arXiv:2304.06878v1 [math.MG] 14 Apr 2023

# 度量测度空间空间的拓扑方面

DAISUKE KAZUKAWA、HIROKI NAKAJIMA 和 TAKASHI SHIOYA

Abstract. 格罗莫夫在度量测度空间同构类构成的空间上引入了两种距离函数：盒距离和可观测距离，并建立了度量测度空间的收敛理论。为深入理解收敛理论，我们研究了赋予这些距离函数的空间的若干拓扑性质。

## 1. Introduction

度量测度空间的收敛研究是度量测度空间几何分析中的核心课题之一。这项研究源自黎曼流形的格罗莫夫-豪斯多夫收敛与塌缩理论；该理论已得到广泛发展，并应用于几何与拓扑中的许多重要问题。

格罗莫夫引入了两种基本的距离函数：盒距离函数 $\square$ 和可观测距离函数 $d_{\mathrm{conc}}$，定义在集合（记作 $\mathcal{X}$）上，该集合由度量测度空间的同构类构成；他在[11, 第3章$\frac{1}{2}_+$]中发展了其独特理论。盒距离函数较为简单，且接近于测度格罗莫夫-豪斯多夫收敛的一种度量化。此外，该距离等价于 Greven-Pfaffelhuber-Winter 引入的 Gromov-Prokhorov 距离 [9]（见 [19]）。这些距离函数所定义的拓扑与收敛概念得到了广泛应用，例如[10, 25]。另一方面，可观测距离函数诱导出一种极具特色的拓扑，称为集中拓扑，它以 L´evy [18] 和 V. Milman 提出的测度集中现象为基础 [21]（另见[17]）。集中拓扑善于捕捉空间的高维特征，并允许维数无界的许多序列收敛。近年来，对集中拓扑的研究日益深入。

我们重点研究度量测度空间 $\mathcal{X}$ 关于这些距离函数 $\square$ 和 $d_{\mathrm{conc}}$ 的拓扑方面。集中拓扑比由盒距离诱导的拓扑更粗糙，本文将后者简称为盒拓扑。作为基本性质，已知空间 $(\mathcal{X}, \square)$ 是可分、完备且非紧的，而 $(\mathcal{X}, d_{\mathrm{conc}})$ 同样是可分的，但并不完备。然而，其他拓扑性质尚未得到研究。本文将探讨若干拓扑性质，以期深入理解收敛理论。

此外，格罗莫夫还同时引入了一种自然的紧化，记作 $\Pi$，它是针对 $\mathcal{X}$ 关于集中拓扑而言的，也是研究集中拓扑的有力工具之一。这种紧化的拓扑称为弱拓扑，而 $\Pi$ 中的每个元素都称为一个金字塔（这一名称源自其定义）。金字塔空间 $\Pi$ 本身也值得研究，因为其中包含许多无限维对象，例如（虚拟的）无限维高斯空间。我们还研究了

日期：2023年4月13日。2020年数学主题分类。主要分类 53C23，次要分类 54B20、54E35。关键词和短语。度量测度空间、盒距离、集中拓扑、金字塔、弱拓扑、超空间。本研究得到 JSPS KAKENHI 资助，资助编号为 JP22K20338、JP22K13908、JP19K03459。1

上的弱拓扑 $\Pi$。不仅 $\Pi$ 是紧的，而且第三位作者已经证明 $\Pi$ 是可度量化的[24]。

关于紧致性。我们研究了 $\mathcal{X}$ 关于紧致性的一些性质。就这两种拓扑而言，空间 $\mathcal{X}$整体上是非紧的，而且局部也非紧。

定理 1.1. 对于盒拓扑和集中拓扑，任意度量测度空间都没有紧邻域。特别地，$\mathcal{X}$ 在这两种拓扑下都不是局部紧的。

对于盒拓扑，定理 1.1 通过贝尔纲定理可知（$\mathcal{X}$，$\square$）是贝尔空间，因此可将以下事实作为推论得到。

推论 1.2. 对于盒拓扑，$\mathcal{X}$ 不是 $\sigma$-紧的。

另一方面，由于（$\mathcal{X}$，$d_{\mathrm{conc}}$）不完备，因此上述论证不适用于集中拓扑。事实上，我们得到了一个新结论：集中拓扑是非贝尔的。

定理 1.3。对于集中拓扑，$\mathcal{X}$ 不是贝尔空间。特别地，$\mathcal{X}$ 不是完全可度量化的。

在[1, 问题 9.1], 中，提出了 Gromov-Hausdorff 空间是否同胚于空间 $l^2$。对于 ($\mathcal{X}$, $d_{\mathrm{conc}}$) 中类似问题的答案是否定的，因为 $l^2$ 是一个贝尔空间。

关于连通性。接下来，我们将研究 $\mathcal{X}$ 和 $\Pi$ 在连通性方面的一些性质。下面的定理作为一项全局性质是显而易见的。

定理 1.4. 对于盒拓扑和集中拓扑，$\mathcal{X}$ 是可缩的。此外，$\Pi$ 在弱拓扑中是可缩的。特别地，它们全都是道路连通且单连通的。

该定理通过构造显式的形变收缩来证明。另一方面，局部性质并不明确，也难以证明。对于盒拓扑，我们可以针对度量 $\square$，在两个度量测度空间之间得到一条测地线。这是本文最重要的结果之一。

定理 1.5. 对于盒距离函数，$\mathcal{X}$ 是一个测地空间。特别地，$\mathcal{X}$ 在盒拓扑下是局部道路连通的。

测地线的存在不仅在拓扑上，而且在几何上也很重要且有用。此外，我们证明，任意两个不同的空间之间，相对于盒距离函数，都存在不可数多条测地线（见定理 6.4）。因此，任意测地线在处处都有分支，并且相对于盒距离函数，$\mathcal{X}$ 的 Alexandrov 曲率既无下界，也无上界。对于集中拓扑和弱拓扑，目前很难得到一条测地线，但可以证明局部道路连通性。

定理 1.6. $\mathcal{X}$ 在集中拓扑下和 $\Pi$ 在弱拓扑下都是局部道路连通的。

作为上述讨论的结果，我们还得到了关于弱拓扑的以下特征性推论。

推论 1.7. 对于弱拓扑，$\Pi$ 是一个 Peano 空间。也就是说，$\Pi$ 是单位区间的连续像。

拓扑 $\mathcal{X}$ 和 $\Pi$ 的拓扑性质总结如下表所示（见 Table 1） .

TABLE 1.

| | $(\mathcal{X}, \square)$ | $(\mathcal{X}, d_{\mathrm{conc}})$ | $(\Pi, \rho)$ |
|---|---|---|---|
| 紧 | No | No | Yes |
| 可分 | Yes | Yes | Yes |
| 完备† | Yes | No | Yes |
| 局部紧 | No* | No* | Yes |
| $\sigma$-紧 | No* | 未知 | Yes |
| 贝尔空间 | Yes | No* | Yes |
| 波兰空间 | Yes | No* | Yes |
| （整体）可缩 | Yes* | Yes* | Yes* |
| 局部道路连通 | Yes* | Yes* | Yes* |
| 测地空间† | Yes* | 未知 | 未知 |

* 表示本文中的新结果。

† 表示相对于标准度量的几何性质。

重新审视 $\Pi$ 上的弱拓扑。作为我们研究结果的一项应用，我们利用超空间理论对弱拓扑进行重新诠释。在这里，由拓扑空间 $X$ 的（闭）子集构成的拓扑空间称为 $X$ 上的超空间。$\Pi$ 中的金字塔最初被定义为满足特定条件的 $\mathcal{X}$ 的一个（$\square$-闭）子集。因此，关注它与超空间之间的关系是十分自然的。

设 $X$ 是一个豪斯多夫空间，$\mathcal{F}(X)$ 是 $X$ 的所有闭子集的集合。Kuratowski-Painlev´e 收敛和 $\mathcal{F}(X)$ 上的 Fell 拓扑已得到深入研究。Kuratowski-Painlev´e 收敛是拓扑的，当且仅当 $X$ 是局部紧的。这里，如果存在一种拓扑能够实现某个收敛，就称该收敛是拓扑的。此外，在这种情况下，Fell 拓扑实际上实现了 Kuratowski-Painlev´e 收敛。

现在我们考虑空间 $\mathcal{F}(\mathcal{X}, \square)$。根据定理 1.1，底空间 $(\mathcal{X}, \square)$ 不是局部紧的，因此在这种情况下，Kuratowski-Painlev´e 收敛不是拓扑的。然而，收敛弱于 Kuratowski-Painlev´e 收敛的最细拓扑总是存在的。这个拓扑记作 $\tau$K，称为 Kuratowski-Painlev´e 收敛的拓扑化。由超空间的一般理论可知，超空间 $(\mathcal{F}(\mathcal{X}, \square)\ \tau\mathrm{K})$ 是紧的、$T_1$且为序列空间（特别是，它是序列紧的）。注意，$\tau$K 严格细于 Fell 拓扑。由此我们得到一种新的诠释：空间 $\Pi$ 是紧超空间 $(\mathcal{F}(\mathcal{X}, \square)\ \tau\mathrm{K})$ 的子空间。

定理 1.8。包含映射 $\Pi \ni \mathcal{P} \mapsto \mathcal{P} \in (\mathcal{F}(\mathcal{X}, \square)\ \tau\mathrm{K})$ 是一个拓扑嵌入映射。

这表明，$\Pi$ 上的弱拓扑是由超空间 $\mathcal{F}(\mathcal{X}, \square)$诱导的一种自然的紧拓扑。

本文的组织结构如下。在第 2节中，我们介绍一些定义，并准备一些基本工具。熟悉这些内容的读者可以放心地跳过本节。在第 3节中，我们证明定理 1.1和推论 1.2。一项关键技术是通过 $l_p$-积构造给定空间附近的度量测度空间。在第 4节中，我们证明定理 1.3及其一些相关性质。一个关键工具是从单点空间出发的盒距离，它是 $\mathcal{X}$上的一个不变量。在第 5节中，我们通过度量变换构造显式的形变收缩，从而证明定理 1.4 。在第 6节中，我们证明定理 1.5。我们将证明，两个空间之间的中点由显式序列的极限给出

空间。在第7节中，我们证明定理1.6 和推论1.7。对于集中拓扑和弱拓扑，可以在一个小球内构造一条良好的连续路径，而不是测地线。在第8节中，我们证明定理1.8 并描述弱拓扑与超空间理论之间的关系。

继本文之后，我们还研究了 [15] 中度量测度空间上的尺度变换作用。在 [15], 中，我们发现了以下令人惊讶的事实。

- $\mathcal{X}$ 并不同胚于尺度变换作用的商空间上的锥。
- 该作用在 $\mathcal{X} \setminus \{*\}$ 上诱导出一个非平凡且局部平凡的主丛结构，其中 $*$ 是唯一的不动点，即一个单点度量测度空间。

M此外，对于金字塔空间 $\Pi$ ，也得到了类似的结论。

## 2. Preliminaries

在本节中，我们介绍度量测度空间、盒距离、可观测距离、金字塔和弱拓扑的定义及其一些性质。我们将在 [24] 中使用其中的大多数概念。更多详情请参阅 [24] 和 [11, 第 $3\frac{1}{2}_{+}$] 章。

2.1. 度量测度空间。设 $(X, d_X)$ 是一个完备可分度量空间， $\mu_X$ 是定义在 $X$ 上的一个博雷尔概率测度。我们称三元组 $(X, d_X, \mu_X)$ 为度量测度空间，简称 mm-空间。有时我们也称 $X$ 为一个 mm-空间，此时 $X$ 的度量和测度分别记为 $d_X$ 和 $\mu_X$。

定义 2.1（度量测度同构）。如果存在一个等距映射 $f\colon \operatorname{supp}\mu_X \to \operatorname{supp}\mu_Y$，使得 $f_*\mu_X = \mu_Y$，其中 $f_*\mu_X$ 是 $\mu_X$ 在 $f$ 下的推前测度，则称两个 mm-空间 $X$ 和 $Y$ 彼此度量测度同构。这样的等距映射 $f$ 称为度量测度同构。用 $\mathcal{X}$ 表示 mm-空间的度量测度同构类的集合。

注意，mm-空间 $X$ 与 $(\operatorname{supp}\mu_X, d_X, \mu_X)$ 度量测度同构。我们假设 mm-空间 $X$ 满足

$$X = \operatorname{supp}\mu_X$$

除非另有说明。我们用 $*$ 表示具有平凡度量和狄拉克测度的单点 mm-空间。

定义 2.2（Lipschitz 序）。设 $X$ 和 $Y$ 是两个 mm-空间。如果存在一个 1-Lipschitz 映射 $f\colon X \to Y$ 满足 $f_*\mu_X = \mu_Y$，我们称 $X$ （Lipschitz）支配 $Y$，并记作 $Y \prec X$。我们称 $\prec$ 在 $\mathcal{X}$ 上的关系为 Lipschitz 序。

Lipschitz 序 $\prec$ 是 $\mathcal{X}$上的偏序关系。

2.2. 盒距离与可观测距离。对于度量空间（$X$， $d_X$）的子集 $A$ 以及实数 $r > 0$，我们定义。

$$U_r(A) := \{x \in X \mid d_X(x, A) < r\},$$

其中 $d_X(x, A) := \inf_{a\in A} d_X(x, a)$。

定义 2.3（普罗霍罗夫距离）。度量空间 $X$ 上两个博雷尔概率测度 $\mu$ 和 $\nu$ 之间的普罗霍罗夫距离 $d_{\mathrm{P}}(\mu, \nu)$，定义为满足以下条件的 $\varepsilon > 0$ 的下确界：

$$\mu(U_\varepsilon(A)) \geq \nu(A) - \varepsilon$$

对于任意博雷尔子集 $A \subset X$。

普罗霍罗夫度量 $d_{\mathrm{P}}$ 是在 $X$ 为可分度量空间的条件下，对 $X$ 上博雷尔概率测度的弱收敛进行度量化的一种度量。

定义 2.4（Ky Fan 度量）。设 $(X,\mu)$ 是一个测度空间，$(Y,d_Y)$ 是一个度量空间。对于两个 $\mu$-可测映射 $f,g\colon X\to Y$，我们将 $d^{\mu}{}_{\mathrm{KF}}(f,g)$ 定义为满足以下条件的 $\varepsilon\geq 0$ 的下确界。

$$\mu(\{x\in X\mid d_Y(f(x),g(x))>\varepsilon\})\leq\varepsilon.$$

函数 $d^{\mu}{}_{\mathrm{KF}}$ 是从 $X$ 到 $Y$ 的 $\mu$-可测映射集合上的度量，其中将几乎处处相等的两个映射视为同一映射。我们称 $d^{\mu}{}_{\mathrm{KF}}$ 为 Ky Fan 度量。

引理 2.5 ([24, 引理 1。26])。设 $X$ 是一个带有博雷尔概率测度的拓扑空间$\mu$ 且 $Y$是一个度量空间。对于任意两个博雷尔可测映射 $f$，$g\colon X\to Y$，有

$$d_{\mathrm{P}}(f_*\mu,g_*\mu)\leq d^{\mu}_{\mathrm{KF}}(f,g).$$

定义 2.6（参数）。设 $I:=[0,1)$，且设 $X$为一个 mm-空间。映射 $\varphi\colon I\to X$称为 $X$ 的一个参数，若 $\varphi$ 是一个博雷尔可测映射，使得

$$\varphi_*\mathcal{L}^1=\mu_X,$$

其中 $\mathcal{L}^1$ 是 $I$上的一维勒贝格测度。

注意，任意 mm-空间都有一个参数（见[24, 引理 4.2]）。

定义 2.7（盒距离）。我们将两个 mm-空间$X$ 和 $Y$ 之间的盒距离 $\square(X,Y)$定义为满足以下条件的 $\varepsilon\geq 0$ 的下确界：存在参数 $\varphi\colon I\to X$、$\psi\colon I\to Y$，以及一个博雷尔子集 $I_0\subset I$，使得 $\mathcal{L}^1(I_0)\geq 1-\varepsilon$，并且

$$|d_X(\varphi(s),\varphi(t))-d_Y(\psi(s),\psi(t))|\leq\varepsilon$$

对任意 $s$、$t\in I_0$均成立。

我们注意到，对于任意 $X$、$Y$，$\square(X,Y)<1$，但它可以任意接近 1。

定理 2.8（[24, 定理 4.10]）。盒距离函数 $\square$ 是 $\mathcal{X}$上的完备可分度量。

文献中定义并研究了多种与盒距离等价的距离，例如 Greven-Pfaffelhuber-Winter 引入的 Gromov-Prokhorov 距离[9]。

定理 2.9（[19, 定理 3.1], [24, , 注 4.16]）。对于任意两个 mm-空间 $X$ 和 $Y$，有

$$\square(X,Y)=d_{\mathrm{GP}}((X,2d_X,\mu_X),(Y,2d_Y,\mu_Y)),$$

其中 $d_{\mathrm{GP}}(X,Y)$ 是 Gromov-Prokhorov度量，定义为：对 $X$ 和 $Y$ 的不交并上的所有度量取 $d_{\mathrm{P}}(\mu_X,\mu_Y)$ 的下确界，这些度量分别是 $d_X$ 和 $d_Y$的扩张。特别地，

$$d_{\mathrm{GP}}(X,Y)\leq\square(X,Y)\leq 2d_{\mathrm{GP}}(X,Y).$$

由盒距离诱导的拓扑历来有多种名称，例如弱Gromov拓扑。不过，本文将其简称为盒拓扑。

以下引理有助于计算盒距离。

引理 2.10（[22,定理 1.1]）。设 $X$ 和 $Y$ 是两个 mm-空间。那么

$$\square(X,Y)=\min_{\pi\in\Pi(\mu_X,\mu_Y)}\min_{S\subset X\times Y}\max\{\operatorname{dis}S,1-\pi(S)\},$$

其中 $\Pi(\mu_X,\mu_Y)$ 是 $\mu_X$和 $\mu_Y$之间的耦合集合，并且

$$\operatorname{dis}S:=\sup\{|d_X(x,x')-d_Y(y,y')|:(x,y),(x',y')\in S\}$$

对于一个博雷尔子集 $S\subset X\times Y$，其称为 $S$ 的畸变。

推论 2.11。对于任意 mm-空间 $X$,

$$\square(X,*) = \min_{A\subset X} \max\{\operatorname{diam} A, 1-\mu_X(A)\}.$$

特别地，如果 $Y \prec X$，则 $\square(Y,*) \le \square(X,*)$。

任何 mm-空间都可以用有限 mm-空间进行逼近。这里，有限是指具有有限多个点。

命题 2.12 ([24, 命题 4.20])。设 $X$ 是一个 mm-空间，并设 $\varepsilon > 0$。存在一个有限 mm-空间 $X$ 使得 $\square(X,X) < \varepsilon$。

给定一个 mm-空间 $X$ 和一个参数 $\varphi\colon I \to X$，其中 $X$，我们定义

$$\varphi^*\mathcal{L}ip_1(X) := \{f\circ\varphi \mid f\colon X \to \mathbb{R} \text{ is 1-Lipschitz}\},$$

其由 $I$上的博雷尔可测函数构成。

定义 2.13（可观测距离）。我们将两个 mm-空间 $X$ 和 $Y$之间的可观测距离 $d_{\mathrm{conc}}(X,Y)$ 定义为、】【

$$d_{\mathrm{conc}}(X,Y) := \inf_{\varphi,\psi} d_{\mathrm{H}}(\varphi^*\mathcal{L}ip_1(X), \psi^*\mathcal{L}ip_1(Y)),$$

其中，$\varphi\colon I \to X$和 $\psi\colon I \to Y$分别遍历 $X$和 $Y$的所有参数，而 $d_{\mathrm{H}}$是相对于度量 $d^{\mathcal{L}^1}$ KF的豪斯多夫距离。

定理 2.14（[24, 命题 5.5 和定理 5.13]）。可观测距离函数$d_{\mathrm{conc}}$是 $\mathcal{X}$上的度量。此外，对于任意两个 mm-空间 $X$和 $Y$,

$$d_{\mathrm{conc}}(X,Y) \le \square(X,Y).$$

我们将 $\mathcal{X}$ 上由 $d_{\mathrm{conc}}$ 诱导的拓扑称为集中拓扑。如果一个 mm-空间的序列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $n\to\infty$趋于 $X$ 时， $X_n$ $d_{\mathrm{conc}}$收敛于 $X$，则称该序列集中收敛到 mm-空间 $X$。由于集中拓扑比盒拓扑更粗，因此 $(\mathcal{X}, d_{\mathrm{conc}})$ 是可分的。

例 2.15. 设 $S^n(1)$ 是 $n$ 维单位球面，位于 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中，并带有标准黎曼结构。序列 $\{S^n(1)\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个典型例子，说明集中收敛序列不一定存在任何 $\square$-收敛子列（见 [24, 推论 5。20] 或引理 4.2）。 $\{S^n(1)\}_{n=1}^{\infty}$当 $*$ 时集中收敛到单点 mm-空间 $n\to\infty$。

此外，我们考虑 mm-空 es

$$X_n := \prod_{k=1}^{n} S^k(1),\ n=1,2,\dots,$$

具有自然的黎曼乘积结构。序列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ is $d_{\mathrm{conc}}$-柯西，但不会集中到任何 mm-空间上（参见 [24, 例 7.36] 和 [16]）。特别地，$(\mathcal{X}, d_{\mathrm{conc}})$ 并不完备。

记 $(\mathcal{X}, d_{\mathrm{conc}})$ 的完备化为 $\mathcal{X}$。

2.3. 金字塔。

定义 2.16（金字塔）。如果子集 $\mathcal{P}\subset\mathcal{X}$ 满足以下 (1)–(3)，则称其为金字塔。

(1) 如果 $X\in\mathcal{P}$ 且 $Y\prec X$，则 $Y\in\mathcal{P}$。(2) 对于任意 $Y$、$Y'\in\mathcal{P}$，存在 $X\in\mathcal{P}$，使得 $Y\prec X$ 且 $Y'\prec X$。(3) $\mathcal{P}$ 非空且是 $\square$-闭的。

我们用 $\Pi$ 表示所有金字塔的集合。注意，格罗莫夫对金字塔的定义仅由 (1) 和 (2) 给出。条件 (3) 是在 [24] 中添加的。

对于一个 mm-空间 $X$，我们定义

$$\mathcal{P}_X := \{Y \in \mathcal{X} \mid Y \prec X\},$$

这是一个金字塔。我们称 $\mathcal{P}_X$ 为与 $X$ 相关联的金字塔。

我们观察到，$Y \prec X$ 当且仅当 $\mathcal{P}_Y \subset \mathcal{P}_X$。注意，$\mathcal{X}$ 本身就是一个金字塔。

我们如下定义金字塔的弱收敛。这恰好是作为（$\mathcal{X}$的闭子集的 Kuratowski-Painlevé 收敛（$\mathcal{X}$, $\square$）（参见定义 8.1）。

定义 2.17（弱收敛）。设 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{P}_n$、$n = 1$、2、..... 为金字塔。若以下 (1) 和 (2) 均成立，我们称 $\mathcal{P}_n$ 在 $n \to \infty$ 时弱收敛到 $\mathcal{P}$。

（1）对于任意 mm-空间 $X \in \mathcal{P}$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \square(X, \mathcal{P}_n) = 0.$$

(2) 对于任意 mm-空间 $X \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{P}$，我们有

$$\liminf_{n\to\infty} \square(X, \mathcal{P}_n) > 0.$$

定理 2.18（[24, 节 6]）。存在一个度量 $\rho$，定义在 $\Pi$ 上，使得以下 (1)–(4) 成立。

(1) $\rho$ 与弱收敛相容。(2) $\Pi$ 是 $\rho$-紧的。(3) 映射 $\iota\colon\ \mathcal{X} \ni X \mapsto \mathcal{P}_X \in \Pi$ 是关于 $d_{\mathrm{conc}}$ 和 $\rho$的 1-利普希茨拓扑嵌入映射。(4) $\iota(\mathcal{X})$在 $\Pi$中是 $\rho$-稠密的。

特别地，$(\Pi, \rho)$ 是 $(\mathcal{X}, d_{\mathrm{conc}})$ 的紧化。我们常将 $X$ 与 $\mathcal{P}_X$ 等同，并且称一列 mm-空间弱收敛到一个金字塔，如果相应的金字塔弱收敛。稍微滥用一下记号，我们将 $\mathcal{X}$ 用作 $\iota(\mathcal{X})$ 在 $\Pi$ 中的像。

注 2.19. 度量 $\rho$ 的一种构造如下：

$$\rho(\mathcal{P}, \mathcal{P}') := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+2}k} d_{\mathrm{H}}(\mathcal{P} \cap \mathcal{X}(k,k), \mathcal{P}' \cap \mathcal{X}(k,k)),$$

其中，$d_{\mathrm{H}}$ 是相对于 $\square$ 的豪斯多夫度量，并且

$$\mathcal{X}(N,R) := \left\{ (\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty, \mu) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mu \text{ is a Borel probability measure on } \mathbb{R}^N \text{ such that} \\ \operatorname{supp}\mu \text{ is contained in the closed } R\text{-ball centered at } 0. \end{array} \right\}.$$

注意，$\mathcal{X}(N,R)$ 是 $\mathcal{X}$ 的 $\square$-紧子集。

$\bar{}(\Pi, \rho)$ 也是度量空间 $(\mathcal{X}, d_{\mathrm{conc}})$ 的完备化 $\mathcal{X}$ 的一种紧化。

$\bar{}$定理 2.20（[24, 定理 7.27]）。1-利普希茨映射 $\iota\colon\ \mathcal{X} \ni X \mapsto \mathcal{P}_X \in \Pi$ 的自然延拓 $\iota\colon\ \mathcal{X} \to \Pi$ 是一个拓扑嵌入映射。

$\bar{}$ $\bar{}$我们将 $\mathcal{X}$ 用作 $\Pi$ 中的像 $\iota(\mathcal{X})$，与 $\mathcal{X}$ 类似。

下面的命题可直接由弱收敛的定义推出，本文将频繁用到。

命题 2.21. 如果一列 mm-空间 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $n \to \infty$ 意义下集中收敛到一个 mm-空间 $X$，那么存在一列 mm-空间 $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$，使其以 $\square$ 收敛到 $X$，且对于每个 $n$，都有 $Y_n \prec X_n$。

引理 2.22 ([24,引理 7。14])。 对于任意金字塔 $\mathcal{P}$，存在一个由 $\{Y_m\}_{m=1}^{\infty}$ mm-空间组成的序列，使得

$$Y_1 \prec Y_2 \prec \cdots \prec Y_m \prec \cdots \quad \text{and} \quad \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{P}_{Y_m}}^{\square} = \mathcal{P}.$$

这样的序列 $\{Y_m\}_{m=1}^{\infty}$ 称为 $\mathcal{P}$ 的逼近。我们看到，当 $m \to \infty$ 时， $Y_m$ 弱收敛于 $\mathcal{P}$，且对所有 $m$，都有 $Y_m \in \mathcal{P}$。

例 2.23（虚拟无限维高斯空间）。设 $\lambda$ 是一个正实数。配备方差为 $\lambda^2$ 的 $n$ 维中心高斯测度 $\gamma_{\lambda^2}^n$ on $\mathbb{R}^n$ 的 $n$ 维欧几里得空间 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$，称为方差为$\lambda^2$的 $n$ 维高斯空间，记作 $\Gamma_{\lambda^2}^n$。从 $\mathbb{R}^{n+1}$ 到 $\mathbb{R}^n$、 $n = 1$、2、.....的自然投影意味着

$$\Gamma_{\lambda^2}^1 \prec \Gamma_{\lambda^2}^2 \prec \cdots \prec \Gamma_{\lambda^2}^n \prec \cdots$$

且 $\{\Gamma_{\lambda^2}^n\}_{n=1}^{\infty}$ 弱收敛于该金字塔

$$\mathcal{P}_{\Gamma_{\lambda^2}^{\infty}} := \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_{\Gamma_{\lambda^2}^n}}^{\square}$$

如 $n \to \infty$。我们称 $\mathcal{P}_{\Gamma_{\lambda^2}^{\infty}}$ 为方差为 $\lambda^2$ 的虚拟无限维高斯空间。¯我们指出， $\mathcal{P}_{\Gamma_{\lambda^2}^{\infty}}$ 既不属于 $\mathcal{X}$，也不属于完备化 $\mathcal{X}$（参见 [24, 推论 7.42]）。

2.4. 可观测直径与度量变换。可观测直径是 mm-空间和金字塔最基本的不变量之一。

定义 2.24（部分直径与可观测直径）。设 $X$ 为一个 mm-空间。对于实数 $\alpha$，我们将 $X$ 的部分直径 $\mathrm{diam}(X; \alpha) = \mathrm{diam}(\mu_X; \alpha)$ 定义为 diam $A$ 的下确界，其中 $A \subset X$ 遍历所有满足 $\mu_X(A) \geq \alpha$ 的博雷尔子集，而 diam $A$ 表示 $A$的直径。对于实数 $\kappa > 0$，我们将 $X$ 的可观测直径定义为

$$\mathrm{ObsDiam}(X; -\kappa) := \sup\{\mathrm{diam}(f_*\mu_X; 1-\kappa) \mid f\colon X \to \mathbb{R} \text{ is 1-Lipschitz}\} (< +\infty).$$

此外，对于实数 $\kappa > 0$，我们将金字塔 $\mathcal{P}$ 的可观测直径定义为

$$\mathrm{ObsDiam}(\mathcal{P}; -\kappa) := \lim_{\delta \to 0+} \sup_{X \in \mathcal{P}} \mathrm{ObsDiam}(X; -(\kappa+\delta)) (\leq +\infty).$$

mm-空间的可观测直径是 mm-同构下的不变量。注意，

$$\mathrm{ObsDiam}(\mathcal{P}_X; -\kappa) = \mathrm{ObsDiam}(X; -\kappa)$$

对于任意 $\kappa > 0$，并且 $\mathrm{ObsDiam}(\mathcal{P}; -\kappa)$ 关于 $\kappa > 0$ 单调非增且右连续。此外，我们定义

$$\mathrm{ObsDiam}(\mathcal{P}) := \inf_{\kappa > 0} \max\{\mathrm{ObsDiam}(\mathcal{P}; -\kappa), \kappa\}$$

对于任意金字塔 $\mathcal{P}$ 以及 $\mathrm{ObsDiam}(X) := \mathrm{ObsDiam}(\mathcal{P}_X)$，对于任意 mm-空间 $X$。很容易看出

$$\mathrm{ObsDiam}(\mathcal{P}) = \sup_{X \in \mathcal{P}} \mathrm{ObsDiam}(X).$$

定理 2.25 ([23, 定理 1.1],可观测直径的极限公式)。设 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{P}_n$,$n = 1, 2, \ldots$ 为金字塔。若 $\mathcal{P}_n$ 当 $n \to \infty$时弱收敛到 $\mathcal{P}$，则

$$\begin{aligned} \mathrm{ObsDiam}(\mathcal{P}; -\kappa) &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \liminf_{n \to \infty} \mathrm{ObsDiam}(\mathcal{P}_n; -(\kappa+\varepsilon)) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \limsup_{n \to \infty} \mathrm{ObsDiam}(\mathcal{P}_n; -(\kappa+\varepsilon)) \end{aligned}$$

对于任意 $\kappa > 0$。

定理 2.26 ([23, 推论 5。8])。 设 $\mathcal{P}_n$， $n = 1$， 2， ....., 均为金字塔。那么， 以下(1) – (3) 彼此等价。

(1) $\mathcal{P}_n$ 弱收敛于单点 mm-空间 $*$， 当 $n \to \infty$。(2) $\lim_{n\to\infty}$ ObsDiam$(\mathcal{P}_n; -\kappa) = 0$， 对于任意 $\kappa > 0$。(3) $\lim_{n\to\infty}$ObsDiam$(\mathcal{P}_n) = 0$。

例 2.27（参见 [23, 例 3.13]）。方差为 $\lambda^2$ 的虚拟无限维高斯空间 $\mathcal{P}_{\Gamma^\infty_{\lambda^2}}$ 的可观测直径是

$$\mathrm{ObsDiam}(\mathcal{P}_{\Gamma^\infty_{\lambda^2}}; -\kappa) = \mathrm{diam}(\gamma^1_{\lambda^2}; 1-\kappa) = 2\lambda I^{-1}((1-\kappa)/2)$$

对于任意满足 $0 < \kappa < 1$ 和 $\lambda \geq 0$ 的 $\kappa$ 与 $\lambda$， 其中

$$I(r) := \gamma^1_{1^2}([0, r]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^r \exp(-\frac{x^2}{2})\, dx.$$

因此， 随着 $\lambda \to 0$， $\mathcal{P}_{\Gamma^\infty_{\lambda^2}}$ 弱收敛于 $*$。

定义 2.28（度量变换）。函数 $F\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 是保度量函数，条件是对于任意度量空间 $(X, d_X)$， $F \circ d_X$ 是 $X$ 上的度量。对于保度量函数 $F$， 我们定义 mm-空间 $X$ 和金字塔 $\mathcal{P}$ 的度量变换如下:

$$F(X) := (X, F \circ d_X, \mu_X) \quad \text{and} \quad F(\mathcal{P}) := \overline{\bigcup_{X\in\mathcal{P}} \mathcal{P}_{F(X)}}^{\square}.$$

若保度量函数 $F$ 连续， 则 $F(X)$ 与 $X$ 的拓扑一致。此外， 若 $F$ 非递减， 则对于任意金字塔 $\mathcal{P}$， $F(\mathcal{P})$ 都是一个金字塔，并且

$$F(\mathcal{P}_X) = \mathcal{P}_{F(X)}$$

对于每个 mm-空间 $X$均成立。注意， 若 $\{Y_m\}_{m=1}^\infty$ 是金字塔 $\mathcal{P}$的一个逼近， 则 $\{F(Y_m)\}_{m=1}^\infty$是 $F(\mathcal{P})$的一个逼近。

设 $F(s) := ts$， 其中 $t > 0$是连续、非递减的保度量函数。我们分别用 $tX$ 和 $t\mathcal{P}$表示 $F(X)$ 和 $F(\mathcal{P})$。注意

$$t\mathcal{P} = \{tX \mid X \in \mathcal{P}\},$$

这是经典的考虑方式。

引理 2.29。设 $F$ 是连续、非递减的保度量函数。则有

$$\mathrm{ObsDiam}(F(\mathcal{P}); -2\kappa) \leq 4F(\mathrm{ObsDiam}(\mathcal{P}; -\kappa))$$

对于任意金字塔 $\mathcal{P}$ 以及任意 $\kappa > 0$均成立， 其中约定 $F(+\infty) = \sup_{s>0} F(s)$。

证明。对于 任意 mm-空间 $X$ 以及任意 $\kappa > 0$， 我们已经得到了相同的估计

$$\mathrm{ObsDiam}(F(X); -2\kappa) \leq 4F(\mathrm{ObsDiam}(X; -\kappa))$$

在 [13, 引理 3。22]。利用这一点，我们检验给定的金字塔 $\mathcal{P}$。设 $\{Y_m\}_{m=1}^\infty$ 是 $\mathcal{P}$的一个逼近。根据定理 2.25， 我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{ObsDiam}(F(\mathcal{P}); -2\kappa) &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \liminf_{m\to\infty} \mathrm{ObsDiam}(F(Y_m); -2(\kappa+\varepsilon)) \\
&\leq \lim_{\varepsilon\to 0+} \liminf_{m\to\infty} 4F(\mathrm{ObsDiam}(Y_m; -(\kappa+\varepsilon))) \\
&\leq \lim_{\varepsilon\to 0+} 4F(\mathrm{ObsDiam}(\mathcal{P}; -(\kappa+\varepsilon))) \\
&\leq 4F(\mathrm{ObsDiam}(\mathcal{P}; -\kappa)).
\end{aligned}$$

证明已完成。 □

定义 2.30. 设 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{P}'$ 是两个金字塔，且设 $1 \le p \le +\infty$。我们将 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{P}'$ 的$l_p$-积定义为

$$\mathcal{P} \times_p \mathcal{P}' := \overline{\bigcup_{X\in\mathcal{P},Y\in\mathcal{P}'} \mathcal{P}_{X\times_p Y}}^{\square},$$

其中，$X \times_p Y$是两个 mm-空间 $X$ 和 $Y$的 $l_p$-乘积空间。

注意，若 $\{X_m\}_{m=1}^{\infty}$和 $\{Y_m\}_{m=1}^{\infty}$分别是金字塔 $\mathcal{P}$和 $\mathcal{P}'$的逼近，则 $\{X_m \times_p Y_m\}_{m=1}^{\infty}$是 $\mathcal{P} \times_p \mathcal{P}'$的逼近。

## 3. No compact neighborhood in $\mathcal{X}$

本节中，我们证明定理 1.1 和推论 1.2。对于盒拓扑，我们证明下面的引理，它蕴含定理 1.1（事实上二者等价）。

引理 3.1. 任意 mm-空间 $X$ 的邻域关于盒拓扑都不是相对紧的。

证明。对于任意小的 $\varepsilon > 0$，只需证明 $U_{2\varepsilon}(X) \subset (\mathcal{X}, \square)$ 不是相对紧的。我们在 $U_{2\varepsilon}(X)$ 中构造一个可数离散网。由命题 2.12，存在一个有限 mm-空间 $X$ 使得 $\square(X, X) < \varepsilon$，并令 $N := \#X$，其中 # 表示点的个数。我们定义 mm-空间 $Y_n$, $n = 1, 2, \ldots$，如下：

$$Y_n := \{1, 2, \ldots, (2N)^n\}$$

其度量为 $d_{Y_n}(i, j) := \varepsilon$，其中 $i \ne j$，且均匀概率测度为 $\mu_{Y_n} := (2N)^{-n} \sum_{i=1}^{(2N)^n} \delta_i$，并定义 $X_n := X \times_\infty Y_n$。我们来证明 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $U_{2\varepsilon}(X)$ 中的一个离散网。

由于一般而言 $\square(A \times_p B, A \times_p C) \le \square(B, C)$（见命题 4.[13, 1]），我们有

$$\square(X_n, X) < \square(X_n, \dot{X}) + \varepsilon \le \square(Y_n, *) + \varepsilon \le 2\varepsilon.$$

因此，对于任意 $n$，均有 $X_n \in U_{2\varepsilon}(X)$。接下来我们证明：

$$\square(X_m, X_n) \ge \min\{\varepsilon, \min_{x\ne x'} d_{\dot{X}}(x, x'), \frac{1}{2}\} =: \delta > 0$$

对于任意 $m \ne n$。假设 $m > n$。根据引理 2.10，存在一个耦合测度$\pi \in \Pi(\mu_{X_m}, \mu_{X_n})$ 和一个闭集 $S \subset X_m \times X_n$ 使得

$$\square(X_m, X_n) = \max\{\operatorname{dis} S, 1 - \pi(S)\}.$$

如果存在两对 $(x, y)$、$(x', y) \in S$，其中 $x \ne x'$ 属于 $X_m$，那么我们有

$$\square(X_m, X_n) \ge \operatorname{dis} S \ge d_{X_m}(x, x') \ge \delta.$$

如果不是，那么我们有 $\#S \le \#X_n = N(2N)^n$并且

$$\pi(S) \le \frac{\#S}{\#Y_m} \max_{x\in\dot{X}} \mu_{\dot{X}}(\{x\}) \le \frac{N(2N)^n}{(2N)^m} \le \frac{1}{2},$$

这意味着 $\square(X_m, X_n) \ge 1 - \pi(S) \ge \frac{1}{2} \ge \delta$。因此 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\delta$-离散的。证明完毕。□

为了证明定理 1.1 关于集中拓扑的结论，我们首先回顾以下命题。

命题 3.2（参见 [7, 定理 3.3。9]）。设 $Y$ 是一个豪斯多夫空间，且 $X \subset Y$ 是一个稠密子集。若点 $x \in X$ 在 $Y$的相对拓扑下有一个紧邻域，则 $x$ 是 $X$的内点。特别地，若 $X$ 是局部紧的，则 $X$ 在 $Y$ 中是开集。

$l_p$-积有助于再次构造一个收敛到给定 mm-空间或金字塔的收敛序列。下面的命题是已知的。

命题 3.3 ([24, 命题 7.32]). 设 $X$ 和 $Y$ 是两个 mm-空间。若 $\mathrm{ObsDiam}(Y) < 1/2$，则有

$$d_{\mathrm{conc}}(X \times_p Y, X) \leq \mathrm{ObsDiam}(Y)$$

对任意 $1 \leq p \leq +\infty$。

该命题可推广到金字塔，如下所示。

命题 3.4. 设 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{P}'$ 是两个金字塔。若 $\mathbf{ObsDiam}(\mathcal{P}') < 1/2$，则有

$$\rho(\mathcal{P} \times_p \mathcal{P}', \mathcal{P}) \leq \mathrm{ObsDiam}(\mathcal{P}')$$

对任意 $1 \leq p \leq +\infty$。

证明。设 $\{X_m\}_{m=1}^{\infty}$ 和 $\{Y_m\}_{m=1}^{\infty}$ 分别是 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{P}'$ 的逼近。对于每个 $m$，有

$$\rho(\mathcal{P}_{X_m \times_p Y_m}, \mathcal{P}_{X_m}) \leq d_{\mathrm{conc}}(X_m \times_p Y_m, X_m) \leq \mathrm{ObsDiam}(Y_m) \leq \mathrm{ObsDiam}(\mathcal{P}')$$

根据命题 3.3，因此我们有

$$\rho(\mathcal{P} \times_p \mathcal{P}', \mathcal{P}) = \lim_{m\to\infty} \rho(\mathcal{P}_{X_m \times_p Y_m}, \mathcal{P}_{X_m}) \leq \mathrm{ObsDiam}(\mathcal{P}').$$

证明完成。 □

引理 3.5. 对于给定的 $X \in \mathcal{X}$ 和 $1 \leq p \leq +\infty$， $\lambda > 0$ 的金字塔 $\mathcal{P}_\lambda$ 定义为

$$\mathcal{P}_\lambda := \mathcal{P}_X \times_p \mathcal{P}_{\Gamma_{\lambda^2}^{\infty}}.$$

于是，当 $\lambda \to 0$时， $\mathcal{P}_\lambda$ 弱收敛到 $X$。

*Proof.* 这直接由定理 2.26、例 2.27和命题 3.4 . □

由于 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{X}$ 在 $\Pi$中关于包含是向下封闭的，金字塔 $\mathcal{P}_\lambda$既不属于 $\mathcal{X}$ 也不属于 $\mathcal{X}$ (参见例 2.23）。由此得到以下推论。

推论 3.6。每个 $X \in \mathcal{X}$ 都不是关于弱拓扑的 $\mathcal{X}$ 内点。同样，每个 $X \in \mathcal{X}$ 都不是关于弱拓扑的 $\mathcal{X}$ 内点。

推论 3.7。 $\Pi \setminus \mathcal{X}$和 $\Pi \setminus \mathcal{X}$在 $\Pi$中都是稠密的。

定理的证明 *1.1*。 关于盒拓扑，引理 3.1 蕴含定理 1.1。命题 3.2 和推论 3.6 意味着每个 $X \in \mathcal{X}$ 在相对弱拓扑（即集中拓扑）中都没有紧邻域。证明完成。 □

命题 3.8（参见 [27, 25B]）。如果拓扑空间 $X$ 是豪斯多夫、 $\sigma$-紧且为贝尔的，那么 $X$ 中至少有一个点具有紧邻域。

证明。设 $X$ 是豪斯多夫、 $\sigma$-紧且为贝尔空间。存在 $X$ 的可数紧子集族 $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$，使得 $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$。由于 $X$ 是豪斯多夫空间，每个 $K_i$ 都是闭集。由于 $X$ 是贝尔空间，至少有一个 $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ 具有非空内点。证明完毕。□

推论的证明 *1.2*。 由于 $(\mathcal{X}, \square)$ 是完备度量空间，$(\mathcal{X}, \square)$ 是豪斯多夫空间且为贝尔空间。定理 1.1 和命题 3.8 共同表明 $(\mathcal{X}, \square)$ 不是 $\sigma$-紧的。 □

注 3.9. 设 $\{Y_m\}_{m=1}^{\infty}$ 是金字塔 $\mathcal{X}$ 的一个逼近。则有

$$\mathcal{X} = \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{P}_{Y_m}}^{\square}$$

且每个 $\mathcal{P}_{Y_m}$ 都是 $\square$-紧的（见 [16]）。这里，推论 1.2指出，$\square$-闭包运算是本质的，即

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{P}_{Y_m} \subsetneq \mathcal{X}.$$

由与推论 1.2相同的理由可得。

¯推论 3.10. $(\mathcal{X}, d_{\mathrm{conc}})$ 的完备化 $\mathcal{X}$不是 $\sigma$-紧的。

## 4. $\mathcal{X}$ WITH THE CONCENTRATION TOPOLOGY IS NOT A BAIRE SPACE

本节中，我们证明定理 1.3。关键工具是到单点 mm-空间 $*$的盒距离，它是 $\mathcal{X}$ 上的一个不变量（见推论 2.11）。

命题 4.1. 对任意 mm-空间 $X$,

$$\square(X, *) \geq 1 - \sup_{x \in X} \mu_X(U_1(x)).$$

证明。取 $X$ 的任意博雷尔子集 $A$，使其直径为 $A < 1$，并选取 $x \in A$。那么 $A \subset U_1(x)$ 且

$$1 - \mu_X(A) \geq 1 - \mu_X(U_1(x)).$$

因此我们有

$$\max\{\operatorname{diam} A, 1 - \mu_X(A)\} \geq 1 - \mu_X(U_1(x)) \geq 1 - \sup_{x \in X} \mu_X(U_1(x)).$$

推论 2.11推出所需的不等式。 □

引理 4.2. 设 $S^n(1)$ 为带有标准黎曼结构的 $n$ 维单位球面。那么

$$\lim_{n\to\infty} \square(S^n(1), *) = 1.$$

证明。对于任意 $x \in S^n(1)$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{S^n(1)}(U_1(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^1 \sin^{n-1} t\, dt}{\int_0^\pi \sin^{n-1} t\, dt} = 0.$$

结合这一结果与命题 4.1 可得 $\lim_{n\to\infty} \square(S^n(1)\ *) = 1$。 □

命题 4.3. 若序列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中的 mm-空间集中收敛到一个 mm-空间 $X$，则

$$\square(X, *) \leq \liminf_{n\to\infty} \square(X_n, *).$$

证明。由于 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 集中收敛到 $X$，存在一个序列 $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 由 mm-空间组成 $\square$- 收敛到 $X$ 且满足 $Y_n \prec X_n$ 对每个 $n$，由命题 2.21可知。因此我们有

$$\liminf_{n\to\infty} \square(X_n, *) \geq \lim_{n\to\infty} \square(Y_n, *) = \square(X, *).$$

证明完成。 □

定理 *1.3* 的证明。令 $\mathcal{X}^\delta$ 为所有满足 $\square(X, *) \leq \delta$ 的 mm-空间集合，其中 $\delta \geq 0$。由命题 4.3可知，集合 $\mathcal{X}^\delta$ 关于集中拓扑是闭集。由于

$$\mathcal{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}^{1-\frac{1}{n}},$$

如果 $\mathcal{X}^\delta$ 对任意 $\delta \in [0, 1$ 都是处处不稠密的），那么 $\mathcal{X}$ 就不是贝尔空间。我们证明 $\mathcal{X}^\delta$ 是处处不稠密的。取任意 mm-空间 $X \in \mathcal{X}^\delta$。只需证明 $X$ 不是一个

.....的内点 $\mathcal{X}^\delta$。事实上，乘积空间 $X \times_p S^n(1)$ 集中收敛于 $X$ 当 $n \to \infty$ 根据命题 3.3但

$$\liminf_{n\to\infty} \square(X \times_p S^n(1), *) \geq \lim_{n\to\infty} \square(S^n(1), *) = 1.$$

因此， $X$ 不是 $\mathcal{X}^\delta$的内点。证明完毕。 □

注 4.4. (1) 由上述证明可知，具有集中拓扑的 $\mathcal{X}$ 在自身中是贫乏的（即为可数个无处稠密子集的并）。事实上，这一事实比非贝尔更强。(2) 贝尔纲定理断言， $\mathcal{X}$ 不是完全可度量化的，等价地， $\mathcal{X}$ 不是 $\Pi$ 中的一个 $G_\delta$ 子集。也就是说，不存在能赋予集中拓扑的完备度量。

推论 4.5。 $\mathcal{X}$ 在 $\Pi$中是贫乏且非余贫的。

证明。我们首先证明子集 $\mathcal{X}$ 在 $\Pi$ 中是贫乏的。根据弱收敛的定义和引理 2.22， $\mathcal{X}^\delta$ 关于弱拓扑的闭包为

$$\Pi^\delta := \{\mathcal{P} \in \Pi \mid \square(X, *) \leq \delta \text{ for any } X \in \mathcal{P}\}.$$

只需证明对于每个 $\delta \in [0, 1$， $\Pi^\delta$ 的内点为空。实际上，给定一个金字塔 $\mathcal{P} \in \Pi^\delta$，乘积金字塔 $\mathcal{P} \times_p \mathcal{P}_{S^n(1)}$ 由命题3.4 和 $S^n(1) \in \mathcal{P} \times_p \mathcal{P}_{S^n(1)}$ 弱收敛到 $\mathcal{P}$。这表明 $\mathcal{P}$ 不是 $\Pi^\delta$ 的内点。因此， $\Pi$ 的子集 $\mathcal{X}$ 是贫乏的。

假设 $\mathcal{X}$在 $\Pi$中是共贫集。补集 $\Pi \setminus \mathcal{X}$是贫集，因此 $\Pi$自身是贫集。这就产生了矛盾。因此， $\mathcal{X}$ 在 $\Pi$中不是共贫集。□

注 4.6. $\mathcal{X}^\delta$ 作为 $\Pi$的子集被真包含于 $\Pi^\delta$。例如，

$$\{X \in \mathcal{X} \mid \operatorname{diam} X \leq \delta\}$$

是 $\Pi^\delta$ 中的一个金字塔，但它不是 □ 紧的，因此属于 $\Pi \setminus \mathcal{X}$（见 [16]）。事实上，令 $X_n$、 $n = 1$、2、.....为 $n$ 个区间 $[0, \delta]$ 的 $l_\infty$ 乘积空间，则序列 $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ 没有 □ 收敛子列（见 [24, 命题 7.37]）。

## 5. $\mathcal{X}$ AND $\Pi$ ARE CONTRACTIBLE

本节通过给出明确的形变收缩来证明定理 1.4 。从现在起，对于空间 $f$ 上的两个给定映射 $g$ 和 $X$，我们用记号 $(f, g)$ 表示定义在$X$ 上的映射，其定义如下

$$(f, g)(x) := (f(x), g(x)), \quad x \in X.$$

例如， $(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X)$ 表示映射 $X \ni x \mapsto (x, x) \in X \times X$。

引理 5.1. 映射 $H\colon \mathcal{X} \times [0, 1] \to \mathcal{X}$定义为

$$H(X, t) := tX$$

对于 $X \in \mathcal{X}$ 和 $t \in [0, 1]$ ，该映射相对于盒拓扑和集中拓扑均连续，其中我们约定，对于任意 mm-空间 $X$， $0X = *$。

证明. 由于两种情形的论证是平行的，我们只证明盒拓扑的情形。任取收敛到 $(X, t)$ 的$\{(X_n, t_n)\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{X} \times [0, 1]$。于是有

$$\square(t_n X_n, tX) \leq \square(t_n X_n, t_n X) + \square(t_n X, tX) \leq \square(X_n, X) + \square(t_n X, tX)$$

由于映射 $t \mapsto \square(tX, tY)$ 单调不减。只需证明，当 $t_n \to t$ 趋于 $t_n X$ □时， $tX$ 对固定的 mm-空间 $X$收敛。设 $\varepsilon > 0$ 为一个正实数。存在 有限 mm-空间 $\dot{X}$，使得 $\square(X, \dot{X}) < \varepsilon$，根据命题 2.12。于是我们有

$$\square(t_n \dot{X}, t\dot{X}) \leq |t_n - t| \operatorname{diam} \dot{X}.$$

事实上，令 $\pi := (\mathrm{id}_{\dot{X}}, \mathrm{id}_{\dot{X}})_* \mu_{\dot{X}}$ 和 $S := \{(x, x) \mid x \in X\}$，我们有

$$\pi(S) = 1 \quad \text{and} \quad \operatorname{dis} S = |t_n - t| \operatorname{diam} \dot{X}.$$

注意，即使 $t_n = 0$ 或 $t = 0$，这仍然成立。因此我们有

$$\limsup_{n\to\infty} \square(t_n X, tX) \le \limsup_{n\to\infty} \square(t_n \dot{X}, t\dot{X}) + 2\varepsilon \le 2\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon \to 0$，我们得出结论。 □

引理 5.2。映射 $H\colon \Pi \times [0,1] \to \Pi$ 定义如下

$$H(\mathcal{P}, t) := F_t(\mathcal{P}), \quad \textit{where} \quad F_t(s) := \min\{s, \frac{t}{1-t}\},$$

对于 $\mathcal{P} \in \Pi$ 和 $t \in [0,1]$，该映射关于弱拓扑是连续的；这里约定，对于任意金字塔 $\mathcal{P}$，$F_1(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ 且 $F_0(\mathcal{P}) = *$。

证明。任取一个收敛到 $(\mathcal{P}, t)$ 的 $\{(\mathcal{P}_n, t_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \Pi \times [0,1]$。[14]的主要结果表明，若 $t > 0$（见 [14, 推论 1.5]），则 $F_{t_n}(\mathcal{P}_n)$ 弱收敛到 $F_t(\mathcal{P})$。我们只需验证，当 $t_n \to 0$ 时，$F_{t_n}(\mathcal{P}_n)$ 随着 $n \to \infty$ 弱收敛到 $*$。根据引理 2.29，对任意 $\kappa > 0$，有

$$\operatorname{ObsDiam}(F_{t_n}(\mathcal{P}_n); -2\kappa) \le 4F_{t_n}(\operatorname{ObsDiam}(\mathcal{P}_n; -\kappa)) \le \frac{4t_n}{1-t_n} \to 0$$

当 $n \to \infty$时。因此 $F_{t_n}(\mathcal{P}_n)$ 弱收敛于 $*$ 当 $n \to \infty$ 根据定理 2.26。证明完毕。 □

注 5.3. 映射 $(\mathcal{P}, t) \mapsto t\mathcal{P}$ 是不连续的，事实上，对于任意 $t > 0$，$t\mathcal{X} = \mathcal{X}$。其原因之一是，函数 $s \mapsto ts$ 在 $t \to 0$时不一致收敛于 0。另一方面，映射 $(X, t) \mapsto F_t(X)$（其中 $F_t$ 见上引理）关于盒拓扑和集中拓扑也都是连续的。

定理 *1.4* 的证明。引理 5.1 和 5.2 中的映射是 $\mathcal{X}$和 $\Pi$ 到 $\{*\}$上的形变收缩。因此它们是可缩的。 □

## 6. $(\mathcal{X}, \square)$ IS A GEODESIC SPACE

本节的目的是证明定理 1.5。我们将准备一些最优传输理论中的工具。

定义 6.1（$\varepsilon$-次传输计划）。设 $\mu$ 和 $\nu$ 是度量空间 $X$上的两个博雷尔概率测度。若博雷尔测度 $\pi$ 在 $X \times X$ 上满足 $\mathrm{pr}_{0*}\pi \le \mu$ 和 $\mathrm{pr}_{1*}\pi \le \nu$，则称其为 $\mu$ 与$\nu$ 之间的次传输计划，其中 $\mathrm{pr}_i$, $i = 0, 1$ 是由 $(x_0, x_1) \mapsto x_i$给出的投影。对于次传输计划 $\pi$，$\pi$ 的亏量定义为

$$\operatorname{def} \pi := 1 - \pi(X \times X).$$

若次传输计划 $\pi$ 满足以下条件，则称其为 $\varepsilon$-次传输计划

$$\operatorname{supp} \pi \subset \{(x, x') \in X \times X \mid d_X(x, x') \le \varepsilon\}.$$

定理 6.2（Strassen定理 [26, 推论 1.28]）。对于完备可分度量空间 $X$上的任意两个博雷尔概率测度 $\mu$ 和 $\nu$，我们有

$$d_{\mathrm{P}}(\mu, \nu) = \inf\left\{ \varepsilon > 0 \;\middle|\; \begin{array}{l} \textit{There exists an } \varepsilon\textit{-subtransport plan } \pi \\ \textit{between } \mu \textit{ and } \nu \textit{ with } \operatorname{def} \pi \le \varepsilon \end{array} \right\}.$$

令 $C_{\mathrm{b}}(X)$ 表示度量空间$X$上所有连续有界实值函数构成的集合，它在上确界范数 $\|\cdot\|_\infty$ 下构成一个巴拿赫空间。众所周知，映射

$$X \ni x \mapsto d_X(x, x') - d_X(\bar{x}, x') \in C_{\mathrm{b}}(X),$$

其中 $\bar{x}$是 在 $X$中的一个不动点，是等距的。这个映射称为 Kuratowski 嵌入 g. 定理的证明 *1.5*。 任取两个 mm-空间 $X_0$ 和 $X_1$。我们构造一个中点 $X_{\frac{1}{2}}$，它位于 $X_0$ 和 $X_1$ 之间，即

$$\square(X_0, X_{\frac{1}{2}}) = \square(X_1, X_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\square(X_0, X_1)$$

（见 [6, 定理 2.4.16]）。令 $r_n := \square(X_0, X_1) + n^{-1}$。由于

$$d_{\mathrm{GP}}(2X_0, 2X_1) = \square(X_0, X_1) < r_n,$$

存在一个完备可分度量空间 $Z_n$，使得 $2X_0$ 和 $2X_1$ 均等距嵌入 $Z_n$，并且

$$d_{\mathrm{P}}^{Z_n}(\mu_{X_0}, \mu_{X_1}) < r_n.$$

此外，根据Kuratowski嵌入，可假设 $Z_n$ 是一个范数为 $\|\cdot\|$的巴拿赫空间。根据Strassen定理，存在一个 $r_n$-次传输计划 $\pi_n$，使其成为$(Z_n, \|\cdot\|)$上 $\mu_{X_0}$与$\mu_{X_1}$之间的次传输计划，且 def $\pi_n \le r_n$。我们定义映射 $M\colon\ Z_n \times Z_n \to Z_n$，如下:

$$M(x_0, x_1) := \frac{x_0 + x_1}{2}$$

并定义$_n$上的概率测度$\mu_{\frac{1}{2},\ n}$，如下:

$$\mu_{\frac{1}{2},n} := M_*\pi_n + \frac{1}{2}(\mu_{X_0} - \mathrm{pr}_{0*}\pi_n) + \frac{1}{2}(\mu_{X_1} - \mathrm{pr}_{1*}\pi_n).$$

下面证明

$$d_{\mathrm{P}}^{Z_n}(\mu_{X_i}, \mu_{\frac{1}{2},n}) \le \frac{1}{2}r_n, \quad i = 0, 1.$$

我们先找到$\mu_{X_0}$与$\mu_{\frac{1}{2},\ n}$之间的次传输计划。我们在$Z_n \times Z_n$ 上定义测度$\pi_{0,\ n}$，如下:

$$\pi_{0,n} := (\mathrm{pr}_0, M)_*\pi_n + \frac{1}{2}(\mathrm{id}_{Z_n}, \mathrm{id}_{Z_n})_*(\mu_{X_0} - \mathrm{pr}_{0*}\pi_n).$$

测度$\pi_{0,\ n}$是 $\mu_{X_0}$与$\mu_{\frac{1}{2},\ n}$之间的次传输计划。事实上，

$$\mathrm{pr}_{0*}\pi_{0,n} = \mathrm{pr}_{0*}\pi_n + \frac{1}{2}(\mu_{X_0} - \mathrm{pr}_{0*}\pi_n) \le \mu_{X_0},$$
$$\mathrm{pr}_{1*}\pi_{0,n} = M_*\pi_n + \frac{1}{2}(\mu_{X_0} - \mathrm{pr}_{0*}\pi_n) \le \mu_{\frac{1}{2},n}.$$

此外，我们有

$$\pi_{0,n}(Z_n \times Z_n) = \pi_n(Z_n \times Z_n) + \frac{1}{2}(1 - \pi_n(Z_n \times Z_n)) \ge 1 - \frac{1}{2}r_n.$$

我们验证 $\pi_{0,n}$ 是一个 $(1/2)r_n$-次传输计划。任取 $(x, y) \in \mathrm{supp}\ \pi_{0,n}$，满足 $x \ne y$。存在 $(x_0, x_1) \in \mathrm{supp}\ \pi_n$，使得

$$x = x_0 \quad \text{and} \quad y = \frac{x_0 + x_1}{2}.$$

于是我们有

$$\|x - y\| = \frac{1}{2}\|x_0 - x_1\| \le \frac{1}{2}r_n.$$

因此 $\pi_{0,n}$ 是一个具有定义$\pi_{0,n} \le (1/2)r_n$的（$1/2$）$r_n$-次传输计划，这意味着

$$d_{\mathrm{P}}^{Z_n}(\mu_{X_0}, \mu_{\frac{1}{2},n}) \le \frac{1}{2}r_n$$

再次根据Strassen定理。同理，令

$$\pi_{1,n} := (M, \mathrm{pr}_1)_*\pi_n + \frac{1}{2}(\mathrm{id}_{Z_n}, \mathrm{id}_{Z_n})_*(\mu_{X_1} - \mathrm{pr}_{1*}\pi_n),$$

测度 $\pi_{1,\ n}$是 $\mu_{\frac{1}{2},\ n}$与 $\mu_{X_1}$之间的 $(1/2)r_n$-次传输计划，其中定义为 $\pi_{1,\ n} \leq (1/2)r_n$，因此

$$d_{\mathrm{P}}^{Z_n}(\mu_{X_1}, \mu_{\frac{1}{2},n}) \leq \frac{1}{2}r_n.$$

定义一个 mm-空间

$$X_{\frac{1}{2},n} := (Z_n, \frac{1}{2}\|\cdot\|, \mu_{\frac{1}{2},n}),$$

这满足

$$\square(X_i, X_{\frac{1}{2},n}) = d_{\mathrm{GP}}(2X_i, 2X_{\frac{1}{2},n}) \leq d_{\mathrm{P}}^{Z_n}(\mu_{X_i}, \mu_{\frac{1}{2},n}) \leq \frac{1}{2}r_n, \quad i = 0, 1.$$

我们证明 $\{X_{\frac{1}{2},n}\}_{n=1}^{\infty}$关于盒拓扑是相对紧的。只需证明，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个正数 $\Delta(\varepsilon)$，使得对于任意 $n$，都存在 $X_{\frac{1}{2},\ n}$的有限子集 $\mathcal{N}_n$，满足

$$\mu_{\frac{1}{2},n}(U_\varepsilon(\mathcal{N}_n)) \geq 1 - \varepsilon, \quad \#\mathcal{N}_n \leq \Delta(\varepsilon), \quad \text{and} \quad \operatorname{diam}\mathcal{N}_n \leq \Delta(\varepsilon)$$

（参见[24, 引理 4。28]）。取充分小的 $\varepsilon > 0$，使得 $1 - r_n - 2\varepsilon > 0$ 对每个充分大的 $n$，此处 $r_n \to \square(X_0,\ X_1) < 1$ 作为 $n \to \infty$。存在有限子集 $\mathcal{N}_0$，属于$X_0$，以及有限子集 $\mathcal{N}_1$，属于 $X_1$，使得

$$\mu_{X_0}(U_\varepsilon(\mathcal{N}_0)) \geq 1 - \varepsilon \quad \text{and} \quad \mu_{X_1}(U_\varepsilon(\mathcal{N}_1)) \geq 1 - \varepsilon.$$

$\mathcal{Z}_0$ 和 $\mathcal{Z}_1$ 分别是 $\mathcal{N}_0$ 和 $\mathcal{N}_1$ 通过嵌入到 $Z_n$所得的像，并定义

$$\mathcal{N}_n := \mathcal{Z}_0 \cup M(\mathcal{Z}_0 \times \mathcal{Z}_1) \cup \mathcal{Z}_1 \subset Z_n.$$

注意，$\#\mathcal{N}_n \leq \#\mathcal{N}_0 \cdot \#\mathcal{N}_1 + \#\mathcal{N}_0 + \#\mathcal{N}_1$。我们有

$$\begin{aligned}
&\pi_n(U_{2\varepsilon}(\mathcal{Z}_0) \times U_{2\varepsilon}(\mathcal{Z}_1)) \\
&\geq \pi_n(Z_n \times Z_n) - \mathrm{pr}_{0*}\pi_n(Z_n \setminus U_{2\varepsilon}(\mathcal{Z}_0)) - \mathrm{pr}_{1*}\pi_n(Z_n \setminus U_{2\varepsilon}(\mathcal{Z}_1)) \\
&\geq 1 - r_n - \mu_{X_0}(X_0 \setminus U_\varepsilon(\mathcal{N}_0)) - \mu_{X_1}(X_1 \setminus U_\varepsilon(\mathcal{N}_1)) \geq 1 - r_n - 2\varepsilon > 0,
\end{aligned}$$

这意味着存在一对$(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{supp}\pi_n \cap (U_{2\varepsilon}(\mathcal{Z}_0) \times U_{2\varepsilon}(\mathcal{Z}_1))$。此外，

$$\|M(x_0, x_1) - M(\bar{x}, \bar{y})\| \leq \frac{1}{2}\|x_0 - \bar{x}\| + \frac{1}{2}\|x_1 - \bar{y}\| \leq \frac{1}{2}\operatorname{diam}\mathcal{Z}_0 + \frac{1}{2}\operatorname{diam}\mathcal{Z}_1 + 2\varepsilon$$

对于每个$(x_0, x_1) \in \mathcal{Z}_0 \times \mathcal{Z}_1$，都有此结论。综合起来可得

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}\mathcal{N}_n &\leq \frac{3}{2}\operatorname{diam}\mathcal{Z}_0 + \frac{3}{2}\operatorname{diam}\mathcal{Z}_1 + \|\bar{x} - \bar{y}\| + 4\varepsilon \\
&\leq 3\operatorname{diam}\mathcal{N}_0 + 3\operatorname{diam}\mathcal{N}_1 + r_n + 4\varepsilon \\
&\leq 3\operatorname{diam}\mathcal{N}_0 + 3\operatorname{diam}\mathcal{N}_1 + 2.
\end{aligned}$$

我们验证了

$$\mu_{\frac{1}{2},n}(U_{2\varepsilon}(\mathcal{N}_n)) \geq 1 - 2\varepsilon.$$

由于 $U_{2\varepsilon}(M(\mathcal{Z}_0\times\mathcal{Z}_1))\supset M(U_{2\varepsilon}(\mathcal{Z}_0)\times U_{2\varepsilon}(\mathcal{Z}_1))$，我们有

$$\begin{aligned}
&\mu_{\frac12,n}(U_{2\varepsilon}(\mathcal{N}_n))\\
\geq& M_*\pi_n(U_{2\varepsilon}(M(\mathcal{Z}_0\times\mathcal{Z}_1)))+\frac12(\mu_{X_0}-\mathrm{pr}_{0*}\pi_n)(U_{2\varepsilon}(\mathcal{Z}_0))+\frac12(\mu_{X_1}-\mathrm{pr}_{1*}\pi_n)(U_{2\varepsilon}(\mathcal{Z}_1))\\
\geq&\pi_n(U_{2\varepsilon}(\mathcal{Z}_0)\times U_{2\varepsilon}(\mathcal{Z}_1))+\frac12(\mu_{X_0}-\mathrm{pr}_{0*}\pi_n)(U_{2\varepsilon}(\mathcal{Z}_0))+\frac12(\mu_{X_1}-\mathrm{pr}_{1*}\pi_n)(U_{2\varepsilon}(\mathcal{Z}_1))\\
\geq&\pi_n(Z_n\times Z_n)-\mathrm{pr}_{0*}\pi_n(Z_n\setminus U_{2\varepsilon}(\mathcal{Z}_0))-\mathrm{pr}_{1*}\pi_n(Z_n\setminus U_{2\varepsilon}(\mathcal{Z}_1))\\
&+\frac12(\mu_{X_0}-\mathrm{pr}_{0*}\pi_n)(U_{2\varepsilon}(\mathcal{Z}_0))+\frac12(\mu_{X_1}-\mathrm{pr}_{1*}\pi_n)(U_{2\varepsilon}(\mathcal{Z}_1))\\
\geq&\mu_{X_0}(U_\varepsilon(\mathcal{N}_0))+\mu_{X_1}(U_\varepsilon(\mathcal{N}_1))-1\geq 1-2\varepsilon.
\end{aligned}$$

因此，$\{X_{\frac12,n}\}_{n=1}^\infty$ 是相对紧的。$\{X_{\frac12,n}\}_{n=1}^\infty$ 存在一个 $\square$-收敛子列，其极限记为 $X_{\frac12}$，满足

$$\square(X_i,X_{\frac12})\leq\frac12\square(X_0,X_1),\quad i=0,1.$$

证明已完备。 $\square$

注 6.3. (1) Gromov-Prokhorov 距离 $d_{\mathrm{GP}}$ 在 $\mathcal{X}$ 上也是测地的。(2) 任意测地度量空间显然都是局部道路连通的。因此，$\mathcal{X}$ 在盒拓扑下是局部道路连通的。

在（$\mathcal{X}$，$\square$）上，两个不同的 mm-空间之间的测地线从来都不是唯一的，并且处处都会发生分支。

定理 6.4. 对于任意两个不同构的 mm-空间，存在一族不可数条两两不相交的 $\square$测地线连接它们。这里，如果两条测地线除了端点外处处不相交，则称它们不相交。特别地，每条 $\square$ 测地线处处分叉。

为了构造一族测地线，我们先准备以下引理。

引理 6.5. 设 $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ 是从 mm-空间 $X_0$ 到 mm-空间 $X_1$ 的一条 $\square$-测地线，且 $r:=\square(X_0,X_1)$。任取一个 $r$-利普希茨函数 $f\colon[0,1]\to[0,+\infty)$，满足 $f(0)=f(1)=0$，以及任意一个满足 $0<$直径 $Z\leq 1$ 的 mm-空间 $Z$，并定义 mm-空间 $Y_t$, $t\in[0,1]$，如下：

$$Y_t:=X_t\times_\infty f(t)Z.$$

则 $\{Y_t\}_{t\in[0,1]}$ 也是从 $X_0$ 到 $X_1$的 $\square$-测地线。

证明。任取 $s,t\in[0,1]$ 并固定它们。只需证明

$$\square(Y_s,Y_t)\leq|s-t|r$$

根据三角不等式。由于 $\square(X_s,X_t)=|s-t|r$，存在一个耦合 $\pi\in\Pi(\mu_{X_s},\mu_{X_t})$以及一个闭集 $S\subset X_s\times X_t$，使得

$$\max\{\mathrm{dis}\,S,1-\pi(S)\}=|s-t|r$$

根据引理 2.10。这里我们定义一个耦合 $\pi'\in\Pi(\mu_{X_s}\otimes\mu_Z,\mu_{X_t}\otimes\mu_Z)$ 和一个闭子集$S'\subset Y_s\times Y_t$ 如下：

$$\pi':=(\mathrm{pr}_1,\mathrm{pr}_3,\mathrm{pr}_2,\mathrm{pr}_3)_*(\pi\otimes\mu_Z),\quad S':=\{(x,z,y,z)\mid(x,y)\in S,z\in Z\}.$$

于是我们看到

$$\pi'(S')=(\pi\otimes\mu_Z)(S\times Z)=\pi(S)\geq 1-|s-t|r.$$

此外，对于任意的 $(x,z,y,z)$、$(x',z',y',z') \in S'$，我们有

$$\begin{aligned}
&|\max\{d_{X_s}(x,x'), f(s)d_Z(z,z')\} - \max\{d_{X_t}(y,y'), f(t)d_Z(z,z')\}| \\
&\le \max\{|d_{X_s}(x,x') - d_{X_t}(y,y')|, |f(s)-f(t)|d_Z(z,z')\} \\
&\le \max\{\operatorname{dis} S, |f(s)-f(t)|\} \\
&\le |s-t|r,
\end{aligned}$$

这意味着 $\operatorname{dis} S' \le |s-t|r$。因此，我们得到

$$\square(Y_s, Y_t) \le \max\{\operatorname{dis} S', 1-\pi'(S')\} \le |s-t|r$$

由引理 2.10 可得 $\{Y_t\}_{t\in[0,1]}$ 是一个 $\square$-测地线。证明完毕。 $\square$

定理的证明 *6.4*。设 $X_0$ 和 $X_1$ 为 mm-空间，并假设 $r := \square(X_0, X_1) > 0$。根据定理 1.5，存在一条 $\square$- 测地线 $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$，从 $X_0$ 到 $X_1$。我们取一个函数 $f$ 和一个 mm- 空间 $Z$，使其满足引理 6.5 的假设，例如，

$$f(t) := r\min\{t, 1-t\} \quad \text{and} \quad Z := ([0,1], |\cdot|, \mathcal{L}^1).$$

对于任意的 $s,t \in [0,1]$，一个 mm-空间 $Y_{s,t}$ 定义为

$$Y_{s,t} := X_t \times_\infty sf(t)Z.$$

由引理 6.5，$\{Y_{s,t}\}_{t\in[0,1]}$ 对于每个 $s$ 都是从 $X_0$ 到 $X_1$ 的一条测地线。我们证明，当 $s \ne s'$ 时，$\{Y_{s,t}\}_{t\in[0,1]}$ 和 $\{Y_{s',t}\}_{t\in[0,1]}$ 不相交。只需证明，对于任意满足 $s < s'$ 的 $s$、$s'$、$t \in [0,1]$，$Y_{s,t}$ 与 $Y_{s',t}$ 不存在度量测度同构。映射 $\varphi := \mathrm{id}_{X_t\times Z}$ 是从 $Y_{s',t}$ 到 $Y_{s,t}$ 的一个 1- 利普希茨保测映射。如果 $Y_{s',t}$ 与 $Y_{s,t}$ 度量测度同构，那么映射 $\varphi$ 必须以与引理 2.12], 的证明中相同的方式，成为从 $Y_{s',t}$ 到 $Y_{s,t}$ 的一个等距映射，这就产生了矛盾。因此，$Y_{s',t}$ 与 $Y_{s,t}$ 彼此不度量测度同构。因此，我们得到一个由不可数多个两两不相交的测地线组成的族 $\{t \mapsto Y_{s,t}\}_{s\in[0,1]}$。证明完毕。 $\square$

推论 6.6. 对于任意两个不度量测度同构的 mm-空间 $X_0$ 和 $X_1$，以及任意 $t \in [0,1]$，集合

$$[X_0, X_1]_t := \{Z \in \mathcal{X} \mid \square(X_0, Z) = t\square(X_0, X_1) \text{ and } \square(X_1, Z) = (1-t)\square(X_0, X_1)\}$$

相对于盒拓扑不是紧的。

证明。取一条 $\square$-测地线 $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ 从 $X_0$ 到 $X_1$ 以及一个函数 $f$ 满足引理 6.5 的假设的 mm-空间

$$Z_n := X_t \times_\infty f(t)([0,1]^n, \|\cdot\|_\infty, \mathcal{L}^n), \quad n = 1, 2, \dots$$

对任意 $n$，均属于集合 $[X_0, X_1]_t$。然而，该序列 $\{Z_n\}_{n=1}^\infty$ 没有 $\square$-收敛子列（参见 [24, 命题 7.37]）。证明完毕。 $\square$

注释 6.7. (1) 定理 6.4 表明，相对于盒度量 $\mathcal{X}$，其 Alexandrov 曲率既没有下界，也没有上界 $\square$。

（2）在 Gromov-Hausdorff 空间的情形下，可以参见6.5 中的引理 [12, 命题 5。3]以及6.6 中的推论 [5]，其中给出了类似的结论。关于 Gromov-Hausdorff 空间上的一族测地线的构造，已有研究见 [12, 20]。

## 7. $\mathcal{X}$ AND $\Pi$ ARE LOCALLY PATH CONNECTED

本节的目标是证明定理 1.6。对于集中拓扑和弱拓扑，目前很难得到测地线，但可以在一个小球内构造连续路径。为证明定理 1.6，我们先准备几个引理。

命题 7.1. 设 $X_0$ 和 $X_1$ 是两个带有 $X_0 \prec X_1$ 的 mm-空间，并且 $f\colon X_1 \to X_0$ 是一个 1-Lipschitz 保测映射。对于任意 $0 < t < 1$，我们在 $X_1$ 上定义度量 $d_{X_t}$ 如下：

$$d_{X_t}(x, x') := (1-t)d_{X_0}(f(x), f(x')) + td_{X_1}(x, x'), \quad x, x' \in X_1,$$

并定义一个 mm-空间

$$X_t := (X_1, d_{X_t}, \mu_{X_1}).$$

那么映射 $[0,1] \ni t \mapsto X_t$ 是一条从 $X_0$ 到 $X_1$ 的 $\square$-连续路径，并且关于 Lipschitz 序是单调的，也就是说，对每个 $0 \le s \le t \le 1$，都有 $X_s \prec X_t$。

证明。对于任意 $s, t \in (0,1]$ 满足 $s \le t$，由于 $d_{X_s} \le d_{X_t}$，我们有 $X_s \prec X_t$。此外，对于任意$t \in (0,1]$，，映射 $f$ 相对于 $d_{X_0}$ 和 $d_{X_t}$也是 1-利普希茨的，这意味着 $X_0 \prec X_t$。因此我们得到了 $t \mapsto X_t$的单调性。

接下来我们证明关于 $\square$的（一致）连续性。我们取一个实数 $\varepsilon > 0$。由 $\mu_{X_1}$的内正则性，存在一个紧子集 $K \subset X_1$ 使得

$$\mu_{X_1}(K) \ge 1 - \varepsilon.$$

若两个实数 $s, t \in [0,1]$ 满足 $|s-t| \le (\operatorname{diam} K)^{-1}\varepsilon$，则 $\square(X_s, X_t) \le \varepsilon$ 成立。事实上，当 $s, t \in (0,1]$，令 $\pi := (\mathrm{id}_{X_1}, \mathrm{id}_{X_1})_*\mu_{X_1}$ 且 $S := \{(x,x) \mid x \in K\}$时，我们有 $\pi(S) = \mu_{X_1}(K) \ge 1 - \varepsilon$，并且

$$\begin{aligned}
\operatorname{dis} S &= \sup_{x,x' \in K} |d_{X_s}(x,x') - d_{X_t}(x,x')| \\
&= |s-t| \sup_{x,x' \in K} |d_{X_1}(x,x') - d_{X_0}(f(x), f(x'))| \\
&\le |s-t| \operatorname{diam} K \le \varepsilon.
\end{aligned}$$

由此，根据引理 $\square(X_s, X_t) \le \varepsilon$ 2.10，我们得到 $s = 0$。类似地，若$\pi$，$= (f, \mathrm{id}_{X_1})_*\mu_{X_1}$，则只需令 $S\colon = \{(f(x)\ x) \mid x \in K\}$。证明完毕。$\square$

命题 7.2. 设 $\mathcal{P}$ 是一个金字塔，且令 $\varepsilon > 0$。存在一个 mm-空间 $X \in \mathcal{P}$ 以及一条 $\rho$-连续路径 $\gamma\colon [0,1] \to \Pi$，连接 $\mathcal{P}_X$ 和 $\mathcal{P}$，使得

$$\rho(\gamma(t), \mathcal{P}) < \varepsilon \quad and \quad \gamma(t) \subset \mathcal{P}$$

对所有 $t \in [0,1]$。

证明。设 $\{Y_m\}_{m=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{P}$的逼近。根据命题 7.1，对每个 $m$，存在一条 $\square$-连续路径 $\gamma_m\colon [0,1] \to \mathcal{X}$，从 $Y_m$到 $Y_{m+1}$，且 $Y_m \prec \gamma_m(t) \prec Y_{m+1}$对所有 $t$成立。我们定义映射 $\gamma\colon [0,1) \to \Pi$如下：

$$\gamma(t) := \mathcal{P}_{\gamma_m(2-2^m(1-t))} \quad \text{if } 1 - 2^{-m+1} \le t \le 1 - 2^{-m}.$$

由于 $Y_m$当 $m \to \infty$时弱收敛到 $\mathcal{P}$，因此当 $t \to 1$时，$\gamma(t)$ 弱收敛到 $\mathcal{P}$。于是，$\gamma$ 是一条 $\rho$-连续路径，从 $\mathcal{P}_{Y_1}$ 和 $\mathcal{P}$ 出发，且对所有 $t$，$\gamma(t) \subset \mathcal{P}$。如有必要，对 $\gamma$ 进行截断，即可得到所需路径。$\square$

定理 *1.6* 的证明。我们先证明 $\mathcal{X}$ 在集中拓扑下是局部道路连通的。若非如此，则存在一个 mm-空间 $X$、一个实数 $\varepsilon > 0$以及一个 $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛到 $X$ 的 mm-空间序列，使得对任意 $d_{\mathrm{conc}}$-连续路径 $\gamma\colon [0,1] \to \mathcal{X}$从$Y_n$ 到 $X$，都存在 $t \in [0,1]$ 使得

$$d_{\mathrm{conc}}(\gamma(t), X) > \varepsilon.$$

根据命题 2.21，存在一个序列 $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 由 mm-空间组成 $\square$-收敛到 $X$，且 $Z_n \prec Y_n$ 对每个 $n$均成立。根据命题 7.1 和定理 1.5，对每个 $n$，存在$\square$-连续路径 $\gamma_n^1$ 和 $\gamma_n^2$，使得

- $\gamma_n^1\colon [0,1] \to \mathcal{X}$将 $Y_n$连接到 $Z_n$，并满足 $Z_n \prec \gamma_n^1(t) \prec Y_n$，对任意 $0 \le t \le 1$，
- $\gamma_n^2\colon [0,1] \to \mathcal{X}$是一条从 $Z_n$到 $X$的 $\square$-测地线。

将两条路径 $\gamma_n^1$ 和 $\gamma_n^2$连接起来，我们得到一条从 $Y_n$ 到 $X$的连续路径。根据假设以及

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,1]} d_{\mathrm{conc}}(\gamma_n^2(t),X)\le\lim_{n\to\infty}\square(Z_n,X)=0,$$

存在 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,1]$，使得

$$d_{\mathrm{conc}}(\gamma_n^1(t_n),X)>\varepsilon$$

对任意充分大的 $n$ 都成立。另一方面，$\{\gamma_n^1(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 必须集中到 $X$，当 $n\to\infty$ 时。事实上，由于对所有 $n$，$Z_n\prec\gamma_n^1(t_n)\prec Y_n$，所以 $\{\gamma_n^1(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 的弱收敛子序列的极限必为 $X$。这是矛盾。因此，$\mathcal{X}$ 在集中拓扑下是局部道路连通的。

接下来我们证明 $\Pi$ 是局部道路连通的。证明思路与前半部分相同。假设 $\Pi$ 不是局部道路连通的。存在一个金字塔 $\mathcal{P}$、一个实数 $\varepsilon>0$，以及一个弱收敛到 $\mathcal{P}$ 的金字塔序列 $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得对于任意 $\rho$-连续路径 $\gamma\colon[0,1]\to\Pi$，从 $\mathcal{P}_n$ 到 $\mathcal{P}$，都存在 $t\in[0,1]$，使得

$$\rho(\gamma(t),\mathcal{P})>\varepsilon.$$

对于每个 $m$ 和 $n$，根据命题 7.2，存在 mm-空间 $X_m\in\mathcal{P}$，$Y_n\in\mathcal{P}_n$ 和$\rho$-连续路径 $\gamma_n^1$ 以及 $\gamma_m^4$ 使得

- $\gamma_n^1\colon[0,1]\to\Pi$将 $\mathcal{P}_n$连接到 $\mathcal{P}_{Y_n}$，并且满足 $\rho(\gamma_n^1(t)\ \mathcal{P}_n)\le n^{-1}$，对任意 $0\le t\le 1$均成立。
- $\gamma_m^4\colon[0,1]\to\Pi$将 $\mathcal{P}_{X_m}$连接到 $\mathcal{P}$，并且满足 $\rho(\gamma_m^4(t)\ \mathcal{P})\le m^{-1}$，对任意 $0\le t\le 1$均成立。

特别地，$\{\mathcal{P}_{Y_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 弱收敛到 $\mathcal{P}$。因此，根据弱收敛的定义，对于任意 $m$，存在一个由 mm-空间组成的序列 $\{Z_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\square(Z_{mn},X_m)=0\quad\text{and}\quad Z_{mn}\prec Y_n\text{ for every }n.$$

对于每个 $m$，我们将 $n=n(m)$选为

$$\square(Z_{mn(m)},X_m)\le m^{-1}\quad\text{and}\quad\lim_{m\to\infty}n(m)=\infty,$$

并令

$$Y_m:=Y_{n(m)},\quad Z_m:=Z_{mn(m)},\quad\text{and}\quad\gamma_m^1:=\gamma_{n(m)}^1.$$

根据命题7.1 和定理1.5，对于每个 $m$，存在 $\square$-连续路径 $\gamma_m^2$ 和 $\gamma_m^3$，使得

- $\gamma_m^2\colon[0,1]\to\mathcal{X}$连接 $Y_m$与 $Z_m$，并且满足 $Z_m\prec\gamma_m^2(t)\prec Y_m$，对任意 $0\le t\le 1$均成立。
- $\gamma_m^3\colon[0,1]\to\mathcal{X}$是从 $Z_m$到 $X_m$的一条 $\square$-测地线。

将这四条路径 $\gamma_m^1$、$\gamma_m^2$、$\gamma_m^3$和 $\gamma_m^4$连接起来，我们得到一条从 $\mathcal{P}_m=\mathcal{P}_{n(m)}$到 $\mathcal{P}$的 $\rho$-连续路径。根据假设以及

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{t\in[0,1]}\rho(\gamma_m^1(t),\mathcal{P})=\lim_{m\to\infty}\sup_{t\in[0,1]}\rho(\gamma_m^3(t),\mathcal{P})=\lim_{m\to\infty}\sup_{t\in[0,1]}\rho(\gamma_m^4(t),\mathcal{P})=0,$$

存在 $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}\subset[0,1]$，使得

$$\rho(\gamma_m^2(t_m),\mathcal{P})>\varepsilon$$

对任意充分大的 $m$均成立。另一方面，当$m\to\infty$趋于$m\to\infty$时，$\{\gamma_m^2(t_m)\}_{m=1}^{\infty}$ 必须弱收敛到 $\mathcal{P}$。这就产生了矛盾。因此，$\Pi$ 是局部道路连通的。定理得证。$\square$

定理 1.4 和定理 1.6共同直接推出推论 1.7 。我们通过以下定理回顾 Peano 空间 。

定理 7.3（Hahn-Mazurkiewicz 定理）。豪斯多夫空间是紧、连通、可度量化且局部连通的，当且仅当它是单位闭区间 $[0,1]$ 的连续像。（这样的空间称为 Peano 空间。）

## 8. Revisit the weak topology on Π

设 $X$ 为一个豪斯多夫空间，并令 $\mathcal{F}(X)$ 表示 $X$ 的所有闭子集构成的集合。

我们回顾一下，对于给定的网 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 属于 $\mathcal{F}(X)$，$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的上闭极限和下闭极限定义为

$$\operatorname{Ls} A_\lambda := \{x \in X \mid U_x \cap A_\lambda \neq \emptyset \text{ cofinally for every neighborhood } U_x \text{ of } x\},$$
$$\operatorname{Li} A_\lambda := \{x \in X \mid U_x \cap A_\lambda \neq \emptyset \text{ residually for every neighborhood } U_x \text{ of } x\}.$$

注意，Ls $A_\lambda$ 和 Li $A_\lambda$ 是 $X$ 的闭子集，且 Li $A_\lambda \subset$ 包含于Ls $A_\lambda$。Ls $A_\lambda$ 的一个元素称为 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的聚点，Li $A_\lambda$ 的一个元素称为极限点。若 $X$ 是度量为 $d$的度量空间，我们看到，

$$\operatorname{Ls} A_\lambda = \{x \in X \mid \liminf_\lambda d(x, A_\lambda) = 0\} \text{ and } \operatorname{Li} A_\lambda = \{x \in X \mid \limsup_\lambda d(x, A_\lambda) = 0\},$$

其中，对于一个实数网 $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，$\liminf_\lambda a_\lambda := \sup_{\lambda\in\Lambda} \inf_{\lambda'\geq\lambda} a_\lambda$ 和 $\limsup_\lambda a_\lambda := \inf_{\lambda\in\Lambda} \sup_{\lambda'\geq\lambda} a_\lambda$。

定义 8.1. 网 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ Kuratowski-Painlev´e 收敛到 $A \in \mathcal{F}(X)$，条件是

$$\operatorname{Li} A_\lambda = \operatorname{Ls} A_\lambda = A.$$

众所周知，库拉托夫斯基-潘莱韦收敛是拓扑的（即存在一种能够实现该收敛的拓扑）当且仅当 $X$ 是局部紧的。另一方面，存在一种最细拓扑，其收敛弱于库拉托夫斯基-潘莱韦收敛。这种拓扑记作 $\tau$K，历史上称为库拉托夫斯基-潘莱韦收敛的拓扑化，或收敛拓扑。

接下来我们回顾 $\tau_{\mathrm{F}}$ on $\mathcal{F}(X)$ 上的 Fell 拓扑。Fell 拓扑与 Kuratowski-Painlev´e 收敛密切相关。这个拓扑由以下子基确定:

$$\{\{A \in \mathcal{F}(X) : A \cap V \neq \emptyset\} \mid V \text{ is open}\} \cup \{\{A \in \mathcal{F}(X) : A \subset X \setminus K\} \mid K \text{ is compact}\}.$$

Kuratowski-Painlev´e 收敛蕴含 $\tau_{\mathrm{F}}$-收敛，因此 $\tau_{\mathrm{F}} \subset \tau$K。如果 $X$ 是局部紧的，那么反过来，$\tau_{\mathrm{F}}$-收敛蕴含 Kuratowski-Painlev´e 收敛。在这种情况下，Fell 拓扑实现了 Kuratowski-Painlev´e 收敛。

本文中用到的已知结果列举如下。

定理 8.2 (Mrowka 定理，参见 [3, 定理 5.2.11 和 5.2.12])。设 $X$ 是一个豪斯多夫空间。任意网 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 在 $\mathcal{F}(X)$ 都有一个 Kuratowski-Painlev´e 收敛子网。此外，如果 $X$ 是第二可数的，那么任意序列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathcal{F}(X)$ 都有一个 Kuratowski-Painlev´e 收敛子列。

我们指出，序列的子网不一定是子列。Mrowka 定理表明，$\tau_{\mathrm{F}}$ 和 $\tau$K 的紧致性与序列紧性等价。

定理 8.3（参见 [3, 命题 5.1.2], [8, 4A2T]）。设 $X$ 是一个豪斯多夫空间。则下列 (1) 和 (2) 成立。

(1) $\tau_{\mathrm{F}}$ 和 $\tau$K 都是 $T_1$（弗雷歇）。(2) $\tau_{\mathrm{F}}$ 是豪斯多夫的，当且仅当 $X$ 是局部紧的。

定理 8.4（[4, 定理 3.12 和 3.13]）。设 $X$ 是一个可度量化空间。则以下 (1)–(3) 成立。

(1) $\tau$K 是序列的，当且仅当 $X$ 可分。(2) $\tau$K $= \tau_{\mathrm{F}}$，当且仅当 $X$ 至多有一个点没有紧邻域。

(3) $\tau_{\mathrm{F}}$ 是序列的，当且仅当 $X$ 可分，且 $X$ 至多有一个点没有紧邻域。

定理 8.5 (参见[3, 定理 5.2。10])。设 $X$ 是一个第一可数豪斯多夫空间，并设 $A$和 $A_n$, $n = 1, 2, \ldots$, 是 $X$的闭子集。那么 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\tau_{\mathrm{F}}$-收敛于 $A$ 当且仅当 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *Kuratowski-Painlev´e* 收敛于 $A$。特别地，任意 $\tau_{\mathrm{F}}$-收敛序列的极限都是唯一的。

现在我们考虑空间 $\mathcal{F}(\mathcal{X}, \square)$。定理 1.1 以及 $(\mathcal{X}, \square)$ 的一些性质表明

- 在 $\mathcal{F}(\mathcal{X}, \square)$ 上的 Kuratowski-Painlev´e 收敛不是拓扑的，
- $(\mathcal{F}(\mathcal{X}, \square)\, \tau_{\mathrm{F}})$ 是紧且 $T_1$ 的，但既非豪斯多夫空间，也非序列空间，
- $(\mathcal{F}(\mathcal{X}, \square)$ $\tau$K)是紧的， $T_1$，且是序列的，
- $\tau_{\mathrm{F}} \subsetneq \tau$K,
- $\tau_{\mathrm{F}}$和 $\tau$K 在 $\mathcal{F}(\mathcal{X}, \square)$ 上序列等价。

注释 8.6. (1) $\tau$K 是 Fell 拓扑 $\tau_{\mathrm{F}}$ 的序列化。拓扑的序列化是一种更强的拓扑，其开集由原拓扑的所有序列开集构成。

(2) 从另一个角度来看 $\tau$K，如果 $X$ 是一个可度量化空间，那么 $\tau$K 是所有 Wijsman 拓扑 $\tau_{\mathrm{W}_d}$ 的下确界，其中 $d$ 遍历 $X$ 上的所有相容度量。对于一个度量空间 $(X, d)$， $\mathcal{F}(X)$ 上的 Wijsman 拓扑 $\tau_{\mathrm{W}_d}$ 是使得函数 $A \mapsto d(x, A)$ 在 $\mathcal{F}(X)$ 上对每个 $x \in X$ 都连续的最弱拓扑。这里，如果存在一个 $X$ 上的相容度量 $d$，使得 $\tau\mathrm{K} = \tau_{\mathrm{W}_d}$，那么 $X$ 必须是局部紧的（见 [2]）。在 $(\mathcal{X}, \square)$ 上，Wijsman 拓扑不存在最小元。(3) 作者不知道 $(\mathcal{F}(\mathcal{X}, \square)$ $\tau$K) 是否是豪斯多夫的。

现在我们证明定理1.8。

定理证明 *1.8*。 由于 $\Pi$和 $(\mathcal{F}(\mathcal{X}, \square)$ $\tau$K) 都是序列的，因此只需证明，对于任意金字塔序列 $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^{\infty}$，弱收敛和 $\tau$K-收敛彼此等价。实际上，它们分别与 Kuratowski-Painlev´e 收敛等价。证明完毕。 □

本文的最后一个主题从以下事实开始。

命题 8.7（[24,推论 6.15]）。任意金字塔都是 $d_{\mathrm{conc}}$-闭的。

这意味着 $\Pi \subset \mathcal{F}(\mathcal{X}, d_{\mathrm{conc}}) \subset \mathcal{F}(\mathcal{X}, \square)$。下面这个观察很有意思。

命题 8.8. 对于任意金字塔序列， $\mathcal{F}(\mathcal{X}, \square)$ 和 $\mathcal{F}(\mathcal{X}, d_{\mathrm{conc}})$ 上的 Kuratowski-Painlev´e 收敛一致。

证明。设 $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个金字塔序列。我们用 $\mathrm{Ls}_{\square}\mathcal{P}_n$ 和 $\mathrm{Li}_{\square}\mathcal{P}_n$ 表示关于盒距离函数 $\square$ 的上闭极限和下闭极限。类似地，我们用 $\mathrm{Ls}_{\mathrm{conc}}\mathcal{P}_n$ 和 $\mathrm{Li}_{\mathrm{conc}}\mathcal{P}_n$ 表示关于可观测距离函数 $d_{\mathrm{conc}}$ 的上闭极限和下闭极限。由于 $d_{\mathrm{conc}} \le \square$,

$$\mathrm{Ls}_{\square}\mathcal{P}_n \subset \mathrm{Ls}_{\mathrm{conc}}\mathcal{P}_n \quad \text{and} \quad \mathrm{Li}_{\square}\mathcal{P}_n \subset \mathrm{Li}_{\mathrm{conc}}\mathcal{P}_n$$

是平凡的。我们证明 $\mathrm{Ls}_{\mathrm{conc}}\mathcal{P}_n \subset \mathrm{Ls}_{\square}\mathcal{P}_n$。设 $X \in \mathrm{Ls}_{\mathrm{conc}}\mathcal{P}_n$。那么存在 $\{n\}$ 的一个子列 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ 以及 mm-空间 $X_i \in \mathcal{P}_{n_i}$、 $i = 1$、2、.....，使得当 $i \to \infty$ 时， $X_i$ 集中收敛到 $X$。根据命题 2.21，我们找到一个由 mm-空间 $\square$ 构成的序列 $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$，其 $\square$-收敛到 $X$，且对每个 $i$ 都有 $Y_i \prec X_i$。由于 $\mathcal{P}_{n_i}$ 是一个金字塔，我们有 $Y_i \in \mathcal{P}_{n_i}$，因此

$$\liminf_{n\to\infty} \square(X, \mathcal{P}_n) \le \liminf_{i\to\infty} \square(X, \mathcal{P}_{n_i}) \le \lim_{i\to\infty} \square(X, Y_i) = 0,$$

这意味着 $X \in \mathrm{Ls}_{\square}\,\mathcal{P}_n$。我们得到 $\mathrm{Ls}_{\mathrm{conc}}\,\mathcal{P}_n \subset \mathrm{Ls}_{\square}\,\mathcal{P}_n$。类似地，可得 $\mathrm{Li}_{\mathrm{conc}}\,\mathcal{P}_n \subset \mathrm{Li}_{\square}\,\mathcal{P}_n$。证明已完备。□

命题8.8 由此得到另一个嵌入，如下所示。

定理 8.9。包含映射 $\Pi \ni \mathcal{P} \mapsto \mathcal{P} \in (\mathcal{F}(\mathcal{X}, d_{\mathrm{conc}})\ \tau\mathrm{K})$ 是一个拓扑嵌入映射。

注意，$(\mathcal{F}(\mathcal{X}, d_{\mathrm{conc}})\ \tau\mathrm{K})$ 也是紧的，$T_1$，且是序列的。这个 $\tau\mathrm{K}$ 只是 $(\mathcal{X}, d_{\mathrm{conc}})$ 上 Kuratowski-Painlev´e 收敛的拓扑化；根据定义，它与 $(\mathcal{F}(\mathcal{X}, \square)\ \tau\mathrm{K})$ 无关。

## 9. Further questions

下述问题仍未解决。

问题 9.1. $\mathcal{X}$在集中拓扑下是否是 $\sigma$-紧的？等价地，$\Pi \setminus \mathcal{X}$是否是 $\Pi$的 $G_\delta$子集？

如果这个问题成立，那么 $\Pi \setminus \mathcal{X}$ 就是一个贝尔空间。

问题 9.2. $(\mathcal{X}, d_{\mathrm{conc}})$ 和 $(\Pi, \rho)$ 是测地空间吗？

问题 9.3. $(\mathcal{F}(\mathcal{X}, \square)\ \tau\mathrm{K})$ 是豪斯多夫的（可度量化的）吗？

问题 9.4. $(\mathcal{F}(\mathcal{X}, \square)\ \tau\mathrm{K})$ 与 $(\mathcal{F}(\mathcal{X}, d_{\mathrm{conc}})\ \tau\mathrm{K})$ 之间是否存在某种关系？ )？

问题 9.5. 能否将 $\Pi$ 拓扑地嵌入到 $(\mathcal{F}(\mathcal{X}, \square)\ \tau_{\mathrm{F}})$ 或 $(\mathcal{F}(\mathcal{X}, \square)\ \tau_{\mathrm{W}\square})$ 中？

致谢。作者感谢 Takumi Yokota 教授和 Yoshito Ishiki 教授提出的宝贵意见。

## References

[1] T. Banakh、R. Cauty 和 M. Zarichnyi，《无限维拓扑中的公开问题》，载于《拓扑学中的公开问题》第二卷（E. Pearl 编），Elsevier，2007 年，第 601–624 页。[2] G. Beer，《度量空间中闭集的收敛与距离函数》，Bull. Austral. Math. Soc. 31（1985），第 3 期，421–432。[3] ———，《闭集与闭凸集上的拓扑》，Mathematics and its Applications，第 268 卷，Kluwer Academic Publishers Group，Dordrecht，1993。[4] G. Beer 和 J. Rodr´ıguez-L´opez，《与闭集的 Kuratowski-Painlev´e 收敛相关的拓扑》，J. Convex Anal. 17（2010），第 3–4 期，805–826。[5] O. B. Borisova，《Gromov-Hausdorff 空间中线段的非紧性》，Moscow Univ. Math. Bull. 76（2021），第 5 期，187–192。译自 Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. 2021 年第 5 期，3–8。[6] D. Burago、Y. Burago 和 S. Ivanov，《度量几何教程》，数学研究生教材，第 33 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001。[7] R. Engelking，《一般拓扑学》，第 2 版，Sigma Series in Pure Mathematics，第 6 卷，Heldermann Verlag，柏林，1989。作者从波兰语译出。[8] D. H. Fremlin，《测度论》第 4 卷，Torres Fremlin，Colchester，2006。拓扑测度空间。第一、二部分；2003 年原版经修订的第二次印刷。[9] A. Greven、P. Pfaffelhuber 和 A. Winter，《随机度量测度空间（Λ-合并测度树）的分布收敛》，Probab. Theory Related Fields 145（2009），第 1–2 期，285–322。[10] ———，《树值重采样动力学：鞅问题及应用》，Probab. Theory Related Fields 155（2013），第 3–4 期，789–838。[11] M. Gromov，《黎曼与非黎曼空间的度量结构》，2001 年英文版重印本，Modern Birkh¨auser Classics，Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，2007。[12] Y. Ishiki，《Gromov-Hausdorff 距离的分支测地线》，Anal. Geom. Metr. Spaces 10（2022），第 1 期，109–128。[13] D. Kazukawa，《积空间的集中》，Anal. Geom. Metr. Spaces 9（2021），第 1 期，186–218。[14] ———，《度量变换空间的收敛》，Israel J. Math. 252（2022），第 1 期，243–290。

[15] D. Kazukawa、H. Nakajima 和 T. Shioya，《度量测度空间空间的主丛结构》。预印本。[16] D. Kazukawa 和 T. Yokota，《度量测度空间预紧集的有界性》，Geom. Dedicata 215（2021），229–242。[17] M. Ledoux，《测度集中现象》，数学调查与专著，第 89 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001。[18] P. L´evy，《泛函分析的具体问题。附 F. Pellegrino 关于解析泛函的补充》，Gauthier-Villars，巴黎，1951（法文）。第 2 版。 ´W. L[19] ohr，《度量测度空间上的 Gromov-Prohorov 度量与 Gromov 的 ¨-度量的等价性》，Electron. Commun. Probab. 18（2013），第 17 期，10。 □$_\lambda$F. M[20] emoli 和 Z. Wan，《Gromov 型测地线的刻画》，Differential Geom. Appl. 88（2023），论文编号 102006。 ´V. D. Milman，《P. L[21] evy 在几何泛函分析中的遗产》，Ast´erisque 157-158（1988），273–301。Paul L´evy 随机过程研讨会（帕莱索，1987）。 ´H. Nakajima，《通过最优传输定义的盒距离与可观测距离》。arXiv:2204.04893。[22] R. Ozawa 和 T. Shioya，《度量测度不变量的极限公式与相变性质》，Math. Z. 280（2015），第 3–4 期，759–782。[23] T. Shioya，《度量测度几何》，IRMA 数学与理论物理讲座，第 25 卷，EMS 出版社，苏黎世，2016。Gromov 收敛理论与度量和测度的集中。[24] K.-T. Sturm，《空间之空间：度量测度空间上的曲率界与梯度流》。arXiv:1208.0434v2。¨C. Villani，《最优传输专题》，数学研究生教材，第 58 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2003。[25] S. Willard，《一般拓扑学》，Addison-Wesley 出版公司，雷丁，马萨诸塞州—伦敦—唐米尔斯，安大略省，1970。

Faculty of Mathematics, Kyushu University, Fukuoka 819-0395, JAPAN电子邮箱：kazukawa@math.kyushu-u.ac.jp

Mathematical Sciences Course, Ehime University, Matsuyama 790-8577, JAPAN电子邮箱：nakajima.hiroki.nz@ehime-u.ac.jp

Mathematical Institute, Tohoku University, Sendai 980-8578, JAPAN
电子邮箱：shioya@math.tohoku.ac.jp