arXiv:2304.06984v1 [math.MG] 14 Apr 2023

关于四面体的平衡

GERG ˝O ALMÁDI、ROBERT J. MACG. DAWSON、GÁBOR DOMOKOS 和 KRISZTINA REG ˝OS

摘要。自 Conway 和 Guy [2] 发表第一个此类物体存在性的证明以来，多面体的单静态性质（即仅有一个稳定或不稳定静态平衡点的性质）一直是研究热点。在同一篇文章中，他们还证明了均质四面体至少有两个稳定平衡点。通过运用极对偶，同一思路也被用于证明均质四面体至少有两个不稳定平衡点。Conway [3] 还声称，在非均质四面体中可以找到单稳态四面体。本文不仅正式证明这一说法，并表明单静态四面体恰有 4 个平衡点，还揭示了这个问题一个令人惊讶的新方面：单静态性意味着形状具有某些可见特征，反之亦然。我们的结果还表明，单稳单静四面体（恰有一个稳定平衡点和一个不稳定平衡点）并不存在。与此相对，我们证明，对于其他任何合法的面、边和顶点数，都存在一个具有相应面向量的单稳单静多面体。

1. 引言

1.1. 历史与背景。 四面体实体奇特的力学性质最早于1967年被研究。当时 Heppes 构造了一个均质四面体 [8]，它只能稳定地以两个面着地。Conway 指出 [3]，对于均质四面体，这个数目无法进一步降低：也就是说，它不可能是单稳态。

一个具有质心O的三维加权凸多面体 $\mathscr{P}$ 由一个固定的水平面支撑时，具有三种类型的平衡点：稳定平衡（位于一个面上）、不稳定平衡（位于一个顶点上）和鞍点（位于一条棱上）。它们分别对应于径向高度函数$r_{\mathscr{P},O}$的局部极小值、极大值和鞍点：该函数$S^2 \to \mathbb{R}^+$ 描述了多面体 $\mathscr{P}$的边界到O的距离。如今与莫尔斯理论相关联的这类平衡点的整体研究，追溯至1859年Cayley [1] 对光滑曲面（在笛卡尔坐标系中进行解释）的研究。几年后，Maxwell [9] 指出，欧拉公式$f - e + v = 2$描述了极大值、鞍点和极小值之间的关系；将其应用于径向高度函数$r_{\mathscr{P},O}$，便可将凸多面体 $\mathscr{P}$上承载平衡点的面、棱和顶点的数量联系起来。

Conway 声称，加权四面体可以是单稳态的，并提出了这样一个问题：高维的均质单纯形是否也可能具有这一性质。Dawson 和 Finbow 通过一系列论文 [3, 4, 6] 回答了这一问题；他们还证明，经过适当加权后，甚至一些正多胞体也可以是单稳态的。

2010 数学主题分类。 52B10, 77C20, 52A38.关键词和短语。 多面体，静态平衡，单稳多面体。谨此感谢 NKFIH 匈牙利研究基金第 134199 号资助项目以及 EMMI 资助的 BME FIKP-VÍZ 项目对 GD 和 GA 的支持。KR：本研究得到了 ITM 和 NKFIH 资助的 UNKP-22-3 计划的支持。谨对代表 Albrecht 科学奖学金的赠礼表示衷心感谢。

这里我们关注加权情形。我们将给出一个（非正则）四面体所满足的条件 $\mathscr{T}$，该条件等价于存在一种加权（$\mathscr{T}$，O）使其成为单稳态；同时，我们还将给出加权四面体满足 Conway 命题的必要且充分条件。（虽然这种四面体并不难构造，但目前似乎尚未有已发表的实例。）

尽管从未明确提出过，但关于单稳态的一个根本问题始终是：它能否成为任何给定形状的一种可见 属性。一般来说，情况似乎并非如此：Gömb¨c 形状对形状容差的要求极为苛刻（0.1%），这表明仅凭目视检查很难选出单稳态形状。事实上，研究已表明 [11]，对于光滑形状，单稳态形状的平坦度和薄度都最小，因此它们出现在球面附近。在此，我们展示四面体的一项惊人特性：单稳态和单稳态不稳定性都以独特的方式反映在其形状上。这些外在特征不仅优美，似乎还是这一现象的核心：基于这些形状特征，我们将证明，任何单稳态四面体都具有双重不稳定性 ——也就是说，它恰好有两个顶点处于平衡状态。类似 Gömböc 的单稳态加权四面体，以及具有三个或四个不稳定平衡点的单稳态四面体，都不存在。不过，我们将证明，如果某个四面体经过加权后能在一个面上达到单稳态，那么必定也存在其他加权方式，使它在每个面上都达到单稳态。我们还将证明，尽管一般而言，三维或更高维中物体倾覆的物理过程极其复杂，但只要知道一个单稳态四面体的形状和质心，就能完整描述它的倾覆过程。

多面体的极对偶 $\mathscr{P}$ 是集合 $\mathscr{P}^* = \{x : x \cdot p \leq 1 \text{ 对所有} p \in \mathscr{P}\}$。若 $\mathscr{P}$ 是凸的，$\mathscr{P}^{**} = \mathscr{P}$。四面体的极对偶也是四面体；两者的顶点与面之间存在自然的一一对应。以下结果证明于 [7]。

命题 1。 设 $(\mathscr{P}, O)$ 是一个加权凸多面体，且 O 位于原点。那么 $\mathscr{P}$ 在一个面上存在平衡，当且仅当 $\mathscr{P}^*$ 在对应的顶点上存在平衡。

因此，任何单不稳定的加权四面体都是双稳态的。我们将给出四面体具有此类加权的显式几何条件；并且可以看出（与单稳态情形不同），如果 $(\mathscr{T}, O)$ 在顶点 A 上是单不稳定的，那么 $\mathscr{T}$ 不可能通过加权而在任何其他顶点上成为单不稳定。最后，我们将证明，表征四面体的面向量（f，e，v）$= (4,6,4)$ 在多面体的面向量中是唯一的：任何其他合法面向量都对应某个代表多面体，而该多面体可以通过加权使其成为单稳态。

1.2. 平衡的定义。

定义1. [7], [11] 设 $\mathscr{P}$ 为一个凸多面体，$\mathrm{int}\mathscr{P}$ 和 $\mathrm{bd}\mathscr{P}$ 分别表示其内部和边界。我们选取一点 $O \in \mathrm{int}\mathscr{P}$，并将其视为质心。（我们并未假设 $\mathscr{P}$ 具有均匀密度，因此这并不对 O 施加任何限制，除了它必须是一个内点。）

如果存在一点 \(Q\in\operatorname{relint}A\)，使得经过 \(Q\) 且垂直于 \([O,Q] \) 的平面支撑 \(\mathscr{P}\)，则称 \((\mathscr{P},O)\) 在一个面、棱或顶点 A 上处于平衡状态。（回顾一下，“相对内部”的定义方式使得单点集的相对内部就是其自身，尽管其内部 为空：因此，\(\mathscr{P}\) 可能在一个顶点上处于平衡状态。）我们将这种平衡称为

稳定，如果Q位于一个面的相对内部；如果Q是一个顶点，则为不稳定；否则为双曲型（鞍点），并分别用S、U、H表示它们的数量。

如上所述，Maxwell 证明了$S - H + U = 2$。这些平衡点直观地对应于物理模型（$\mathscr{P}$, O）在水平面上保持平衡的位置。它们也对应于 $\mathscr{P}$相对于O的径向函数中的“谷”“峰”和“鞍点”。

定义 2. [7] 如果一个 $\mathscr{P}$凸多面体具有唯一的稳定平衡点（恰有一个面可以作为支撑面），则称其为单稳态；如果它具有唯一的不稳定平衡点（恰有一个顶点可以使其处于摇摇欲坠的平衡状态），则称其为单不稳定。

2. 单稳态的结果

以下假设 $\mathscr{P}$是一个四面体 $\mathscr{T} = \boxtimes ABCD$，其面 $\mathscr{A}$对应的顶点为A（等等）。如果一个四面体有一条钝角路径 $A - B - C - D$，则称它具有钝角路径；该路径由三条边构成，不失一般性地设为AB、BC和CD，这些边对应的二面角均为钝角，且它们没有公共顶点。例如，四面体 $\mathscr{T}_0$ 的顶点为（A,B,C,D）=（(0,0,0),(0,0,100000),(153600,44400,0),(112200,7800,6400)），它就是这样的四面体。（备注：$\mathscr{T}_0$在面 $\mathscr{D}$上为单稳态，其质心位于O =(104200,4300,100)。）我们注意到，三条钝角边不可能围成一个面，而且没有四面体能有四个钝二面角。

定理 1. 设 $\mathscr{T}$ 是一个四面体；则下列条件等价：

(1) $\mathscr{T}$ 有一条钝角路径；*(2)* 存在 O，使得 $(\mathscr{T},O)$ 是单稳态的；*(3)* 对每个面 F，都存在 O_F，使得 $(\mathscr{T},O_F)$ 在 F 上是单稳态的。

证明。(3)⇒(2) 显然成立。

(2) ⇒ (1)：四面体具有这样一个性质（在多面体中独一无二）：当且仅当我们可以沿着一条由棱组成的路径从一个顶点走到另一个顶点时，我们才能沿着相同的棱从一个面跳到另一个面。钝二面角必须足够多，才能使四面体从任意一个面滚到静止面；而任何一个面都不能有三个钝二面角。因此，钝二面角构成一条长度为 3 的路径。

最后，(1)⇒(3)。若我们的钝角路径为 A–B–C –D，则钝棱按 $\mathscr{C}-\mathscr{D}-\mathscr{A}-\mathscr{B}$ 的顺序连接各面（图 1）。只需证明，对于适当的 $O_{\mathscr{A}}$，数对 $(\mathscr{T},O_{\mathscr{A}})$ 在 $\mathscr{A}$ 上是单稳态的；对于 $\mathscr{B}$ 也可同理证明。作一平面，沿着与 $\mathscr{D}$ 共用的棱 AB，垂直于 $\mathscr{C}$ = △ABD。该平面与 C D 相交于点 E（图 1a）。四面体 ⊠ABC E 的钝棱为 BC 和 EC。若 O ∈int⊠ABC E，则 $(\mathscr{T},O)$ 在 $\mathscr{C}$ 上没有稳定平衡点。接着，作一平面，沿着 BC 垂直于 $\mathscr{D}$ = △ABC。该平面与 AE 相交于 F，而 CE 是四面体 ⊠BC EF 的一条钝棱（图 1b）。若 O ∈int⊠BC EF，则 $(\mathscr{T},O)$ 在 $\mathscr{C}$ 或 $\mathscr{D}$ 上没有稳定平衡点。

如果我们用一个沿 CE、垂直于 $\mathscr{A}$ 的平面重复这一过程，它会与 BF 相交于 G；若 $O_{\mathscr{B}} \in \text{int}\boxtimes CEFG$，则 $(\mathscr{T},O_{\mathscr{B}})$ 在 $\mathscr{A}$、$\mathscr{C}$ 或 $\mathscr{D}$ 上没有稳定平衡点，因此在 $\mathscr{B}$ 上是单稳态（图 1c）。类似地，经过同一条棱但垂直于$\mathscr{B}$的平面与BF相交于H；若$O_{\mathscr{A}} \in \text{int}\boxtimes BCEH$，则 $(\mathscr{T},O_{\mathscr{A}})$ 在$\mathscr{B}$、$\mathscr{C}$或$\mathscr{D}$上没有稳定平衡点，因此在$\mathscr{A}$上是单稳态。□

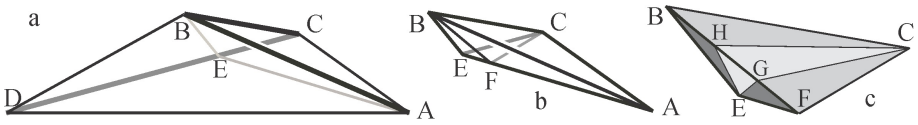

图 1. 具有钝角路径的四面体的倾倒区域

备注。 我们已经证明，经过适当加权后，具有钝角路径的四面体仅在一个面上处于稳定状态。但我们尚未说明它是如何到达该状态的。（正如酒保在打烊时所说：“女士们、先生们，你们不必回家，但不能继续待在这里了。”）事实上，如果没有某种能量耗散机制，四面体永远不会停留在任何一个面上，而只会永无休止地弹跳。[1]

当多面体绕一条棱翻倒时，它只有一个自由度；只要能有效地耗散能量，能量耗散的方式并不影响它最终停留的位置。然而，在某些情况下，物体可能不是翻倒到一条棱上（从那里它必然继续翻到下一个面），而是翻倒到一个顶点上（图 2a）。如果发生这种情况，物体暂时拥有的不是两个而是三个自由度：质心O 在以A为中心的球面上运动，同时物体还可以绕OA 轴旋转（图 2b）。因此，我们还需要考虑力矩、转动惯量，以及O 相对于四面体所落到的那条棱的位置：这个问题似乎难以处理。

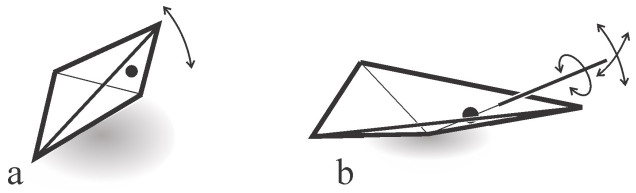

图 2. 一个无滑动滚动的四面体可以有 1 个或 3 个自由度。

幸运的是，如果 $(\mathcal{T},O)$ 是单稳态配重四面体，这些困难就不会出现！在这种情况下，如上所示，如果一个面有两个钝二面角，质心的位置会使得 $\mathcal{T}$ 沿着至少一条这样的棱翻 onto *onto* 该面。因而，每个非平衡面都有唯一的离开路径；只要我们假设落地是非弹性的，就可以仅根据 $(\mathcal{T},O)$ 和起始面，计算出到达稳定平衡点的确切路径。

3. 一些球面几何

如果我们考虑 $\mathcal{T}$ 与以某个顶点 A 为中心的小球面 $\mathcal{S}_A$ 的交集，就会看到多面体顶点的几何形状正是球面的几何形状！对于一个加权四面体（$\mathcal{T}$、O），令P、Q、R、Ω 分别为 $\mathcal{S}_A$ 与AB、AC、AD 和AO 的交点（见图3）。那么，例如，面角 $\angle BAC$对应于 $\mathcal{S}_A$ 上的球面线段 PQ，而面 $\triangle ABC$ 与面 $\triangle ACD$ 之间的二面角对应于球面角 $\angle PQR$。在每种情况下，弧度度量都相等。

[1]歌剧迷，或者至少是熟悉歌剧轶闻的人，会记得这样一个故事：Eva Turner 饰演 Tosca 时，从城垛上跳下，落到舞台工作人员事先放置的一张弹性过强的蹦床上，并因此意外谢幕好几次！

如果球面线段的度量小于 $\pi/2$，我们称其为短；否则称其为长；角通常分为“锐角”或“钝角”。

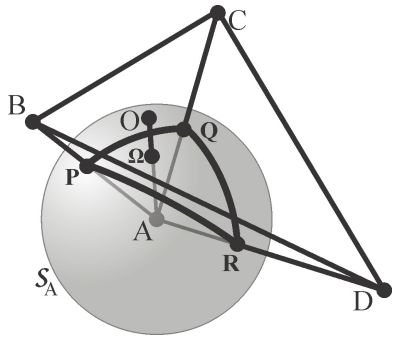

图3. 顶点的几何就是球面的几何。

以下结果刻画了不稳定平衡。

引理 1. 对于加权四面体 $(\mathscr{T},O)$的任意顶点 A，

(1) $(\mathscr{T},O)$ 在 A 上有（不稳定）平衡，当且仅当角 $\angle BAO$、$\angle CAO$ 和 $\angle DAO$ 都是锐角。等价地，球面弧 $P\Omega$、$Q\Omega$ 或 $R\Omega$ 都是短弧。*(2)* $(\mathscr{T},O)$ 对于每个 $O \in$ 内部$\mathscr{T}$，在 A 上都有平衡，当且仅当面角$\angle BAC$、$\angle CAD$、$\angle DAB$ 均不为钝角。等价地，弧 PQ、QR 或 RP 均不是长弧。

证明。令 Π 为在 OA 处垂直于 A的平面：则 $\mathscr{T}$在 A 上有平衡，当且仅当 B、C、D 都位于 Π 的同一侧，且 O也在该侧。对于每个 O 内部于 $\mathscr{T}$，这成立，当且仅当 $\angle BAC$、$\angle CAD$、$\angle DAB$均为锐角或直角。□

我们也可以用这种方式刻画稳定平衡，不过需要考虑三个顶点处的局部构形。下面的结果显而易见：

引理2. *(1)* $(\mathscr{T},O)$ 在 $\triangle ABC$上有稳定平衡，当且仅当 $\triangle ABC$与 $\triangle ABO$、$\triangle AOC$和 $\triangle OBC$之间的二面角均为锐角。*(2)* $(\mathscr{T},O)$ 对每个$O \in \mathrm{int}\mathscr{T}$都在 $\triangle ABC$上有稳定平衡，当且仅当 $\triangle ABC$与$\triangle ABD$、$\triangle ADC$或 $\triangle DBC$之间的二面角均不为钝角。*(3)* 例如，如果 $\triangle ABC$与 $\triangle ABO$之间的二面角为钝角，那么（在$\mathscr{S}_A$上）角 $\angle QP\Omega$ 为钝角，球面 $\mathscr{S}_B$上对应的角也为钝角。

既然我们已经了解了球面几何对于这一问题的重要意义，接下来让我们确立一些广为人知的基本事实。

引理 3. *(1)* 只有锐角的球面三角形只有短边；*(2)* 恰有一个锐角的球面三角形恰有一条短边，且该边与锐角相对；*(3)* 有三条长边的球面三角形有三个钝角；

	钝角（二面角）				
Long 边（钝角 face 角）		0	1	2	3
	0	√	√	x	x
	1	x	√	x	x
	2	x	√	√	√
	3	x	x	x	√

表1. 球面三角形中的长边/钝角元素与多面体顶点的可能组合

（*4*）恰有一条长棱的球面三角形，恰有一个钝角，且该钝角与长棱相对。（*5*）所有棱均为短棱的球面三角形，至多有一个钝角。

证明。 (1) 如果 $\triangle ABC$ 只有锐角，则 $\cos A$、$\cos B$ 和 $\cos C$ 均为正数。因此，若（例如）棱 BC 的弧度长度为 a，则球面余弦定律之一给出：

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C} > 0,$$

因此，$a < \pi/2$。关于b和c的证明类似。
(2) 如果A是锐角，设A'为其对跖点：共线三角形 $\triangle A'BC$ 满足（1）的条件。

(3) 如果 $\triangle ABC$ 只有长边，则 $\cos a$、$\cos b$ 和 $\cos c$ 均为负；另一条球面余弦定理给出

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} < 0$$

且A为钝角：关于B和C的证明类似。
（4）再次可由考察柱面三角形从（3）推出。（5）在这种情况下，$\cos a$、$\cos b$和$\cos c$均为正数。若A为钝角，则 $\cos a < \cos b \cos c$，因此，与A相对的a必定是严格最长的边。

□

不过，我们可以构造恰有一个钝角且长边数量为零条或两条的球面三角形。我们还可以构造有三个钝角且只有两条长边的球面三角形。这些结果汇总于表1。

4. 不稳定性结果

我们首先排除“加权四面体戈姆博克”存在的可能性，实际上还证明了更强的结论。

定理2。 没有任何四面体同时具有单稳态加权和单不稳定加权，即使质心不同也不例外。

证明。 如上所述，每个单稳定加权四面体 $(\mathcal{T},O)$ 都有两个顶点 B,C，各自有两个钝二面角。表1显示，这两个顶点各自都必须有两个钝面角；但一个四面体的钝面角总数不能超过四个，因此另外两个顶点 A,D 只有锐角。根据引理 1，对于任意 $O'\in\operatorname{int}\mathcal{T}$，$(\mathcal{T},O')$ 在这些顶点上都有平衡点。□

对于一种特定的加权方式，我们可以得出更多结论：

定理 3。 如果一个加权四面体$(\mathcal{T},O)$ 是单稳态的，那么恰有两个顶点是不稳定平衡点。

证明。 根据定理 1，不妨设 $(\mathcal{T},O)$ 有一条钝角路径 $A-B-C-D$，且在 $\triangle DBC$或 $\triangle ACD$ 上存在平衡点。由于BC和CD上的二面角都是钝角，BD 上的二面角必为锐角。然而，根据假设，B处另外两个二面角都是钝角。

B 处的局部几何因此对应一个球面三角形 $\triangle\delta\gamma\alpha$，其 δ 处的角为锐角，γ 和 α 处的角为钝角。于是（引理 3），$\delta\gamma$ 和 $\delta\alpha$ 边较长，而 $\alpha\gamma$ 边较短。设E为与 $\bigcirc\delta\alpha$ 对偶的点；它位于与 δ 对偶的大圆上（图 4），该大圆与 $\delta\gamma$ 相交于F，与 $\delta\alpha$ 相交于G。

但根据假设，$(\mathcal{T},O)$ 在 $\triangle DBA$ 上没有平衡，因此 $\angle\delta\alpha\Omega$ 为钝角；于是 Ω 位于 αE 以及 *a fortioriGE* 相对于 D 的远侧。因此 $\delta\Omega$ 较长，$\angle DBO$ 为钝角，并且 $(\mathcal{T},O)$ 在 B 上没有平衡。类似的论证（利用缺少平衡这一点 m 在 $\triangle ABC$ 上）表明，$(\mathcal{T},O)$ 在 C 上没有平衡。□

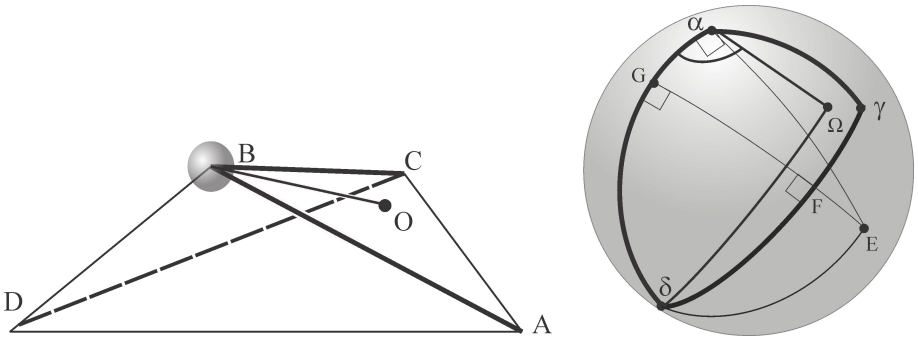

图 4. 一个顶点处有两个钝二面角的构形。

利用极对偶，我们还得到

推论 3.1. 若加权四面体 $(\mathcal{T},O)$ 是单不稳定的，则它恰好在两个面上具有稳定平衡。

现在我们可以证明一个与定理1类似的结果，适用于单不稳定四面体；这个结果似乎无法通过极对偶从定理1推出。定义钝角环为四面体$A-B-C-D-A$上的一个棱环，使得面角 $\angle ABC$、$\angle BCD$和 $\angle CDA$均为钝角。

定理4. 四面体 $\mathcal{T}$ 有一个钝角环，当且仅当存在某个 O，使得有序对 $(\mathcal{T},O)$ 是单不稳定的。

证明。假设 A–B –C –D –A 是一个钝角环，且 P ∈BC；那么 ∠ABP = ∠ABC 是钝角。用同样的论证可知，角 ∠DCP 是钝角。此外，由于 ∠ADC 是钝角，当 P ∈BC 的相对内部中足够靠近 C 时，∠ADP 也是钝角。P 位于 $\mathcal{T}$ 的边界上；但若令 O 为一个足够靠近 P 的内点，则角 ∠ABO、∠DCO 和 ∠ADO 仍为钝角，并且 $(\mathcal{T},O)$ 在 B、C 或 D 上均不存在平衡。

现在我们证明，单不稳定性要求存在一个钝角环。三角形至多有一个钝角，因此四面体至多有四个钝面角；而要成为单不稳定体，在没有平衡的三个顶点处必须各有一个（或多个）钝面角。因此，钝面角在各顶点之间仅有三种分配方式：{0,1,1,1}、{0,1,1,2} 和 {1,1,1,1}。

我们用有 m 个钝面角和 n 个钝二面角的顶点对应的有序对 $[m,n]$ 来表示它。由于每个钝二面角有两个端点，各顶点处 n 的总和为偶数；并且只能使用表1中出现的有序对 $[m,n]$。单不稳定四面体只有以下几种可能：

I: $\{[0,1],[1,1],[1,1],[1,1]\}$;

II: $\{[0,0],[1,1],[1,1],[2,2]\}$;

III: $\{[0,1],[1,1],[1,1],[2,1]\}$;

IV: $\{[0,1],[1,1],[1,1],[2,3]\}$;

V: $\{[1,1],[1,1],[1,1],[1,1]\}$。

I，它只有三个钝面角，是可以实现的，例如，可以通过一个具有以下顶点的四面体来实现。

$$\{(-10,0,0),(0,2,0),(0,-2,0),(1,0,1)\}$$

（图 5 a）。设 A 为 [0,1] 顶点，且 AC 为其钝二面角，则 BD 也为钝二面角，面角 ∠ABC、∠BCD 和 ∠CDA 均为钝角，且 $A-B-C-D-A$ 构成一个钝角环。

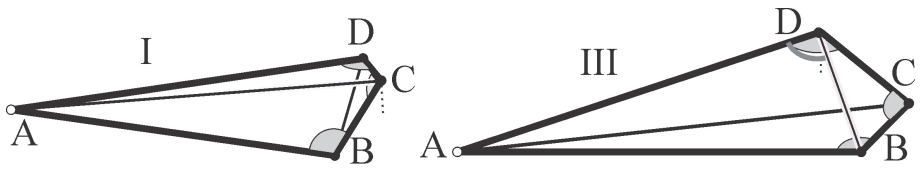

图 5. 具有钝角循环的四面体

II 不可能出现。设 D 为 [2,2] 顶点，钝角为 ∠ADB 和 ∠ADC。那么 DC 和 DB 上的二面角均为钝角，B 和 C 是 (1,1) 型顶点，而角 ∠ABC 和 ∠ACB 也都是钝角，这不可能。

	不稳定平衡点				
稳定平衡点 2		1	2	3	4
	1	x	√	x	x
		√	√	√	√
	3 ×	√	√	√	
	4 ×	√	√	√	

表2. 可能的平衡点组合

III 则可能出现。设 A 为 $[0,1]$顶点，D 为 $[2,1]$ 顶点。该四面体有两个没有公共端点的钝二面角。若它们分别为 AD 和 BC，那么角 $\angle ADB$、$\angle ACD$ 中必有一个为钝角（不失一般性，设为 $\angle \underline{AD}B$）。但与 BC相对的角，也就是 $\angle ABD$和 $\angle ACD$，也都是钝角；因此 $\triangle ABD$会有两个钝角，这不可能。

然而，若（不失一般性）钝二面角为AC和BD，我们可以构造一些例子，例如

$$(A,B,C,D) = ((-10,0,0),(2,0,0),(3,2,0),(0,4,1))$$

（图 5 b）。这里$A\ -B\ -C\ -D\ -A$构成钝角环。

IV 不可能出现。设 A 为 $[2,3]$ 顶点；则AB、AC和AD 上的二面角均为钝角。不失一般性，设 C 和 D 是类型为 $[1,1]$的顶点；如前所述，角 $\angle CDB$ 和 $\angle BCD$ 均为钝角。

V 要求四面体有两个不相交的钝二面角，不失一般性地取AC、BD，它们与四个钝角相对；但这样一来，斜四边形 $\bowtie ABCD$ 的角度和将大于 2π，这是不可能的。□

文献 [7]给出了具有2–4个稳定平衡和2–4个不稳定平衡的所有组合的例子。事实上，存在一个四面体，通过适当选择中心（图6），即可呈现全部九种组合[2]。

备注。 如果一个加权四面体（$\mathcal{T}$,O）是单不稳定的，且在顶点 A 处存在一个平衡点，那么A 没有钝面角。因此，对于（$\mathcal{T}$,O'），对所有$A' \in \operatorname{int}\mathcal{T}$而言，在$O$处都有平衡；因此（与定理 1.3 中的情形相反）， $\mathcal{T}$无法通过加权使其在任何其他顶点上成为单不稳定。此类结果表明，（尽管我们使用了极对偶，且表2具有对称性）稳定平衡与不稳定平衡之间并不存在简单的对偶关系。

[2]顶点为(0,0,0)、(100000,0,0)、(50000,41429,0)和(13549,13544,11223)。中心为M_{22} =(15884,5116,835)、M_{23} = (46670,11911,3061)、M_{24} =(28497,5544,2041)、M_{32} =(11400,7243,2597)、M_{33} =(33447,17389,3061)、M_{34} =(23866,8138,3339)、M_{42} = (21845,14097,7142)、M_{43} = (42514,9100,6122)以及M_{44} = (24407,10239,1391)。

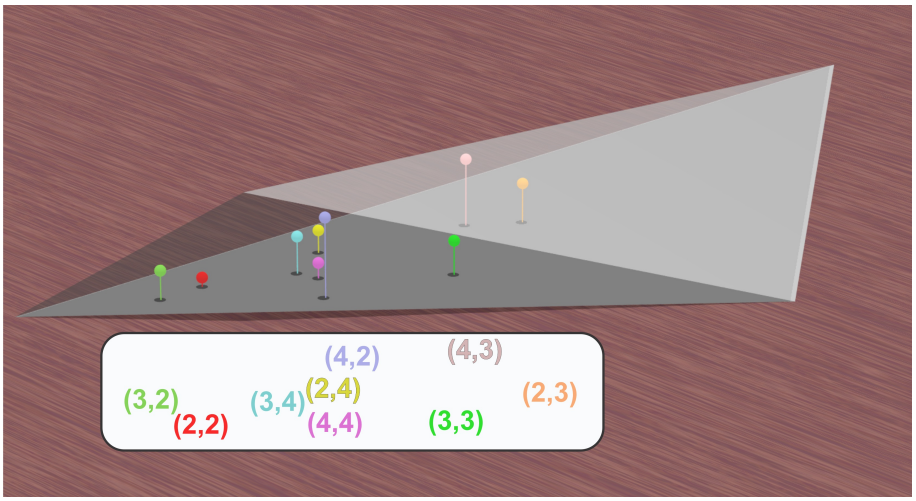

图6.一个根据中心的选择不同，可能具有2–4个稳定平衡点和2–4个不稳定平衡点的四面体。

5. 其他多面体

我们已经看到，即使进行加权，任何四面体也不可能是单稳态的。那么其他类别的多面体呢？向量（f，e，v）$\in \mathbb{N}^3$ 是某个非退化多面体的面向量，当且仅当

- $f \geq v_{-2} + 2$,
- $v \geq f_2 + 2$,
- 和$e = f + v - 2$。

我们将这样的向量称为“合法”。注意，只有当所有顶点的度均为 3 时，第一个表达式才取等号；只有当所有面均为三角形时，第二个表达式才取等号。

定理5. 除(4,6,4) 之外的每个合法向量，都是某个单稳态加权多面体的面向量。

证明. 设 $\mathscr{P}$是一个至少有一个非三角形面的加权多面体。我们断言，存在一个顶点V，它属于 $\mathscr{P}$的一个、两个或三个非三角形面。否则，取由这些面上的支撑平面所围成、且包含P的半空间之交，可得一个凸多面体 $\mathscr{Q}$ ，其每个顶点至少有 4 条棱，每个面至少有 4 条棱。因此$e \geq 2v$，$e \geq 2f$，故由欧拉示性数可得 $\chi(\mathscr{Q}) \leq 0$，这是不可能的。

设V为这样一个顶点，设F为包含V的非三角形面，并设 $\delta > 0$。我们将构造一个新的多面体 $\mathscr{P}'$，它与 $\mathscr{P}$ 共享每一个顶点，唯一的区别是用一个新的顶点V'替换V。设G 为 $\mathscr{P}$ 在V处其他非三角形面的仿射包（如果存在）的交集：它是一个维数至少为 1 的仿射子空间。设H为由 aff$F$ 界定且包含 int$\mathscr{P}$的开半空间。然后取$V' \in G \cap H \cap B_\delta(V)$：显然，至少当 δ足够小时， $\mathscr{P}'$ 与 $\mathscr{P}$具有相同数量的顶点，并多一个面。此外，通过令 δ 足够小，我们可以改变

边和面的方向，使其改变的角度小于任意给定的 $\epsilon > 0$。下文将把这称为“面弯曲”。

设 $(\mathscr{P},O)$ 为一个加权多面体；我们假设 O 处于一般位置，即不落在任何棱或面的对角线上。对于足够小的 δ，以下结论成立：

- $O \in$内$\mathscr{P}'$
- $(\mathscr{P}',O)$ 在顶点 X处有一个平衡点，当且仅当 $(\mathscr{P},O)$ 在对应的顶点处有一个平衡点；
- $(\mathscr{P},O)$ 在除 F之外的任意面上有平衡点，当且仅当 $(\mathscr{P}',O)$ 在对应的面上有平衡点；
- $(\mathscr{P},O)$ 在 F上有平衡点，当且仅当 $(\mathscr{P}',O)$ 在 F' 或 T 上有平衡点（这要求从O 到 F 的垂足不落在该面对角线上；这条面对角线会成为F'的一条棱）；
- $(\mathscr{P}',O)$不能同时在F'和T处达到平衡。

由此可知，如果存在一个有v 个顶点且有f个面（这些面不全是三角形）的单稳单静多面体，那么也存在一个有v 个顶点和$f+1$ 个面的单稳单静多面体。如 [7],所示，根据极对偶，还存在一个有f个顶点和v 个面的单稳单静多面体。

我们通过归纳法完成证明。首先注意，存在一个面向量为(5,8,5)的单稳单静多面体（在组合意义上等价于一个方底棱锥）——见图7。

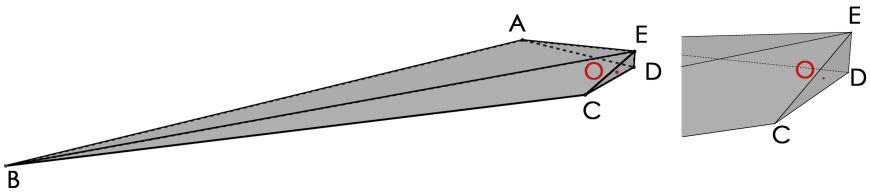

图7. 面向量为(5,8,5)的单稳单静多面体。顶点为(0,0,0)、(10000,0,0)、(10000,2890,0)、(11216,1008,0)和(11216,968,280)；质心为(10790,643,84)。

假设作为归纳假设，该结论对任意满足 $v \le 2n$ 的合法向量均成立。那么，特别地，该结论对 $(f,e,v) = (2n+1,3n+2,n+3)$ 和 $(f,e,v) = (2n+2,3n+3,n+3)$ 成立。根据极对偶，该结论对 $(f,e,v) = (n+3,3n+2,2n+1)$ 和 $(f,e,v) = (n+3,3n+3,2n+2)$ 也成立，而这两个向量均使给定 v 下的 f 取最小值。随后，面弯曲表明，该结论对所有满足 $v \le 2n+2$ 的合法向量均成立，因此，根据归纳法，该结论对所有合法向量均成立。□

除少数情况外，向量（f，e，v）无法确定多面体的组合类别。我们猜想，事实上，除四面体外，每个多面体组合类别都包含能够接受单稳态加权的元素。

利益冲突声明

作者声明不存在需要披露的相关财务或非财务利益冲突。

参考文献

[1] A. Cayley，关于等高线与坡线，《哲学杂志》**XVIII**（1859年）264-268[2] J. H. Conway 和 R. K. Guy，多面体的稳定性，《SIAM评论》**11**（1969年），78-82。[3] R. Dawson，单稳态单纯形，《美国数学月刊》**92**（1985年），541-46。[4] R. Dawson、W. Finbow 和 P. Mak，单稳态单纯形：*II*，《几何学专题》**70**（1998年），209-219。[5] R. Dawson 和 W. Finbow，一个装载后的骰子是什么形状？《数学情报》**21**（1999年），32–37。https://doi.org/10.1007/BF03024844[6] R. Dawson 和 W. Finbow，单稳态单纯形：*III*，《几何学专题》**84**（2001年），101-113。[7]G. Domokos、F. Kovács、Z. Lángi、K. Reg˝os、P. T. Varga。平衡多面体，arXiv预印本 arXiv:1810.05382，2018年。[8] A. Heppes，双倾覆四面体，《SIAM评论》**9** 3（1967年），599-600。[9] J. C. Maxwell，关于山丘与山谷，《哲学杂志》**XXIX**（1870年）233-240[10] J. Milnor，莫尔斯理论，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州（1963年）。[11] P.L. Várkonyi 和 G. Domokos，刚体的静态平衡：骰子、卵石与庞加莱-霍普夫定理，《非线性科学杂志》**16**（2006年），255-281。

GERG ˝O ALMÁDI，ELKH-BME 形态动力学研究组，布达佩斯技术与经济大学，M ˝UEGYETEM RAKPART 1-3.，布达佩斯，匈牙利，1111

电子邮箱地址：gergo.almadi14@gmail.com

ROBERT J. MACG. DAWSON，数学与计算机科学系，圣玛丽大学，加拿大新斯科舍省哈利法克斯 B3H 3C3

电子邮箱地址：rdawson@cs.stmarys.ca

GÁBOR DOMOKOS，形态学与几何建模系及 ELKH-BME 形态动力学研究组，布达佩斯技术与经济大学，M ˝UEGYETEM RAKPART 1-3.，布达佩斯，匈牙利，1111

电子邮箱地址：domokos@iit.bme.hu

KRISZTINA REG ˝OS，形态学与几何建模系及 ELKH-BME 形态动力学研究组，M ˝UEGYETEM RAKPART 1-3.，布达佩斯，匈牙利，1111

电子邮箱地址：regos.kriszti@gmail.com