbb{H}^n}$。$(\mathbb{H}^n,\theta)$ 上的 2γ 阶 CR分数阶GJMS算子定义为

$$P_\gamma^\theta := 2^\gamma\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(-\gamma)}\mathcal{S}(\frac{m+\gamma}{2}), \tag{3.3}$$

其满足

$$P_\gamma^{e^{2w}\theta} f = e^{-(n+1+\gamma)w}P_\gamma^\theta\left(e^{(n+1-\gamma)w}f\right), \quad w\in C^\infty(\mathbb{H}^n). \tag{3.4}$$

已知由 [FdMGMT15] 可知

$$P_\gamma^\theta = (2|T|)^\gamma \frac{\Gamma\left(\frac{1+\gamma}{2} + \frac{-\Delta_b}{2|T|}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\gamma}{2} + \frac{-\Delta_b}{2|T|}\right)}, \quad \gamma \in (0,1). \tag{3.5}$$

函数 F 在 (3.2) 中模 $O(q^\infty)$ 由 f 通过求解以下方程的泰勒级数解

$$\begin{cases} \left(\Delta_+ + \frac{m^2-\gamma^2}{4}\right)\left(q^{\frac{m-\gamma}{2}}F\right) = O(q^\infty), \\ F|_{\mathbb{H}^n} = f. \end{cases} \tag{3.6}$$

类似地，函数 G 在 (3.2) 中模 $O(q^\infty)$ 由 $P_\gamma^\theta f$ 通过求解以下方程的泰勒级数解

$$\begin{cases} \left(\Delta_+ + \frac{m^2-\gamma^2}{4}\right)\left(q^{\frac{m+\gamma}{2}}G\right) = O(q^\infty), \\ G|_{\mathbb{H}^n} = \mathcal{S}(\frac{m+\gamma}{2})(f). \end{cases} \tag{3.7}$$

因此，我们希望理解以下方程的形式解

$$(\Delta_+ + s(m-s))(V) = 0, \quad s = \frac{m \pm \gamma}{2}, \quad \gamma \in (0,m)\backslash\mathbb{N} \tag{3.8}$$

由于[HPT08中的计算错误，引理 3。4], 我们重新进行计算，以得到正确的展开式。

命题 3.1。 假设 $u_s \in C^\infty(\Omega_{n+1})$ 满足 $u_s = \overline{q}^{m-s}F + q^s G$是方程 (3.2) 的解。那么我们有

$$F = \sum_{l=0}^{\infty} q^l f_l, \qquad f_l = (-1)^l \frac{\Gamma(m-2s+1)}{l!\Gamma(m-2s+l+1)} P_l^s(f_0),$$

and

$$G = \sum_{l=0}^{\infty} q^l g_l, \qquad g_l = (-1)^l \frac{\Gamma(2s-m+1)}{l!\Gamma(2s-m+l+1)} G_l^s(g_0),$$

其中 P_l^s和 G_l^s是阶数为 $2l$ 的微分算子，分别由 (3.18) 和 (3.20) 定义，其主符号为

$$\sigma(P_l^s) = \sigma(G_l^s) = \sigma(\Delta_b^l). \tag{3.9}$$

特别地，我们有 $P_l^s = G_l^{m-s}$。

证明。 我们将（2.8）视为关于向量场 $q\frac{\partial}{\partial q}$ 以及与 $\mathbb{H}^n$相切的向量场的变系数微分算子，即:

$$\Delta_+ = \sum_{i=0}^{2} q^i L_i, \tag{3.10}$$

其中

$$L_0 = \left(q\frac{\partial}{\partial q}\right)^2 - (n+1)q\frac{\partial}{\partial q}, \qquad L_1 = \frac{\Delta_b}{2}, \qquad L_2 = \frac{T^2}{4}. \tag{3.11}$$

我们将 $V = q^{m-s}F$ 代入（3.8），得到

$$\begin{aligned}(\Delta_+ + s(m-s))\,(q^{m-s}F) &= \left(\sum_{i=0}^{2} q^i L_i + s(m-s)\right)(q^{m-s}F) \\ &= (L_0 + s(m-s))\,(q^{m-s}F) + qL_1(q^{m-s}F) + q^2L_2(q^{m-s}F).\end{aligned} \tag{3.12}$$

我们假设 F 具有形式展开 $F = \sum_{l=0}^{\infty} q^l f_l$。直接计算可得

$$\begin{aligned}(L_0 + s(m-s))(q^{m-s}F) &= (m-2s+1)\,q^{m-s+1}\frac{\partial F}{\partial q} + q^{m-s+2}\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} l\,(m-2s+1)\,q^{m-s+l}f_l + \sum_{l=1}^{\infty} l\,(l-1)\,q^{m-s+l}f_l \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} l\,(m-2s+l)\,q^{m-s+l}f_l.\end{aligned} \tag{3.13}$$

将（3.13代入（3.12）可得

$$f_{-1} = 0, \quad f_0 = f, \quad f_l = -\frac{L_1 f_{l-1} + L_2 f_{l-2}}{l\,(m-2s+l)}, \quad l \geqslant 1. \tag{3.14}$$

我们假设

$$f_l = (-1)^l \frac{\Gamma(m-2s+1)}{l!\Gamma(m-2s+l+1)} P_l^s(f), \tag{3.15}$$

其中，P_l^s是一个依赖于 L_1、L_2和 s的算子。

将此与（3.14）结合起来，我们可以看到

$$\begin{aligned}P_{-1}^s = 0, \quad P_0^s = \mathrm{id}, \\ P_l^s = L_1 \circ P_{l-1}^s - (l-1)(m-2s+l-1)L_2 \circ P_{l-2}^s, \quad l \geqslant 1.\end{aligned} \tag{3.16}$$

由归纳法可知，P_l^s是关于对易变量 L_1 和 $\sqrt{L_2}$的 l 次齐次多项式。因此，P_l^s的递推关系可归结为单变量 x 的多项式 p_l^s 的递推关系，其定义如下：

$$\begin{aligned}p_{-1}^s = 0, \quad p_0^s(x) = 1, \\ p_l^s = xp_{l-1}^s - (l-1)(m-2s+l-1)p_{l-2}^s, \quad l \geqslant 1.\end{aligned} \tag{3.17}$$

显然，p_l^s 是一个次数为 l 且首项系数为 1 的多项式。此外，P_l^s可由 p_l^s 通过下式恢复：

$$P_l^s = \left(\sqrt{L_2}\right)^l \circ p_l^s\left(\frac{L_1}{\sqrt{L_2}}\right). \tag{3.18}$$

类似地，我们有

$$g_l = (-1)^l \frac{\Gamma(2s-m+1)}{l!\Gamma(2s-m+l+1)} G_l^s(\mathcal{S}(s)(f)), \tag{3.19}$$

其中 G_l^s 由下式给出。

$$G_l^s = \left(\sqrt{L_2}\right)^l \circ g_l^s\left(\frac{L_1}{\sqrt{L_2}}\right), \tag{3.20}$$

且多项式 g_l^s 由

$$\begin{aligned} g_{-1}^s = 0, \quad g_0^s(x) = 1, \\ g_l^s = x g_{l-1}^s - (l-1)(2s-m+l-1) g_{l-2}^s, \quad l \geqslant 1, \end{aligned} \tag{3.21}$$

这意味着 $P_l^s = G_l^{m-s}$ 。最后，(3.9) 可由 (3.18)、(3.20) 立即推出。□

注 3.2. 算子 P_l^s 在 $\mathbb{R}^n$ 上的对应形式恰好为 $(-\overline{\Delta})^l$，且与 s的取值无关。然而，由递推关系（3.17）可知， P_l^s依赖于 s 的取值，当 $l \geqslant 2$ 时，显式求解递推关系（3.17）是困难的。

通过延拓研究 CR 分数阶GJMS算子有两种方法。第一种方法是将方程（3.2）的解识别为 Siegel 域上一个二阶“加权”拉普拉斯算子的核中的元素。

引理 3.3。设 $\gamma \in (0, m)\backslash\mathbb{N}$。我们定义

$$L_\gamma = \partial_\rho^2 + (1-2\gamma)\rho^{-1}\partial_\rho + \rho^2\partial_t^2 + \Delta_b. \tag{3.22}$$

Then

$$L_\gamma \circ \rho^{-m+\gamma} \circ \mathcal{P}(\frac{m+\gamma}{2}) = 0.$$

证明。经过变换 $q = \frac{\rho^2}{2}$，我们有

$$\Delta_+ = \frac{\rho^2}{4}\left(\partial_\rho^2 - (2n+1)\rho^{-1}\partial_\rho + \rho^2\partial_t^2 + \Delta_b\right). \tag{3.23}$$

利用（3.23）直接计算可得

$$\frac{1}{4}L_\gamma\left(\rho^{-m+\gamma}U\right) = \rho^{-m+\gamma-2}\left(\Delta_+ + \frac{m^2-\gamma^2}{4}\right)U, \tag{3.24}$$

对于所有 $U \in \overline{C^\infty}(\Omega_{n+1})$。根据泊松算子 $\mathcal{P}(\frac{m+\gamma}{2})$ 的定义，即可得出结论。□

通过延拓研究 CR 分数阶 GJMS 算子的第二种方法，是将 (3.2) 的解识别为一组 L_γ 乘积的核中的元素。具体可以按如下方式进行。

首先，令 $\gamma \in (0,m)\backslash\mathbb{N}$。设 $k := \lfloor\gamma\rfloor+1$。由 γ 确定的加权多重次拉普拉斯算子为

$$L_{2k} := \prod_{j=0}^{k-1} L_{\gamma-2j} = L_{\gamma-2k+2} \circ \cdots \circ L_{\gamma}, \tag{3.25}$$

其中 L_μ 定义于（3.22）。

其次，令 $\gamma \in (0,m)\backslash\mathbb{N}$。设 $s := \frac{m+\gamma}{2}$ 并

$$D_s := \Delta_+ + s(m-s).$$

由 γ 确定的复双曲多次泊松算子是

$$L_{2k}^+ := \prod_{j=0}^{k-1} D_{s-j}. \tag{3.26}$$

以下两个引理概括了这一关系的关键特征，可用于研究 Siegel 域上的CR尖锐索ob列夫迹不等式。

首先，为了理解边界算子，重写 L_{2k}^+ 的因式分解会很有帮助。

引理 3.4。设 $\gamma \in (0,m)\backslash\mathbb{N}$ 且 L_{2k}^+ 为式（*3.26*）中定义的加权多重次拉普拉斯算子。则

$$L_{2k}^+ = \prod_{j=0}^{\lfloor\gamma/2\rfloor} D_{s_j} \circ \prod_{j=0}^{\lfloor\gamma\rfloor-\lfloor\gamma/2\rfloor-1} D_{\tilde{s}_j}, \tag{3.27}$$

其中 $s_j = \frac{m+\gamma}{2} - j$ 和 $\tilde{s}_j = \frac{m+\lfloor\gamma\rfloor-[\gamma]}{2} - j$。

证明。将（3.26）拆分为包含 $s-j > \frac{m}{2}$ 和 $s-j < \frac{m}{2}$ 的项，我们计算得

$$L_{2k}^+ = \prod_{j=0}^{\lfloor\gamma/2\rfloor} D_{s_j} \circ \prod_{j=\lfloor\gamma/2\rfloor+1}^{k-1} D_{s_j}$$

注意，如果 $j+i = \lfloor\gamma\rfloor$ 对于 $\lfloor\gamma/2\rfloor+1 \leqslant j \leqslant \lfloor\gamma\rfloor$，我们有

$$D_{\frac{m+\gamma}{2}-j} = D_{\frac{m+\lfloor\gamma\rfloor-[\gamma]}{2}-i}. \tag{3.28}$$

利用（3.28），通过重新编号即可得到所需结果。 □

其次，算子 L_{2k} 定义为 $L_{\gamma-2j}$ 的乘积，具有良好的因式分解形式（3.29），由此可知 L_{2k} 关于加权测度 $\rho^{1-2[\gamma]}dzdtd\rho$ 在 Ω_{n+1}上形式自伴。以下结果可由定理 13 [LY22] 轻易推出。为使本文自成一体，我们用另一种方法证明它。

引理 3.5。 设 $\gamma \in (0,m)\backslash\mathbb{N}$，并设 L_{2k} 为式（3.25）中定义的加权多重次拉普拉斯算子。则

$$L_{2k} = \prod_{j=0}^{k-1} \left(L_{[\gamma]} + i\,(k-1-2j)\,T \right), \tag{3.29}$$

其中 L_μ 由式（3.22）给出，而 $T = 2\partial_t$。

证明。 我们用归纳法证明该结论。直接计算可得，式（3.29）对 $\gamma \in (0,2)$成立。假设式（3.29）对 $\gamma \in (0,k-2)$成立，其中 $k \in \mathbb{N}$且 $k > 2$。

为方便起见，我们将算子 $\rho^{-1}\partial_\rho$ 记为 Y。首先注意到交换子恒等式

$$[Y, L_\mu] = 2\left(Y^2 + \partial_t^2\right), \quad \forall \mu \in \mathbb{R}. \tag{3.30}$$

利用（3.25）直接计算可得

$$\begin{aligned} L_{2k} =& L_{\gamma-2k+2} \circ \prod_{j=1}^{k-2} \left(L_{\gamma-k+1} + i\,(k-1-2j)\,T \right) \circ L_\gamma \\ =& \left(L_{[\gamma]} + 2(k-1)Y \right) \circ L_{2(k-2)} \circ \left(L_{[\gamma]} - 2(k-1)Y \right) \\ =& L_{2(k-2)} \circ L_{[\gamma]}^2 + 2(k-1)\left[Y, L_{2(k-2)} \circ L_{[\gamma]} \right] \\ & - 4(k-1)^2 Y \circ L_{2(k-2)} \circ Y. \end{aligned} \tag{3.31}$$

因此，只需证明对于 $k \in \mathbb{N}$ 和 $k > 2$

$$\left[Y, L_{2(k-2)} \circ L_{[\gamma]} \right] = 2(k-1) Y \circ L_{2(k-2)} \circ Y + 2(k-1) L_{2(k-2)} \circ \partial_t^2. \tag{3.32}$$

通过归纳法，假设（3.32）对 $k-2$成立，则

$$\begin{aligned} \left[Y, L_{2k} \circ L_{[\gamma]} \right] &= \left[Y, \left(L_{[\gamma]}^2 + (k-1)^2 T^2 \right) \circ L_{2(k-2)} \circ L_{[\gamma]} \right] \\ &= \left[Y, L_{[\gamma]}^2 + (k-1)^2 T^2 \right] \circ L_{2(k-2)} \circ L_{[\gamma]} \\ &\quad + \left(L_{[\gamma]}^2 + (k-1)^2 T^2 \right) \circ \left[Y, L_{2(k-2)} \circ L_{[\gamma]} \right]. \end{aligned} \tag{3.33}$$

注意到，对于所有 $\mu \in \mathbb{R}$， T 都可以与 Y 和 L_μ 交换。因此

$$\begin{aligned} \left[Y, L_{[\gamma]}^2 + (k-1)^2 T^2 \right] &= \left[Y, L_{[\gamma]} \right] \circ L_{[\gamma]} + L_{[\gamma]} \circ \left[Y, L_{[\gamma]} \right] \\ &= 2\left(Y^2 \circ L_{[\gamma]} + L_{[\gamma]} \circ Y^2 \right) + 4 L_{[\gamma]} \circ \partial_t^2. \end{aligned} \tag{3.34}$$

代入（3.34）和（3.32）到（3.33）中，得到

$$\begin{aligned} \left[Y, L_{2k} \circ L_{[\gamma]} \right] &= 2Y^2 \circ L_{[\gamma]}^2 \circ L_{2(k-2)} + 2 L_{[\gamma]} \circ Y^2 \circ L_{2(k-2)} \circ L_{[\gamma]} \\ &\quad + 2(k-1)\left(L_{[\gamma]}^2 + (k-1)^2 T^2 \right) \circ Y \circ L_{2(k-2)} \circ Y \\ &\quad + 4 L_{[\gamma]}^2 \circ L_{2(k-2)} \circ \partial_t^2 + 2(k-1) L_{2k} \circ \partial_t^2. \end{aligned} \tag{3.35}$$

此外，我们还有

$$Y^2 \circ L_{[\gamma]}^2 \circ L_{2(k-2)} = Y \circ L_{[\gamma]}^2 \circ L_{2(k-2)} \circ Y + Y \circ \left[Y, L_{[\gamma]}^2 \circ L_{2(k-2)}\right], \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned} L_{[\gamma]} \circ Y^2 \circ L_{2(k-2)} \circ L_{[\gamma]} &= Y \circ L_{[\gamma]}^2 \circ L_{2(k-2)} \circ Y \\ &\quad + Y \circ L_{[\gamma]} \circ \left[Y, L_{2(k-2)} \circ L_{[\gamma]}\right] \\ &\quad + \left[L_{[\gamma]}, Y\right] \circ Y \circ L_{[\gamma]} \circ L_{2(k-2)}, \end{aligned} \tag{3.37}$$

and

$$\left(L_{[\gamma]}^2 + (k-1)^2 T^2\right) \circ Y \circ L_{2(k-2)} \circ Y = Y \circ L_{2k} \circ Y + \left[L_{[\gamma]}^2, Y\right] \circ L_{2(k-2)} \circ Y. \tag{3.38}$$

将它们结合起来得到

$$\begin{aligned} \left[Y, L_{2k} \circ L_{[\gamma]}\right] =& 2(k+1) Y \circ L_{2k} \circ Y + \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} \\ &+ 4 L_{[\gamma]}^2 \circ L_{2(k-2)} \circ \partial_t^2 + 2(k-1) L_{2k} \circ \partial_t^2 \\ &- 4(k-1)^2 Y \circ L_{2(k-2)} \circ Y \circ T^2, \end{aligned} \tag{3.39}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathrm{I} =& 2Y \circ \left[Y, L_{[\gamma]}^2 \circ L_{2(k-2)}\right] \\ \mathrm{II} =& 2Y \circ L_{[\gamma]} \circ \left[Y, L_{2(k-2)} \circ L_{[\gamma]}\right] \\ &+ 2\left[L_{[\gamma]}, Y\right] \circ Y \circ L_{[\gamma]} \circ L_{2(k-2)} \\ \mathrm{III} =& 2(k-1)\left[L_{[\gamma]}^2, Y\right] \circ L_{2(k-2)} \circ Y. \end{aligned} \tag{3.40}$$

利用（3.32）和（3.30），我们得到

$$\begin{aligned} \mathrm{I} + \mathrm{II} =& 8(k-1) Y \circ L_{[\gamma]} \circ Y \circ L_{2(k-2)} \circ Y \\ &+ 8(k-1) Y \circ L_{[\gamma]} \circ L_{2(k-2)} \circ \partial_t^2 \\ \mathrm{III} =& -4(k-1) Y^2 \circ L_{[\gamma]} \circ L_{2(k-2)} \circ Y \\ &- 4(k-1) L_{[\gamma]} \circ Y^2 \circ L_{2(k-2)} \circ Y \\ &- 8(k-1) L_{[\gamma]} \circ L_{2(k-2)} \circ Y \circ \partial_t^2 \end{aligned} \tag{3.41}$$

注意到

$$\begin{aligned} Y \circ L_{[\gamma]} \circ Y \circ L_{2(k-2)} \circ Y =& Y^2 \circ L_{[\gamma]} \circ L_{2(k-2)} \circ Y \\ &- 2Y \circ \left(Y^2 + \partial_t^2\right) \circ L_{2(k-2)} \circ Y \\ -L_{[\gamma]} \circ Y^2 \circ L_{2(k-2)} \circ Y =& -Y^2 \circ L_{[\gamma]} \circ L_{2(k-2)} \circ Y \\ &+ 4Y \circ \left(Y^2 + \partial_t^2\right) \circ L_{2(k-2)} \circ Y. \end{aligned} \tag{3.42}$$

我们得出结论：

$$\begin{aligned} \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} &= 8(k-1)\left[Y, L_{2(k-2)} \circ L_{[\gamma]}\right] \circ \partial_t^2 \\ &= 16(k-1)^2 Y \circ L_{2(k-2)} \circ Y \circ \partial_t^2 + 16(k-1)^2 L_{2(k-2)} \circ \partial_t^2. \end{aligned} \tag{3.43}$$

注意到的是

$$\begin{aligned} &4L_{[\gamma]}^2 \circ L_{2(k-2)} \circ \partial_t^2 + 2(k-1)L_{2k} \circ \partial_t^2 \\ &= 2(k+1)L_{2k} \circ \partial_t^2 - 16(k-1)^2 L_{2(k-2)} \circ \partial_t^2. \end{aligned} \tag{3.44}$$

最后，(3.32) 对 k成立。 □

现在我们证明，当乘以适当次幂的 ρ 作为权重时， D_{s-j} 的核中的元素也属于 L_{2k} 的核。

引理 3.6. 令 $\gamma \in (0,m)\backslash\mathbb{N}$ 并设 $k := \lfloor\gamma\rfloor + 1$. 记

$$\mathcal{I}^\gamma := \{\gamma - 2j | j \in [0, \lfloor\gamma/2\rfloor]\} \cup \{\lfloor\gamma\rfloor - [\gamma] - 2j | j \in [0, \lfloor\gamma\rfloor - \lfloor\gamma/2\rfloor - 1]\}.$$

对于每个 $\tilde{\gamma} \in \mathcal{I}^\gamma$ ，均有。

$$L_{2k} \circ \rho^{-m+\gamma} \circ \mathcal{P}(\frac{m+\tilde{\gamma}}{2}) = 0.$$

证明。 由引理可知3.6 ：

$$L_{2k}^+ \circ \mathcal{P}(\frac{m+\tilde{\gamma}}{2}) = 0,$$

对每个 $\tilde{\gamma} \in \mathcal{I}^\gamma$。所需结果可通过反复应用变换律（3.24）得到:

$$4^{-k} L_{2k} \circ \rho^{-m+\gamma} = \rho^{-m+\gamma-2k} \circ L_{2k}^+. \tag{3.45}$$

□

4. Boundary operators on the Siegel domain

在本节中，我们引入与加权多重次次拉普拉斯算子相关的边界算子 L_{2k} ，该算子由 $\gamma \in (0,2)\backslash\mathbb{N}$确定。根据引理 3.6， L_{2k} 的核包含泊松方程（3.2）对任意$\tilde{\gamma} \in \mathcal{I}^\gamma$的解。我们的边界算子旨在提取方程（$F(\cdot,\ 0$）和 $G(\cdot,\ 0$）的解函数。它们还导出了形式自伴的边值问题。为此，引入以下空间将更为方便:

$$\mathcal{C}^{2\gamma} = C^\infty_{\text{even}}(\overline{\Omega}_{n+1}) + \rho^{2[\gamma]} C^\infty_{\text{even}}(\overline{\Omega}_{n+1})$$

与给定的 $\gamma \in (0,m)\backslash\mathbb{N}$ 相关联，其中 C^∞_{even} 表示 Ω_{n+1} 上的光滑函数空间，这些函数在 $\rho = 0$ 处关于 ρ 的泰勒级数展开仅包含偶次项。注意，

(1) 若 $\gamma \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}_0$，则 $\mathcal{C}^{2\gamma} = C^\infty(\overline{\Omega}_{n+1})$；且 (2) 对任意 $\tilde{\gamma} \in \mathcal{I}^\gamma$，均有 $\mathcal{P}\left(\frac{m+\tilde{\gamma}}{2}\right)$: $C^\infty(\mathbb{H}^n) \cap S^{\tilde{\gamma},\ 2}(\mathbb{H}^n) \to \mathcal{C}^{2\gamma}$。

第二点意味着，空间 $\mathcal{C}^{2\gamma}$ 非常适合研究由复双曲

多重泊松算子 L_{2k}^{+} 的各因子所形成的所有散射问题。令 $\iota^*:\mathcal{C}^{2\gamma}\to C^\infty($ $\mathbb{H}^n)$ 表示限制算子 $\iota^*U=U|_{\mathbb{H}^n}$。我们的边界算子属于集合

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^{2\gamma}:=&\left\{B_{2j}^{2\gamma}:\mathcal{C}^{2\gamma}\to C^\infty(\mathbb{H}^n)|j\in[0,\lfloor\gamma\rfloor]\right\}\\&\cup\left\{B_{2[\gamma]+2j}^{2\gamma}:\mathcal{C}^{2\gamma}\to C^\infty(\mathbb{H}^n)|j\in[0,\lfloor\gamma\rfloor]\right\}\end{aligned}$$

定义如下:

定义 4.1. 令

$$\mathcal{R}:=\partial_\rho^2+(1-2[\gamma])\partial_\rho,\qquad \mathcal{T}:=\mathcal{R}+\rho^2\partial_t^2.$$

对于 $\gamma\in(0,1)$，我们定义相应的边界算子如下:

$$B_0^{2\gamma}=\iota^*,\quad B_{2\gamma}^{2\gamma}=-\iota^*\circ\rho^{1-2[\gamma]}\partial_\rho. \tag{4.1}$$

对于 $\gamma\in(1,2)$，我们定义相应的边界算子:

$$\begin{aligned}&B_0^{2\gamma}=\iota^*,\quad B_2^{2\gamma}=-\iota^*\circ\mathcal{T}+\frac{1-[\gamma]}{[\gamma]}\Delta_b\circ B_0^{2\gamma},\\&B_{2[\gamma]}^{2\gamma}=-\iota^*\circ\rho^{1-2[\gamma]}\partial_\rho,\quad B_{2\gamma}^{2\gamma}=\iota^*\circ\rho^{1-2[\gamma]}\partial_\rho\mathcal{T}-\frac{1+[\gamma]}{[\gamma]}\Delta_b\circ B_{2[\gamma]}^{2\gamma}.\end{aligned} \tag{4.2}$$

本节的第一个目标是证明，边界算子$\mathcal{B}^{2\gamma}$与提取泊松方程 $\mathcal{P}\left(\frac{m+\tilde\gamma}{2}\right)$ 的解在任意 $\tilde\gamma\in\mathcal{I}^\gamma$处的狄利克雷数据 $F(\cdot,0)$和诺伊曼数据 $G(\cdot,0)$有关。这将通过以下两个命题来实现。

命题 4.2. 设 $\gamma\in(0,2)\backslash\mathbb{N}$。设 $V=\rho^{-m+\gamma}\mathcal{P}\left(\frac{m+\gamma}{2}\right)(f)$，其中 $f\in C^\infty(\mathbb{H}^n)$ $\cap S^{\gamma,\ 2}(\mathbb{H}^n)$。则有

$$B_0^{2\gamma}(V)=2^{\frac{\gamma-m}{2}}f, \tag{4.3}$$

$$B_{2\gamma}^{2\gamma}(V)=(-1)^{\lfloor\gamma\rfloor+1}2^{-\frac{m+\gamma}{2}}2^{2\lfloor\gamma\rfloor+1}\lfloor\gamma\rfloor!\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma([\gamma])}\hat f \tag{4.4}$$

其中 $\hat{}\ f=\mathcal{S}(s)f$，且 $s=\frac{m+\gamma}{2}$。此外，对于所有 $B_{2\alpha}^{2\gamma}\in$ $\mathcal{B}^{2\gamma}\backslash\{B_0^{2\gamma},B_{2\gamma}^{2\gamma}\}$，$B_{2\alpha}^{2\gamma}(V)=0$。

证明。首先，注意到

$$\mathcal{R}(\rho^{2j})=4j(j-[\gamma])\rho^{2j-2},\qquad \mathcal{R}(\rho^{2[\gamma]+2j})=4j(j+[\gamma])\rho^{2[\gamma]+2j-2}. \tag{4.5}$$

由（3.2），可得

$$V=\rho^{-m+\gamma}\mathcal{P}\left(\frac{m+\gamma}{2}\right)f=\left(\frac12\right)^{\frac{m-\gamma}{2}}F+\left(\frac12\right)^{\frac{m+\gamma}{2}}\rho^{2\gamma}G, \tag{4.6}$$

其中根据命题3.1,

$$F=\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{\Gamma(1-\gamma)}{2^l l!\Gamma(l+1-\gamma)}\rho^{2l}P_l^s(f),$$

and

$$G=\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{\Gamma(1+\gamma)}{2^l l!\Gamma(l+1+\gamma)}\rho^{2l}G_l^s(\hat{f}).$$

我们将证明分为两种情形:

首先考虑 $B_{2l}^{2\gamma}$ 对于 $l\in[0,\lfloor\gamma\rfloor]$。根据 $B_0^{2\gamma}$ 的定义，我们知道（4.3）成立。当 $\gamma\in(1,2)$ 且 $l=1$ 时，利用（4.3）和（3.18），我们计算得到

$$B_2^{2\gamma}(V)=-2^{\frac{\gamma-m}{2}}2\frac{\Gamma(2-[\gamma])}{\Gamma(1-[\gamma])}f_1-\frac{\Gamma(2-[\gamma])\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-[\gamma])\Gamma(2-\gamma)}\Delta_b\circ B_0^{2\gamma}(V)=0. \tag{4.7}$$

接下来考虑 $B_{2[\gamma]+2l}^{2\gamma}$ 对于 $l\in[0,\lfloor\gamma\rfloor]$。注意，由（4.5）和（4.6）可立即推出

$$B_{2\gamma}^{2\gamma}(V)=-2^{-\frac{m+\gamma}{2}}2\gamma\hat{f},\quad \gamma\in(0,1); \tag{4.8}$$

即，式（4.4）成立。当 $\gamma\in(1,2)$ 时，根据 $B_{2[\gamma]+2l}^{2\gamma}$的定义，我们立即得到 $B_{2[\gamma]}^{2\gamma}(V)=0$。此外，我们计算得

$$B_{2\gamma}^{2\gamma}(V)=2^{-\frac{m+\gamma}{2}}2^3\frac{\Gamma([\gamma]+2)}{\Gamma([\gamma])}g_0; \tag{4.9}$$

即，式（4.4）成立。 □

命题 4.3. 设 $\gamma\in(1,2)$。设 $\tilde{V}=\rho^{-m+\gamma}\mathcal{P}\left(\frac{m+\tilde{\gamma}}{2}\right)\tilde{f}$对于某个$\tilde{f}\in C^\infty(\mathbb{H}^n)\cap S^{\tilde{\gamma},\,2}(\mathbb{H}^n)$。则有

$$B_{2[\gamma]}^{2\gamma}(\tilde{V})=-2^{\frac{\tilde{\gamma}-m}{2}}2[\gamma]\tilde{f} \tag{4.10}$$

$$B_2^{2\gamma}(\tilde{V})=-2^{-\frac{m+\tilde{\gamma}}{2}}4(1-[\gamma])\hat{\tilde{f}}, \tag{4.11}$$

其中 $\tilde{f}=\mathcal{S}(\tilde{s})\tilde{f}$满足 $\tilde{s}=\frac{m+\tilde{\gamma}}{2}$, $\tilde{\gamma}=1-[\gamma]$。此外，$B_{2\alpha}^{2\gamma}(V)=0$ 对所有$B_{2\alpha}^{2\gamma}\in\mathcal{B}^{2\gamma}\backslash\{B_{2[\gamma]}^{2\gamma},B_2^{2\gamma}\}$均成立。

证明。由（3.2）可得

$$\tilde{V}=\rho^{-m+\gamma}\mathcal{P}\left(\frac{m+\tilde{\gamma}}{2}\right)f=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m-\tilde{\gamma}}{2}}\rho^{2[\gamma]}\tilde{F}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m+\tilde{\gamma}}{2}}\rho^2\tilde{G} \tag{4.12}$$

其中根据命题3.1,

$$\tilde{F} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{\Gamma(1-\tilde{\gamma})}{2^l l! \Gamma(l+1-\tilde{\gamma})} \rho^{2l} P_l^{\tilde{s}}(\tilde{f}), \tag{4.13}$$

and

$$\tilde{G} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{\Gamma(1+\tilde{\gamma})}{2^l l! \Gamma(l+1+\tilde{\gamma})} \rho^{2l} G_l^{\tilde{s}}(\hat{\tilde{f}}).$$

利用（4.5）、（4.12）和定义 4.1，通过直接计算即可得到所需结果。□

注 4.4. 我们的边界算子旨在提取方程 (3.2) 的解在 $\cdot = 0$ 处的函数 $F(\cdot, 0)$ 和 $G(\cdot, 0)$。为了保证 $B_{2l}^{2\gamma}(V) = 0$for $l > j$ （更多细节参见 [Cas20, 命题 3. 2] for），我们需要通过将 $B_{2j}^{2\gamma}$ 与 $P_{l-j}^{s} = (-\overline{\Delta})^{l-j}$ 复合来实现消去，因为 $\iota^* \circ T^l$ 的输出恰好为 f_{l-j}。然而，在 CR 情形下，项 $\rho^2 \partial_t^2$ 的存在会影响首项 $\iota^* \circ \mathcal{T}^l$ 和 $\iota^* \circ \rho^{1-2[\gamma]} \partial_\rho \mathcal{T}^l$, $l \geqslant 2$ 的输出，这意味着待复合的算子不再是 P_{l-j}^{s}。

Let

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{2\gamma}(U,V) &:= -\int_{\Omega_{n+1}} U L_2 V \rho^{1-2\gamma} dz dt d\rho + \oint_{\mathbb{H}^n} B_0^{2\gamma}(U) B_{2\gamma}^{2\gamma}(V) dz dt, \\
\mathcal{Q}_{2\gamma}(U,V) &:= \int_{\Omega_{n+1}} U L_4 V \rho^{1-2[\gamma]} dz dt d\rho \\
&\quad + \oint_{\mathbb{H}^n} B_0^{2\gamma}(U) B_{2\gamma}^{2\gamma}(V) dz dt - \oint_{\mathbb{H}^n} B_{2[\gamma]}^{2\gamma}(U) B_2^{2\gamma}(V) dz dt
\end{aligned} \tag{4.14}$$

分别为由 $\gamma \in (0,1)$ 和 $\gamma \in (1,2)$ 确定的相应狄利克雷能量。本节的第二个目标是证明 $\mathcal{Q}_{2\gamma}$ 是对称的。这意味着涉及 L_{2k} 和 $\mathcal{B}^{2\gamma}$ 的边值问题是变分的。证明 $\mathcal{Q}_{2\gamma}$ 对称，本质上就是在具有平坦度量的 Siegel 域 Ω_{n+1} 上进行分部积分。为此，将 $\iota^* \circ L_{[\gamma]}$ 和 $\iota^* \circ \rho^{1-2[\gamma]} \partial_\rho L_{[\gamma]}$ 表示为边界算子的形式会很有用。

命题 4.5. 对于 $\gamma \in (1,2)$，有老熟妇

$$\begin{aligned}
\iota^* = B_0^{2\gamma}, \quad \iota^* \circ L_{[\gamma]} &= -B_2^{2\gamma} + \frac{1}{[\gamma]} \Delta_b \circ B_0^{2\gamma}, \\
\iota^* \circ \rho^{1-2[\gamma]} \partial_\rho = -B_{2[\gamma]}^{2\gamma}, \quad \iota^* \circ \rho^{1-2[\gamma]} \partial_\rho L_{[\gamma]} &= B_{2\gamma}^{2\gamma} + \frac{1}{[\gamma]} \Delta_b \circ B_{2[\gamma]}^{2\gamma}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

证明。注意到

$$\iota^* \circ L_{[\gamma]} = \iota^* \circ (\mathcal{T} + \Delta_b) = \iota^* \circ \mathcal{T} + \iota^* \circ \Delta_b = \iota^* \circ \mathcal{T} + \Delta_b \circ \iota^*. \tag{4.16}$$

于是，4.15）可直接由定义4.1 得出。□

现在，我们通过给出 $\mathcal{Q}_{2\gamma}$ 的显式公式，证明 $\mathcal{Q}_{2\gamma}$ 是对称的。该公式尤其值得注意之处在于，边界积分仅涉及狄利克雷数据

$$\mathcal{B}_D^{2\gamma} := \left\{ B_{2\alpha}^{2\gamma} \in \mathcal{B}^{2\gamma} | 0 \leqslant \alpha < \gamma/2 \right\}$$

输入的。

定理 4.6。给定 $\gamma \in (0,1)$，我们有

(4.17)
$$\mathcal{Q}_{2\gamma}(U,V) = \int_{\Omega_{n+1}} \left(\partial_\rho U \partial_\rho V + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} X_j(U) X_j(V) + Y_j(U) Y_j(V) + \rho^2 \partial_t U \partial_t V \right) \rho^{1-2\gamma} dz dt d\rho.$$

同样，给定 $\gamma \in (1,2)$，我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{2\gamma}(U,V) = & \int_{\Omega_{n+1}} \left(L_{[\gamma]}(U) L_{[\gamma]}(V) - T(U)T(V) \right) \rho^{1-2[\gamma]} dz dt d\rho \\ & - \frac{1}{[\gamma]} \oint_{\mathbb{H}^n} \Delta_b \left(B_0^{2\gamma}(U) B_{2[\gamma]}^{2\gamma}(V) + B_{2[\gamma]}^{2\gamma}(U) B_0^{2\gamma}(V) \right) dz dt \end{aligned} \tag{4.18}$$

证明。给定 $\gamma \in (0,1)$，在具有平坦度量的 Siegel 域 Ω_{n+1} 上应用分部积分，我们得到

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_{n+1}} U \left(\partial_\rho^2 + (1-2\gamma) \rho^{-1} \partial_\rho \right) V \rho^{1-2\gamma} dz dt d\rho \\ & = \int_{\Omega_{n+1}} \partial_\rho U \partial_\rho V \rho^{1-2\gamma} dz dt d\rho - \oint_{\mathbb{H}^n} B_0^{2\gamma}(U) B_{2\gamma}^{2\gamma}(V) dz dt. \end{aligned} \tag{4.19}$$

(4.20)
$$- \int_{\Omega_{n+1}} U \Delta_b V \rho^{1-2\gamma} dz dt d\rho = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{n+1}} \sum_{j=1}^{n} X_j(U) X_j(V) + Y_j(U) Y_j(V) \rho^{1-2\gamma} dz dt d\rho.$$

$$- \int_{\Omega_{n+1}} U \rho^2 \partial_t^2 V \rho^{1-2\gamma} dz dt d\rho = \int_{\Omega_{n+1}} \rho^2 \partial_t U \partial_t V \rho^{1-2\gamma} dz dt d\rho. \tag{4.21}$$

结合（4.19）、（4.20）和（4.21）可得（4.17）。

类似地，给定 $\gamma \in (1,2)$，根据引理 3.5，我们知道 $L_4 = L_{[\gamma]}^2 + T^2$。注意， $L_{[\gamma]}$ 关于加权测度形式上是自伴的

$\rho^{1-2[\gamma]}dzdtd\rho$. 通过分部积分，我们有：

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{n+1}} UL^2_{[\gamma]}(V)\rho^{1-2[\gamma]}dzdtd\rho &= \int_{\Omega_{n+1}} L_{[\gamma]}(U)L_{[\gamma]}(V)\rho^{1-2[\gamma]}dzdtd\rho \\ &+ \oint_{\mathbb{H}^n} B_0^{2\gamma}(U)B^{2\gamma}_{2[\gamma]}(L_{[\gamma]}V)dzdt - \oint_{\mathbb{H}^n} B^{2\gamma}_{2[\gamma]}(U)B_0^{2\gamma}(L_{[\gamma]}V)dzdt, \\ \int_{\Omega_{n+1}} UT^2(V)\rho^{1-2[\gamma]}dzdtd\rho &= -\int_{\Omega_{n+1}} T(U)T(V)\rho^{1-2[\gamma]}dzdtd\rho.\end{aligned} \tag{4.22}$$

由命题 4.5，我们知道

$$\begin{aligned}B_0^{2\gamma}\circ L_{[\gamma]} &= -B_2^{2\gamma} + \frac{1}{[\gamma]}\Delta_b \circ B_0^{2\gamma}, \\ B^{2\gamma}_{2[\gamma]}\circ L_{[\gamma]} &= -B^{2\gamma}_{2\gamma} - \frac{1}{[\gamma]}\Delta_b \circ B^{2\gamma}_{2[\gamma]}.\end{aligned} \tag{4.23}$$

将（4.23）代入（4.22）得到（4.18）。 □

5. The generalized extension problem

本节的主要结果是，狄利克雷边值问题的解

$$\begin{cases} L_2 V = 0, & \text{on } \Omega_{n+1}, \quad \gamma \in (0,1), \\ B_0^{2\gamma}(V) = \phi, & \text{on } \mathbb{H}^n, \end{cases} \tag{5.1}$$

and

$$\begin{cases} L_4 V = 0, & \text{on } \Omega_{n+1}, \quad \gamma \in (1,2), \\ B_0^{2\gamma}(V) = \phi, & \text{on } \mathbb{H}^n, \\ B^{2\gamma}_{2[\gamma]}(V) = \psi, & \text{on } \mathbb{H}^n, \end{cases} \tag{5.2}$$

可用于恢复 CR 分数阶 GJMS 算子。为此，我们首先刻画（5.1）和（5.2）的解。

定理 5.1。 设 $\gamma \in (0,1)$。给定函数 $\phi \in C^\infty(\mathbb{H}^n) \cap S^{\gamma,2}(\mathbb{H}^n)$，存在唯一的解 V （*5.1*）。事实上，

$$V = 2^{-\frac{\gamma-m}{2}}\rho^{-m+\gamma}\mathcal{P}\left(\frac{m+\gamma}{2}\right)\phi. \tag{5.3}$$

证明。 由引理3.6 和命题 4.2 可知， V满足（5.1）。唯一性源于以下事实：$\mathcal{Q}_{2\gamma}(W, W) \geqslant 0$当且仅当 $W = 0$时等号成立。□

定理 5.2。 设 $\gamma \in (1,2)$。给定 $\phi \in C^\infty(\mathbb{H}^n) \cap S^{\gamma,\,2}(\mathbb{H}^n)$ 和 $\psi \in C^\infty(\mathbb{H}^n) \cap S^{1-[\gamma],\,2}(\mathbb{H}^n)$，存在唯一的解 V，满足（*5.2*）。事实上，

$$V = 2^{-\frac{\gamma-m}{2}}\rho^{-m+\gamma}\mathcal{P}\left(\frac{m+\gamma}{2}\right)\phi - 2^{-\frac{\tilde{\gamma}-m}{2}}\frac{1}{2[\gamma]}\rho^{-m+\gamma}\mathcal{P}\left(\frac{m+1-[\gamma]}{2}\right)\psi, \tag{5.4}$$

其中 $\tilde{\gamma}=1-[\gamma]$。

证明。 由引理3.6 和命题 4.3 可知 V 满足 (5.2)。现在假设 U 是 (5.2) 的一个解。那么 $W:=U-V$ 是解

$$\text{(5.5)}\qquad \begin{cases} L_4 W=0, & \text{on } \Omega_{n+1}, \quad \gamma\in(1,2),\\ B_0^{2\gamma}(W)=0, & \text{on } \mathbb{H}^n,\\ B_{2[\gamma]}^{2\gamma}(W)=0, & \text{on } \mathbb{H}^n. \end{cases}$$

由定理 4.6 以及 [LY22，定理 1。5], 我们知道

$$\mathcal{Q}_{2\gamma}(W,W)=\int_{\Omega_{n+1}}\left(L_{[\gamma]}(W)L_{[\gamma]}(W)-T(W)T(W)\right)\rho^{1-2[\gamma]}dzdtd\rho\geqslant 0,$$

当且仅当 $W=0$ 时等号成立。因此， $U=V$。 □

现在我们给出广义的延拓问题。事实上，下面的结果表明，无需完全指定狄利克雷数据，即可确定 CR 分数阶 GJMS 算子。

定理 5.3。 （1）给定 $\gamma\in$ （0，1），假设 V 是（*5.1*）的一个解。则有

$$B_{2\gamma}^{2\gamma}(V)=2^{1-2\gamma}\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\gamma)}P_\gamma^\theta\phi.$$

(2) 给定 $\gamma\in(1,2)$， $\tilde{\gamma}=1-[\gamma]$，假设 V是方程（*5.2*）的一个解。则有

$$B_2^{2\gamma}(V)=2^{1-2\tilde{\gamma}}\frac{\tilde{\gamma}}{1-\tilde{\gamma}}\frac{\Gamma(-\tilde{\gamma})}{\Gamma(\tilde{\gamma})}P_{\tilde{\gamma}}^\theta\psi,$$
$$B_{2\gamma}^{2\gamma}(V)=2^{3-2\gamma}\frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(\gamma)}P_\gamma^\theta\phi.$$

证明。 这可直接由（3.3）、命题 4.2、命题 4.3、定理 5.1和定理 5.2 得出。 □

6. The sharp CR trace Sobolev inequalities

本节旨在利用边界算子证明 CR 尖锐 Sobolev 迹不等式。其中一项关键工具是狄利克雷能量。

$$\mathcal{E}_{2\gamma}(U):=\mathcal{Q}_{2\gamma}(U,U),$$

其中 $\mathcal{Q}_{2\gamma}$ 由（4.14）给出。我们的第一个结果是关于（5.1）和（5.2）的解的狄利克雷原理。

定理 6.1. 若 $\gamma \in (0,1)$，固定函数 $\phi \in C^\infty(\mathbb{H}^n) \cap S^{\gamma,2}(\mathbb{H}^n)$，并记

$$\mathcal{C}_D^{2\gamma} := \left\{ U \in \mathcal{C}^{2\gamma} \mid B_0^{2\gamma}(U) = \phi \right\}$$

此外，若 $\gamma \in (1,2)$，则固定函数 $\phi \in C^\infty(\mathbb{H}^n) \cap S^{\gamma,2}(\mathbb{H}^n)$，以及 $\psi \in C^\infty(\mathbb{H}^n) \cap S^{1-[\gamma],2}(\mathbb{H}^n)$，并记

$$\mathcal{C}_D^{2\gamma} := \left\{ U \in \mathcal{C}^{2\gamma} \mid B_0^{2\gamma}(U) = \phi, \ \textit{and}\ B_{2[\gamma]}^{2\gamma}(U) = \psi \right\}.$$

则有

$$\mathcal{E}_{2\gamma}(U) \geq \mathcal{E}_{2\gamma}(U_D)$$

对所有 $U \in \mathcal{C}_D^{2\gamma}$，其中 $U_D \in \mathcal{C}_D^{2\gamma}$ 是 (5.1) 和 (5.2)的唯一解。

证明。对于 $\gamma \in (0,1)$，固定一个元素 $U_0 \in \mathcal{C}_D^{2\gamma}$ 并令

$$\mathcal{C}_0^{2\gamma} = \left\{ U \in \mathcal{C}^{2\gamma} \mid B_0^{2\gamma}(U) = 0, \text{ and } B_{2[\gamma]}^{2\gamma}(U) = 0 \right\}.$$

注意到

$$\mathcal{C}_D^{2\gamma} = U_0 + \mathcal{C}_0^{2\gamma}$$

设 $V \in \mathcal{C}_0^{2\gamma}$。由（4.14）和定理 4.6 可得

$$\mathcal{E}_{2\gamma}(V) := -\int_{\Omega_{n+1}} UL_2 V \rho^{1-2\gamma} dz dt d\rho, \quad \gamma \in (0,1),$$

$$\mathcal{E}_{2\gamma}(V) := \int_{\Omega_{n+1}} UL_4 V \rho^{1-2[\gamma]} dz dt d\rho, \quad \gamma \in (1,2),$$

并且

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_{2\gamma}(U+tV) = 2\mathcal{E}_{2\gamma}(V) \geq 0.$$

此外，根据 [LY22，定理 1。5], 等号成立当且仅当 $V \equiv 0$，因此 $\mathcal{E}_{2\gamma}$ 在 $\mathcal{C}_D^{2\gamma}$ 上严格凸。由于 (5.1) 和 (5.2) 的解 $U_D \in \mathcal{C}_D^{2\gamma}$ 是 $\mathcal{E}_{2\gamma} : \mathcal{C}_D^{2\gamma} \to \mathbb{R}$的一个临界点，结论得证。□

通过利用定理 $\mathcal{E}_{2\gamma}(U)$ 进行求值，并结合定理5.3 可得以下推论，该推论为相应的嵌入给出了一个尖锐 Sobolev 迹不等式。

推论 6.2。设 $\gamma \in (0,1)$。那么

$$\mathcal{E}_{2\gamma}(U) \geqslant 2^{1-2\gamma} \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\gamma)} \fint_{\mathbb{H}^n} \phi P_\gamma^\theta \phi dz dt, \tag{6.1}$$

对所有 $U \in \mathcal{C}_D^{2\gamma}$，其中 $\phi = B_0^{2\gamma}(U)$。此外，当且仅当U 是以下方程的解 (5.1)。

证明。 设 $\mathcal{C}_D^{2\gamma} = U + \mathcal{C}_0^{2\gamma}$。由定理 6.1 可知，存在唯一的极小化子 U_D属于 $\mathcal{E}_{2\gamma}$： $\mathcal{C}_D^{2\gamma} \to \mathbb{R}$。由于 U_D 满足（5.1），由定理 5.3 可推得

$$\mathcal{E}_{2\gamma}(U_D) = 2^{1-2\gamma}\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\oint_{\mathbb{H}^n}\phi P_\gamma^\theta \phi dzdt.$$

结论很容易得出。 □

注意，推论 6.2 恢复了 [FdMGMT15] 中的主要结果。类似地，我们有以下推论。

推论 6.3。设 $\gamma \in (1,2)$、 $\tilde{\gamma} = 1 - [\gamma]$。那么

$$\mathcal{E}_{2\gamma}(U) \geq 2^{1-2\tilde{\gamma}}\frac{\tilde{\gamma}}{1-\tilde{\gamma}}\frac{\Gamma(-\tilde{\gamma})}{\Gamma(\tilde{\gamma})}\oint_{\mathbb{H}^n}\psi P_{\tilde{\gamma}}^\theta \psi dzdt + 2^{3-2\gamma}\frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\oint_{\mathbb{H}^n}\phi P_\gamma^\theta \phi dzdt,$$

对所有 $U \in \mathcal{C}_D^{2\gamma}$，其中

$$\psi = B_{2[\gamma]}^{2\gamma}(U), \quad \phi = B_0^{2\gamma}(U).$$

此外，当且仅当 U 是下列方程的解(5.2)。

结合推论 6.2 和推论 6.3 以及 $\mathbb{H}^n$ [FL12] 上的尖锐 Sobolev 不等式，我们得到以下不等式

推论 6.4. 我们用 $C_{n,2\gamma}$ 表示 CR Sobolev 不等式中的最佳常数。

$$\left(\int_{\mathbb{H}^n}|f|^p dzdt\right)^{\frac{2}{p}} \leqslant C_{n,2\gamma}\int_{\mathbb{H}^n}\bar{f}P_\gamma^\theta(f)dzdt, \quad p = \frac{2m}{m-\gamma}. \tag{6.2}$$

(1) 设 $\gamma \in (0,1)$。娱乐主管

$$\mathcal{E}_{2\gamma}(U) \geq 2^{1-2\gamma}\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\gamma)}C_{n,2\gamma}^{-1}\left(\oint_{\mathbb{H}^n}|\phi|^{\frac{2m}{m-\gamma}}dzdt\right)^{\frac{m-\gamma}{m}}, \tag{6.3}$$

对所有 $U \in \mathcal{C}_D^{2\gamma}$，其中 $\phi = B_0^{2\gamma}(U)$。此外，当且仅当 U 是方程 (5.1) 的解且

$$\phi(z,t) = C\left(\frac{1}{(1+|z|^2)^2+t^2}\right)^{\frac{m-\gamma}{2}}$$

对于某个 $C \in \mathbb{C}$，并且除去 $\mathbb{H}^n$ 上的 CR 自同构之外。

(2) 设 $\gamma \in (1,2)$、 $\tilde{\gamma} = 1 - [\gamma]$。则

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{2\gamma}(U) \geq & 2^{1-2\tilde{\gamma}}\frac{\tilde{\gamma}}{1-\tilde{\gamma}}\frac{\Gamma(-\tilde{\gamma})}{\Gamma(\tilde{\gamma})}C_{n,2\tilde{\gamma}}^{-1}\left(\oint_{\mathbb{H}^n}|\phi|^{\frac{2m}{m-\tilde{\gamma}}}dzdt\right)^{\frac{m-\tilde{\gamma}}{m}} \\ & + 2^{3-2\gamma}\frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(\gamma)}C_{n,2\gamma}^{-1}\left(\oint_{\mathbb{H}^n}|\phi|^{\frac{2m}{m-\gamma}}dzdt\right)^{\frac{m-\gamma}{m}},\end{aligned}$$

对所有 $U \in \mathcal{C}_D^{2\gamma}$，其中

$$\psi = B_{2[\gamma]}^{2\gamma}(U), \quad \phi = B_0^{2\gamma}(U).$$

此外，当且仅当 U 是(5.2)的解

$$\psi(z,t) = C_1 \left(\frac{1}{(1+|z|^2)^2 + t^2} \right)^{\frac{m-\tilde{\gamma}}{2}},$$
$$\phi(z,t) = C_2 \left(\frac{1}{(1+|z|^2)^2 + t^2} \right)^{\frac{m-\gamma}{2}}$$

对于某些 C_1、$C_2 \in \mathbb{C}$，并且在 $\mathbb{H}^n$ 上相差一个 CR 自同构。

References

[AC17] Antonio G. Ache 和 Sun-Yung Alice Chang。四阶Sobolev迹不等式。 *Duke Math. J.*, 166(14):2719–2748, 2017. [BFM13] Thomas P. Branson、Luigi Fontana 和 Carlo Morpurgo。CR 球面上的 Moser-Trudinger 和 Beckner-Onofri 不等式。 *Ann. of Math. (2)*, 177 1 1 52, 2013 ( ): – . [Cas20] Jeffrey S. Case。尖锐加权Sobolev迹不等式与拉普拉斯算子的分数次幂。 *J. Funct. Anal.*, 279(4):108567, 33, 2020. [CS07] Luis Caffarelli 和 Luis Silvestre。一个与分数阶拉普拉斯算子相关的延拓问题。 *Comm. Partial Differential Equations*, 32(7-9):1245– 1260, 2007. [EMM91] C. L. Epstein、R. B. Melrose 和 G. A. Mendoza。严格伪凸域上拉普拉斯算子的预解算子。 *Acta Math.*, 167(1-2):1–106, 1991. [FdMGMT15] Rupert L. Frank、Mar´ıa del Mar Gonz´alez、Dario D. Monticelli 和 Jing- gang Tan。CR分数阶拉普拉斯算子的一个延拓问题。 *in Mathematics* 270 97 137, 2015 *Advances* , : – . [

FL12] Rupert L. Frank 和 Elliott H. Lieb。海森堡群上若干不等式中的最佳常数。 *Ann. of Math. (2)*, 176(1):349–381, 2012. [GSB08] Colin Guillarmou 和 Antˆonio S´a Barreto。ACH流形上的散射与逆散射。 *J. Reine Angew. Math.*, 622:1–55, 2008. [HPT08] Peter D. Hislop、Peter A. Perry 和 Siu-Hung Tang。带边界复流形的CR不变量与散射算子。 *Anal. PDE*, 1 2 197 227, 2008 ( ): – . [Lie83] Elliott H. Lieb。 Hardy-Littlewood-Sobolev不等式及相关不等式中的最佳常数。 *Ann. of Math. (2)*, 118(2):349–374, 1983. [LY22] Guozhen Lu 和 Qiaohua Yang。Siegel域和复双曲空间上的尖锐Hardy-Sobolev-Maz'ya不等式、Adams不等式和Hardy-Adams不等式。 *Advances in Mathematics*, 405:108512, 2022. [Yan19] Qiaohua Yang。高阶导数的尖锐Sobolev迹不等式。*arXiv: Differential Geometry*, 2019.

Department of Mathematics, University of California, Santa Barbara, 552 University Rd Isla Vista , , CA 93117.

Email address: gunhee.cho@math.ucsb.edu

Department of Mathematics, Penn State University, University Park, PA 16802, USA

Email address: zxy5156@psu.edu