arXiv:2304.06880v1 [math.MG] 14 Apr 2023

度量测度空间之空间的主丛结构

DAISUKE KAZUKAWA、HIROKI NAKAJIMA 和 TAKASHI SHIOYA

Abstract. 我们研究赋予盒拓扑或集中拓扑的度量测度空间同构类之空间 $\mathcal{X}$ 的拓扑结构。我们考察正实数乘法群 $\mathbb{R}_+$ 在 $\mathcal{X}$上的尺度变换作用，其中仅有一个单点度量测度空间（记作 $*$）是不动点。我们证明，$\mathbb{R}_+$作用在 $\mathcal{X}_*$ 上的$= \mathcal{X} \setminus \{*\}$ 具有非平凡且局部平凡的主$\mathbb{R}_+$丛结构，其底空间为商空间。我们的纤维丛 $\mathbb{R}_+ \to \mathcal{X}_* \to \mathcal{X}_*/\mathbb{R}_+$ 是一个颇为特殊的例子：它是一个纤维可缩的非平凡主纤维丛。对于 $\mathcal{X}$的金字塔紧化，我们也得到了类似结论，并完全确定了紧化上 $\mathbb{R}_+$作用的不动点集结构。

1. Introduction

研究度量测度空间同构类构成的空间 $\mathcal{X}$ 的结构是一项颇具挑战的问题。这里假设度量测度空间是带有博雷尔概率测度的完备可分度量空间。记 $\mathbb{R}_+$ 为正实数的乘法群。我们有 $\mathbb{R}_+$ 在 $\mathcal{X}$ 上的自然群作用，定义如下：

$$\mathbb{R}_+ \times \mathcal{X} \ni (t, X) \longmapsto tX \in \mathcal{X},$$

其中 tX 是度量为 X 的 t 倍缩放的空间 X。注意，单点度量测度空间的同构类记作 $*$，它是此作用唯一的不动点。令 $\mathcal{X}_* := \mathcal{X} \setminus \{*\}$，并记 Σ 为赋予商拓扑的商空间 $\mathcal{X}_*/\mathbb{R}_+$。

关于空间的结构 $\mathcal{X}$，Sturm [17] 得到了一个重要结果： $\mathcal{X}$ 中具有有限 L^{pq}-大小的子空间 $\mathcal{X}_{pq}$，配备 $L^p, {}^q$-畸变度量后，是一个非负曲率的亚历山大空间，并与欧几里得锥等距，其中 $p = 2$ 和 $q \in [1, +\infty)$。他还确定了 $\mathcal{X}_{pq}$ 中的测地线（当 $p, q \in [1, +\infty)$ 时），并证明 $\mathbb{R}_+$ 作用的任意轨道都是一条测地射线。这意味着，对于任意 $p, q \in [1, +\infty)$， $\mathcal{X}_{pq}$ 与以 Σ_{pq} 为底的锥同胚，其中 Σ_{pq} 是 Σ 中对应于 $\mathcal{X}_{pq}$ 的子空间。

此外，Ivanov 和 Tuzhilin [8] 指出，格罗莫夫-豪斯多夫空间同胚于由 $\mathbb{R}_+$-作用得到的商空间上的锥。

本文研究了 $\mathcal{X}$ 在盒度量和可观测度量下的拓扑结构，以及 $\mathcal{X}$的金字塔紧化。这些度量和金字塔紧化是度量测度空间研究中的基本概念，最初由 Gromov [6]引入（另见 [16]）。盒度量与 $L^{0,q}$-畸变度量密切相关（见 [17]），并且与 Gromov-Prokhorov 度量一致（见 [5, 13]）。可观测度量基于 L´evy 和 Milman [12, 14] 建立的测度集中现象这一思想定义（另见 [11]），有助于研究维数趋于无穷大的空间的收敛性。由盒度量和可观测度量所诱导的拓扑以及其

日期：2023年4月13日。2020年数学学科分类。53C23，57R22。关键词和短语：度量测度空间、盒距离、集中拓扑、金字塔、主丛。本研究得到 JSPS KAKENHI 资助，项目编号为 JP22K20338、JP22K13908、JP19K03459。

可观测度量分别称为盒拓扑和集中拓扑。在我们先前的论文 [10], 中，我们证明了盒度量是测地的，并且相对于盒拓扑和集中拓扑，$\mathcal{X}$ 是局部道路连通且可缩的。然而，盒度量和可观测度量与 L^p、^{q}-畸变度量大不相同。一个本质区别是，$\mathbb{R}_+$-作用的任何轨道都不是盒度量和可观测度量下的测地射线。此外，盒度量下存在错综复杂的分支测地线，而且Alexandrov曲率既没有下界也没有上界（见 [10, 注 6.7]）。这里引出的问题是：

- 带有盒式和/或集中拓扑的 $\mathcal{X}$ 是否与Σ上的锥同胚?

令人惊讶的是，答案是否定的。

定理 1.1. 对于盒拓扑和集中拓扑，$\mathcal{X}_* = \mathcal{X} \setminus \{*\}$ 与 $\mathbb{R}_+ \times \Sigma$ 均不同胚，且 $\mathcal{X}$ 与 Σ 上的锥也不同胚。

我们的主要定理之一表述如下。

定理 1.2. 对于盒式拓扑和集中拓扑，$\mathbb{R}_+$ 在 $\mathcal{X}_*$ 上的作用具有非平凡且局部平凡的主 $\mathbb{R}_+$纤维丛结构，其底空间为 Σ。

一般而言，在仿紧豪斯多夫基空间上的可缩纤维局部平凡主丛是平凡的（例如参见第 4] 章的推论 2.8] 和 [7, 8.1 定理），但当底空间不仿紧时，这一结论未必成立。值得注意的是，我们的主丛 $\mathbb{R}_+ \to \mathcal{X}_* \to \Sigma$ 就是这样一个反例。

作用 $\mathbb{R}_+$ 在 $\mathcal{X}$ 上的作用自然延拓到 $\mathcal{X}$的金字塔紧化，记作 Π（定义见第 2.3 节 Π）。记 Fix(Π) 为 $\mathbb{R}_+$ 在 Π上的作用的不动点集，并令 $\Pi_* := \Pi \setminus \mathrm{Fix}(\Pi)$。我们还有以下结论。

定理 1.3. $\mathbb{R}_+$ 在 Π_* 上的作用具有非平凡局部平凡主 $\mathbb{R}_+$丛结构，其底空间为商空间 $\Pi_*/\mathbb{R}_+$。

我们研究 Fix(Π) 的结构，并得到以下定理。用 $\mathcal{A}$ 表示所有总和不超过一的非负实数单调非递增序列所组成的集合。

定理 1。 4. 不动点集 Fix(Π) 与赋予 l^2-弱拓扑的 $\mathcal{A}$ 同胚 .

下面介绍我们证明的思路。

定理 1.1 的证明的一个关键点是证明 Σ 不是乌雷松空间（引理3.2）。如果 $\Sigma \times \mathbb{R}_+$ 与 $\mathcal{X}_*$同胚，那么 Σ 将是可度量化的，这与 Σ不具乌雷松性质相矛盾。值得注意的是，Σ 是豪斯多夫空间（命题 3.10）。

对于定理 1.2 和 1.3，纤维丛的局部平凡性是证明的核心。

对于采用盒拓扑的定理 1.2 ，我们构造一个 $\mathbb{R}_+$-不变的开覆盖$\{\mathcal{X}_\Delta\}_{\Delta\in(0,1)}$，并构造连续一次齐次函数 $r_\Delta\colon \mathcal{X}_\Delta \to \mathbb{R}_+$，其中 $\Delta \in (0, 1)$。我们将 $\mathcal{X}_\Delta$ 定义为满足任意原子的测度均小于 Δ 的度量测度空间的集合，并将 $r_\Delta(X)$，$X \in \mathcal{X}_\Delta$ 定义为部分直径 $\mathrm{diam}(X; s)$ 关于参数 $s \in [0, (\Delta+1)/2]$ 的积分。我们取积分的原因是为了保证 r_Δ 的连续性。利用 r_Δ，我们得到一个局部平凡化 $\mathcal{X}_\Delta \simeq \mathcal{X}_\Delta/\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$。

定理 1.2 对于集中拓扑，可通过将底空间 $\Pi_*/\mathbb{R}_+$ 限制到 $\mathcal{X}_*/\mathbb{R}_+$，直接由定理 1.3 。

对于定理 1.3 的证明，我们构造一个 $\mathbb{R}_+$-不变的开覆盖 Π_* ，并在该覆盖中的每个开集上定义连续一次齐次函数。这一次，对于一个满足 $N+1$ 的 $\kappa = (\kappa_0, \dots, \kappa_N)$ 正实数元组，我们将 $\sum_{i=0}^N \kappa_i < 1$ 定义为 Π_κ。

满足以下条件的所有 $\mathcal{P}\in\Pi$ 的集合：对于某个 $\delta>0$，$<+\infty$ 且 >0。并定义 $r_\kappa(\mathcal{P})$、$\mathcal{P}\in\Pi_\kappa$ 为关于 $s\in[0,1]$ 的积分，其被积函数为分离距离 $\mathrm{Sep}(\mathcal{P};\kappa_0+s,\dots,\kappa_N+s)$（关于 $\mathrm{Sep}(\cdots)$ 的定义见定义 2.17）。这些结构诱导出一个局部平凡化 $\Pi_\kappa\simeq\Pi_\kappa/\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$。然而，要证明所有 Π_κ 的并集与 Π_* 重合并不容易。为此，我们需要研究 $\mathrm{Fix}(\Pi)$ 中金字塔的结构，具体如下。对于 $A=\{a_i\}_{i=1}^\infty\in\mathcal{A}$，我们定义

$$\mathcal{P}_A:=\left\{X\in\mathcal{X}\;\middle|\;\text{There exists a sequence }\{x_i\}_{i=1}^\infty\subset X\text{ such that }\sum_{i=1}^\infty a_i\delta_{x_i}\le\mu_X\right\}.$$

定理 m 1.5. 对于给定的 $\mathcal{P}\in\Pi$，以下 (1)–(4) 彼此等价。

(1) $\mathcal{P}\in$不动点集(Π)。(2) $t\mathcal{P}=\mathcal{P}$ 对于某个 $t\in\mathbb{R}_+$，满足 $t\neq1$。(3) 对于任意 $\kappa_0,\dots,\kappa_N>0$，满足 $\sum_{i=0}^N\kappa_i<1$，分离距离 $\mathrm{Sep}(\mathcal{P};\kappa_0,\dots,\kappa_N)$ 要么为 0，要么为 $+\infty$。(4) 存在 $A\in\mathcal{A}$，使得 $\mathcal{P}=\mathcal{P}_A$。

在定理 1.5 中，蕴含关系“(3) $\Rightarrow$(4)”极为微妙，需要经过细致讨论才能证明。定理 1.5 稍加讨论便可推出，Π_κ的并集与 Π_*重合。

定理 1.4 由定理 1.5 以及以下内容推得。

定理 1.6。映射 $\mathcal{A}\ni A\longmapsto\mathcal{P}_A\in\Pi$ 是一个内射同胚。

定理 1.6 也由 Esaki-Kazukawa-Mitsuishi 独立证明 [4]。我们的证明比 [4] 更简单。文献 [4] 证明了 $\mathcal{A}$ 上的弱拓扑与l^∞-拓扑一致。

本文的组织结构如下。在预备知识一节之后，我们将在第 3 节研究 $\mathbb{R}_+$ 在 $\mathcal{X}_*$上的尺度变换作用。我们证明 Σ 不是乌雷松空间，由此得到定理 1.1。借助定理 1.5 和 1.3，我们还将证明定理 1.2。在第 4节，我们确定不动点集 $\mathrm{Fix}(\Pi)$ 中金字塔的结构，并证明定理 1.5 和1.6，从而得到定理 1.4。在最后的第 5节，我们提出若干问题。

2. Preliminaries

本节介绍度量测度空间、盒距离、可观测距离、金字塔和弱拓扑的定义及其若干性质。沿用 [16] 中的大部分概念。更多详情请参阅 [16] 和 [6, 第 $3\frac{1}{2}_+$] 章。

2.1. 度量测度空间。设 (X,d_X) 是一个完备可分度量空间，μ_X 是定义在 X 上的博雷尔概率测度。我们称三元组 (X,d_X,μ_X) 为一个度量测度空间，简称 mm-空间。有时我们说 X 是一个 mm- 空间，此时 X 的度量和测度分别记为 d_X 和 μ_X。

定义 2.1（mm-同构）。若存在等距映射 $f\colon\operatorname{supp}\mu_X\to\operatorname{supp}\mu_Y$，使得 $f_*\mu_X=\mu_Y$，则称两个 mm-空间 X 和 Y 彼此 mm-同构，其中 $f_*\mu_X$ 是 μ_X 在 f 下的推前测度。这样的等距映射 f 称为 mm-同构。用 $\mathcal{X}$ 表示 mm-空间的 mm-同构类集合。

注意，mm-空间 X 与 $(\operatorname{supp}\mu_X,d_X,\mu_X)$ mm-同构。我们假设一个 mm-空间 X 满足

$$X=\operatorname{supp}\mu_X$$

除非另有说明。

定义 2.2（利普希茨序）。设 X 和 Y 是两个度量测度空间。若存在一个 1-Lipschitz映射 $f\colon X \to Y$ 满足 $f_*\mu_X = \mu_Y$，则称 X （利普希茨）支配 Y，并记作 $Y \prec X$。我们称 $\mathcal{X}$ 上的关系 $\prec$ 为利普希茨序。

Lipschitz序 $\prec$ 是 $\mathcal{X}$上的偏序关系。

2.2. 盒距离与可观测距离。对于度量空间 (X, d_X) 的一个子集 A，以及一个实数 $r > 0$，我们定义

$$U_r(A) := \{x \in X \mid d_X(x, A) < r\},$$

其中 $d_X(x, A) :=$ 下确界$_{a\in A}\, d_X(x, a)$。

定义 2.3（Prokhorov距离）。度量空间 X 上两个博雷尔概率测度 μ 和 ν 之间的Prokhorov距离 $d_{\mathrm{P}}(\mu, \nu)$ 定义为满足以下条件的 $\varepsilon > 0$ 的下确界。

$$\mu(U_\varepsilon(A)) \geq \nu(A) - \varepsilon$$

对于任意博雷尔子集 $A \subset X$。

Prokhorov度量 d_{P} 是在 X 为可分度量空间的条件下，对博雷尔概率测度的弱收敛进行度量化的一种方式。

定义 2.4（Ky Fan度量）。设 (X, μ) 为测度空间，(Y, d_Y) 为度量空间。对于两个 μ-可测映射 $f, g\colon X \to Y$，我们将 $d^{\mu}{}_{\mathrm{KF}}(f, g)$ 定义为满足 $\varepsilon \geq 0$ 的下确界。

$$\mu(\{x \in X \mid d_Y(f(x), g(x)) > \varepsilon\}) \leq \varepsilon.$$

函数 $d^{\mu}{}_{\mathrm{KF}}$ 是从 X 到 Y 的 μ-可测映射集合上的一个度量，其中将几乎处处相等的两个映射视为相同。我们称 $d^{\mu}{}_{\mathrm{KF}}$ 为 Ky Fan度量。

定义 2.5（参数）。设 $I := [0, 1)$，并设 X 为一个 mm-空间。映射 $\varphi\colon I \to X$ 称为 X 的一个参数，如果 φ 是一个博雷尔可测映射，使得

$$\varphi_*\mathcal{L}^1 = \mu_X,$$

其中，$\mathcal{L}^1$ 是 I上的一维勒贝格测度。

注意，任何 mm-空间都有一个参数（见 [16, 引理 4。2]）。

定义 2.6（盒距离）。我们将两个 mm-空间 X 和 Y 之间的盒距离 $\square(X, Y)$ 定义为满足以下条件的 $\varepsilon \geq 0$ 的下确界：存在参数 $\varphi\colon I \to X$、$\psi\colon I \to Y$，以及一个博雷尔子集 $I_0 \subset I$，使得 $\mathcal{L}^1(I_0) \geq 1 - \varepsilon$，并且满足以下条件。

$$|d_X(\varphi(s), \varphi(t)) - d_Y(\psi(s), \psi(t))| \leq \varepsilon$$

对于任意 s、$t \in I_0$。

定理 2.7（[16, 定理 4.10]）。盒距离函数 $\square$ 是 $\mathcal{X}$上的完备可分度量。

人们定义并研究了多种与盒距离等价的距离，例如 Greven-Pfaffelhuber-Winter [5] 引入的格罗莫夫-普罗霍罗夫距离。

定理 2.8（[13, 定理 3.1], [16, 备注 4.16]）。对于任意两个度量测度空间 X 和 Y，我们有

$$\square(X, Y) = d_{\mathrm{GP}}((X, 2d_X, \mu_X), (Y, 2d_Y, \mu_Y)),$$

其中，$d_{\mathrm{GP}}(X, Y)$ 是 Gromov-Prokhorov 度量，其定义为：在 X 与 Y 的不交并上，所有分别扩展 d_X 和 d_Y 的度量所对应的 $d_{\mathrm{P}}(\mu_X, \mu_Y)$ 的下确界。特别地，

$$d_{\mathrm{GP}}(X, Y) \leq \square(X, Y) \leq 2d_{\mathrm{GP}}(X, Y).$$

由盒距离诱导的拓扑在历史上有多种名称，例如弱 Gromov 拓扑。然而，本文将其称为盒拓扑。

全变差距离可用于估计盒距离。

定义 2.9（全变差距离）。拓扑空间 X 上两个博雷尔概率测度 μ 和 ν 之间的全变差距离 $d_{\mathrm{TV}}(\mu,\nu)$ 定义为

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu,\nu) := \sup_{A} |\mu(A) - \nu(A)|,$$

其中， A遍历 X的所有博雷尔子集。

如果 μ 和 ν都相对于 X上的博雷尔测度 ω 绝对连续，那么

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu,\nu) = \frac{1}{2}\int_X \left|\frac{d\mu}{d\omega} - \frac{d\nu}{d\omega}\right| d\omega,$$

其中 $\frac{d\mu}{d\omega}$ 是 μ 相对于 ω的拉东-尼科迪姆导数。

命题 2.10 ([16, 命题4。12])。 对于完备可分度量空间 μ 上的任意两个博雷尔概率测度 ν，我们有 X:

$$\square((X,\mu),(X,\nu)) \le 2d_{\mathrm{P}}(\mu,\nu) \le 2d_{\mathrm{TV}}(\mu,\nu).$$

给定一个 mm-空间 X 和 X 的一个参数 $\varphi\colon\ I \to X$，我们设定

$$\varphi^*\mathcal{L}ip_1(X) := \{f\circ\varphi \mid f\colon X\to\mathbb{R} \text{ is 1-Lipschitz}\},$$

其由 I上的博雷尔可测函数组成。

定义 2.11（可观测距离）。我们将两个 mm-空间 X 和 Y 之间的可观测距离 $d_{\mathrm{conc}}(X,Y)$ 定义为:

$$d_{\mathrm{conc}}(X,Y) := \inf_{\varphi,\psi} d_{\mathrm{H}}(\varphi^*\mathcal{L}ip_1(X), \psi^*\mathcal{L}ip_1(Y)),$$

其中， $\varphi\colon\ I\to X$和 $\psi\colon\ I\to Y$分别遍历 X和 Y的所有参数，而 d_{H}是相对于度量 $d^{\mathcal{L}^1}{}_{\mathrm{KF}}$的豪斯多夫距离。

定理 2.12（[16, 命题 5.5 和定理 5.13]）。可观测距离函数d_{conc}是 $\mathcal{X}$上的一个度量。此外，对于任意两个 mm-空间 X和 Y，

$$d_{\mathrm{conc}}(X,Y) \le \square(X,Y).$$

我们将从 d_{conc} 诱导到 $\mathcal{X}$ 上的拓扑称为集中拓扑。如果 mm-空间的一个序列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $n\to\infty$趋于 X 时， X_n d_{conc}-收敛到 X，则称该序列集中到 mm-空间 X。

2.3. 金字塔。

定义 2.13（金字塔）。如果一个子集 $\mathcal{P}\subset\mathcal{X}$ 满足以下条件 (1)–(3)，则称其为一个金字塔。

(1) 若 $X\in\mathcal{P}$ 且 $Y\prec X$，则 $Y\in\mathcal{P}$。(2) 对任意 Y、$Y'\in\mathcal{P}$，存在 $X\in\mathcal{P}$，使得 $Y\prec X$ 且 $Y'\prec X$。(3) $\mathcal{P}$ 非空且是 $\square$-闭的。

我们用 Π 表示所有金字塔组成的集合。注意，Gromov 对金字塔的定义仅由 (1) 和 (2) 给出。条件 (3) 是在 [16] 中添加的。

对于一个 mm-空间 X，我们定义

$$\mathcal{P}_X := \{Y\in\mathcal{X} \mid Y\prec X\},$$

这是一个金字塔。我们称 $\mathcal{P}_X$ 为与 X 相关联的金字塔。

We 注意， $Y \prec X$ 当且仅当 $\mathcal{P}_Y \subset \mathcal{P}_X$。请注意， $\mathcal{X}$ 本身就是一个金字塔 .

我们如下定义金字塔的弱收敛。这恰好是作为（′, $\mathcal{X}$）的闭子集的 Kuratowski-Painlev□e 收敛（参见 [10, 第 8]节）。

定义 2.14（弱收敛）。设 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{P}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ 为金字塔。若以下 (1) 和 (2) 均成立，我们称 $\mathcal{P}_n$ 在 $n \to \infty$ 下弱收敛至 $\mathcal{P}$。

(1) 对于任意 mm-空间 $X \in \mathcal{P}$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \square(X, \mathcal{P}_n) = 0.$$

(2) 对于任意 mm-空间 $X \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{P}$，我们有

$$\liminf_{n\to\infty} \square(X, \mathcal{P}_n) > 0.$$

定理 2.15（[16, 第 6] 节）。存在一个度量 ρ 于 Π 上，使得以下 (1)–(4) 成立。

(1) ρ 与弱收敛相容。(2) Π 是 ρ-紧的。(3) 映射 $\mathcal{X} \ni X \mapsto \mathcal{P}_X \in \Pi$ 是关于 d_{conc} 和 ρ 的 1-Lipschitz 拓扑嵌入映射。(4) $\mathcal{X}$ 的像在 Π中是 ρ-稠密的。

特别地，(Π, ρ) 是 $(\mathcal{X}, d_{\mathrm{conc}})$ 的一种紧化。我们称 (Π, ρ) 为 $(\mathcal{X}, d_{\mathrm{conc}})$ 的金字塔紧化。我们通常将 X 与 $\mathcal{P}_X$ 等同，并称一列度量测度空间弱收敛到一个金字塔，如果相应的金字塔弱收敛。

定义 2.16（金字塔的逼近）。如果一个度量测度空间序列 $\{Y_m\}_{m=1}^{\infty}$ 满足.....，则称其为金字塔 $\mathcal{P}$ 的逼近。

$$Y_1 \prec Y_2 \prec \cdots \prec Y_m \prec \cdots \quad \text{and} \quad \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{P}_{Y_m}}^{\square} = \mathcal{P}.$$

In p特别地，当 $m \to \infty$ 且对于所有 m， $\{Y_m\}_{m=1}^{\infty}$ 弱收敛到 $\mathcal{P}$ 和 $Y_m \in \mathcal{P}$。

It i已知任意金字塔 $\mathcal{P}$ 都存在一个逼近（见 [16, 引理 7.14] ）.

2.4. 分离距离。分离距离是 mm-空间和金字塔最基本的不变量之一。

定义 2.17（分离距离）。设 X 为一个 mm-空间。对于任意实数κ_0、 κ_1、.....、 $\kappa_N > 0$，满足 $N \geq 1$，我们定义分离距离

$$\mathrm{Sep}(X; \kappa_0, \kappa_1, \ldots, \kappa_N)$$

为所有满足以下条件的 $N + 1$博雷尔子集A_0、 A_1、.....、 $A_N \subset X$的序列中，$\min_{i\neq j} d_X(A_i, A_j)$ 的上确界：对所有 $i = 0$=1、.....、 N， $\mu_X(A_i) \geq \kappa_i$。若对于某个 i，有 $\kappa_i > 1$，则定义 Sep(X; κ_0, κ_1,....., κ_N) := 0。此外，我们将金字塔 $\mathcal{P}$ 的分离距离定义为

$$\mathrm{Sep}(\mathcal{P}; \kappa_0, \kappa_1, \ldots, \kappa_N) := \lim_{\delta\to 0+} \sup_{X\in\mathcal{P}} \mathrm{Sep}(X; \kappa_0 - \delta, \kappa_1 - \delta, \ldots, \kappa_N - \delta) \ (\leq +\infty).$$

度量测度空间的分离距离在 mm-同构下是不变的。请注意，

$$\mathrm{Sep}(\mathcal{P}_X; \kappa_0, \kappa_1, \ldots, \kappa_N) = \mathrm{Sep}(X; \kappa_0, \kappa_1, \ldots, \kappa_N)$$

对于任意 $\kappa_0, \kappa_1, \ldots, \kappa_N > 0$，且 Sep($\mathcal{P}$; $\kappa_0, \kappa_1, \ldots, \kappa_N$) 关于 κ_i 单调非增且左连续，其中每个 $i = 0$, 1, . . . , N，并且

$$\mathrm{Sep}(\mathcal{P}; \kappa_0, \kappa_1, \ldots, \kappa_N) \leq \mathrm{Sep}(\mathcal{P}'; \kappa_0, \kappa_1, \ldots, \kappa_N) \quad \text{if } \mathcal{P} \subset \mathcal{P}'.$$

定理 2.18 ([15, 定理 1。1], 分离距离的极限公式)。 设 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{P}_n, n = 1, 2, \ldots$, 是金字塔。若 $\mathcal{P}_n$ 弱收敛于 $\mathcal{P}$ 当 $n \to \infty$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{Sep}(\mathcal{P}; \kappa_0, \kappa_1, \ldots, \kappa_N) &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \liminf_{n\to\infty} \mathrm{Sep}(\mathcal{P}_n; \kappa_0 - \varepsilon, \kappa_1 - \varepsilon, \ldots, \kappa_N - \varepsilon) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \limsup_{n\to\infty} \mathrm{Sep}(\mathcal{P}_n; \kappa_0 - \varepsilon, \kappa_1 - \varepsilon, \ldots, \kappa_N - \varepsilon)\end{aligned}$$

对于任意的 $\kappa_0, \kappa_1, \ldots, \kappa_N > 0$.

3. Scale-change action

本节中，我们证明定理 1.1–1.3。

令 $\mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$ 为正实数的乘法群。我们考虑 $\mathcal{X}$ 上的尺度变换作用；

$$\mathbb{R}_+ \times \mathcal{X} \ni (t, X) \mapsto tX := (X, td_X, \mu_X) \in \mathcal{X}.$$

单点空间 $*$ 是该作用下唯一的不动点，集合 $\mathcal{X}_* := \mathcal{X} \setminus \{*\}$ 是不变的。 $\mathbb{R}_+$ 对 $\mathcal{X}_*$ 的作用是自由的。设 $\Sigma := \mathcal{X}_*/\mathbb{R}_+$ 为 $\mathcal{X}_*$ 和 π 的商空间， $\mathcal{X}_* \to \Sigma$ 为商映射。我们将轨道 $\pi(X)$ 记为 $[X]$。

同时，我们考虑 Π上的尺度变换作用；

$$\mathbb{R}_+ \times \Pi \ni (t, \mathcal{P}) \mapsto t\mathcal{P} := \{tX \mid X \in \mathcal{P}\} \in \Pi,$$

这是对 $\mathcal{X}$ 上作用的自然扩展。将该作用的不动点集记为 Fix(Π)，并令 $\Pi_* := \Pi \setminus$Fix(Π)。于是，$\mathbb{R}_+$ 在 Π_* 上自由作用。

对于定理 1.1 的证明，我们需要一个引理。

引理 3.1. 设 Y_ε 为由 $Y_\varepsilon := (\{0, 1\}, |\cdot|, (1-\varepsilon)\delta_0 + \varepsilon\delta_1)$ 定义的 mm-空间，其中$0 < \varepsilon < 1$。那么，对于 Σ 中关于盒拓扑具有非空内部的任意闭子集 V，存在一个 $\delta(V) > 0$，使得对于任意满足 $0 < \varepsilon \le \delta(V)$ 的 ε， $[Y_\varepsilon]$ 都属于 V。

证明。设 V 是一个具有非空内部的闭子集。由于任意 mm-空间都可以用一个有限直径的 mm-空间逼近，因此存在一个有限直径的 mm-空间 X，使得 $[X]$ 是 V 的内部点。假设 $[Y_\varepsilon]$ 不属于 V。那么，由于 Y_ε 是开集 $\pi^{-1}(\Sigma \setminus V)$ 中的一个元素，存在一个很大的数 $r_\varepsilon > 0$，使得由以下方式定义的 mm-空间 Z_ε 】【。

$$Z_\varepsilon := X \sqcup \{z\}, \quad d_{Z_\varepsilon}|_{X\times X} := d_X, \quad d_{Z_\varepsilon}(z, X) := r_\varepsilon, \quad \mu_{Z_\varepsilon} := (1-\varepsilon)\mu_X + \varepsilon\delta_z$$

满足 $r_\varepsilon^{-1} Z_\varepsilon \in \pi^{-1}(\Sigma \setminus V)$。事实上， $\square(Y_\varepsilon, r_\varepsilon^{-1}Z_\varepsilon)$ 足够小，因为通过将 Z_ε 按 $r_\varepsilon^{-1} d_{Z_\varepsilon}(z, X) = 1$ 缩放，$X \subset Z_\varepsilon$ 接近一个单点。另一方面，随着 $\varepsilon \to 0+$， Z_ε $\square$ 收敛到 X，这意味着当 $\varepsilon > 0$ 足够小时， $[Z_\varepsilon] \in V$。这是矛盾。因此，对于每个足够小的 $\varepsilon > 0$， $[Y_\varepsilon]$ 都属于 V。证明完毕。$\square$

引理 3.1推出如下结论。

引理 3.2. 对于 Σ 上盒拓扑的商， Σ 中任意两个不同的点都无法被任何闭邻域分离。特别地， Σ 不是乌雷松空间。

证明。 取两个不同的点 $[X]$, $[X'] \in \Sigma$ 并取任意闭邻域 V, V' 分别属于 $[X]$, $[X']$。引理 3.1 证明 $[Y_\varepsilon]$ 同时属于 V 和 V'，其中$0 < \varepsilon \le$ 最小值$\{\delta(V)\ \delta(V')\}$。证明完毕。 $\square$

备注 3.3。 正如下文命题 3.10 所证明的， Σ 是豪斯多夫的。在引理 3.1 和 3.2 中，考虑闭邻域是至关重要的。

推论 3.4。对于集中拓扑的商， Σ 不是乌雷松的。此外，$\Pi_*/\mathbb{R}_+$ 不是乌雷松的。

证明。由于集中拓扑的商比 Σ 上盒拓扑的商更粗，引理 3.2 推出了推论的第一个陈述。由于 Σ 作为子空间包含于 $\Pi_*/\mathbb{R}_+$ 中，我们得到第二个陈述。证明完毕。□

定理的证明 *1.1*。 假设 $\mathcal{X}_*$ 同胚于 $\Sigma\times\mathbb{R}_+$。由于 $\mathcal{X}_*$ 是一个度量空间， $\Sigma\simeq\Sigma\times\{1\}$ 是可度量化的，这与关于盒拓扑的引理 3.2 以及关于集中拓扑的推论 3.4 矛盾。同理， $\mathcal{X}$ 不同胚于 Σ上的锥。这就完成了证明。□

与上述情况相同，我们可以看到以下结论。

定理 3.5. Π_* 不同胚于 $(\Pi_*/\mathbb{R}_+)\times\mathbb{R}_+$。

本节其余部分将用于证明定理1.2 和1.3。

我们首先假设 $\mathcal{X}$ 赋有盒拓扑，并证明关于盒拓扑的定理1.2 。

命题 3.6. $\pi\colon\ \mathcal{X}_*\to\Sigma$ 是一个主 $\mathbb{R}_+$纤维丛。

证明。我们验证：若序列 $\{X_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{X}_*$ 和 $\{t_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{R}_+$ 满足，当 $n\to\infty$时， X_n 和t_nX_n □分别收敛到 $X\in\mathcal{X}_*$ 和 tX，则 t_n 收敛到 t。由于$\mathcal{X}\in\mathcal{X}_*$，存在实数 κ_0，.....， $\kappa_N>0$，使得 $\sum_{i=0}^N\kappa_i<1$，从而

$$0<\operatorname{Sep}(X;\kappa_0,\dots,\kappa_N)<+\infty.$$

假设 $t_n\not\to t$。存在一个实数 $\delta>0$ 和一个子序列 $\{t_{n_k}\}_{k=1}^\infty$，使得 $t_{n_k}>t+\delta$对任意 k或 $t_{n_k}<t-\delta$ 对任意 k。根据定理 2.18，若 $t_{n_k}>t+\delta$，则有

$$\begin{aligned}
&t\operatorname{Sep}(X;\kappa_0,\dots,\kappa_N)=\operatorname{Sep}(tX;\kappa_0,\dots,\kappa_N)\\
&=\lim_{\varepsilon\to0+}\limsup_{k\to\infty}\operatorname{Sep}(t_{n_k}X_{n_k};\kappa_0-\varepsilon,\dots,\kappa_N-\varepsilon)\\
&\geq(t+\delta)\lim_{\varepsilon\to0+}\limsup_{k\to\infty}\operatorname{Sep}(X_{n_k};\kappa_0-\varepsilon,\dots,\kappa_N-\varepsilon)\\
&=(t+\delta)\operatorname{Sep}(X;\kappa_0,\dots,\kappa_N),
\end{aligned}$$

这就推出矛盾 $t\geq t+\delta$。同样，若 $t_{n_k}<t-\delta$，则矛盾$t\leq t-\delta$ 成立。因此我们得到 $t_n\to t$。证明完毕。□

我们来证明主纤维丛 $\pi\colon\ \mathcal{X}_*\to\Sigma$ 的局部平凡性。令 Δ 为满足 $0<\Delta<1$ 的实数，并设

$$\mathcal{X}_\Delta:=\{X\in\mathcal{X}\mid\mu_X(\{x\})<\Delta\text{ for all }x\in X\}.$$

我们注意到，$\sup_{x\in X}\mu_X(\{x\})<\Delta$ 当且仅当 $\operatorname{diam}(X;\Delta)>0$，其中 $\operatorname{diam}(X;\alpha)$ 是部分直径，它是 mm-空间的一个基本不变量，定义为

$$\operatorname{diam}(X;\alpha):=\inf\{\operatorname{diam}A\mid A\text{ is a Borel subset with }\mu_X(A)\geq\alpha\}.$$

我们看到 $\mathcal{X}_\Delta$ 是开集。对于 $\Delta\leq\Delta'$，有 $\mathcal{X}_\Delta\subset\mathcal{X}_{\Delta'}$，并且

$$\mathcal{X}_*=\bigcup_{0<\Delta<1}\mathcal{X}_\Delta.$$

由于 $X\in\mathcal{X}_\Delta$ 蕴含对任意 $t>0$ 都有 $tX\in\mathcal{X}_\Delta$，因此集合 $\mathcal{X}_\Delta$ 关于$\mathbb{R}_+$-作用是不变的。设 $\Sigma_\Delta:=\mathcal{X}_\Delta/\mathbb{R}_+$。那么，要证明局部平凡性，只需证明对于每个 $\Delta\in(0,1)$， $\mathcal{X}_\Delta$ 与 $\Sigma_\Delta\times\mathbb{R}_+$ 同胚。

我们定义映射 $r_\Delta\colon\ \mathcal{X}_\Delta\to\mathbb{R}_+$ 为

$$r_\Delta(X):=\int_0^{\frac{\Delta+1}{2}}\operatorname{diam}(X;s)\,ds,\quad X\in\mathcal{X}_\Delta.$$

注意，对于任意 $X \in \mathcal{X}_\Delta$,

$$r_\Delta(X) \geq \frac{1-\Delta}{2}\operatorname{diam}(X;\Delta) > 0$$

并且 r 任意 $t > 0$ 都有 $_\Delta(tX) = t\, r_\Delta(X)$，因为 $\mathsf{diam}(tX;\, s) = t\mathsf{diam}(X;\, s)$，对任意 $s > 0$.

引理 3.7 ([16, 引理 5.43])。若序列 $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ 度量测度空间 □-收敛到一个 mm-空间 X，则有

$$\operatorname{diam}(X;s) \leq \liminf_{n\to\infty}\operatorname{diam}(X_n;s) \leq \limsup_{n\to\infty}\operatorname{diam}(X_n;s) \leq \lim_{\delta\to 0+}\operatorname{diam}(X;s+\delta)$$

对任意 $s > 0$。

引理 3.8。映射 r_Δ 在 $\mathcal{X}_\Delta$ 上连续。

证明。取任意一个收敛于某个 mm-空间 $X \in \mathcal{X}_\Delta$ 的序列 $\{X_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{X}_\Delta$ □。令

$$f_n(s) := \operatorname{diam}(X_n;s) \quad \text{and} \quad f(s) := \operatorname{diam}(X;s)$$

对于 $s \in [0, \frac{\Delta+1}{2}]$。由于 f 在 $[0, \frac{\Delta+1}{2}]$上是单调不减的，因此 f 的不连续点至多可数。因此，引理 3.7 意味着 f_n 几乎处处收敛到 f 并且

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{s\in[0,\frac{\Delta+1}{2}]} f_n(s) \leq \operatorname{diam}(X;\frac{\Delta+3}{4}) < +\infty.$$

因此，由控制收敛定理，

$$\lim_{n\to\infty} r_\Delta(X_n) = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\Delta+1}{2}} f_n(s)\,ds = \int_0^{\frac{\Delta+1}{2}} f(s)\,ds = r_\Delta(X).$$

证明完成。 □

定理的证明 *1.2* （针对盒拓扑）。连续 1-齐次映射 $r_\Delta\colon\ \mathcal{X}_\Delta \to \mathbb{R}_+$ 诱导出同胚 $\Phi\colon$ $\mathcal{X}_\Delta \to \Sigma_\Delta \times \mathbb{R}_+$ 定义如下

$$\Phi(X) := ([X], r_\Delta(X)) \quad \text{for } X \in \mathcal{X}_\Delta.$$

事实上，逆映射 Φ^{-1} 由下式给出。

$$\Phi^{-1}([X],t) = r_\Delta(X)^{-1}tX.$$

换言之，映射 r_Δ 生成了连续截面

$$\Sigma_\Delta \ni [X] \mapsto r_\Delta(X)^{-1}X \in \mathcal{X}_\Delta,$$

因此， $\mathcal{X}_\Delta \to \Sigma_\Delta$ 是平凡的。这意味着我们的主纤维丛$\mathbb{R}_+ \to \mathcal{X}_* \to \Sigma$具有局部平凡性。

定理 1.1 证明了纤维丛 $\mathbb{R}_+ \to \mathcal{X}_* \to \Sigma$ 在整体上是非平凡的。这就完成了关于盒拓扑的定理 1.2 的证明。□

以下推论是定理 1.2的副产品。

推论 3.9. 不存在关于 $\mathcal{X}_*$ 上的盒拓扑的连续 1-齐次映射 $r\colon\ \mathcal{X}_* \to \mathbb{R}_+$ 。

下述命题与引理3.2进行了比较。

命题 3.10。 Σ 是一个豪斯多夫空间。

证明。对于任意两个不同的点 $[X]$、$[X']\in\Sigma$，存在 $0<\Delta<1$ 使得 $[X]$、$[X']\in\Sigma_\Delta$。由于 $\mathcal{X}_\Delta$ 和 $\Sigma_\Delta \times \mathbb{R}_+$ 同胚，因此 Σ_Δ 可度量化。因此，由于 Σ_Δ 是 Σ 中的开集，点 $[X]$、$[X']$ 可以通过 Σ 中的邻域分离。证明完毕。□

<escape>在证明定理 1.2 关于集中拓扑的结论之前，我们先研究 Π 上的尺度变换作用，并借助定理 1.3 证明定理 1.5，其中定理 1.5 的证明将推迟到下一节。定理 1.2 在集中情形下的结论可作为定理 1.3的一个推论得到。</escape>

命题 3.11。商映射 $\pi\colon \Pi_* \to \Pi_*/\mathbb{R}_+$ 是一个主 $\mathbb{R}_+$纤维丛。

证明。假设 $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Pi_*$ 和 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ 满足：当 $n \to \infty$时， $\mathcal{P}_n$ 和 $t_n\mathcal{P}_n$ 分别弱收敛到 $\mathcal{P} \in \Pi_*$ 和 $t\mathcal{P}$。由于 $\mathcal{P} \in \Pi_*$，存在实数κ_0，……， $\kappa_N > 0$，满足 $\sum_{i=0}^{N} \kappa_i < 1$，使得

$$0 < \mathrm{Sep}(\mathcal{P}; \kappa_0, \dots, \kappa_N) < +\infty$$

根据定理 1.5。通过与命题 3.6证明中相同的论证，我们有 $t_n \to t$当 $n \to \infty$。证明完成。□

在假设定理 *1.3*和定理 *1.5*成立的条件下证明。 对于任意一个元组 $\kappa = (\kappa_0, \kappa_1, \dots\dots, \kappa_N$，其各分量均为正实数，且满足 $\sum_{i=0}^{N} \kappa_i < 1$，我们定义

$$\Pi_\kappa := \left\{ \mathcal{P} \in \Pi \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{Sep}(\mathcal{P}; \kappa_0, \dots, \kappa_N) < +\infty \text{ and} \\ \mathrm{Sep}(\mathcal{P}; \kappa_0 + \delta, \dots, \kappa_N + \delta) > 0 \text{ for some } \delta > 0 \end{array} \right\}.$$

显然， Π_κ 在 $\mathbb{R}_+$-作用下是不变的。我们证明 Π_κ 是开集。事实上，对于任意一个弱收敛到金字塔 $\mathcal{P}$的金字塔序列 $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^{\infty}$，如果分离距离 $\mathrm{Sep}(\mathcal{P}_n; \kappa_0, \dots, \kappa_N) = +\infty$，那么

$$\mathrm{Sep}(\mathcal{P}; \kappa_0, \dots, \kappa_N) \geq \limsup_{n\to\infty} \mathrm{Sep}(\mathcal{P}_n; \kappa_0, \dots, \kappa_N) = +\infty$$

根据定理 2.18，并且如果分离距离$(\mathcal{P}_n; \kappa_0 + \delta, \dots\dots, \kappa_N + \delta) = 0$对任意 $\delta > 0$，则

$$\mathrm{Sep}(\mathcal{P}; \kappa_0 + \delta, \dots, \kappa_N + \delta) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathrm{Sep}(\mathcal{P}_n; \kappa_0 + \frac{\delta}{2}, \dots, \kappa_N + \frac{\delta}{2}) = 0$$

对于任意 $\delta > 0$ 根据定理 2.18。由此可知 Π_κ 是开集。

我们定义一个映射 $r_\kappa\colon \Pi_\kappa \to \mathbb{R}_+$，其定义为

$$r_\kappa(\mathcal{P}) := \int_0^1 \mathrm{Sep}(\mathcal{P}; \kappa_0 + s, \dots, \kappa_N + s)\, ds, \quad \mathcal{P} \in \Pi_\kappa.$$

那么，映射 r_κ 在 Π_κ 上是连续且 1 次齐次的，因此 $\Pi_\kappa \to \Pi_\kappa/\mathbb{R}_+$ 是平凡的。剩下的就是证明

$$\Pi_* = \bigcup \Pi_\kappa.$$

根据定理 1.5，包含关系 $\bigcup_\kappa \Pi_\kappa \subset \Pi_*$ 显然。为了证明反向包含关系 $\Pi_* \subset \bigcup_\kappa \Pi_\kappa$，我们任取一个 $\mathcal{P} \in \Pi_*$。根据定理 1.5，存在实数 κ_0， κ_1，……， $\kappa_N > 0$满足 $\sum_{i=0}^{N} \kappa_i < 1$，使得

$$0 < \mathrm{Sep}(\mathcal{P}; \kappa_0, \dots, \kappa_N) < +\infty.$$

根据 $\mathrm{Sep}(\mathcal{P}; s_0, \dots, s_N)$ 关于 s_i 的左连续性，存在 $\varepsilon > 0$，使得

$$\mathrm{Sep}(\mathcal{P}; \kappa_0 - \varepsilon, \dots, \kappa_N - \varepsilon) < +\infty.$$

这意味着 $\mathcal{P} \in \Pi_{(\kappa_0-\varepsilon,\dots,\kappa_N-\varepsilon)}$ 进而得到 $\Pi_* \subset \bigcup_\kappa \Pi_\kappa$。因此，我们得到了 π 的局部平凡性：$\Pi_* \to \Pi_*/\mathbb{R}_+$。证明完成。□

定理 *1.2* 在集中拓扑下的证明。 假设 $\mathcal{X}$ 赋予集中拓扑，并考虑 $\mathbb{R}_+$-作用。那么 $\pi\colon \mathcal{X}_* \to \mathcal{X}_*/\mathbb{R}_+$ 是纤维丛 $\pi\colon \Pi_* \to \Pi_*/\mathbb{R}_+$的限制。因此，它也是一个主 $\mathbb{R}_+$-纤维丛，且局部平凡（见 [7]）。根据定理 1.1，该纤维丛在整体上并非平凡。证明完毕。□

推论 推论 3.12。（1）不存在连续 1-齐次映射 $r\colon \Pi_* \to \mathbb{R}_+$。

(2) 关于 $\mathcal{X}_*$ 上的集中拓扑，不存在连续 1-齐次映射 $r\colon \mathcal{X}_* \to \mathbb{R}_+$。

4. Scale-invariant pyramids

在本节中，我们证明定理 1.5 和 1.6。我们回顾一下，$\mathcal{A}$是所有总和不大于一的非负实数单调非递增序列的集合。我们赋予 $\mathcal{A}$ 以弱拓扑，将其视为空间 l^2的闭凸子集。特别地，$\mathcal{A}$ 是紧的。对于每个 $A=\{a_i\}_{i=1}^{\infty}\in\mathcal{A}$，令

$$\mathcal{P}_A := \left\{ X\in\mathcal{X} \;\middle|\; \text{There exists a sequence } \{x_i\}_{n=1}^{\infty}\subset X \text{ such that } \sum_{i=1}^{\infty} a_i\delta_{x_i} \le \mu_X \right\}.$$

我们注意到，$\mathcal{P}_A$ 事先是一个金字塔，其中 $\square$-闭性 $\mathcal{P}_A$ 由下面证明断言 4.2 的论证可得。

4.1. 的不动点集 Fix(Π)。为了证明定理 1.5，我们需要一个引理。

引理 4.1。设 a_1、.....、a_k、$k<+\infty$ 和 ε 为正数，且 $\sum_{i=1}^{k} a_i < 1$，并且 $\min_{i=1,\ \ldots\ ,\ k} a_i \ge \varepsilon > 0$。如果一个 mm-空间 X 中存在互异的 k 个点 $\{x_i\}_{i=1}^{k}$，满足

$$\mu_X(\{x\}) \begin{cases} \ge a_i & \text{if } x=x_i, \\ <\varepsilon & \text{if } x\ne x_i, \end{cases} \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{k}(\mu_X(\{x_i\})-a_i)<\varepsilon,$$

那么存在正数 $\kappa_0,\ldots,\kappa_N>0$，使得对于每个 i，$\kappa_i\le\varepsilon$

$$0<1-\sum_{i=1}^{k}a_i-\sum_{i=0}^{N}\kappa_i\le\varepsilon, \quad \text{and} \quad \mathrm{Sep}(X;a_1,\ldots,a_k,\kappa_0,\ldots,\kappa_N)>0.$$

证明。取任意具有不同点的 mm-空间 X k $\{x_i\}_{i=1}^{k}$，其具有

$$\mu_X(\{x\}) \begin{cases} \ge a_i & \text{if } x=x_i, \\ <\varepsilon & \text{if } x\ne x_i. \end{cases}$$

设 $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 X 的一个可数稠密子集，并令 $d_i := d_X(\xi_i,\cdot)$。置

$$X_0 := X\setminus\bigcup_{i=1}^{k} U_{\varepsilon'}(x_i)$$

对于某个充分小的 $\varepsilon'>0$，满足 $\mu_X(X\setminus X_0)-\sum_{i=1}^{k}\mu_X(\{x_i\}) =: \eta_0 \ll \varepsilon$。我们首先找到 $d_{1*}(\mu_X\lfloor_{X_0})$ 的 ε-原子点 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$，即，

$$d_{1*}(\mu_X\lfloor_{X_0})(\{t\}) \begin{cases} \ge\varepsilon & \text{if } t=\alpha_i, \\ <\varepsilon & \text{if } t\ne\alpha_i, \end{cases}$$

如果这些存在。我们记

$$X_i := d_1^{-1}(\{\alpha_i\})\cap X_0,\ i=1,\ldots,m, \quad \text{and} \quad X^{(1)} := \bigcup_{i=1}^{m} X_i \subset X_0.$$

存在有限多个互不相交的闭区间 $I_0,\ldots,I_{l_1}$ of $\mathbb{R}$ 使得

$$0<d_{1*}(\mu_X\lfloor_{X_0})(I_i) =: \kappa_i \le \varepsilon,\ i=0,\ldots,l_1,$$

$$\text{and} \quad d_{1*}(\mu_X\lfloor_{X_0})(\mathbb{R}\setminus(\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}\sqcup\bigsqcup_{i=0}^{l_1} I_i)) =: \eta_1 \ll \varepsilon.$$

我们将 $A_i := d_1^{-1}(I_i)\cap X_0$。注意，$\mu_X(A_i)=\kappa_i$。

接下来，我们为 \(i = 1,\ldots,m \) 找出 \(d_{2*}(\mu_X\lfloor_{X_i}) \) 的 ε-原子点 \(\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{im_i} \)（如果存在），并令

$$X_{ij} := d_2^{-1}(\{\alpha_{ij}\}) \cap X_i,\ j = 1,\ldots,m_i, \quad \text{and} \quad X^{(2)} := \bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{m_i} X_{ij} \subset X^{(1)}.$$

存在有限多个互不相交的闭区间 $I_{l_1+1},\ldots,I_{l_1+l_2}$，使得

$$0 < d_{2*}(\mu_X\lfloor_{X_{i(j)}})(I_j) =: \kappa_j \le \varepsilon,\ j = l_1+1,\ldots,l_1+l_2,\ \text{for some } i(j) \in \{1,\ldots,m\},$$

$$\text{and} \quad d_{2*}(\mu_X\lfloor_{X^{(1)}})(\mathbb{R} \setminus (\{\alpha_{ij}\}_{i,j} \sqcup \bigsqcup_{j=l_1+1}^{l_1+l_2} I_j)) =: \eta_2 \ll \varepsilon.$$

对于每个 $j = l_1+1$，我们令 $A_j := d_2^{-1}(I_j) \cap X_{i(j)}$，其中 l_1+l_2。

重复这一构造，我们得到一个单调序列 $X^{(1)} \supset X^{(2)} \supset \cdots$ 和一个定义在 X 上的不交族 $\{A_i\}$。

我们证明，对于某个 n，$X^{(n)} = \emptyset$。只需证明 $\bigcap_{n=1}^{\infty} X^{(n)} = \emptyset$，因为这意味着 $\mu_X(X^{(n)}) \to 0$，由 $n \to \infty$ 可知，这与事实 $\mu_X(X^{(n)}) \ge \varepsilon$ 矛盾，若 $X^{(n)} \ne \emptyset$。假设存在一个点 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} X^{(n)} \ne \emptyset$。那么存在一个序列 $\{i_k\}_k$，使得对于任意 k，都有 $x_0 \in X_{i_1 i_2 \cdots i_k}$，其中 $i_k \in \{1,\ldots,m_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1}}\}$。于是有

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} X_{i_1 i_2 \cdots i_k} = \{x_0\}.$$

事实上，假设还存在另一个点 $y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} X_{i_1 i_2 \cdots i_k}$，并令 $r_0 := d_X(x_0,y)/4$。存在一个充分大的 k_0，使得 $d_X(\xi_{k_0},x_0) \le r_0$。由于 $x_0, y \in X_{i_1 i_2 \cdots i_{k_0}}$，我们有

$$d_X(\xi_{k_0},x_0) = d_X(\xi_{k_0},y) = \alpha_{i_1 i_2 \cdots i_{k_0}},$$

这就推出矛盾 $4r_0 = d_X(x_0,y) \le d_X(\xi_{k_0},x_0) + d_X(\xi_{k_0},y) \le 2r_0$。

因此我们得到

$$\mu_X(\{x_0\}) = \mu_X(\bigcap_{k=1}^{\infty} X_{i_1 i_2 \cdots i_k}) = \lim_{k\to\infty} \mu_X(X_{i_1 i_2 \cdots i_k}) \ge \varepsilon,$$

但这与该引理的假设矛盾。

因此我们有

$$\mathrm{Sep}(X; a_1,\ldots,a_k,\kappa_0,\ldots,\kappa_N) \ge \min\{\min_{i\ne j} d_X(x_i,x_j), \min_{i,j} d_X(x_i,A_j), \min_{i\ne j} d_X(A_i,A_j)\} > 0,$$

其中 $N = l_1 + l_2 + \cdots + l_n$，并且

$$\begin{aligned}
1 &= \mu_X(X_0) + \sum_{i=1}^{k} \mu_X(\{x_i\}) + \eta_0 \\
&= \mu_X(X^{(1)}) + \sum_{i=0}^{l_1} \kappa_i + \eta_1 + \sum_{i=1}^{k} \mu_X(\{x_i\}) + \eta_0 \\
&= \mu_X(X^{(2)}) + \sum_{i=0}^{l_1+l_2} \kappa_i + \sum_{i=0}^{2} \eta_i + \sum_{i=1}^{k} \mu_X(\{x_i\}) \\
&= \mu_X(X^{(n)}) + \sum_{i=0}^{N} \kappa_i + \sum_{i=0}^{n} \eta_i + \sum_{i=1}^{k} \mu_X(\{x_i\}).
\end{aligned}$$

因此，取 η_i，其中 $\sum_{i=0}^{n} \eta_i \le \varepsilon - \sum_{i=1}^{k} (\mu_X(\{x_i\}) - a_i)$，即可得到结论。 □

定理的证明 1.5。 由于（4） ⇒ （1） ⇒ （2） ⇒ （3）显然成立，我们证明（3） ⇒ （4）。假设一个金字塔 $\mathcal{P}$ 满足条件（3）。设 $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是对 $\mathcal{P}$ 的一个近似，并设

$$Y_\infty := \varprojlim Y_n$$

be $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$的逆极限。存在一个概率测度 μ_{Y_∞}，使得 t

$$\pi_{n*}\mu_{Y_\infty} = \mu_{Y_n}$$

对任意 n，其中 π_n: $Y_\infty \to Y_n$ 是投影（见[2]）。注意， Y_∞ 容许一个取值于 $[0,+\infty]$ 的扩展度量，并且 π_n 是 1-Lipschitz。

令 $\{y_i\}_{i=1}^{M} \subset Y_\infty$、 $M \le +\infty$为 μ_{Y_∞} 的原子点序列，并令

$$a_i := \mu_{Y_\infty}(\{y_i\})$$

对每个 i均成立。通过重新标记，我们可以假设

$$a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_M \ge 0 =: a_{M+1} = a_{M+2} = \cdots$$

于是 $A := \{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$。那么，对于任意 n，我们有

$$\sum_{i=1}^{M} a_i \delta_{\pi_n(y_i)} = \pi_{n*}(\sum_{i=1}^{M} a_i \delta_{y_i}) \le \pi_{n*}\mu_{Y_\infty} = \mu_{Y_n}.$$

断言 4.2. 有

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_A.$$

证明。任取 $X \in \mathcal{P}$。则存在博雷尔映射 f_n: $Y_n \to X$ 使得 f_n 是 1-Lipschitz˜ ˜，直到 ε_n，其非例外定义域为 Y_n，即 $\mu_{Y_n}(Y_n) \ge 1-\varepsilon_n$ 并且

$$d_X(f_n(y), f_n(y')) \le d_{Y_n}(y,y') + \varepsilon_n$$

for ˜任意 y、$y' \in Y_n$以及 $d_P(f_{n*}\mu_{Y_n}, \mu_X) \le \varepsilon_n$对于某个 $\varepsilon_n \to 0$（见 [9, 引理 4.6]）.

我们证明，对于每个 $i = 1$、2、.....、M，序列 $\{f_n \circ \pi_n(y_i)\}_{n=1}^{\infty} \subset X$都有一个收敛子序列。假设 $\{f_n \circ \pi_n(y_i)\}_{n=1}^{\infty}$没有收敛子序列。则存在一个实数 $\eta > 0$ 和 $\{n\}$ 的一个子序列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得 $\{B_\eta(f_{n_k} \circ \pi_{n_k}(y_i))\}_{k=1}^{\infty}$ 是˜一个不交族。由于对于充分大的 k， $\pi_{n_k}(y_i) \in Y_{n_k}$ 并且

$$B_{\frac{\eta}{2}}(\pi_{n_k}(y_i)) \cap \tilde{Y}_{n_k} \subset f_{n_k}^{-1}(B_{\frac{\eta}{2}+\varepsilon_{n_k}}(f_{n_k} \circ \pi_{n_k}(y_i))),$$

我们有

$$\begin{aligned} 0 < a_i &\le \mu_{Y_{n_k}}(\{\pi_{n_k}(y_i)\}) \le \mu_{Y_{n_k}}(B_{\frac{\eta}{2}}(\pi_{n_k}(y_i))) \\ &\le f_{n_k*}\mu_{Y_{n_k}}(B_{\frac{\eta}{2}+\varepsilon_{n_k}}(f_{n_k} \circ \pi_{n_k}(y_i))) + \varepsilon_{n_k} \le \mu_X(B_\eta(f_{n_k} \circ \pi_{n_k}(y_i))) + 2\varepsilon_{n_k} \end{aligned}$$

对于充分大的 k，这与 $\{B_\eta(f_{n_k} \circ \pi_{n_k}(y_i))\}_{n=1}^{\infty}$的不相交性矛盾。因此 $\{f_n \circ \pi_n(y_i)\}_{n=1}^{\infty}$ 有一个收敛子序列。

Let

$$x_i := \lim_{k\to\infty} f_{n_k} \circ \pi_{n_k}(y_i),$$

其中， $\{n_k\}$ 是 $\{n\}$ 的子序列，使得对于任意 i =1、2、.....、M，$\{f_{n_k} \circ \pi_{n_k}(y_i)\}_{k=1}^{\infty}$ 都收敛（通过对角线论证）。我们证明

$$\sum_{i=1}^{M} a_i \delta_{x_i} \le \mu_X.$$

对于任意非负有界连续函数 φ: $X \to [0,+\infty)$，根据 Fatou引理，我们有

$$\sum_{i=1}^{M} a_i\, \varphi(x_i) \le \liminf_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{M} a_i\, \varphi(f_{n_k} \circ \pi_{n_k}(y_i)) \le \lim_{k\to\infty} \int_{Y_{n_k}} \varphi \circ f_{n_k}\, d\mu_{Y_{n_k}} = \int_X \varphi\, d\mu_X,$$

这意味着 $\sum_{i=1}^{M} a_i\delta_{x_i} \le \mu_X$。因此，该结论的证明得以完成。 . □

接下来，我们将在条件 (3) 下证明反向包含。任取 $\varepsilon > 0$ 和任意正整数 k，使得

$$k = \sup\{i \mid a_i \ge \varepsilon\}.$$

然后，对于充分大的 n，由于 $\pi_n\colon \{y_1, \dots, y_k\} \to Y_n$ 是单射，我们有

$$\mu_{Y_n}(\{y\}) \begin{cases} \ge a_i & \text{if } y = \pi_n(y_i), \\ < \varepsilon & \text{if } y \ne \pi_n(y_i), \end{cases} \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{k} (\mu_{Y_n}(\{\pi_n(y_i)\}) - a_i) < \varepsilon.$$

事实上，如果不是这样，那么 μ_{Y_∞} 在逆极限 Y_∞ 上的原子部分就不等于 $\sum_{i=1}^{M} a_i\delta_{y_i}$。因此，根据引理4.1，存在 $\kappa_0, \dots, \kappa_N > 0$ 使得 $\kappa_i \le \varepsilon$ 对于每一个 i,

$$0 < 1 - \sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{i=0}^{N} \kappa_i \le \varepsilon, \quad \text{and} \quad \operatorname{Sep}(Y_n; a_1, \dots, a_k, \kappa_0, \dots, \kappa_N) > 0$$

对于某个较大的 n。因此我们有

$$\operatorname{Sep}(\mathcal{P}; a_1, \dots, a_k, \kappa_0, \dots, \kappa_N) \ge \operatorname{Sep}(Y_n; a_1, \dots, a_k, \kappa_0, \dots, \kappa_N) > 0.$$

将其与条件（3）相结合可得,

$$\operatorname{Sep}(\mathcal{P}; a_1, \dots, a_k, \kappa_0, \dots, \kappa_N) = \infty.$$

根据分离距离的极限公式，我们有

$$\lim_{\eta \to 0+} \lim_{n \to \infty} \operatorname{Sep}(Y_n; a_1 - \eta, \dots, a_k - \eta, \kappa_0 - \eta, \dots, \kappa_N - \eta) = \infty.$$

现在我们证明以下断言。

断言 4.3. 有

$$\mathcal{P} \supset \mathcal{P}_A.$$

证明。任取一个 mm-空间 X，它有一个满足 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i\delta_{x_i} \le \mu_X$ 的序列 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$。根据逼近性，我们可以假设 X 是有限的。事实上，存在 X 的有限网 $\mathcal{N}_n$ 和博雷尔映射 $\xi_n\colon X \to \mathcal{N}_n$，使得 $\lim_{n\to\infty} d_{\mathrm{P}}(\xi_{n*}\mu_X, \mu_X) = 0$。于是

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i\delta_{\xi_n(x_i)} \le \xi_{n*}\mu_X,$$

从而在保持我们的假设的情况下可以逼近 X。令 $\{z_1, \dots, z_m\} := X$，并且

$$\nu_X := \mu_X - \sum_{i=1}^{k} a_i\delta_{x_i}.$$

由于 $\lim_{\eta\to 0+} \lim_{n\to\infty} \operatorname{Sep}(Y_n; a_1 - \eta, \dots, a_k - \eta, \kappa_0 - \eta, \dots, \kappa_N - \eta) = \infty$，对于任意充分大的 n，存在博雷尔子集 $Y_{n,1}, \dots, Y_{n,N+k+1} \subset Y_n$，使得

$$\mu_{Y_n}(Y_{n,i}) \ge a_i - \eta \text{ for } i = 1, \dots, k, \quad \mu_{Y_n}(Y_{n,j+k+1}) \ge \kappa_j - \eta \text{ for } j = 0, \dots, N,$$
$$\text{and} \quad \min_{i \ne j} d_{Y_n}(Y_{n,i}, Y_{n,j}) \ge \operatorname{diam} X$$

对于某个 $\eta < (N + k + 1)^{-1}\varepsilon$。我们定义一个 Borel 映射 $g_n\colon Y_n \to X$ 满足

$$g_n(Y_{n,i}) = x_i \text{ for } i = 1, \dots, k \quad \text{and} \quad g_n(Y_{n,j+k+1}) = z_l \text{ for } j_{l-1} \le j < j_l,$$

其中

$$j_0 := 0 \quad \text{and} \quad j_l := \max\left\{ j \ge j_{l-1} \;\middle|\; \nu_X(\{z_l\}) \ge \sum_{i=j_{l-1}}^{j-1} \kappa_i \right\} \text{ for } l = 1, \dots, m.$$

令 $\tilde{Y}_n := \bigcup_{i=1}^{j_m+k} Y_{n,i}$，根据 g_n 的定义，我们有

$$0 \le \mu_X(\{z_l\}) - g_{n*}(\mu_{Y_n}\lfloor_{\tilde{Y}_n})(\{z_l\}) \le 2\varepsilon$$

对于任意 $l = 1, \ldots, m$。特别地，$1 - \mu_{Y_n}(Y_n) \le 2m\varepsilon$。此外，对于任意 $B \subset X$，我们有

$$g_{n*}\mu_{Y_n}(B) \le g_{n*}(\mu_{Y_n}\lfloor_{\tilde{Y}_n})(B) + 2m\varepsilon \le \mu_X(B) + 2m\varepsilon.$$

因此 g_n 是一个在 $2m\varepsilon$ 上具有非例外定义域 Y_n 且 $d_{\mathrm{P}}(g_{n*}\mu_{Y_n}, \mu_X) \le 2m\varepsilon$。由于 $Y_n \in \mathcal{P}$，取 $\varepsilon \to 0$，我们得到 $X \in \mathcal{P}$ (参见 [9, 推论 4。7])。□

我们完成该定理的证明。□

4.2. 的不动点集(Π)的拓扑结构。此处的目标是证明定理 1.6。

引理 4.4。映射 $\mathcal{A} \ni A \mapsto \mathcal{P}_A \in$ 不动点集(Π) 是单射。

证明。取任意的 $A = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$、$A' = \{a'_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$，使得 $A \ne A'$。存在一个数 k，使得对于任意 $i < k$ 和 $a_k \ne a'_k$，均有 $a_i = a'_i$。我们可以假设 $a_k < a'_k$。一个 mm-空间 X 被定义为带有概率测度的单位区间 $([0,1], |\cdot|)$。

$$\mu_X := \sum_{i=1}^{\infty} a_i \delta_{2^{-i}} + \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} a_i\right) \mathcal{L}^1,$$

其中 $\mathcal{L}^1$ 是 $[0,1]$ 上的勒贝格测度。那么我们有 $X \in \mathcal{P}_A$ 和 $X \notin \mathcal{P}_{A'}$。事实上，若 $X \in \mathcal{P}_{A'}$，则存在一个序列 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$，使得 $\sum_{i=1}^{\infty} a'_i \delta_{x_i} \le \mu_X$。由于 A 单调不增，因此我们有

$$\sum_{i=1}^{k} a'_i \le \mu_X(\{x_1, \ldots, x_k\}) \le \sum_{i=1}^{k} a_i < \sum_{i=1}^{k} a'_i,$$

which 是一个矛盾。因此我们得到 $\mathcal{P}_A \ne \mathcal{P}_{A'}$。证明至此完成 . □

引理 4.5. 映射 $\mathcal{A} \ni A \mapsto \mathcal{P}_A \in$ 不动点集(Π) 是连续的。

证明。假设 $A_n = \{a_{ni}\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$ 弱收敛到 $A = \{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$。我们来证明 $\mathcal{P}_{A_n}$ 弱收敛到 $\mathcal{P}_A$。

我们首先证明，对于任意 $X \in \mathcal{P}_A$，$\lim_{n\to\infty} \square(X, \mathcal{P}_{A_n}) = 0$。根据标准逼近，$X$ 可以假设为一个有限的 mm-空间。取任意 $\varepsilon > 0$，并找到一个数 k，使得 $a_{k+1} < \varepsilon$。那么，对于充分大的 n，我们有

$$|a_{ni} - a_i| < \frac{\varepsilon}{2^i} \text{ for } i = 1, \ldots, k \quad \text{and} \quad a_{n,k+1} < \varepsilon.$$

由于 A_n 是一个单调非递增序列，$a_{n,k+1} < \varepsilon$ 意味着 $\sup_{i>k} a_{ni} < \varepsilon$。取这样一个足够大的 n 并将其固定。设 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 X 中的一个序列，使得 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \delta_{x_i} \le \mu_X$，并令 $\{y_1, \ldots, y_N\} := X$。我们定义

$$\tilde{X} := \{\xi_1, \ldots, \xi_k, \eta_1, \ldots, \eta_N\}$$

并定义两个映射 $\varphi\colon X \to \tilde{X}$ 和 $\psi\colon X \to \tilde{X}$，使得

$$\varphi(x) := \begin{cases} x_i & \text{if } x = \xi_i, \\ y_i & \text{if } x = \eta_i, \end{cases} \quad \text{and} \quad \psi(y_i) := \eta_i.$$

我们现在定义 X 上的两个概率测度 $\mu_{\tilde{X}}$ 和 $\mu_{\tilde{X}_n}$，如下所示。

$$\mu_{\tilde{X}} := \sum_{i=1}^{k} a_i \delta_{\xi_i} + \psi_*(\mu_X - \sum_{i=1}^{k} a_i \delta_{x_i}), \quad \mu_{\tilde{X}_n}\lfloor_{\{\xi_1,\ldots,\xi_k\}} := \sum_{i=1}^{k} a_{ni} \delta_{\xi_i}$$

且 $\mu_{\tilde{X}_n}\lfloor_{\{\eta_1,\dots,\eta_N\}}$ 按如下方式确定。找出有限个实数 b_{n1}、……、$b_{nM} \in [0,\varepsilon)$，使得

$$\sum_{i=1}^{M} b_{ni} = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}$$

并设置

$$c_{nj} := \begin{cases} b_{nj} & \text{if } 1 \le j \le M, \\ a_{n,j-M+k} & \text{if } j > M. \end{cases}$$

注意到 $\sup_j c_{nj} < \varepsilon$。我们定义

$$\mu_{\tilde{X}_n}(\{\eta_i\}) := \sum_{j=j_{i-1}+1}^{j_i} c_{nj}$$

对于 $i = 1, \dots, N$，其中 $j_0 := 0$, $j_N := +\infty$，以及

$$j_i := \inf\left\{ j > j_{i-1} \;\middle|\; \sum_{l=j_{i-1}+1}^{j} c_{nl} \ge \mu_{\tilde{X}}(\{\eta_i\}) \right\}$$

对于 $i = 1, \dots, N-1$. 在 $\inf \emptyset = +\infty$ 下，如果存在 $i_0 < N$ 使得 $j_{i_0} = \cdots = j_N = +\infty$，那么我们理解

$$\mu_{\tilde{X}_n}(\{\eta_{i_0+1}, \dots, \eta_N\}) = 0.$$

令 $i_0 := \min\{1 \le i \le N \mid j_i = +\infty\}$，我们有

$$\mu_{\tilde{X}}(\{\eta_i\}) \le \mu_{\tilde{X}_n}(\{\eta_i\}) \le \mu_{\tilde{X}}(\{\eta_i\}) + \varepsilon$$

根据定义，对任意 $i < i_0$ 都成立。另一方面，由于

$$1 - \sum_{i=1}^{k} a_{ni} = \sum_{j=1}^{\infty} c_{nj} \le \sum_{i=1}^{i_0} \mu_{\tilde{X}}(\{\eta_i\}) + (i_0 - 1)\varepsilon,$$

我们有

$$\sum_{i=i_0+1}^{N} \mu_{\tilde{X}}(\{\eta_i\}) = 1 - \sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{i=1}^{i_0} \mu_{\tilde{X}}(\{\eta_i\}) \le \sum_{i=1}^{k} |a_{ni} - a_i| + (i_0 - 1)\varepsilon \le i_0 \varepsilon.$$

这意味着

$$\begin{aligned} &|\mu_{\tilde{X}_n}(\{\eta_{i_0}\}) - \mu_{\tilde{X}}(\{\eta_{i_0}\})| \\ &\le \sum_{i=1}^{i_0-1} |\mu_{\tilde{X}_n}(\{\eta_i\}) - \mu_{\tilde{X}}(\{\eta_i\})| + \sum_{i=i_0+1}^{N} \mu_{\tilde{X}}(\{\eta_i\}) + \sum_{i=1}^{k} |a_{ni} - a_i| \\ &\le 2 i_0 \varepsilon \le 2N\varepsilon. \end{aligned}$$

因此，我们有

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu_{\tilde{X}_n}, \mu_{\tilde{X}}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} |a_{ni} - a_i| + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} |\mu_{\tilde{X}_n}(\{\eta_i\}) - \mu_{\tilde{X}}(\{\eta_i\})| \le 2N\varepsilon.$$

因此，令 $X_n := (X, d_X, \varphi_* \mu_{\tilde{X}_n})$，我们得到 $X_n \in \mathcal{P}_{A_n}$ 并

$$\square(X, X_n) \le 2 d_{\mathrm{TV}}(\mu_X, \varphi_* \mu_{\tilde{X}_n}) \le 2 d_{\mathrm{TV}}(\mu_{\tilde{X}}, \mu_{\tilde{X}_n}) \le 4N\varepsilon,$$

这意味着 $\lim_{n\to\infty} \square(X, \mathcal{P}_{A_n}) = 0$。

接下来，我们证明对于任意 $X \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{P}_A$，都有 $\liminf_{n\to\infty} \square(X, \mathcal{P}_{A_n}) > 0$。只需证明，若 $X_n \in \mathcal{P}_{A_n}$ $\square$-收敛于 X，则有 $X \in \mathcal{P}_A$，这是因为可以考虑其逆否命题。

并提取一个子序列。假设 $X_n \in \mathcal{P}_{A_n}$ □收敛于 X。设 $\{x_{ni}\}_{i=1}^{\infty}$ 是 X_n 中的一个序列，其满足

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}\delta_{x_{ni}} \leq \mu_{X_n}.$$

存在博雷尔映射 $f_n\colon X_n \to X$ 以及一个序列 $\varepsilon_n \to 0$ 使得 f_n 是一个至多相差 ε_n的 1-Lipschitz 映射，并且 $d_{\mathrm{P}}(f_{n*}\mu_{X_n}, \mu_X) \leq \varepsilon_n$(实际上， f_n可以假设为一个 ε_n-mm-同构，但这里没有必要这样做)。序列 $\{f_n(x_{ni})\}_{n=1}^{\infty}$ 根据与证明命题 4.2 相同的论证，存在一个收敛子序列。令

$$x_i := \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_{n_k i}),$$

其中 $\{n_k\}$ 是 $\{n\}$ 的一个子序列，使得对于任意 i， $\{f_{n_k}(x_{n_k i})\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛。由于 A_n 弱收敛到 A ，且 $f_{n*}\mu_{X_n}$ 弱收敛到 μ_X，因此我们有

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i\,\varphi(x_i) \leq \liminf_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_k i}\,\varphi(f_{n_k}(x_{n_k i})) \leq \lim_{k\to\infty} \int_{X_{n_k}} \varphi\circ f_{n_k}\, d\mu_{X_{n_k}} = \int_X \varphi\, d\mu_X$$

对于任意非负有界连续函数 $\varphi\colon X \to [0,+\infty)$ ，其中第一个不等式由 Fatou引理 得出。这意味着 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i\delta_{x_i} \leq \mu_X$，因此 $X \in \mathcal{P}_A$。该引理的证明至此完成。□

定理的证明*1.6*。由引理4.4 和4.5可知，映射 $\mathcal{A} \ni A \mapsto \mathcal{P}_A \in$ 不动点集(Π)是从紧空间 $\mathcal{A}$ 到豪斯多夫空间不动点集(Π)的连续双射。因此，这是一个同胚。证明完毕。□

5. Further questions

在 [1, 问题9.1] 中有人问，格罗莫夫-豪斯多夫空间是否与 l^2同胚。在我们先前的论文 [10], 中，我们证明了 $\mathcal{X}$ 在集中拓扑下与 l^2 不同胚。以下问题仍未解决。

问题5.1. $\mathcal{X}$ 在盒拓扑下是否与 l^2 同胚?

由定理1.2 （分别由1.3）可知， $\mathcal{X}_*$ 和 Σ （分别为 Π_* 和 $\Pi_*/\mathbb{R}$）彼此弱同伦等价。我们还提出以下问题。

问题 5.2. 空间 $\mathcal{X}_*$ 在盒拓扑和／或集中拓扑下是否可缩和／或局部可缩?

问题 5.3. Σ 在盒拓扑和/或集中拓扑的商拓扑下可缩吗?

问题 5.4. 对于 Π、 Π_*和 $\Pi_*/\mathbb{R}_+$，是否也存在与问题5.2 和5.3 中相同的问题，而不是考虑 $\mathcal{X}$、$\mathcal{X}_*$和 Σ?

以下内容已在我们先前的论文 [10]中陈述。

问题5.5. $\mathcal{X}$ 上的可观测度量是测地的吗? 金字塔紧化 Π的 $\mathcal{X}$ 是测地的吗?

致谢。作者谨向 Theo Sturm、Max von Renesse、Ayato Mitsuishi、Atsushi Katsuda、Kohei Suzuki 和 Shouhei Honda 教授致以谢意，感谢他们提出的宝贵意见。

References

[1] T. Banakh、R. Cauty 和 M. Zarichnyi，《无限维拓扑中的未解问题》，《拓扑学中的未解问题》第二卷（E. Pearl 编），爱思唯尔，2007 年，第 601–624 页。[2] J. R. Choksi，测度空间的逆极限，《伦敦数学会会刊》（第三辑）8（1958），321–342。[3] A. Dold，纤维化理论中的单位分解，《数学年刊》（第二辑）78（1963），223–255。[4] S. Esaki、D. Kazukawa 和 A. Mitsuishi，Gromov 金字塔的不变量及其应用。准备中。[5] A. Greven、P. Pfaffelhuber 和 A. Winter，随机度量测度空间（Λ-凝聚测度树）的依分布收敛，《概率论及其相关领域》145（2009），第 1–2 期，285–322。[6] M. Gromov，《黎曼与非黎曼空间的度量结构》，2001 年英文版重印，《现代 Birkhäuser 经典著作》，Birkh¨auser Classics, Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，MA，2007。[7] D. Husemoller，《纤维丛》，第 3 版，《数学研究生教材》第 20 卷，施普林格出版社，纽约，1994。[8] A. O. Ivanov 和 A. A. Tuzhilin，格罗莫夫-豪斯多夫空间的等距群，《数学学报》71（2019），第 1–2 期，123–154。[9] D. Kazukawa，度量变换空间的收敛，《以色列数学杂志》252（2022），第 1 期，243–290。[10] D. Kazukawa、H. Nakajima 和 T. Shioya，度量测度空间之空间的拓扑学方面。预印本。[11] M. Ledoux，《测度集中现象》，《数学调查与专著》第 89 卷，美国数学会，普罗维登斯，RI，2001。[12] P. L´evy，《泛函分析的具体问题》。附 F. Pellegrino 撰写的关于解析泛函的补篇，Gauthier-Villars，巴黎，1951（法文）。第 2 版。[13] W. L¨ohr，度量测度空间上的 Gromov-Prohorov 度量与 Gromov 的 $\square_\lambda$-度量等价，《电子概率通信》18（2013），第 17 期，10。[14] V. D. Milman，P. L´evy 在几何泛函分析中的遗产，《Ast´erisque》157–158（1988），273–301。Paul L´evy 随机过程研讨会（帕莱索，1987 年）。[15] R. Ozawa 和 T. Shioya，度量测度不变量的极限公式与相变性质，《数学杂志》280（2015），第 3–4 期，759–782。[16] T. Shioya，《度量测度几何》，《IRMA数学与理论物理讲座》第 25 卷，EMS出版社，苏黎世，2016。Gromov 的收敛理论以及度量与测度的集中。[17] K.-T. Sturm，空间之空间：度量测度空间上的曲率界与梯度流。arXiv:1208.0434v2，即将发表于《美国数学会回忆录》。

Faculty of Mathematics, Kyushu University, Fukuoka 819-0395, JAPAN
电子邮箱地址：kazukawa@math.kyushu-u.ac.jp

Mathematical Sciences Course, Ehime University, Matsuyama 790-8577, JAPAN电子邮箱地址：nakajima.hiroki.nz@ehime-u.ac.jp

Mathematical Institute, Tohoku University, Sendai 980-8578, JAPAN电子邮箱地址：shioya@math.tohoku.ac.jp