arXiv:2304.07003v1 [stat.ME] 14 Apr 2023

高维函数型时间序列结构突变的检测与估计

Degui Li*、RunzeLi†、Han LinShang‡

约克大学、宾夕法尼亚州立大学和麦考瑞大学

本版本日期：2023年4月17日

摘要

本文研究高维函数型时间序列异质均值函数中突变的检测与估计，并允许序列存在截面相关性和时间依赖性。我们提出一种新的检验统计量，将函数型CUSUM统计量与功效增强分量相结合，其渐近零分布理论与针对单个函数型时间序列推导的传统CUSUM理论相当。具体而言，额外的功效增强分量扩大了所提检验具有检验功效的区域，并使其在备择假设中的突变较为稀疏时仍能保持稳定的检验功效。此外，我们为具有异质性断点的个体设定潜在分组结构，并提出一种易于实现的聚类算法，结合信息准则一致地估计未知的组数和组成员归属。估计得到的分组结构随后可以改善聚类后突变点估计的收敛性质。蒙特卡洛模拟研究和实证应用表明，所提出的估计与检验方法在有限样本下表现良好。

关键词：聚类、累积和、函数型时间序列、功效增强、结构突变。

*英国约克大学数学系。

†美国宾夕法尼亚州立大学统计系。通讯作者：rzli@psu.edu

‡澳大利亚麦考瑞大学精算研究与商业分析系

1 引言

函数型时间序列建模，即对定义在有限区间内的随机函数所构成的时间序列进行建模，已成为时间序列模型发展的主要前沿领域之一。过去二十年间，人们提出并深入研究了各种函数型线性与非线性时间序列模型（例如，Bosq，2000；H ¨ormann 和 Kokoszka，2010；Horv´ath 和 Kokoszka，2012年；H ¨ormann、Horv´ath 和 Reeder，2013；Li、Robinson 和 Shang，2020）。这些模型及相关方法已应用于生物学、人口学、经济学、环境科学和金融等诸多领域。然而，前述文献中提出的模型框架和方法在很大程度上依赖平稳性假设，而在实际检验函数型时间序列数据时，这一假设往往不成立。例如，Horv´ath、Kokoszka 和 Rice（2014年）发现，美国市场收集的某些股票日内价格曲线存在非平稳性的证据；Aue、Rice 和 S¨onmez（2018年）拒绝了澳大利亚收集的温度曲线满足平稳性的原假设；Li、Robinson 和 Shang（2023年）则发现，根据按年龄和性别分类的生命表死亡人数构建的函数型时间序列具有非平稳特征。因此，检验所收集的函数型时间序列是否平稳已势在必行。

本文主要关注检验均值函数是否随时间发生结构突变，并在确有突变时估计其位置。近年来，针对函数型时间序列中的结构突变进行检测和估计的研究日益增多。广义而言，检测技术主要分为两类。一类是先通过经典的函数型主成分分析，将函数型数据的无限维空间降至有限维空间，再运用针对多元数据开发的检测方法识别突变（例如Aue等人，2009年；Berkes等人，2009年；Zhang 等人，2011年；Aston 和 Kirch，2012年），另一类则是无需预先降维的完全函数型检测方法（例如 Horv´ath、Kokoszka 和 Rice，2014年；Sharipov、Tewes 和 Wendler，2016年；Aue、Rice 和 S¨onmez，2018年）。后一类方法避免了降维可能造成的信息损失，因此数值表现或许更加可靠。现有研究通常关注单个函数型时间序列中的突变检测。将其扩展至多元函数型时间序列较为直接，但进一步扩展至高维函数型时间序列则颇具挑战。事实上，据我们所知，目前几乎没有研究涉及维数与样本量相当的高维函数型时间序列中的突变检测与估计。

本文在灵活的高维函数型时间序列模型框架下研究结构突变检测，该框架允许函数型时间序列在个体间存在截面相关性，并随时间存在依赖性。我们提出一种新颖的检验统计量，将累积和统计量与功效增强（PE）分量相结合，以检测

异质均值函数中的突变。所提出检验统计量的渐近零分布与针对单个函数型时间序列提出的传统累积和统计量的渐近零分布相当（例如，Horv´ath、Kokoszka 和 Rice，2014年；Aue、Rice 和 S¨onmez，2018 年）。实践中，备择假设下的突变往往是稀疏的，即突变只发生在少数函数型时间序列中，或者断点位置可能因个体而异。因此，传统的累积和检验统计量检验功效较低。为解决这一问题，我们在检验统计量中加入了一个额外的 PE 分量。Fan、Liao 和 Yao<style id='27'（2015年）提出 PE 技术，以提高针对稀疏备择的高维检验的检验功效；Kock 和 Preinerstorfer<style id='35'（2019年）对此作了进一步研究。我们将证明，在突变检验中加入 PE 分量能够扩大所提出检验具有检验功效的区域，同时避免检验尺寸扭曲。

当有大量函数型时间序列可供使用时，在备择假设（存在函数型结构突变）下，将所有个体分为两组是很自然的：一组是函数型时间序列没有突变的个体，另一组是存在突变的个体。对于后一组，我们进一步估计未知突变点，并推导出一种几乎达到最优、仅相差一个对数因子的一致逼近速率。此外，我们假设异质性断点存在潜在分组结构，即每组中的个体具有共同的突变点，而不同组之间的突变点各不相同；据此，我们提出一种易于实现的聚类方法，并结合信息准则，一致地估计潜在结构，包括组成员归属和不同突变点的数量。这补充了近期关于函数型数据聚类分析的研究；这类研究通常假设数据独立同分布（i.i.d.），或平稳且弱相关（例如，Tarpey 和 Kinateder，2003；Ferraty 和 Vieu，2006年；Chiou 和 Li，2007；Peng 和 M¨uller，2008年；Delaigle 和 Hall，2012年；Delaigle、Hall 和 Pham，2019年）。此外，我们估计每组内的同质突变点，并表明利用估计得到的分组结构可以提高估计断点的一致性。

蒙特卡洛模拟研究表明，当结构突变相对稀疏时，加入额外 PE分量的所提检验能够增强检验功效，同时避免有限样本中的检验尺寸扭曲。我们还比较了不同高批判阈值参数选择下的数值表现。对于变点的潜在分组结构，所提出的聚类算法和信息准则能够准确识别簇数及其成员归属。此外，利用估计出的簇结构实施合并CUSUM方法，可以显著提高公共断点的估计精度。我们将所开发的突变检测和估计方法应用于道琼斯工业平均指数成分股，以及收集自32个国家的年龄别死亡率，以检验结构突变是否存在并估计断点位置。实证分析表明，这两个真实数据集各自都存在一个公共断点。

本文其余部分安排如下。第2节介绍模型框架、假设检验问题和一些基本假设。第3节介绍检验统计量，并讨论其在原假设和备择假设下的渐近性质。第4节讨论断点估计，并识别异质性断点的潜在结构。第5节和第6节分别报告模拟研究和实证研究。第7节总结全文。主要渐近定理的证明见附录 A，部分技术引理和命题的证明则见补充材料。全文中，我们令 $\mathscr{H}$ 为希尔伯特空间，其定义为有界集 $\mathbb{C}$ 上满足 $\int_{\mathbb{C}} f^2(u)du < \infty$ 的可测函数 $f(\cdot)$ 构成的集合。$\mathscr{H}$ 中的内积定义为 $\langle f_1, f_2\rangle = \int_{\mathbb{C}} f_1(u)f_2(u)du$。对于 $f \in \mathscr{H}$，我们定义 L_2-范数 $\|f\| := \|f\|_2 = \langle f, f\rangle^{1/2} = \left[\int_{\mathbb{C}} |f(u)|^2 du\right]^{1/2}$，更一般地，定义 L_p-范数 $\|f\|_p = \left[\int_{\mathbb{C}} |f(u)|^p du\right]^{1/p}$，$p \geqslant 1$。令 $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 为从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}$ 的连续线性算子空间，并赋予由 $\|\mathcal{L}\|_O = \sup_{f\in\mathscr{H}}\{\|\mathcal{L}(f)\| : \|f\| \leqslant 1\}$ 定义的算子范数。对于每个 $\mathcal{L} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$，其伴随算子 $\mathcal{L}'$ 定义为：对于任意 f_1, $f_2 \in \mathscr{H}$，均有 $\langle \mathcal{L}f_1, f_2\rangle = \langle f_1, \mathcal{L}'f_2\rangle$。令 $\xrightarrow{d}$、$\xrightarrow{p}$ 和 $\Rightarrow$ 分别表示依分布收敛、依概率收敛和弱收敛。

2 模型与假设

假设我们收集到一系列函数型观测 $\mathbf{X}_t = (X_{1t}, \cdots, X_{Nt}), t = 1, \cdots, T$，其中 $X_{it} = (X_{it}(u) : u \in \mathbb{C})$。对于第 i 个个体，$X_{it}, t = 1, \cdots, T$ 由以下模型生成，其中均值函数可能发生突变：

$$X_{it} = \mu_i + \delta_i I(t > \tau_i) + \epsilon_{it}, \tag{2.1}$$

其中，$\mu_i = (\mu_i(u) : u \in \mathbb{C})$ 是突变前的均值函数，$\delta_i = (\delta_i(u) : u \in \mathbb{C})$ 是跳跃函数，τ_i 是突变点，$I(\cdot)$ 是示性函数，而 $\epsilon_{it} = (\epsilon_{it}(u) : u \in \mathbb{C})$ 在时间维度上平稳。未知函数成分 μ_i 和 δ_i 以及突变点 τ_i 允许随 i 变化，以反映不同个体的函数型时间序列之间的异质性。我们主要关注以下假设检验问题：

$$H_0 : \delta_i = 0, i = 1, \cdots, N, \quad \text{versus} \quad H_A : \delta_i \neq 0 \text{ for some } i. \tag{2.2}$$

在原假设 H_0 下，模型（2.1）简化为 $X_{it} = \mu_i + \epsilon_{it}$，其在 t 上平稳。我们旨在检验是否拒绝 H_0，并在拒绝 τ_i 时估计突变点 H_0。函数误差 ϵ_{it} 满足以下正则条件。

假设 1. *(i)* 令

$$\epsilon_{it} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{A}_{ij}\eta_{i,t-j}, \tag{2.3}$$

其中， $\eta_{it} = (\eta_{it}(u) : u \in \mathbb{C})$ 是均值为零且协方差函数正定的独立同分布随机元素，属于 $\mathscr{H}$ $\Omega_i(u,v)\,u$， $v \in \mathbb{C}$，且$\mathbf{A}^{ij}$ 是连续线性算子，其算子范数满足

$$\sum_{j=0}^{\infty} j\left(\max_{1\leqslant i\leqslant N}\|\mathbf{A}_{ij}\|_O\right) < C_A, \tag{2.4}$$

其中， C_A 是一个不依赖于 N的正数。

(ii) 令

$$\widetilde{\eta}_{Nt} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{A}_i\eta_{is}, \quad \mathbf{A}_i = \sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{A}_{ij}.$$

~存在一个正定积分算子 $\mathbf{\Omega}$ ，其核函数满足

$$\widetilde{\Omega}(u,v) = \lim_{N\to\infty}\mathsf{E}\left[\widetilde{\eta}_{Nt}(u)\widetilde{\eta}_{Nt}(v)\right]. \tag{2.5}$$

此外，对于任意 i，$\mathsf{E}\left[\exp\left\{c_\eta\|\eta_{it}\|^2\right\}\right] < \infty$，其中 c_η 为正且有界的常数；对于任意连续线性算子序列$\mathbf{B}_i$，

$$\mathsf{E}\left[\left\|\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{B}_i\eta_{it}\right\|_O^{2+\iota}\right] = O\left(\max_{1\leqslant i\leqslant N}\|\mathbf{B}_i\|_O^{2+\iota}\right), \quad 0 \leqslant \iota \leqslant 1. \tag{2.6}$$

根据假设1（i），由满足（ ϵ_{it} 2.3）的系数算子定义的函数型线性过程（2.4）在时间上是平稳且短程依赖的 t，但其分布允许随 i变化。该假设是对面板时间序列情形下Bai (2010) 和Horv´athand Hu˘skov´a (2012年）中假设的自然扩展。假设1（ii）表明，函数型时间序列可能在 i上存在弱横截面相关。（2.6）中的矩限制是一个高层次条件，当 η_{it} 在 i上相互独立时，很容易验证。在后一种情况下，我们还可以进一步证明

$$\widetilde{\mathbf{\Omega}} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{A}_i\mathbf{\Omega}_i\mathbf{A}_i',$$

~其中， $\mathbf{\Omega}_i$ 是以 $\Omega_i(u,v)$ 为核函数的积分算子。由于 $\mathbf{\Omega}$ 是正定的，我们可以进行特征分析，并求得非负特征值与特征向量 (λ_k, ψ_k)

(（特征值按非递增顺序排列），$k=1$、2、$\cdots$，使得 t

$$\widetilde{\Omega}(\psi_k)(u)=\lambda_k\psi_k(u). \tag{2.7}$$

指数矩条件 $\mathsf{E}\left[\exp\left\{c_\eta\|\eta_{it}\|^2\right\}\right]<\infty$ 在假设 1(ii) 中有助于采用截断技术，并在主要渐近结果的证明中应用针对 $\mathscr{H}$ 中随机元素的集中不等式（例如，Bosq，2000；Boucheron、Lugosi 和 Massart，2016）。

3 检验结构突变

令 $\nu_{it}=\mu_i+\delta_i I(t>\tau_i)$，我们可以将模型（2.1）重写为

$$X_{it}=\nu_{it}+\epsilon_{it},\ \ t=1,\cdots,T,\ \ i=1,\cdots,N. \tag{3.1}$$

定义

$$\widetilde{X}_t=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_{it},\ \ \widetilde{\nu}_t=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\nu_i\ \text{ and }\ \widetilde{\epsilon}_t=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\epsilon_{it},$$

其中我们省略了它们对 N的依赖。根据模型公式（3.1），我们有

$$\widetilde{X}_t=\widetilde{\nu}_t+\widetilde{\epsilon}_t,\ \ t=1,\cdots,T. \tag{3.2}$$

请注意，在 H_0 下，时变均值函数 $\widetilde{\nu}_t$ 变为 $\widetilde{\mu}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mu_i$，它与时间无关，因此模型 (3.2) 可简化为

$$\widetilde{X}_t=\widetilde{\mu}+\widetilde{\epsilon}_t,\ \ t=1,\cdots,T.$$

~为了检验 H_0 在（2.2）中的条件，一个简单的想法是使用 X_t构造 CUSUM 检验统计量。定义函数型累积和统计量为

$$\widetilde{Z}_{NT}(x;u)=\sqrt{N/T}\left(\widetilde{S}_{NT}(x;u)-\frac{\lfloor Tx\rfloor}{T}\widetilde{S}_{NT}(1;u)\right)\ \text{ with }\ \widetilde{S}_{NT}(x;u)=\sum_{s=1}^{\lfloor Tx\rfloor}\widetilde{X}_s(u), \tag{3.3}$$

其中 $0\leqslant x\leqslant 1$、$u\in\mathbb{C}$ 和 $\lfloor\cdot\rfloor$ 表示向下取整函数，随后通过以下方式构造检验统计量。

$$Z_{NT}=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_{\mathbb{C}}\widetilde{Z}^2_{NT}(x;u)du=\max_{1\leqslant t\leqslant T}\int_{\mathbb{C}}\widetilde{Z}^2_{NT}(t/T;u)du. \tag{3.4}$$

在定义$\widetilde{Z}_{NT}(x$ 中，$\sqrt{N}$ 的速率；当 X_{it} 和 ϵ_{it} 在 i 上弱相关（或作为特殊情形相互独立）时，$u)$ 是合适的。如果函数型时间序列具有强相关性

在 i 上，则可能需要采用不同的标准化速率。在某些正则条件下，我们可以证明，Z_{NT} 与单个函数型时间序列的经典累积和检验统计量具有相同的渐近零分布，见下文定理 1。然而，基于模型表述 (3.2) 的检验统计量存在检验功效低的问题，因为即使某些指标 i 对应的个体特定均值函数 ν_{it} 存在显著突变，$\widetilde{\nu}_t$ 仍可能不随时间变化。例如，在共同突变（$\tau_i \equiv \tau$）的情形下，当 N 为偶数时，对于 $i = 1、\cdots、N/2$ 和 $\delta_i = -\delta$，有 $\delta_i = \delta$；对于 $\sim i = N/2+1、\cdots、N$，有 $\delta_i = -\delta$，因此 $\widetilde{\nu}_t = \widetilde{\mu}$。因此，在 H_0 和 H_A 下，$X_t = \widetilde{\mu} + \widetilde{\epsilon}_t$，而 (3.4) 中的累积和检验统计量将不具有检验功效。如果 $\delta_i \neq 0$ 仅对固定数量的指标 i 成立（即突变是稀疏的），我们可以证明 $\widetilde{\nu}_t \approx \widetilde{\mu}$，这同样会导致累积和检验的检验功效较低。

为解决（3.3）和（3.4）中定义的函数型CUSUM检验统计量检验功效较低的问题，接下来我们考虑在突变检验统计量的构造中引入一个PE分量。Fan、Liao 和 Yao(2015年) 在高维截面检验中引入了PE技术，从而提高了对稀疏型备择假设进行检验时的检验功效。PE分量预期满足以下三个性质：(i) 非负性，(ii) 不引起检验规模失真，以及 (iii) 功效增强。我们的目标是通过添加一个满足这三个性质的PE分量来增强CUSUM检验统计量。定义个体特定的函数型CUSUM统计量：

$$Z_{iT}(x;u) = \frac{1}{\sqrt{T}}\left[S_{iT}(x;u) - \frac{\lfloor Tx \rfloor}{T} S_{iT}(1;u)\right] \quad \text{with} \quad S_{iT}(x;u) = \sum_{s=1}^{\lfloor Tx \rfloor} X_{is}(u), \tag{3.5}$$

以及 PE分量：

$$Z^{\diamond}_{NT} = \sqrt{N \vee T} \sum_{i=1}^{N} I\left(\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} \int_{\mathbb{C}} Z^2_{iT}(x;u)du > \xi_{NT}\right), \tag{3.6}$$

其中，ξ_{NT} 表示一个高阶临界阈值，且 $a \vee b = \max\{a, b\}$。PE分量 $Z^{\diamond}_{NT}$ 显然非负。我们需要证明，在备择假设的某些特定区域内，$P(Z^{\diamond}_{NT} = 0|H_0) \to 1$ 且 $Z^{\diamond}_{NT}$ 以概率趋近于 1（w.p.a.1）发散至无穷大；在这些区域中，式（3.3）和（3.4）定义的 CUSUM 检验的检验功效较低，从而验证 PE 分量的性质（ii）和（iii）（见定理 1 的证明）。特别地，我们在 PE 分量中采用发散因子 $\sqrt{N \vee T}$，而非 Fan、Liao 和 Yao（2015）使用的 $\sqrt{N}$，以确保无论 N 是固定还是发散，都能满足性质（iii）。式（3.6）中 $Z^{\diamond}_{NT}$的构造与 Cho 和 Fryzlewicz（2015）针对高维实值时间序列提出的稀疏化 CUSUM 统计量类似。本文中，我们始终将阈值设为$\xi_{NT} = c_\xi \ln(N \vee T) \ln\ln(N \vee T)$，其中 c_ξ 是用户指定的正数。下文第 5 节的模拟研究中，我们还考虑 $\xi_{NT} = c_\xi \ln(NT) \ln\ln(NT)$，并比较有限样本

数值性能　　这两种高阶临界阈值参数设定下的表现　　s.

结合（Z_{NT} 3.4）中定义的累积和检验统计量和 $Z^{\diamond}_{NT}$（3.6）中定义的 PE分量，我们提出以下功效增强 CUSUM（PE-CUSUM）检验统计量：

$$\widehat{Z}_{NT} = Z_{NT} + Z^{\diamond}_{NT}. \tag{3.7}$$

令 $H^{\diamond}_{A}$ 为备择假设 H_A 定义于（2.2）且满足 δ_i

$$\max_{1\leqslant i\leqslant N} \frac{T\omega^2_{Ti}\|\delta_i\|^2}{\xi_{NT}} \to \infty, \quad \omega_{Ti} = (\tau_i/T) \wedge (1-\tau_i/T), \tag{3.8}$$

and ~$H^{\diamond}_{A}$ 备择假设 H_A 满足条件的 δ_i 满足（3.8）或 $\widetilde{\nu}_t$ 定义于（3.2）且满足条件的g

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_{\mathbb{C}} \nu^2_{NT}(x,u)du \to \infty \text{ with } \nu_{NT}(x,u) = \frac{1}{\sqrt{T}}\left[\sum_{s=1}^{\lfloor Tx\rfloor}\widetilde{\nu}_s(u) - x\sum_{s=1}^{T}\widetilde{\nu}_s(u)\right]. \tag{3.9}$$

^以下定理给出了 PE-CUSUM检验统计量 Z_{NT} 的渐近性质。

定理 1。 假设条件 *1* 成立，且存在 $\kappa \geqslant 0$ 使得 $N = O(T^{\kappa})$。

(i) 在 H_0 下，作为 N, $T\to\infty$ 共同地，

$$\widehat{Z}_{NT} \xrightarrow{d} \sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i B^2_i(x), \tag{3.10}$$

其中 λ_i, $i = 1, 2, \cdots$是 (2.7) 中定义的特征值，且 $B_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \cdots$是在 $[0,1]$上定义的相互独立的标准布朗桥。

(ii) 在 $H^{\diamond}_{A}$下，当 $T\to\infty$ 时，

$$P\left(Z^{\diamond}_{NT} \geqslant \sqrt{N\vee T}\right) \to 1; \tag{3.11}$$

~并且，在 $H^{\diamond}_{A}$ 下，作为 N, $T\to\infty$ 共同地，

$$P\left(\widehat{Z}_{NT} \geqslant z_\alpha\right) \to 1, \tag{3.12}$$

其中， z_α 是$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i B^2_i(x)$的上侧 α分位数。

条件 $N = O(T^{\kappa})$ 表明，个体数量 N 可以远大于时间序列长度 $T(\kappa > 1)$。PE-CUSUM检验统计量的渐近零分布与 Horv´ath、Kokoszka 和 Rice (2014年) 的定理2.1、Sharipov、Tewes 和 Wendler (2016) 的推论1，以及 Aue、Rice 和 S¨onmez (2018年) 的定理1相似。涉及

PE分量不会导致检验尺寸扭曲，即 $P(Z^{\diamond}_{NT}=0|H_0)\to 1$，因此满足 PE 分量的性质 (ii)。式 (3.10) 中的极限分布依赖于未知的特征值 λ_i和标准布朗桥 $B_i(x)$。 Sharipov、Tewes 和 Wendler (2016) 提出了一种分块自助法来选择检验的临界值，而 Aue、Rice 和 S¨onmez (2018 年) 则建议采用蒙特卡洛模拟方法。

定理 1(ii) 表明，当（3.8）或（3.9）满足时，所提出的检验在备择假设下具有一致性。若不包含 PE 分量 $Z^{\diamond}_{NT}$，则累积和检验统计量仅在较为严格的高层次条件（3.9）下才具有一致性，该条件可视为均值函数的一个发散的时变度量。需要注意的是，如本节前文所述，当不同个体的突变相互抵消时，后一条件往往无法满足。通过引入$Z^{\diamond}_{NT}$，实现了 PE 性质，即所提出检验具有检验功效的区域从满足（ H_A 3.9）时的范围扩大至 H_A 满足（3.8）或（3.9）时的范围。特别地，条件（3.8）涵盖了稀疏突变的情形。由（3.11）可知，当 N 为固定值或发散时，均可实现 PE 性质。

4 估计突变点和潜在结构

当拒绝 H_0 时，通常只有部分函数型时间序列过程发生结构突变。因此，我们可以将索引集 $\{1,2,\cdots,N\}$划分为

$$\mathcal{C}_\bullet=\{1\leqslant i\leqslant N:\delta_i\neq 0\}\ \text{ and }\ \mathcal{C}_\circ=\{1\leqslant i\leqslant N:\delta_i=0\},$$

均值函数发生结构突变的索引集和未发生突变的索引集。自然地，可以通过以下方式估计 $\mathcal{C}_\bullet$ 和 $\mathcal{C}_\circ$

$$\widehat{\mathcal{C}}_\bullet=\left\{1\leqslant i\leqslant N:\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_{\mathbb{C}}Z^2_{iT}(x;u)du\geqslant \xi_{NT}\right\}$$

and

$$\widehat{\mathcal{C}}_\circ=\left\{1\leqslant i\leqslant N:\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_{\mathbb{C}}Z^2_{iT}(x;u)du< \xi_{NT}\right\},$$

分别，其中 $Z_{iT}(x;\ u)$ 和 ξ_{NT}定义于第3节。随后，我们估计（异质）突变点 τ_i 通过

$$\widehat{\tau}_i=\arg\max_{1\leqslant t\leqslant T}\int_{\mathbb{C}}Z^2_{iT}(t/T;u)du,\ \ i\in\widehat{\mathcal{C}}_\bullet. \tag{4.1}$$

$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$以下定理表明，$\mathcal{C}_\bullet$ 和 $\mathcal{C}_\circ$ 是相合估计，并给出了 $\widehat{\tau}_i$ 在 $i \in \mathcal{C}_\bullet$上的一致逼近速率。

定理 2. 假设条件*1*得到满足，

$$\min_{i\in\mathcal{C}_\bullet} \frac{T\omega_{Ti}^2\|\delta_i\|^2}{\xi_{NT}} \to \infty \tag{4.2}$$

其中 ω_{Ti} 定义于(3.8)，且存在 $\kappa \geqslant 0$ 使得 $N = O(T^\kappa)$。于是我们有

$$P\left(\widehat{\mathcal{C}}_\circ = \mathcal{C}_\circ,\ \widehat{\mathcal{C}}_\bullet = \mathcal{C}_\bullet\right) \to 1. \tag{4.3}$$

此外，如果(4.2) 进一步加强为

$$\min_{i\in\mathcal{C}_\bullet} (\omega_{Ti}\|\delta_i\|) \geqslant c_\delta, \tag{4.4}$$

其中 c_δ 是一个正数，我们有

$$\max_{i\in\mathcal{C}_\bullet} |\widehat{\tau}_i - \tau_i| = o_P\left([\ln(N \vee T)]^{1+\zeta}\right), \tag{4.5}$$

其中，ζ 是任意小的正数。

由于 $N = O(T^\kappa)$，（4.5）中的一致逼近速率可以简化为 $(\ln T)^{1+\zeta}$。估计突变点的一致逼近速率在对数因子范围内接近最优，但略慢于 $O_P(1)$ 在单个函数型时间序列情形下推导出的速率。接下来，我们将证明，通过对突变点施加潜在分组结构，可以进一步提高（4.5）中的逼近速率 τ_i，$i \in \mathcal{C}_\bullet$。

假设存在对 $\mathcal{C}_\bullet$ 的一个划分，记为 $\mathcal{C}(b_1), \cdots, \mathcal{C}(b_{K_0})$，使得

$$\tau_i = b_k \ \forall\, i \in \mathcal{C}(b_k),\ \mathcal{C}(b_{k_1}) \cap \mathcal{C}(b_{k_2}) = \emptyset \text{ for } k_1 \neq k_2,\ \cup_{k=1}^{K_0}\mathcal{C}(b_k) = \mathcal{C}_\bullet, \tag{4.6}$$

其中 $b_1 < b_2 < \cdots < b_{K_0}$ 是 K_0 个不同的突变点。组成员归属和数量 K_0 均未知。注意，共同断点设定嵌套于潜在结构（4.6）中，其中$b_1 = \cdots = b_{K_0} = \tau_0$ 且 $\mathcal{C}(\tau_0) = \mathcal{C}_\bullet$。潜在结构（4.6）表明，$X_{it}$ 在 b_k 时具有共同突变点 $i \in \mathcal{C}(b_k)$。

$\widehat{\quad}$根据（$\widehat{\tau}_i$ 4.1）中定义的估计断点，$i \in \mathcal{C}_\bullet$我们首先将其按从小到大的顺序排序，并将排序后的点记为 $\widehat{\tau}^{(1)}$、$\cdots$、$\widehat{\tau}^{(n)}$、$n = \left|\widehat{\mathcal{C}}_\bullet\right|$，其中 $|\mathcal{A}|$ 表示集合 $\mathcal{A}$的基数。然后计算跳跃：

$$\Delta_i(\widehat{\tau}) = \widehat{\tau}^{(i+1)} - \widehat{\tau}^{(i)},\ i = 1, \cdots, n-1.$$

假设不同突变点的数量为 K，定义 $\tau_j = \widehat{\tau}^{(i+1)}$，其中 $\Delta_i(\widehat{\tau})$ 为第j大的跳跃，$1 \leqslant j \leqslant K-1$。然后我们将 τ_1、$\cdots$、τ_{K-1} 按从小到大的顺序排序，记为 $\tau_K^{(1)}$、$\cdots$、$\tau_K^{(K-1)}$，从而得到估计的簇：

$$\widehat{\mathcal{C}}(k|K) = \left\{ i \in \widehat{\mathcal{C}}_\bullet : \tau_K^{(k-1)} \leqslant \widehat{\tau}_i < \tau_K^{(k)} \right\}, \quad k = 1, \cdots, K, \tag{4.7}$$

其中，在不损失一般性的情 为一般性，$\tau_K^{(0)} = 1$ 和 $\tau_K^{(K)} = T$。给定簇数 K，我们计算 te
况下，<|im_end|>

$$\widehat{\tau}_{k|K} = \frac{1}{\left|\widehat{\mathcal{C}}(k|K)\right|} \sum_{i \in \widehat{\mathcal{C}}(k|K)} \widehat{\tau}_i, \quad \widehat{\nu}_{it,k|K} = \widehat{\mu}_{i,k|K} + \widehat{\delta}_{i,k|K} I\left(t > \widehat{\tau}_{k|K}\right) \tag{4.8}$$

with

$$\widehat{\mu}_{i,k|K} = \frac{1}{\widehat{\tau}_{k|K}} \sum_{t=1}^{\widehat{\tau}_{k|K}} X_{it} \quad \text{and} \quad \widehat{\delta}_{i,k|K} = \frac{1}{T - \widehat{\tau}_{k|K}} \sum_{t=\widehat{\tau}_{k|K}+1}^{T} X_{it} - \frac{1}{\widehat{\tau}_{k|K}} \sum_{t=1}^{\widehat{\tau}_{k|K}} X_{it}.$$

构建惩罚目标函数：

$$IC(K) = \ln(V(K)) + K\rho_{NT}, \tag{4.9}$$

其中 ρ_{NT} 是用户指定的调节参数，满足一些限制条件，详见下文假设 2(iii)，且

$$V(K) = \frac{1}{\left|\widehat{\mathcal{C}}_\bullet\right|} \sum_{k=1}^{K} \sum_{i \in \widehat{\mathcal{C}}(k|K)} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left\| X_{it} - \widehat{\nu}_{it,k|K} \right\|^2.$$

真实簇数 K_0 由以下因素决定。

$$\widehat{K} = \arg\min_{1 \leqslant K \leqslant \overline{K}} IC(K), \tag{4.10}$$

其中 K 是预先指定的簇数上界。将 K 替换为 K 在（4.7）中，我们得到

$$\widehat{\mathcal{C}}(b_k) = \widehat{\mathcal{C}}\left(k|\widehat{K}\right), \quad k = 1, \cdots, \widehat{K}.$$

The following → ng 假设是推导 K 和 $\mathcal{C}(b_k$ 的一致性性质所必需的。).
以下

假设 2. *(i)* 特定簇的突变点满足 $b_k = c_k T$，其中 $0 < c_1 < \cdots < c_{K_0} < 1$，且潜在簇大小满足 $|\mathcal{C}(b_k)| = d_k |\mathcal{C}_\bullet|$，其中 $d_k > 0$ 和 $\sum_{k=1}^{K_0} d_k = 1$。

(ii) 设 $\|\mu_i\|$ 和 $\|\delta_i\|$ 在 i 上一致有界，且 $\min_{i \in \mathcal{C}_\bullet} \|\delta_i\|$ 远离零。

(iii) 令 ρ_{NT}满足 $\rho_{NT} \to 0$且 $T\rho_{NT}/[\ln(N \vee T)]^{1+\zeta} \to \infty$对于任意 $\zeta > 0$。

假设2(i) i 表明不同突变点之间的距离处于同一数量级

满足 T且 $\mathcal{C}(b_k)$ 在 $k=1,\ \cdots,\ K_0$。假设 2（ii）对 $\|\mu_i\|$ 和 $\|\delta_i\|$的规模施加了一些温和的限制。最后，假设2（iii）是对惩罚项中调节参数的一项关键条件，确保信息准则能够一致地选出 K_0。

定理 3。 假设潜在结构 (4.6) 和假设 *1* 及 *2* 均成立。此外，存在 $\kappa \geqslant 0$ 使得 $N = O(T^{\kappa})$。于是我们有

$$P\left(\widehat{K} = K_0\right) \to 1, \tag{4.11}$$

and

$$P\left(\widehat{\mathcal{C}}(b_k) = \mathcal{C}(b_k):\ k=1,\cdots,K_0 \mid \widehat{K} = K_0\right) \to 1. \tag{4.12}$$

上述定理确立了所提出的信息准则及异质性断点聚类分析的一致性性质。由于 $X_{it}, i \in \mathcal{C}(b_k)$, $t=1,\cdots,T$ 具有共同的突变点，因此通过对 $\mathcal{C}(b_k)$中的个体所对应的累积和量$\widehat{\ }$进行合并，能够更有效地估计 b_k，即:

$$\widehat{b}_k = \underset{1\leqslant t\leqslant T}{\arg\max} \sum_{i\in\widehat{\mathcal{C}}(b_k)} \int_{\mathbb{C}} Z_{iT}^2(t/T;u)du, \tag{4.13}$$

其一致性性质由下述定理给出。

定理 4。 假设潜在结构 (4.6) 和假设 *1* 及 *2(i)* 均成立，$|\mathcal{C}_\bullet| = O(T^2)$，$T = O(|\mathcal{C}_\bullet|^{3/2})$，并且

$$\min_{1\leqslant k\leqslant K_0} \frac{1}{|\mathcal{C}(b_k)|^{1/2}} \sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)} \|\delta_i\|^2 \to \infty. \tag{4.14}$$

此外，η_{it} 在 i上相互独立。那么，随着 T和 $|\mathcal{C}_\bullet|$同时趋于无穷大 y,

$$P\left(\widehat{b}_k = b_k,\ k=1,\cdots,K_0\right) \to 1. \tag{4.15}$$

定理4 将Bai (2010年的定理 3.1 推广到具有异质性断点潜在结构的高维函数型数据情形。条件（4.14）在理论推导中起着关键作用，是对 Bai (2010年假设 2 的自然推广。它表明，$i \in \mathcal{C}_\bullet$ 上的突变幅度不能过小，这样才能一致地估计真实断点。特别是，当 $\min_{i\in\mathcal{C}_\bullet} \|\delta_i\|$ 如假设 2(ii) 所示远离零时，若4.14，则条件（$|\mathcal{C}_\bullet| \to \infty$）将自动满足。请注意，对于单个时间序列过程的断点估计，断点估计的最优渐近阶为 $O_P(1)$（例如，Bai，1997；Aue、Rice 和 S¨onmez，2018年）。利用合并面板中多个函数型时间序列所提供的更多样本信息，将近似阶提高至 $o_P(1)$并不令人意外。这些限制条件为 $|\mathcal{C}_\bullet| = O(T^2)$

以及 $T = O(|\mathcal{C}_\bullet|^{3/2})$ 表明 $|\mathcal{C}_\bullet|$ 可能以快于 T的速度发散。此外，对 η_{it} 施加的横截面独立性条件便于技术性证明，但可由某些高层次条件替代，例如假设1(ii) 中的条件。

5 蒙特卡洛模拟

5.1 数据生成过程

生成时间序　　列随机函数 $[\epsilon_{i1}(u), \epsilon_{i2}(u), \cdots, \epsilon_{iT}(u)]$, $i = 1, \cdots, N$，如下所示

$$\epsilon_{it}(u) = \sum_{j=1}^{J} \epsilon_{it,j} f_j(u), \quad \epsilon_{it,j} = \beta_{it,j} + \eta_{it,j}, \quad u \in \mathbb{C} = [0, 1] \tag{5.1}$$

其中， $f_1(u), f_2(u), \cdots, f_J(u)$ 是从 $J = 21$ 个傅里叶基函数中无放回随机抽取的，$\eta_{it,\ j}$ 是创新项，彼此独立地服从 $N(0, 1/j)$ ，且在 i, t 和 j 上相互独立。为生成函数值，我们考虑 0 到 1 之间 101 个等距网格点。记作 $\boldsymbol{\beta}_{t,\ j} = (\beta_{1t,j}, \beta_{2t,j}, \cdots, \beta_{Nt,j})$, $j = 1, \cdots, 21$，我们从一阶向量自回归模型中生成 $\boldsymbol{\beta}_{t,\ j}$（在 j 上相互独立）：

$$\boldsymbol{\beta}_{t,j} = \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}_{t-1,j} + \boldsymbol{z}_{t,j}, \tag{5.2}$$

其中， $\mathbf{A} = (a_{ij})_{N\times N}$ 是转移矩阵，而 $\boldsymbol{z}_{t,\ j}$ 是由一个 N维均值为零、协方差矩阵为单位矩阵的正态分布独立生成的。参照Li、Robinson 和 Shang (2023年)， $\mathbf{A}$ 是一个带状矩阵，其中 a_{ij} 由U $(-0.3, 0.3)$ 独立生成，当 $|i-j| \leqslant 3$，而 $a_{ij} = 0$ 当 $|i-j| > 3$。在模拟中，我们设定 $T = 200$, $N = 200$或 400，重复次数为 $R = 1000$。

我们随机选取 信号失真比 $\times$ N 个体，并令其具有一个变点，其中 信号失真比 表示稀疏度与稠密度之比。其余个体没有变点。为指定所选个体的变点位置 τ_i，我们从 信号失真比 $\times$ N 个 U(0. $25 \times T, 0.75 \times T)$. 均匀分布的下界和上界经过专门选取，以确保变点位置不会靠近样本边界。与 Aue、Rice 和 S¨onmez (2018年) 一样，对于 $i \in \mathcal{C}_\bullet$（具有突变的个体的指标集合），我们定义一类突变函数：

$$\delta_{i,m}(u) = \delta^*_m(u) \times \sqrt{c^*_i}, \quad \delta^*_m(u) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^{m} f_j(u),$$

其中， $m = 1$、 $\cdots$、 J和 c^*_i是稍后指定的一个正数。对于每个 $i \in \mathcal{C}_\bullet$， $\delta_{i,\ 1}(u)$ 表示仅在主特征方向（由基函数 f_1确定）发生突变的情形，而

$\delta_{i,\,J}(u)$ 表示所有特征方向均受影响的突变情形，详见 Aue、Rice 和 S¨onmez （2018年）中的讨论。数值 c_i^* 控制突变幅度，并与信噪比相关：

$$\mathrm{SNR}_i = \frac{(\tau_i/T)(1-\tau_i/T)\|\delta_{i,m}\|^2}{\mathrm{tr}(\mathbf{\Omega}_{\epsilon_i})} = c_i^* \times \frac{(\tau_i/T)(1-\tau_i/T)}{\mathrm{tr}(\mathbf{\Omega}_{\epsilon_i})},$$

其中，$\mathrm{tr}(\cdot)$ 表示方阵的迹，$\mathbf{\Omega}_{\epsilon_i}$ 表示时间跨度内的长期协方差矩阵。给定信噪比$_i$ 水平后，可以轻松计算出 c_i^*。对于没有突变的个体，我们设定 $c_i^* = 0$。给定m的一个整数值后，我们最终模拟得到如下函数型时间序列面板，

$$X_{it}(u) = \delta_{i,m}(u) \times I(t > \tau_i) + \epsilon_{it}(u). \tag{5.3}$$

5.2 结构突变的检验结果

在模拟研究中，我们考虑 PE-CUSUM 检验统计量的以下两种高临界值阈值设定：

$$\xi_{NT,1} = c_\xi \ln(NT) \times \ln\ln(NT),$$
$$\xi_{NT,2} = c_\xi \ln(N \vee T) \ln\ln(N \vee T),$$

其中，$c_\xi = \lambda_1^{1/2}$ 其中 λ_1 为 $\widetilde{\mathbf{\Omega}}$ 在（2.7）中的最大特征值。第 3 节和第 4 节的渐近定理是在设定 $\xi_{NT} = \xi_{NT,2}$的情况下推导得出的。事实上，当 $\xi_{NT} = \xi_{NT,1}$时，只需稍作修改，这些定理仍然成立。在以下模拟结果中，我们将这两个 PE-CUSUM 检验统计量分别记为 PE-CUSUM$_1$ 和 PE-CUSUM$_2$。我们还将（3.4）中定义的传统累积和检验（不含 PE）作为基准。我们仅报告突变函数定义中$m = 1$ 的情形下的模拟结果，即突变发生在主特征方向上，因为当 m 取其他正整数值时，结果相似。

在表1 中，我们报告了累积和与 PE-CUSUM 在有限样本下的检验尺寸表现，考虑了三个显著性水平 $\alpha = 0.01$、0.05 和 0.10。检验的临界值由Aue、Rice 和 S¨onmez (2018年)提出的基于模拟的方法确定。三种检验的尺寸总体上都接近名义水平。具体而言，结果证实了定理1(i)的有效性，并表明在累积和检验统计量中加入 PE 分量不会造成严重的检验尺寸扭曲。

表 1：累积和和 PE-CUSUM 检验的规模表现

N	检验统计量	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.10$
200	PE-累积和$_1$	0.010	0.062	0.122
	PE-累积和$_2$	0.016	0.067	0.126
	累积和	0.009	0.061	0.121
400	PE-累积和$_1$	0.012	0.062	0.127
	PE-累积和$_2$	0.014	0.064	0.129
	累积和	0.012	0.062	0.127

在表2中，我们报告了信噪比分别为 10^{-1}、10^{-2} 和 5×10^{-3} 、信号失真比分别为 0.1 和 0.5 时，累积和与 PE-CUSUM 检验统计量的检验功效表现。当信号失真比为 0.5 时，通过三种检验统计量拒绝原假设的比例相同且接近 1；而当突变较为稀疏（即信号失真比为 0.1），且信噪比较低（即信噪比为 10^{-2} 和 5×10^{-3}）时，PE-CUSUM$_1$ 和 PE-CUSUM$_2$ 的表现优于累积和统计量（不含 PE）。后者证实，在检验统计量中加入额外的 PE 分量能够提升检验功效表现（3.7）。与此同时，PE-CUSUM$_2$ 的表现比 PE-CUSUM$_1$ 更稳定，尤其是在信噪比为 5×10^{-3}时，这表明$\xi_{NT,2} = c_\varepsilon \ln(N \vee T) \ln\ln(N \vee T)$可能是 PE-CUSUM 中高临界阈值更合适的选择。

表2：1000次重复试验中拒绝原假设的百分比

			信号失真比 = 0.1			信号失真比 = 0.5		
SNR	N	检验统计量	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.10$
10^{-1}	200	PE-累积和$_1$	0.957	0.957	0.957	0.958	0.961	0.962
		PE-累积和$_2$	0.957	0.957	0.957	0.958	0.961	0.962
		累积和	0.957	0.957	0.957	0.958	0.961	0.962
	400	PE-累积和$_1$	0.953	0.953	0.953	0.955	0.959	0.962
		PE-累积和$_2$	0.953	0.953	0.953	0.955	0.959	0.962
		累积和	0.953	0.953	0.953	0.955	0.959	0.962
10^{-2}	200	PE-累积和$_1$	0.957	0.957	0.957	0.958	0.961	0.962
		PE-累积和$_2$	0.957	0.957	0.957	0.958	0.961	0.962

续见下页

			信号失真比 = 0.1			信号失真比 = 0.5		
SNR	N	检验统计量	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.10$
		累积和	0.487	0.865	0.941	0.958	0.961	0.962
	400	PE-累积和$_1$	0.953	0.953	0.953	0.955	0.959	0.962
		PE-累积和$_2$	0.953	0.953	0.953	0.955	0.959	0.962
		累积和	0.953	0.953	0.953	0.955	0.959	0.962
5×10^{-3}	200	PE-累积和$_1$	0.685	0.686	0.686	0.957	0.957	0.957
		PE-累积和$_2$	0.957	0.957	0.957	0.957	0.957	0.957
		累积和	0.018	0.041	0.047	0.957	0.957	0.957
	400	PE-累积和$_1$	0.768	0.914	0.948	0.953	0.953	0.953
		PE-累积和$_2$	0.953	0.953	0.953	0.953	0.953	0.953
		累积和	0.444	0.882	0.941	0.953	0.953	0.953

5.3 存在突变个体的估计结果

接下来，我们计算正确识别具有变点的个体的百分比，即 $\mathcal{C}_\bullet$，其定义见第 4 节。其定义为 TP/N，其中 TP 表示真正例命中次数（个体索引与估计索引相匹配），而 N 表示个体总数。我们将具有突变的个体归类为 1，将不具有突变的个体归类为 0。此外，我们还计算 F_1 分数，该分数是精确率的调和平均值，其定义为

$$F_1 = \frac{TP}{TP + (FP + FN)/2'}$$

其中，FP 表示误报或过度估计（I 型错误，即为没有突变的个体检测出变点），FN 表示漏报或低估（II 型错误，即没有为存在突变的个体检测出变点）。

TP 和 F_1 分数结果列于表 3中，其中信噪比分别为 10^{-1}，10^{-2} 和 5×10^{-3}，信号失真比分别为 0.1 和 0.5。当信噪比从 10^{-1} 降至 5×10^{-3}时，TP 和 F_1 值会下降。这不足为奇，因为^信噪比较低时，检测突变会更加困难。使用 $\mathcal{C}_\bullet$ 进行估计时，$\xi_{NT} = \xi_{NT2}$ 的表现优于使用$\xi_{NT} = \xi_{NT1}$的情况，这与第 5.2节中的讨论一致，也再次证明了将$\xi_{NT} = c_\xi \ln(N \vee T) \ln\ln(N \vee T)$ 用作高惩罚阈值是合理的。

表 3：正确识别 $\mathcal{C}_\bullet$的 TP 和 F_1 度量值

SDR	SNR	N	TP		F_1 分数	
			$\xi_{NT,1}$	$\xi_{NT,2}$	$\xi_{NT,1}$	$\xi_{NT,2}$
0.1	10^{-1}	200	1	1	1	1
		400	1	1	1	1
	10^{-2}	200	0.972	1	0.985	1
		400	0.962	1	0.979	1
	5×10^{-3}	200	0.910	0.997	0.952	0.999
		400	0.906	0.988	0.950	0.994
0.5	10^{-1}	200	1	1	1	1
		400	1	1	1	1
	10^{-2}	200	0.861	1	0.880	1
		400	0.808	1	0.841	1
	5×10^{-3}	200	0.548	0.986	0.690	0.986
		400	0.527	0.940	0.680	0.944

5.4 变点潜在组的估计结果

接下来，我们通过对变点施加潜在分组结构，评估第 4 节提出的聚类方法。具体而言，我们将不同变点的数量设为 $K_0 = 3$，并将 N 个体划分为以下四组：前一半 N 个体没有变点；其余个体平均分为三组，变点分别位于 $0。25 \times T$、$0。5 \times T$和 $0。75 \times T$处。信息准则中的调节参数设为 $\rho_{NT} = (N \vee T)^{-1/2} \ln(N \vee T)$，从而满足假设 2(iii)（若 $N = T^\phi$满足 $\phi < 2$）。为评估组成员归属的估计准确性，我们计算纯度和归一化互信息（NMI）指标，其定义分别如下：

$$\text{Purity}\left(\widehat{\mathcal{C}}_\bullet, \mathcal{C}_\bullet\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{\widehat{K}} \max_{1 \leqslant j \leqslant K_0} \left|\widehat{\mathcal{C}}_k \cap \mathcal{C}_j\right|,$$

and

$$\text{NMI}\left(\widehat{\mathcal{C}}_\bullet, \mathcal{C}_\bullet\right) = 2 \frac{I\left(\widehat{\mathcal{C}}_\bullet, \mathcal{C}_\bullet\right)}{H(\widehat{\mathcal{C}}_\bullet) + H(\mathcal{C}_\bullet)},$$

其中， $\widehat{\mathcal{C}}_\bullet = \{\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_{\widehat{K}}\}$ 是 $\mathcal{C}_\bullet = \{\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_{K_0}\}$的估计值， $H(\mathcal{C}_\bullet)$ 表示 $\mathcal{C}_\bullet$的熵，$I\left(\widehat{\mathcal{C}}_\bullet, \mathcal{C}_\bullet\right)$ 是 $\widehat{\mathcal{C}}_\bullet$ 与 $\mathcal{C}_\bullet$之间的互信息，定义如下

$$I\left(\widehat{\mathcal{C}}_\bullet, \mathcal{C}_\bullet\right) = \sum_{k=1}^{\widehat{K}} \sum_{j=1}^{K_0} \left(\frac{|\widehat{\mathcal{C}}_k \cap \mathcal{C}_j|}{N} \right) \log_2 \left(\frac{N|\widehat{\mathcal{C}}_k \cap \mathbb{C}_j|}{|\widehat{\mathcal{C}}_k||\mathcal{C}_j|} \right).$$

相关结果汇总于表4 和5中。由表4 可知，随着信噪比从 10^{-1} 降至5×10^{-3}，正确估计簇数的频率通常会降低（因为信噪比较低时更难检测突变）。采用$\xi_{NT} = \xi_{NT,2}$ 的信息准则比采用 $\xi_{NT} = \xi_{NT,1}$的信息准则能更准确地估计簇数。具体而言，当信噪比为 10^{-2} 和 5×10^{-3}时，采用 $\xi_{NT} = \xi_{NT,1}$ 的信息准则往往会低估簇数。表5 中的纯度和归一化互信息值在信噪比为 10^{-1}时接近理想值1，并随着信噪比降低而逐渐下降。

表 4：准确估计簇数的百分比

ξ_{NT}	N	信噪比=10^{-1}	信噪比=10^{-2}	信噪比=5×10^{-3}
$\xi_{NT,1}$	200	0.875	0.518	0.099
$\xi_{NT,1}$	400	0.807	0.512	0.064
$\xi_{NT,2}$	200	0.955	0.879	0.861
$\xi_{NT,2}$	400	0.953	0.895	0.789

Ta表 5：簇成员归属估计的纯度和归一化互信息测量值

SNR	N	纯度 ($\xi_{NT,1}$)	纯度 ($\xi_{NT,2}$)	归一化互信息 ($\xi_{NT,1}$)	归一化互信息 ($\xi_{NT,2}$)
10^{-1}	200	0.986	1	0.984	1
	400	0.975	1	0.972	1
10^{-2}	200	0.913	0.987	0.878	0.996
	400	0.914	0.991	0.881	0.997
5×10^{-3}	200	0.744	0.981	0.533	0.956
	400	0.734	0.969	0.522	0.902

最后，我们评估所估计断点位置的性能，并将聚类后估计（4.13）与聚类前估计（4.1）进行比较，由此可以说明对个体间异质变点进行聚类的实用性。我们计算估计变点与真实变点之间的均方距离，结果报告于

表 6中。根据前述模拟结果，在断点位置估计中使用$\xi_{NT} = \xi_{NT,2}$ 可能更为合适。表 6 显示，在簇数得到准确估计的条件下，聚类后估计的表现显著优于聚类前估计；后者忽略了异质变点中的潜在分组结构。这与定理 2和 4中的收敛结果一致，定理指出聚类后估计是一致的，而聚类前估计具有对数-（$N \vee T$）近似阶。

表 6：均方 $\widehat{}$距离估计变点与真实变点之间的平方（以 $K = 3$为条件）)

估计	N	信噪比=10^{-1}	信噪比=10^{-2}	信噪比=5×10^{-3}
聚类后	200	0	0.234	0.910
聚类后	400	0	0.199	0.753
预聚类	200	0.002	1.007	4.591
预聚类	400	0.002	0.982	4.477

6 实证应用

在本节中，我们将所开发的突变检测和估计方法应用于两个实证数据集：2018年1月2日至2021年12月31日期间，道琼斯工业平均指数（DJIA）的28只成分股，以及1960年至2013年从32个国家收集的年龄别死亡率。

6.1 道琼斯工业平均指数及其成分股

道琼斯工业平均指数反映了30家总部位于美国、公开上市的大型公司在纽约证券交易所常规交易时段内的交易情况。表 7 列出了道琼斯工业平均指数30只成分股的名称和股票代码。我们考察了这些股票从2018年1月2日至2021年12月31日的每日横截面收益率，数据取自Refinitiv Datascope（https://select.datascope.refinitiv.com/DataScope/）。共有 $T = 1,008$ 个交易日。在30只成分股中，DOW和HON.O分别于2019年4月2日和2021年5月11日开始交易。因此，我们在实证分析中剔除了这两只股票，最终得到 $N = 28$。对于每个交易日，我们使用东部标准时间9:30至15:55期间的5分钟分辨率数据，并获得78个数据点。对于资产 i，令$P_{it}(u_j)$ 表示交易日 u_j 时刻 t的日内5分钟收盘价，并构造如下CIDR序列（例如，Rice、Wirjanto和Zhao，2020年）：

$$X_{it}(u_j) = 100 \times [\ln P_{it}(u_j) - \ln P_{it}(u_1)], \qquad j = 2, 3, \cdots, 78,$$

其中 $i = 1$、2、$\cdots$、28和 $t = 1$、$\cdots$、1,008。我们采用线性插值算法（Hyndman等，2019年）将离散数据点转换为连续函数。

表 7：道琼斯工业平均指数 30 只成分股的股票名称及股票代码 x.

股票代码	股票名称	股票代码	股票名称
AAPL	苹果公司	JNJ	强生
AMGN	安进	JPM	摩根大通
AXP	美国运通	KO	可口可乐
BA	波音	MCD	麦当劳
CAT	卡特彼勒	MMM	3M
CRM	Salesforce	MRK	默克
CSCO	思科	MSFT	微软
CVX	雪佛龙	NKE	Nike
DIS	迪士尼	PG	宝洁
DOW	陶氏化学	TRV	旅行者保险
GS	高盛	UNH	联合健康集团
HD	家得宝	V	Visa
HON	霍尼韦尔	VZ	威瑞森
IBM	国际商业机器公司	WBA	沃尔格林
INTC	英特尔	WMT	沃尔玛

我们实施所提出的 PE-CUSUM 检验，以检测这28只成分股中是否至少有一只出现结构突变。该检验的 p值为0，表明存在突变。随后，我们使用（4.1）估计异质变点，并识别出现结构突变的成分股。估计结果见表 8。根据估计的突变日期，可以合理地推测，部分股票存在一个共同变点（可能在2023年3月）。因此，我们进一步采用第 4 节提出的聚类算法，估计簇的数量和共同突变日期。信息准则（4.10）选择的簇数为1；（4.13）中的聚类后合并 CUSUM 方法估计共同突变日期为2020年3月16日。这与表 8中异质突变日期的估计结果一致。该共同突变与2020年3月的股市崩盘有关，当时道琼斯工业平均指数在3月9日（-7.79%）、3月12日（-9.99%）和3月16日（-12.93%）遭受重挫。

6.2 多国年龄别死亡率

年龄别死亡率来自 人类死亡率数据库(2023年)。我们的数据集涵盖1960年至2013年期间，共包含32个有足够数据可供使用的国家。表9 列出了这些国家及对应的ISO三字母代码。对于这32个国家中的每一个，我们考虑日历年内0至99岁的年龄以及最后一个年龄组 100+。我们使用带有单调约束的加权惩罚回归对年龄别死亡率进行平滑处理（例如，

表 8：估计　　在道琼斯工业平均指数中交易的 22 家公司的异质变点　　ex.

股票代码	变点	股票代码	变点
AAPL	2021-03-08	IBM	2020-03-13
AMGN	2020-02-28	JPM	2019年-03-29
AXP	2020-03-23	MCD	2020-03-18
BA	2019-11-15	MSFT	2019-11-06
CAT	2018年-12-24	NKE	2020-03-13
CRM	2020-08-27	PG	2020-03-12
CSCO	2020-03-13	TRV	2020-03-18
CVX	2020-03-23	UNH	2020-03-23
DIS	2020-03-18	V	2020-08-28
GS	2018-12-26	WBA	2020-09-10
HD	2020-03-18	WMT	2020-02-28

Wood, 1994; Hyndman 和 Ullah, 2007）。同一数据集也由 Tang、Shang 和 Yang （2022）。

表9：所选国家及其对应的 ISO三字母代码列表。

国家	Code	国家	Code	国家	Code	国家	Code
澳大利亚	AUS	爱沙尼亚	EST	立陶宛	LTU	俄罗斯	RUS
奥地利	AUT	芬兰	FIN	拉脱维亚	LVA	斯洛伐克	SVK
比利时	BEL	法国	FRA	卢森堡	LUX	西班牙	ESP
白俄罗斯	BLR	匈牙利	HUN	挪威	NOR	瑞典	SWE
保加利亚	BGR	冰岛	ISL	葡萄牙	PRT	瑞士	CHE
加拿大	CAN	爱尔兰	IRE	波兰	POL	英国	GBR
丹麦	DNK	意大利	ITA	荷兰	NLD	美国	USA
捷克	CZE	日本	JPN	新西兰	NZL	乌克兰	UKR

所提出的 PE-CUSUM 检验拒绝不存在结构突变的原假设。对于女性人口，日本是唯一存在结构突变的国家，估计的变点为 1983 年。对于男性人口，我们使用（4.1）估计异质变点，并识别存在结构突变的国家。估计结果列于表10中；我们发现，许多发达国家经历了结构突变。对于这些国家而言，共同突变似乎发生在 20 世纪 80 年代后期。通过实施所提出的聚类算法可以证实这一点：信息准则确定了一个簇，聚类后的 CUSUM 估计得到的共同变点为 1988 年。

表10 ：32个国家中10个国家的估计变点（男性人口).

	国家									
国家	AUS	AUT	CAN	CHE	FIN	FRA	ITA	JPN	NZL	PRT
变点	1989	1986	1987	1991	1985	1989	1986	1983	1990	1991

7 结论

我们提出了一种新的完全函数型检验统计量，将经典的 CUSUM 与额外的 PE 分量相结合，用于检测大规模函数型时间序列中异质均值函数的结构突变，其中个体数量可能大于时间序列长度。允许底层函数型时间序列在个体之间存在弱相关性。我们推导了所提出检验在原假设和备择假设下的渐近性质。特别地，在检验统计量中引入 PE 分量可以扩大检验具有功效的区域，并检测备择假设下的稀疏突变。我们进一步对异质断点施加潜在分组结构，并将一种简单的聚类算法与信息准则相结合，以准确估计组成员归属和组数。利用估计的分组结构，我们提出了聚类后合并 CUSUM 方法，以一致地定位每个组内的同质突变点。蒙特卡洛模拟研究表明，在有限样本下，当突变较为稀疏时，所提出检验具有功效增强特性；同时，潜在分组结构估计准确，并且聚类后断点估计的收敛性得到改善（相较于忽略潜在结构的估计）。我们将所提出的方法应用于检测和估计 DJIA 成分股以及从 32个国家收集的年龄别死亡率中的结构突变。

致谢

第一作者获得澳大利亚研究理事会探索项目（DP230102250）和中国国家自然科学基金（ 72033002）的部分资助。第二作者获得美国国家科学基金会项目（DMS 1820702）和美国国立卫生研究院项目（R01AI136664 和 R01AI170249）的部分资助。第三作者获得澳大利亚研究理事会探索项目（DP230102250）的部分资助。通常的免责声明适用。

附录 A：主要渐近结果的证明

在本附录中，我们给出第3 节和第4节主要渐近定理的证明。我们先介绍一些命题，其证明见补充文档。

命题 A.1。 假设定理 *1* 的条件均得到满足。令

$$\widetilde{S}^{\epsilon}_{NT}(x;u) = N^{1/2}\sum_{s=1}^{\lfloor Tx\rfloor}\widetilde{\epsilon}_s(u) \text{ and } G(x;u) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^{1/2}W_i(x)\psi_i(u),$$

其中 λ_i 和 $\psi_i(\cdot)$ 的定义与第*2* 节中的定义相同，且 $W_i(\cdot)$ 是相互独立的标准布朗运动。存在一个高斯过程序列 $\{G_{NT}(x;\ u):\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ \ u\in\mathbb{C}\}$其概率测度弱收敛于 $\{G(x;\ u):\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ u\in\mathbb{C}\}$，并且

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_{\mathbb{C}}\left[\frac{1}{\sqrt{T}}\widetilde{S}^{\epsilon}_{NT}(x;u) - G_{NT}(x;u)\right]^2 du = o_P(1). \tag{A.1}$$

Pro位置 A.2. 假设定理 *1* 的条件成立。那么我们有

$$P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant N}\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_{\mathbb{C}}Z^2_{iT}(x;u)du > \xi_{NT}\mid H_0\right)\to 0, \tag{A.2}$$

其中 $Z_{iT}(x;\ u)$ 定义见 （3.5）且 ξ_{NT}定义同第 *3* 节。

命题A.3. 假设定理*4* 的条件均得到满足。记

$$Z(t;\mathcal{C}(b_k)) = \sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\int_{\mathbb{C}}Z^2_{iT}(t/T;u)du,\ \ k=1,\cdots,K_0.$$

于是我们有

$$\max_{1\leqslant t\leqslant T}|Z(t;\mathcal{C}(b_k)) - E[Z(t;\mathcal{C}(b_k))]| = O_P\left(|\mathcal{C}(b_k)|^{1/2} + \left(T\sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\|\delta_i\|^2\right)^{1/2}\right) \tag{A.3}$$

对于 $k=1,\ \cdots,\ K_0$，在 H_A 条件下。

命题 A.4. 假设定理 *4* 的条件均满足。对于任意 $k=1,\ \cdots,\ K_0$ 以及$1\leqslant t\leqslant T$

$$E\left[Z(b_k;\mathcal{C}(b_k))\right] - E\left[Z(t;\mathcal{C}(b_k))\right] \geqslant m_0|t-b_k|\sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\|\delta_i\|^2 \tag{A.4}$$

其中，H_A，m_0 是一个正数。

Pro位置 A.5。 假设定理 4 的条件得到满足，则有

$$P\left(\max_{t\in\mathcal{N}_k(\epsilon)\setminus b_k} Z(t;\mathcal{C}(b_k)) < Z(b_k;\mathcal{C}(b_k))\right) \to 1,\ \ k=1,\cdots,K_0, \tag{A.5}$$

在 H_A下，其中，对于任意 $\varepsilon>0$ 和 $\varpi_k = T^{1/2}|\mathcal{C}(b_k)|^{-1/}$ [4].

定理 1 的证明。（i）注意到

$$\widetilde{Z}_{NT}(x;u) = \widetilde{Z}^{\epsilon}_{NT}(x;u) := \frac{1}{\sqrt{T}}\left[\widetilde{S}^{\epsilon}_{NT}(x;u) - \frac{\lfloor Tx\rfloor}{T}\widetilde{S}^{\epsilon}_{NT}(1;u)\right]$$

~在 H_0下，其中 $S^{\epsilon}_{NT}(x;\ u)$ 定义见命题 A.1。根据命题 A.1 以及连续映射定理（例如，Billingsley， 1968年），可以证明

$$Z_{NT} \xrightarrow{d} \sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i B_i^2(x), \tag{A.6}$$

结合命题 A.2，可得到（3.10）。

（ii）注意到，在 $H_A^{\diamond}$下，必然存在某个 i_0 使得 $\frac{T\omega^2_{Ti_0}\|\delta_{i_0}\|^2}{\xi_{NT}} \xrightarrow{} \infty_{\circ}$ 令

$$Z^{\epsilon}_{iT}(x;u) = \frac{1}{\sqrt{T}}\left[S^{\epsilon}_{iT}(x;u) - \frac{t}{T}S^{\epsilon}_{iT}(1;u)\right] \ \text{ with } \ S^{\epsilon}_{iT}(x;u) = \sum_{s=1}^{\lfloor Tx\rfloor}\epsilon_{is}(u),$$

并写出

$$Z_{i_0T}(x_{i_0},u) = Z^{\epsilon}_{i_0T}(x_{i_0},u) - \sqrt{T}x_{i_0}(1-x_{i_0})\delta_{i_0}(u), \tag{A.7}$$

其中 $x_{i_0} = \tau_{i_0}/T$。由命题 A.2，我们有

$$\max_{1\leqslant i\leqslant N}\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_{\mathbb{C}}[Z^{\epsilon}_{iT}(x;u)]^2\,du = o_P(\xi_{NT}). \tag{A.8}$$

另一方面，容易验证

$$\frac{T[x_{i_0}(1-x_{i_0})]^2\|\delta_{i_0}\|^2}{\xi_{NT}} \geqslant \frac{T\omega^2_{Ti_0}\|\delta_{i_0}\|^2}{4\xi_{NT}} \to \infty. \tag{A.9}$$

由（A.7）–（A.9），可得

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_{\mathbb{C}}Z^2_{i_0T}(x;u)du \geqslant \int_{\mathbb{C}}Z^2_{i_0T}(x_{i_0};u)du > \xi_{NT},\ \ w.p.a.1,$$

结合 $Z_{NT}^{\diamond}$ 的定义，可得（3.11）。

注意到

$$\widetilde{Z}_{NT}(x;u) = \widetilde{Z}_{NT}^{\epsilon}(x;u) + \nu_{NT}(x;u),$$

其中 $\nu_{NT}(x;\ u)$ 定义见（3.9）。因此，我们有

$$\int_{\mathbb{C}} \widetilde{Z}_{NT}^{2}(x;u)du = \int_{\mathbb{C}} \left[\widetilde{Z}_{NT}^{\epsilon}(x;u)\right]^{2} du + \int_{\mathbb{C}} \nu_{NT}^{2}(x;u)du + 2\int_{\mathbb{C}} \widetilde{Z}_{NT}^{\epsilon}(x;u)\nu_{NT}(x;u)du. \tag{A.10}$$

根据（3.9）、（3.10）、（A.10）以及柯西-施瓦茨不等式，我们可以证明，$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_{\mathbb{C}} \nu_{NT}^{2}(x;u)du$是 Z_{NT} 在 H_A下的渐近主导项。因此，如果 ν_{NT} 满足（3.9），则有

$$P\left(Z_{NT} \geqslant z_{\alpha}\right) \to 1. \tag{A.11}$$

结合（3.11）和（A.11）可得（3.12）。 □

定理的证明 2。根据命题 A.2，我们可以证明

$$P\left(\max_{i\in\mathcal{C}_{\circ}} \sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_{\mathbb{C}} Z_{iT}^{2}(x;u)du \geqslant \xi_{NT}\right) \to 0,$$

<escape>这表明 $P\left(\mathcal{C}_{\circ} \subset \widehat{\mathcal{C}}_{\circ}\right) \to 1$。另一方面，对于任意 $i \notin \mathcal{C}_{\circ}$，利用（4.2）并遵循（3.11）的证明中的论证，我们必有</escape>

$$P\left(\min_{i\notin\mathcal{C}_{\circ}} \sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_{\mathbb{C}} Z_{iT}^{2}(x;u)du > \xi_{NT}\right) = P\left(\min_{i\in\mathcal{C}_{\bullet}} \sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_{\mathbb{C}} Z_{iT}^{2}(x;u)du > \xi_{NT}\right) \to 1,$$

因此 $i \notin \widehat{\mathcal{C}}_{\circ}$ 以趋于 *1* 的概率。于是，我们有$P\left(\widehat{\mathcal{C}}_{\circ} \subset \mathcal{C}_{\circ}\right) \to 1$。结合上述论证，可以直接得到$P\left(\widehat{\mathcal{C}}_{\circ} = \mathcal{C}_{\circ}\right) \to 1$。关于$P\left(\widehat{\mathcal{C}}_{\bullet} = \mathcal{C}_{\bullet}\right) \to 1$ 的证明与此类似，为节省篇幅，此处略去。至此，式（4.3）得证。

接下来，我们证明（4.5）。不失一般性，我们首先考虑$1 \leqslant t < \tau_i$对于 $i \in \mathcal{C}_{\bullet}$ 的情形。为简化记号，记 $Z_{it} = (Z_{iT}(t/T;\ u) :\ u \in \mathbb{C})$ 且$\|Z_{it}\|^2 = \int_{\mathbb{C}} Z_{iT}^{2}(t/T;\ u)du$。对于 $i \in \mathcal{C}_{\bullet}$，我们注意到

$$\|Z_{it}\|^2 - \|Z_{i\tau_i}\|^2 = \langle Z_{it} + Z_{i\tau_i}, Z_{it} - Z_{i\tau_i}\rangle = \frac{1}{T}\langle P_{it,1} + Q_{it,1}, P_{it,2} + Q_{it,2}\rangle, \tag{A.12}$$

其中

$$\begin{aligned} P_{it,1} &= 2\sum_{s=1}^{t}\epsilon_{is} + \sum_{s=t+1}^{\tau_i}\epsilon_{is} - \frac{\tau_i+t}{T}\sum_{s=1}^{T}\epsilon_{is}, \quad P_{it,2} = -\sum_{s=t+1}^{\tau_i}\epsilon_{is} + \frac{\tau_i-t}{T}\sum_{s=1}^{T}\epsilon_{is}, \\ Q_{it,1} &= -\frac{(T-\tau_i)(\tau_i+t)}{T}\delta_i, \quad Q_{it,2} = \frac{(T-\tau_i)(\tau_i-t)}{T}\delta_i. \end{aligned}$$

撰写

$$Q_i(t) = \frac{1}{T}\langle Q_{it,1}, Q_{it,2}\rangle = \frac{(t+\tau_i)(t-\tau_i)}{T}\left(\frac{T-\tau_i}{T}\right)^2\|\delta_i\|^2,$$

它在 $1 \leqslant t \leqslant \tau_i$ 上是递增函数。由（4.2），可得

$$\begin{aligned} \min_{i\in\mathcal{C}_\bullet}\max_{1\leqslant t\leqslant\tau_i-\theta[\ln(N\vee T)]^{1+\zeta}}\frac{1}{T}\langle Q_{it,1}, Q_{it,2}\rangle &= \min_{i\in\mathcal{C}_\bullet} Q_i\left(\lfloor\tau_i - \theta[\ln(N\vee T)]^{1+\zeta}\rfloor\right) \\ &\to -\theta\left[\frac{2\tau_i}{T}\cdot\left(\frac{T-\tau_i}{T}\right)^2\|\delta_i\|^2\right][\ln(N\vee T)]^{1+\zeta} \\ &\leqslant -\theta m_1[\ln(N\vee T)]^{1+\zeta} \to -\infty, \end{aligned} \tag{A.13}$$

其中，θ为任意正数，且m_1为一个正数。注意，根据（$|\langle Q_{it,1}, Q_{it,2}\rangle| > m_1 T(\tau_i - t)$对于 $1 \leqslant t < \tau_i$，由式（4.2）可得。然后，利用柯西-施瓦茨不等式，可以证明

$$\left|\frac{\langle P_{it,1}, P_{it,2}\rangle}{\langle Q_{it,1}, Q_{it,2}\rangle}\right| \leqslant \frac{\|P_{it,1}\|\cdot\|P_{it,2}\|}{m_1 T(\tau_i - t)} = \frac{1}{m_1(\tau_i - t)}\frac{\|P_{it,1}\|}{T^{1/2}}\cdot\frac{\|P_{it,2}\|}{T^{1/2}}.$$

按照附录 B 中命题 A.2 的证明，我们可以证明

$$P\left(\max_{i\in\mathcal{C}_\bullet}\max_{1\leqslant t\leqslant\tau_i-\theta[\ln(N\vee T)]^{1+\zeta}}\|P_{it,1}\| > T^{1/2}[\ln(N\vee T)]^{1/2+\zeta/3}\right) \to 0,$$

and

$$P\left(\max_{i\in\mathcal{C}_\bullet}\max_{1\leqslant t\leqslant\tau_i-\theta[\ln(N\vee T)]^{1+\zeta}}\|P_{it,2}\| > T^{1/2}[\ln(N\vee T)]^{1/2+\zeta/3}\right) \to 0.$$

因此，我们可以证明：

$$\max_{i\in\mathcal{C}_\bullet}\max_{1\leqslant t\leqslant\tau_i-\theta[\ln(N\vee T)]^{1+\zeta}}\left|\frac{\langle P_{it,1}, P_{it,2}\rangle}{\langle Q_{it,1}, Q_{it,2}\rangle}\right| = o_P(1). \tag{A.14}$$

类似地，我们还可以证明

$$\max_{i\in\mathcal{C}_\bullet}\max_{1\leqslant t\leqslant\tau_i-\theta[\ln(N\vee T)]^{1+\zeta}}\left|\frac{\langle P_{it,1}, Q_{it,2}\rangle}{\langle Q_{it,1}, Q_{it,2}\rangle}\right| = o_P(1) \tag{A.15}$$

and

$$\max_{i\in\mathcal{C}_\bullet}\max_{1\leqslant t\leqslant\tau_i-\theta[\ln(N\vee T)]^{1+\zeta}}\left|\frac{\langle Q_{it,1},P_{it,2}\rangle}{\langle Q_{it,1},Q_{it,2}\rangle}\right|=o_P(1). \tag{A.16}$$

根据（A.13）–（A.16），我们很容易得到

$$P\left(\min_{i\in\mathcal{C}_\bullet}\max_{1\leqslant t\leqslant\tau_i-\theta[\ln(N\vee T)]^{1+\zeta}}\left(\|Z_{it}\|^2-\|Z_{i\tau_i}\|^2\right)>-C\right)\to 0 \tag{A.17}$$

对于所有 $C>0$。对于 $\tau_i<t\leqslant T$ 的情况，我们也可以证明、】【

$$P\left(\min_{i\in\mathcal{C}_\bullet}\max_{\tau_i+\theta[\ln(N\vee T)]^{1+\zeta}\leqslant t\leqslant T}\left(\|Z_{it}\|^2-\|Z_{i\tau_i}\|^2\right)>-C\right)\to 0 \tag{A.18}$$

以完全相同的方式。利用 (A.17) 和 (A.18)，我们通过令 θ 任意小，证明 (4.5)。 □

定理的证明 3。令 Λ_{NT} 表示事件

$$\left\{\widehat{\mathcal{C}}_\bullet=\mathcal{C}_\bullet,\ \max_{i\in\mathcal{C}_\bullet}|\widehat{\tau}_i-\tau_i|\leqslant\theta_{NT}\right\},$$

其中 $\theta_{NT}=\theta[\ln(N\vee T)]^{1+\zeta}$ 其中 θ 为任意正数。根据假设 2(i)(ii)，我们可以验证定理 2 中的条件，因此 $P(\Lambda_{NT})\to 1$。因此，接下来我们在 Λ_{NT}的条件下证明该定理。根据构造式（4.7）和假设 2(i)，我们可以证明

$$P\left(\widehat{\mathcal{C}}(k|K_0)=\mathcal{C}(b_k),\ k=1,\cdots,K_0\mid\Lambda_{NT}\right)\to 1$$

ˆ ˆ ˆ和 $\mathcal{C}(b_k)=\mathcal{C}(k|K_0)$ 当 $K=K_0$。这与（4.11）一起证明了（4.12）。

I接下来需要证明（4.11）。根据定义（4.10），我们只需证明 tha t

$$P\left(IC(K)>IC(K_0),\ 1\leqslant K\neq K_0\leqslant\overline{K}\right)\to 1. \tag{A.19}$$

接下来我们分别考虑两种情况： $K>K_0$ 和 $K<K_0$。

当 $K_0+1\leqslant K\leqslant\overline{K}$，在给定 Λ_{NT}，$\widehat{\tau}_{k|K}$ 在（4.8）中定义的量是一个相合估计 o f

$$\tau_{k|K}=\frac{1}{\left|\widehat{\mathcal{C}}(k|K)\right|}\sum_{i\in\widehat{\mathcal{C}}(k|K)}\tau_i,$$

ˆ且存在 $j\in\{1,\cdots,K_0\}$，使得 $\mathcal{C}(k|K)$ 是 $\mathcal{C}(b_j)$ 或其子集的一致估计。以 Λ_{NT}为条件，我们有 $\tau_{k|K}-\theta_{NT}\leqslant\widehat{\tau}_{k|K}\leqslant\tau_{k|K}+\theta_{NT}$。如果 $\tau_{k|K}-\theta_{NT}\leqslant\widehat{\tau}_{k|K}\leqslant\tau_{k|K}$，我们

可能表明彩票计划

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_{i,k|K} &= \frac{1}{\widehat{\tau}_{k|K}}\left(\sum_{t=1}^{\tau_{k|K}}\mu_i+\sum_{t=1}^{\widehat{\tau}_{k|K}}\epsilon_{it}-\sum_{t=\widehat{\tau}_{k|K}+1}^{\tau_{k|K}}\mu_i\right)\\ &= \mu_i+\frac{1}{\widehat{\tau}_{k|K}}\sum_{t=1}^{\widehat{\tau}_{k|K}}\epsilon_{it}+O_P\left(\frac{[\ln(N\vee T)]^{1+\zeta}}{T}\right),\end{aligned}\tag{A.20}$$

and

$$\widehat{\delta}_{i,k|K}=\delta_i+\frac{1}{T-\widehat{\tau}_{k|K}}\sum_{t=\widehat{\tau}_{k|K}+1}^{T}\epsilon_{it}-\frac{1}{\widehat{\tau}_{k|K}}\sum_{t=1}^{\widehat{\tau}_{k|K}}\epsilon_{it}+O_P\left(\frac{[\ln(N\vee T)]^{1+\zeta}}{T}\right).\tag{A.21}$$

类似地，(A.20) 和 (A.21) 在 $\tau_{k|K}+1\leqslant\widehat{\tau}_{k|K}\leqslant\tau_{k|K}+\theta_{NT}$ 时也成立。由 (A.20) 和 (A.21)，对于 $\widehat{\nu}_{it,\ k|K}$ 在 (4.8) 中定义，我们有

$$\widehat{\nu}_{it,k|K}=\begin{cases}\mu_i+\frac{1}{\widehat{\tau}_{k|K}}\sum_{t=1}^{\widehat{\tau}_{k|K}}\epsilon_{it}+O_P\left(\frac{[\ln(N\vee T)]^{1+\zeta}}{T}\right), & t\leqslant\widehat{\tau}_{k|K},\\ \mu_i+\delta_i+\frac{1}{T-\widehat{\tau}_{k|K}}\sum_{t=\widehat{\tau}_{k|K}+1}^{T}\epsilon_{it}+O_P\left(\frac{[\ln(N\vee T)]^{1+\zeta}}{T}\right), & t>\widehat{\tau}_{k|K}.\end{cases}\tag{A.22}$$

^根据（4.6）、（A.22）和命题 A.2，对于 $i\in\mathcal{C}(k|K)$，我们可以证明

$$\begin{aligned}&\frac{1}{T}\sum_{i\in\widehat{\mathcal{C}}(k|K)}\sum_{t=1}^{T}\left\|X_{it}-\widehat{\nu}_{it,k|K}\right\|^2\\ =\ &\frac{1}{T}\sum_{i\in\widehat{\mathcal{C}}(k|K)}\left(\sum_{t=1}^{\lfloor\tau_{k|K}-\theta_{NT}\rfloor}+\sum_{t=\lfloor\tau_{k|K}-\theta_{NT}\rfloor+1}^{\lfloor\tau_{k|K}+\theta_{NT}\rfloor}+\sum_{t=\lfloor\tau_{k|K}+\theta_{NT}\rfloor+1}^{T}\right)\left\|X_{it}-\widehat{\nu}_{it,k|K}\right\|^2\\ =\ &\frac{1}{T}\sum_{i\in\widehat{\mathcal{C}}(k|K)}\sum_{t=1}^{\lfloor\tau_{k|K}-\theta_{NT}\rfloor}\left\|\epsilon_{it}-\frac{1}{\widehat{\tau}_{k|K}}\sum_{t=1}^{\widehat{\tau}_{k|K}}\epsilon_{it}\right\|^2+\frac{1}{T}\sum_{i\in\widehat{\mathcal{C}}(k|K)}\sum_{t=\lfloor\tau_{k|K}+\theta_{NT}\rfloor+1}^{T}\left\|\epsilon_{it}-\frac{1}{T-\widehat{\tau}_{k|K}}\sum_{t=\widehat{\tau}_{k|K}+1}^{T}\epsilon_{it}\right\|^2\\ &+O_P\left(\left|\widehat{\mathcal{C}}(k|K)\right|\cdot\frac{[\ln(N\vee T)]^{1+\zeta}}{T}\right)\\ =\ &\frac{1}{T}\sum_{i\in\widehat{\mathcal{C}}(k|K)}\sum_{t=1}^{\lfloor\tau_{k|K}-\theta_{NT}\rfloor}\|\epsilon_{it}\|^2+\frac{1}{T}\sum_{i\in\widehat{\mathcal{C}}(k|K)}\sum_{t=\lfloor\tau_{k|K}+\theta_{NT}\rfloor+1}^{T}\|\epsilon_{it}\|^2+O_P\left(\left|\widehat{\mathcal{C}}(k|K)\right|\cdot\frac{[\ln(N\vee T)]^{1+\zeta}}{T}\right)\\ =\ &\frac{1}{T}\sum_{i\in\widehat{\mathcal{C}}(k|K)}\sum_{t=1}^{T}\|\epsilon_{it}\|^2+O_P\left(\left|\widehat{\mathcal{C}}(k|K)\right|\cdot\frac{[\ln(N\vee T)]^{1+\zeta}}{T}\right),\end{aligned}$$

这与事实 $\left|\widehat{\mathcal{C}}_\bullet\right| = \sum_{k=1}^{K}\left|\widehat{\mathcal{C}}(k|K)\right|$一起表明,

$$\begin{aligned} V(K) &= \frac{1}{T\left|\widehat{\mathcal{C}}_\bullet\right|}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i\in\widehat{\mathcal{C}}(k|K)}\sum_{t=1}^{T}\|\epsilon_{it}\|^2 + O_P\left(\frac{[\ln(N\vee T)]^{1+\zeta}}{T}\right) \\ &= V(K_0) + O_P\left(\frac{[\ln(N\vee T)]^{1+\zeta}}{T}\right). \end{aligned} \tag{A.23}$$

由（A.23）和假设2（iii），容易得到

$$P\left(IC(K) > IC(K_0),\ K_0+1 \leqslant K \leqslant \overline{K} \mid \Lambda_{NT}\right) \to 1. \tag{A.24}$$

令 $\Lambda_{NT}^* = \left\{\Lambda_{NT},\ \ \widehat{\mathcal{C}}(k|K_0) = \mathcal{C}(b_k),\ \ k=1,\ \cdots,\ K_0\right\}$。容易验证，由（$P\left(\Lambda_{NT}^*\right) \to 1$（4.12）。当 $1 \leqslant K \leqslant K_0 - 1$时，在给定 Λ_{NT}^*的条件下，至少有两个簇会被错误地合并。不失一般性，我们考虑 $K = K_0 - 1$，并假设在给定 Λ_{NT}^*的条件下， $\mathcal{C}(b_1)$ 和$\mathcal{C}(b_2)$ 被错误地合并，即 $\mathcal{C}(1|K_0-1) = \mathcal{C}(b_1)\cup\mathcal{C}(b_2)$。在这种情况下， $\widehat{\tau}_{1|K_0-1}$ 是一个有偏的变点估计，但可视为 b_1 和 b_2 的加权平均值的估计，其定义为

$$\tau_{1|K_0-1} = \frac{|\mathcal{C}(b_1)|}{|\mathcal{C}(b_1)|+|\mathcal{C}(b_2)|}b_1 + \frac{|\mathcal{C}(b_2)|}{|\mathcal{C}(b_1)|+|\mathcal{C}(b_2)|}b_2.$$

根据假设 2(i)，我们可以写成 $b_1 < \tau_{1|K_0-1} = c_*T < b_2$ 其中 $c_1 < c_* < c_2$。对于 $i \in \mathcal{C}(b_1)$，我们可以证明

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_{i,1|K_0-1} &= \frac{1}{\widehat{\tau}_{1|K_0-1}}\left[\sum_{t=1}^{b_1}\mu_i + \sum_{t=b_1+1}^{\widehat{\tau}_{1|K_0-1}}(\mu_i+\delta_i) + \sum_{t=1}^{\widehat{\tau}_{1|K_0-1}}\epsilon_{it}\right] \\ &= \frac{c_1}{c_*}\mu_i + \frac{c_*-c_1}{c_*}(\mu_i+\delta_i) + o_P(1), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}_{i,1|K_0-1} &= \frac{1}{T-\widehat{\tau}_{1|K_0-1}}\left[\sum_{t=\widehat{\tau}_{1|K_0-1}+1}^{T}(\mu_i+\delta_i) + \sum_{t=\widehat{\tau}_{1|K_0-1}+1}^{T}\epsilon_{it}\right] - \widehat{\mu}_{i,1|K_0-1} \\ &= \mu_i + \delta_i - \frac{c_1}{c_*}\mu_i - \frac{c_*-c_1}{c_*}(\mu_i+\delta_i) + o_P(1) \\ &= \frac{c_1}{c_*}\delta_i + o_P(1). \end{aligned}$$

因此，对于 $i \in \mathcal{C}(b_1)$，我们可以证明

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left\|X_{it}-\widehat{v}_{it,1|K_0-1}\right\|^2 \\
=\;&\frac{1}{T}\left(\sum_{t=1}^{b_1}+\sum_{t=b_1+1}^{\widehat{\tau}_{1|K_0-1}}+\sum_{t=\widehat{\tau}_{1|K_0-1}+1}^{T}\right)\left\|X_{it}-\widehat{v}_{it,1|K_0-1}\right\|^2 \\
=\;&\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{b_1}\left\|\epsilon_{it}-\frac{c_*-c_1}{c_*}\delta_i\right\|^2+\sum_{t=b_1+1}^{\widehat{\tau}_{1|K_0-1}}\left\|\epsilon_{it}+\frac{c_1}{c_*}\delta_i\right\|^2+\sum_{t=\widehat{\tau}_{1|K_0-1}+1}^{T}\|\epsilon_{it}\|^2+o_P(1) \\
=\;&\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\|\epsilon_{it}\|^2+\gamma_i+o_P(1), \qquad (A.25)
\end{aligned}$$

其中 $\gamma_i=\frac{c_1(c_*-c_1)}{c_*}\|\delta_i\|^2>0$。类似地，对于 $i\in\mathcal{C}(b_2)$，也存在 $\gamma_i>0$ 使得

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left\|X_{it}-\widehat{v}_{i,1|K_0-1,t}\right\|^2=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\|\epsilon_{it}\|^2+\gamma_i+o_P(1). \qquad (A.26)$$

于是，由（A.25）和（A.26），我们得到

$$P\left(IC(K_0-1)-IC(K_0)>0\mid\Lambda_{NT}^*\right)\to 1.$$

更一般地（但论证类似），我们可以证明，

$$P\left(IC(K)>IC(K_0),\ 1\leqslant K\leqslant K_0-1\mid\Lambda_{NT}^*\right)\to 1. \qquad (A.27)$$

根据 (A.24) 和 (A.27)，并注意到 $P(\Lambda_{NT})\to 1$ 和 $P(\Lambda_{NT}^*)\to 1$，我们可以证明 (A.19)。 □

定理的证明 4。由定理 4.12 中的（3），我们只需在满足$\frown\mathcal{C}(b_k)=\mathcal{C}(b_k)$的条件下证明（4.15）。对于每个 $k=1,\ \cdots,\ K_0$ 以及任意 $t=1,\ \cdots,\ T-1$，我们注意到

$$\begin{aligned}
&Z(t;\mathcal{C}(b_k))-Z(b_k;\mathcal{C}(b_k)) \\
=\;&\{Z(t;\mathcal{C}(b_k))-E[Z(t;\mathcal{C}(b_k))]\}-\{Z(b_k;\mathcal{C}(b_k))-E[Z(b_k;\mathcal{C}(b_k))]\} \\
&+\{E[Z(t;\mathcal{C}(b_k))]-E[Z(b_k;\mathcal{C}(b_k))]\} \\
\leqslant\;&2\max_{1\leqslant t\leqslant T-1}|Z(t;\mathcal{C}(b_k))-E[Z(t;\mathcal{C}(b_k))]|+\{E[Z(t;\mathcal{C}(b_k))]-E[Z(b_k;\mathcal{C}(b_k))]\}, \qquad (A.28)
\end{aligned}$$

其中 $Z(t;\ \mathcal{C}(b_k))$ 为 $\quad\widehat{}\quad$在命题A.3中定义。根据 b_k 在（4.13）中的定义以及命题

A.3和A.4，我们很容易得到：

$$m_0|\widehat{b}_k - b_k| \sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)} \|\delta_i\|^2 = O_P\left(|\mathcal{C}(b_k)|^{1/2} + T^{1/2}\left(\sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)} \|\delta_i\|^2\right)^{1/2}\right) \tag{A.29}$$

在.....之下 H_A，其中 m_0 定义见命题 A.4。令

$$\delta_{\mathcal{C}(b_k)} = \left(\frac{1}{|\mathcal{C}(b_k)|^{1/2}} \sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)} \|\delta_i\|^2\right)^{-1} \to 0,$$

由（A.29），我们有

$$\left|\widehat{b}_k - b_k\right| = O_P\left(\delta_{\mathcal{C}(b_k)} + T^{1/2}|\mathcal{C}(b_k)|^{-1/4}\delta^{1/2}_{\mathcal{C}(b_k)}\right) = o_P\left(\varpi_k\right), \quad k = 1, \cdots, K_0 \tag{A.30}$$

其中 $\varpi_k = T^{1/2}|\mathcal{C}(b_k)|^{-1/4}$。令 $\mathcal{N}_k(\epsilon)$ 由命题 A.5 根据式（A.30），可得

$$\begin{aligned} P\left(\widehat{b}_k \neq b_k\right) &\leqslant P\left(\widehat{b}_k \in \mathcal{N}_k(\epsilon),\ \widehat{b}_k \neq b_k\right) + P\left(\widehat{b}_k \notin \mathcal{N}_k(\epsilon)\right) \\ &= P\left(\widehat{b}_k \in \mathcal{N}_k(\epsilon),\ \widehat{b}_k \neq b_k\right) + o(1) \end{aligned} \tag{A.31}$$

对于任意 $k = 1, \cdots, K_0$。此外，命题 A.5 表明

$$P\left(\widehat{b}_k \in \mathcal{N}_k(\epsilon),\ \widehat{b}_k \neq b_k\right) \to 0, \quad k = 1, \cdots, K_0. \tag{A.32}$$

鉴于（A.31）和（A.32），我们完成了定理4的证明。 □

参考文献

ASTON, J. 和 KIRCH, C.（2012年）。检测和估计依赖函数型数据中的变化。多元分析期刊**109**，204–220。

AUE, A.、GABRYS, R.、HORV´ÁTH, L. 和 KOKOSZKA, P.（2009）。函数型数据均值函数中变点的估计。《多元分析杂志》**100**，2254–2269。

AUE、A.、RICE、G. 和 S¨ONMEZ、O.（2018年）。无需降维的函数型数据结构突变检测与定年。英国皇家统计学会学报 *B* 辑**80**，509–529。

BAI, J.（1997年）。逐次估计多个突变。《计量经济理论》**13**, 315–352。

BAI, J.（2010年）。面板数据均值和方差中的共同突变。《计量经济学杂志》**157**, 78–92。BERKES, I., GABRYS, R., HORV ´ATH, L. AND KOKOSZKA, P.（2009）。检测函数型观测均值的变化。《英国皇家统计学会会刊*B*辑》**71**, 927–946。BILLINGSLEY, P.（1968年）。《概率测度的收敛》。Wiley，纽约。BOSQ, D.（2000年）。《函数空间中的线性过程》。Springer，纽约。BOUCHERON, S., LUGOSI, G. AND MASSART, P.（2016年）。《集中不等式：独立性的非渐近理论》。牛津大学出版社。CHIOU, J. M. AND LI, P. L.（2007）。函数型数据聚类及纵向数据子结构识别。《英国皇家统计学会会刊*B*辑》**69**, 679–699。CHO, H. AND FRYZLEWICZ, P.（2015）。通过稀疏化二元分割检测高维时间序列中的多个变点。《英国皇家统计学会会刊*B*辑》**77**, 475–507。DELAIGLE, A. AND HALL, P.（2012年）。实现函数型数据近乎完美的分类。《英国皇家统计学会会刊*B*辑》**74**, 267–286。DELAIGLE, A., HALL, P. AND PHAM, T.（2019年）。利用投影将函数型数据聚类为不同组别。《英国皇家统计学会会刊*B*辑》**81**, 271–304。FAN, J., LIAO, Y. AND YAO, J.（2015年）。高维横截面检验中的功效增强。《计量经济学》**83**, 1497–1541。FERRATY, F. AND VIEU, P.（2006年）。《非参数函数型数据分析》。Springer，纽约。FOWLKES, E. B. AND MALLOWS, C. L.（1983）。一种比较两个层次聚类的方法。《美国统计学会会刊》**78**, 553–569。H ¨ORMANN, S., HORV ´ATH, L. AND REEDER, R.（2013）。ARCH模型的函数型版本。《计量经济理论》**29**, 267–288。H ¨ORMANN, S. AND KOKOSZKA, P.（2010）。弱依赖函数型数据。《统计年鉴》**38**, 1845–1884。HORV ´ATH, L. AND HU ˇSKOV ´A, M.（2012年）。面板数据中的变点检测。《时间序列分析杂志》**33**, 631–648。HORV ´ATH, L. AND KOKOSZKA, P.（2012年）。《函数型数据推断及其应用》。Springer，纽约。HORV ´ATH, L., KOKOSZKA, P. AND RICE, G.（2014年）。函数型时间序列平稳性检验。《计量经济学杂志》**179**, 66–82。

人类 死亡 数据库 (2023)。德国马克斯·普朗克人口研究所、美国加州大学伯克利分校以及法国人口研究所（法国）。可在以下网址获取http://www.mortality.org（数据下载于2023-3-3）。HYNDMAN, R., ATHANASOPOULOS, G., BERGMEIR, C., CACERES, G., CHHAY, L., O'HARA-WILD, M., PETROPOULOS, F., RAZBASH, S., WANG, E. AND YASMEEN, F. (2019). *forecast*：用于时间序列和线性模型的预测函数。R 软件包版本 8.4。https://CRAN.R-project.org/package=forecast。HYNDMAN, R. J. AND ULLAH, M. S. (2007)。死亡率和生育率的稳健预测：一种函数型数据方法。《计算统计与数据分析》**51**(10), 4942–4956。KOCK, A. AND PREINERSTORFER, D. 高维检验问题中的检验功效。《计量经济学》**87**, 1055–1069。LI, D., ROBINSON, P. M. AND SHANG, H. L. (2020)。长程依赖曲线时间序列。《美国统计学会会刊》**115**, 957–971。LI, D., ROBINSON, P. M. AND SHANG, H. L. (2023)。非平稳分数阶积分函数型时间序列。《伯努利》**29**, 1505–1526。PENG, J. AND M ¨ULLER, H. G. (2008)。稀疏观测随机过程的基于距离的聚类及其在在线拍卖中的应用。《应用统计年刊》**2**, 1056–1077。RICE, G. AND SHANG, H. L. (2017)。平稳函数型时间序列长期协方差估计的插件带宽选择程序。《时间序列分析杂志》**38**, 591–609。RICE, G. WIRJANTO, T. AND ZHAO, Y. (2020)。函数型数据条件异方差检验。《时间序列分析杂志》**41**, 733–758。SHARIPOV, O., TEWES, J. AND WENDLER, M. (2016)。希尔伯特空间中的序贯分块自助法及其在变点分析中的应用。《加拿大统计学杂志》**44**, 300–322。TANG, C., SHANG, H. L. AND YANG, Y. (2022)。多元函数型时间序列的聚类与预测。《应用统计年刊》**16**(4), 2523–2553。TARPEY, T. AND KINATEDER, K. J. (2003)。函数型数据聚类。《分类学杂志》**20**, 93–114。WOOD, S. N. (1994)。通过交叉验证拟合的单调平滑样条。《工业与应用数学学会科学计算杂志》**15**(5), 1126–1133。ZHANG, X., SHAO, X. HAYHOE, K. AND WUEBBLES, D. (2011)。时间依赖函数型观测结构稳定性的检验及其在气候预测中的应用。《电子统计学杂志》**5**, 1765–1796。

《高维函数型时间序列结构突变的检测与估计》的补充材料

附录 B：技术结果的证明

在本附录中，我们给出技术结果的详细证明，这些结果对于证明附录 A 中的主要渐近定理至关重要。令 M 表示一个泛指的正常数，其取值允许在不同推导步骤中变化。

命题 A.1 的证明。注意

$$\widetilde{S}_{NT}^{\epsilon}(x;u) = N^{1/2}\sum_{s=1}^{\lfloor Tx\rfloor}\widetilde{\epsilon}_s(u) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{s=1}^{\lfloor Tx\rfloor}\sum_{i=1}^{N}\epsilon_{is}(u) \tag{B.1}$$

根据 $\widetilde{\epsilon}_s(u)$。利用 Beveridge-Nelson 分解（例如，Phillips 和 Solo，1992），可以证明

$$\sum_{s=1}^{t}\epsilon_{is} = \mathbf{A}_i\sum_{s=1}^{t}\eta_{is} + \widetilde{\epsilon}_{i0} - \widetilde{\epsilon}_{it} \tag{B.2}$$

对于任意正整数 t，其中 $\epsilon_{is} = (\epsilon_{is}(u) : u \in \mathbb{C})$，$\eta_{is} = (\eta_{is}(u) : u \in \mathbb{C})$，$\mathbf{A}_i = \sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{A}^{ij}$ 和 $\sim \widetilde{\epsilon}_{it} = \sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{A}_{ij}\eta_{i,\ t-j}$ 其中$\mathbf{A}_{ij} = \sum_{k=j+1}^{\infty}\mathbf{A}_{ik}$。结合（B.1）和（B.2），可得

$$\widetilde{S}_{NT}^{\epsilon}(x;u) = \sum_{s=1}^{\lfloor Tx\rfloor}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\epsilon_{is}(u) = \sum_{s=1}^{\lfloor Tx\rfloor}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{A}_i\eta_{is}(u) + \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\left[\widetilde{\epsilon}_{i0}(u) - \widetilde{\epsilon}_{i\lfloor Tx\rfloor}(u)\right]. \tag{B.3}$$

设 $\widetilde{\eta}_s = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{A}_i\eta_{is}$ 其在 s 上独立同分布，均值为零，且根据假设 1，其协方差算子正定。利用随机函数独立部分和的弱不变性原理（例如，de Acosta，1982；Dudley 和 Philipp，1983；Berkes、Horv´ath 和 Rice，2013），可以证明

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_{\mathbb{C}}\left[\frac{1}{T^{1/2}}\sum_{s=1}^{\lfloor Tx\rfloor}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{A}_i\eta_{is}(u) - G_{NT}(x;u)\right]^2 du = o_P(1). \tag{B.4}$$

由（B.4）可知，为完成（A.1）的证明，我们只需证明

$$\max_{1\leqslant t\leqslant T}\frac{1}{\sqrt{N}}\left\|\sum_{i=1}^{N}\widetilde{\epsilon}_{it}\right\| = o_P\left(T^{1/2}\right). \tag{B.5}$$

事实上，根据希尔伯特空间中随机元素的 Burkholder-Rosenthal 不等式（例如，de Acosta，1981年；Ose.kowski，2012年），由 (2.4) 和矩条件 (2.6)，可得

$$\frac{1}{N^{1+\iota/2}}\mathsf{E}\left[\left\|\sum_{i=1}^{N}\widetilde{\epsilon}_{it}\right\|^{2+\iota}\right]\leqslant M, \tag{B.6}$$

这与 Bonferroni 不等式和 Markov 不等式结合后，得到的是

$$\mathsf{P}\left(\max_{1\leqslant t\leqslant T}\frac{1}{\sqrt{N}}\left\|\sum_{i=1}^{N}\widetilde{\epsilon}_{it}\right\|>\varepsilon T^{1/2}\right)\leqslant\frac{\varepsilon^{-(2+\iota)}}{(NT)^{1+\iota/2}}\sum_{t=1}^{T}\mathsf{E}\left[\left\|\sum_{i=1}^{N}\widetilde{\epsilon}_{it}\right\|^{2+\iota}\right]=o\left(T^{-\iota/2}\right)=o(1)$$

对于任意 $\varepsilon>0$。这证明了（B.5），从而完成了命题 A.1 的证明。 □

命题 A.2 的证明。根据（B.2），我们可以证明，在 H_0，

$$\begin{aligned}Z_{iT}(x;u) &= \frac{1}{\sqrt{T}}\left[\left(1-\frac{\lfloor Tx\rfloor}{T}\right)\widetilde{\epsilon}_{i0}(u)-\left(1-\frac{\lfloor Tx\rfloor}{T}\right)\widetilde{\epsilon}_{i\lfloor Tx\rfloor}(u)\right]\\ &\quad+\frac{1}{\sqrt{T}}\left[\mathbf{A}_i\sum_{s=1}^{\lfloor Tx\rfloor}\eta_{is}(u)-\frac{\lfloor Tx\rfloor}{T}\mathbf{A}_i\sum_{s=1}^{T}\eta_{is}(u)\right].\end{aligned}$$

于是我们很容易得到，

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_{\mathbb{C}}Z_{iT}^2(x;u)du\leqslant M\left(\frac{1}{T}\max_{1\leqslant t\leqslant T}\left\|\sum_{s=1}^{t}\eta_{is}\right\|^2+\frac{1}{T}\max_{1\leqslant t\leqslant T}\|\widetilde{\epsilon}_{it}\|^2\right). \tag{B.7}$$

因此，为了证明 (A.2)，只需证明

$$\mathsf{P}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant N}\max_{1\leqslant t\leqslant T}\left\|\sum_{s=1}^{t}\eta_{is}\right\|^2>T\cdot\xi_{NT}\right)\to 0 \tag{B.8}$$

and

$$\mathsf{P}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant N}\max_{1\leqslant t\leqslant T}\|\widetilde{\epsilon}_{it}\|^2>T\cdot\xi_{NT}\right)\to 0. \tag{B.9}$$

我们先证明（B.9），然后证明（B.8）。按照（B.6）中的方法，对希尔伯特空间中的随机元素应用 Burkholder-Rosenthal 不等式，可得 $\mathsf{E}\|\widetilde{\epsilon}_{it}\|^{2(\kappa+1)}\leqslant M$ 对 $\kappa\geqslant 0$

定义如定理 1。然后，利用 Bonferroni 不等式和 Markov 不等式，可以证明

$$\begin{aligned} & P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant N}\max_{1\leqslant t\leqslant T}\|\widetilde{\epsilon}_{it}\|^2 > T\cdot\xi_{NT}\right) \\ \leqslant\ & \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} P\left(\|\widetilde{\epsilon}_{it}\|^2 > T\cdot\xi_{NT}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\frac{E\|\widetilde{\epsilon}_{it}\|^{2(\kappa+1)}}{(T\cdot\xi_{NT})^{\kappa+1}} \\ \leqslant\ & M\left(NT^{-\kappa}\right)\xi_{NT}^{-(\kappa+1)} \to 0, \end{aligned}$$

其中用到了以下事实： $N = O\left(T^{\kappa}\right)$ 和 $\xi_{NT}\to\infty$。

Let

$$\overline{\eta}_{is} = \eta_{is} I\left(\|\eta_{is}\| \leqslant \xi_{NT}^{1/2}\right),\ \widehat{\eta}_{is} = \eta_{is} I\left(\|\eta_{is}\| > \xi_{NT}^{1/2}\right).$$

为了证明（B.8），我们只需证明

$$P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant N}\max_{1\leqslant t\leqslant T}\left\|\sum_{s=1}^{t}\left(\overline{\eta}_{is} - E\overline{\eta}_{is}\right)\right\|^2 > \frac{1}{4}T\cdot\xi_{NT}\right)\to 0, \tag{B.10}$$

and

$$P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant N}\max_{1\leqslant t\leqslant T}\left\|\sum_{s=1}^{t}\left(\widehat{\eta}_{is} - E\widehat{\eta}_{is}\right)\right\|^2 > \frac{1}{4}T\cdot\xi_{NT}\right)\to 0. \tag{B.11}$$

由于假设 1(ii) 中 $\max_{1\leqslant i\leqslant N} E\left[\exp\left\{c_\eta\|\eta_{it}\|^2\right\}\right] < \infty$，我们可以证明

$$\begin{aligned} E\|\widehat{\eta}_{is}\| &\leqslant \left(E\|\eta_{is}\|^2\right)^{1/2}\left[P\left(\|\eta_{is}\| > \xi_{NT}^{1/2}\right)\right]^{1/2} \\ &\leqslant M\exp\left\{-\frac{1}{2}\xi_{NT}\right\} = O\left((N\vee T)^{-\frac{1}{2}c_\xi \ln\ln(N\vee T)}\right) \\ &= o\left(\left[T^{-1}\xi_{NT}\right]^{1/2}\right), \end{aligned}$$

这表明

$$\begin{aligned} & P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant N}\max_{1\leqslant t\leqslant T}\left\|\sum_{s=1}^{t}\left(\widehat{\eta}_{is} - E\widehat{\eta}_{is}\right)\right\|^2 > \frac{1}{4}T\cdot\xi_{NT}\right) \\ \leqslant\ & P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant N}\max_{1\leqslant t\leqslant T}\left\|\sum_{s=1}^{t}\widehat{\eta}_{is}\right\|^2 > \frac{1}{5}T\cdot\xi_{NT}\right) \\ \leqslant\ & \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} P\left(\|\eta_{it}\| > \xi_{NT}^{1/2}\right) \leqslant M\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\frac{E\exp\left\{c_\eta\cdot\|\eta_{it}\|^2\right\}}{\exp\{c_\eta\cdot\xi_{NT}\}} \end{aligned}$$

$$= \quad O\left((N \vee T)^{2-c_\eta c_\xi \ln\ln(N\vee T)}\right) = o(1),$$

证明（B.11）。

另一方面，根据希尔伯特空间中独立随机元素的 Bernstein 型不等式（例如，Bosq，2000），我们可以证明

$$\begin{aligned}
& P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant N}\max_{1\leqslant t\leqslant T}\left\|\sum_{s=1}^{t}(\bar{\eta}_{is}-E\bar{\eta}_{is})\right\|^2 > \frac{1}{4}T\cdot\xi_{NT}\right) \\
\leqslant\ & \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} P\left(\left\|\sum_{s=1}^{t}(\bar{\eta}_{is}-E\bar{\eta}_{is})\right\|^2 > \frac{1}{4}T\cdot\xi_{NT}\right) \\
\leqslant\ & M(NT)\cdot\exp\{-m_\diamond \ln(N\vee T)\ln\ln(N\vee T)\} \\
=\ & O\left((N\vee T)^{2-m_\diamond \ln\ln(N\vee T)}\right) = o(1),
\end{aligned}$$

其中 $m_\diamond$ 是一个正数。这证明了（B.10）。（B.8）的证明完成。 □

命题A.3的证明。在 H_A 下，我们注意到

$$Z(t;\mathcal{C}(b_k)) = \sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\left\{\int_{\mathbb{C}}[Z_{iT}^{\epsilon}(t/T;u)]^2\,du + D_k^2(t)\int_{\mathbb{C}}\delta_i^2(u)du - 2D_k(t)\int_{\mathbb{C}}Z_{iT}^{\epsilon}(t/T;u)\delta_i(u)du\right\}, \tag{B.12}$$

其中 $Z_{iT}^{\epsilon}(t/T;\ u)$ 在定理 1(ii) 的证明中定义，并且

$$D_k(t) = \begin{cases} \sqrt{T}\left(\frac{t}{T}\frac{T-b_k}{T}\right), & t\leqslant b_k, \\ \sqrt{T}\left(\frac{b_k}{T}\frac{T-t}{T}\right), & t > b_k. \end{cases}$$

由于右侧 (B.12) 中的第二项是非随机的，且根据假设 1，第三项的均值为零，因此我们有

$$\begin{aligned}
Z(t;\mathcal{C}(b_k)) - E[Z(t;\mathcal{C}(b_k))] \quad = \quad & \sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\left(\int_{\mathbb{C}}\left\{[Z_{iT}^{\epsilon}(t/T;u)]^2 - E\left[Z_{iT}^{\epsilon}(t/T;u)\right]^2\right\}du\right. \\
& \left. -2D_k(t)\int_{\mathbb{C}}Z_{iT}^{\epsilon}(t/T;u)\delta_i(u)du\right).
\end{aligned} \tag{B.13}$$

由于 $Z_{iT}^{\epsilon}(t/T;\ u)$ 在 i上相互独立，参照 Horv´ath 和 Hu˘skov´a(2012年) 的定理 1 的证明（略作修改），并利用连续映射定理（例如，Billingsley，

1968年），我们可以证明

$$\max_{1\leqslant t\leqslant T}\left|\sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\int_{\mathbb{C}}\left\{[Z_{iT}^{\epsilon}(t/T;u)]^2-E\,[Z_{iT}^{\epsilon}(t/T;u)]^2\right\}du\right|=O_P\left(|\mathcal{C}(b_k)|^{1/2}\right)\tag{B.14}$$

and

$$\max_{1\leqslant t\leqslant T}\left|\sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\int_{\mathbb{C}}Z_{iT}^{\epsilon}(t/T;u)\delta_i(u)du\right|=O_P\left(\left(\sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\|\delta_i\|^2\right)^{1/2}\right).\tag{B.15}$$

根据假设2(i)，我们有 $D_k(t)=O\left(T^{1/2}\right)$ 在 $1\leqslant t\leqslant T$上一致成立。结合式（B.15），可得

$$\begin{aligned}&\max_{1\leqslant t\leqslant T}\left|D_k(t)\sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\int_{\mathbb{C}}Z_{iT}^{\epsilon}(t/T;u)\delta_i(u)du\right|\\ \leqslant\;&\left[\max_{1\leqslant t\leqslant T}D_k(t)\right]\max_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\int_{\mathbb{C}}Z_{iT}^{\epsilon}(t/T;u)\delta_i(u)du\right|\\ =\;&O_P\left(T^{1/2}\left(\sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\|\delta_i\|^2\right)^{1/2}\right).\end{aligned}\tag{B.16}$$

根据（B.13）、（B.14）和（B.16) 和三角不等式，命题A.3的证明至此完成。□

命题 A.4 的证明。由（B.12），我们可直接得到

$$\begin{aligned}E[Z(b_k;\mathcal{C}(b_k))]-E[Z(t;\mathcal{C}(b_k))]\;=\;&\sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\int_{\mathbb{C}}\left\{E\,[Z_{iT}^{\epsilon}(b_k/T;u)]^2-E\,[Z_{iT}^{\epsilon}(t/T;u)]^2\right\}du\\&+\left[D_k^2(b_k)-D_k^2(t)\right]\sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\|\delta_i\|^2.\end{aligned}\tag{B.17}$$

根据假设2(i)以及命题A.3证明中 $D_k(t)$ 的定义，存在一个正数 m_0 使得

$$D_k^2(b_k)-D_k^2(t)\geqslant 2m_0|t-b_k|\quad\text{for }\ t\neq b_k,\ \ k=1,\cdots,K_0.$$

这表明

$$\left[D_k^2(b_k)-D_k^2(t)\right]\sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\|\delta_i\|^2\geqslant 2m_0|t-b_k|\sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\|\delta_i\|^2.\tag{B.18}$$

另一方面，通过一些简单的计算，我们得到

$$\sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\int_{\mathbb{C}}\left\{\mathsf{E}\left[Z_{iT}^{\epsilon}(b_k/T;u)\right]^2-\mathsf{E}\left[Z_{iT}^{\epsilon}(t/T;u)\right]^2\right\}du=O\left(\frac{|\mathcal{C}(b_k)|}{T}|t-b_k|\right)\tag{B.19}$$

对于任意 $1\leqslant t\leqslant T$。利用条件 $|\mathcal{C}_\bullet|=O(T^2)$ 和 (4.14)，我们可以证明 Tha t

$$\frac{|\mathcal{C}(b_k)|}{T}=o\left(\sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\|\delta_i\|^2\right),\tag{B.20}$$

结合B.17)–(B.19，即完成了命题 A.4 的证明。 □

命题 A.5 的证明。由（B.12）和（B.17），在 H_A下，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|\mathcal{C}(b_k)|^{1/2}}\left[Z(b_k;\mathcal{C}(b_k))-Z(t;\mathcal{C}(b_k))\right]\\
=\;&\frac{1}{|\mathcal{C}(b_k)|^{1/2}}\sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\int_{\mathbb{C}}\left\{\left[Z_{iT}^{\epsilon}(b_k/T;u)\right]^2-\mathsf{E}\left[Z_{iT}^{\epsilon}(b_k/T;u)\right]^2\right\}du\\
&-\frac{1}{|\mathcal{C}(b_k)|^{1/2}}\sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\int_{\mathbb{C}}\left\{\left[Z_{iT}^{\epsilon}(t/T;u)\right]^2-\mathsf{E}\left[Z_{iT}^{\epsilon}(t/T;u)\right]^2\right\}du\\
&+\frac{1}{|\mathcal{C}(b_k)|^{1/2}}\sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\int_{\mathbb{C}}\left\{\mathsf{E}\left[Z_{iT}^{\epsilon}(b_k/T;u)\right]^2-\mathsf{E}\left[Z_{iT}^{\epsilon}(t/T;u)\right]^2\right\}du\\
&-\frac{2}{|\mathcal{C}(b_k)|^{1/2}}\left[D_k(t)\sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\int_{\mathbb{C}}Z_{iT}^{\epsilon}(t/T;u)\delta_i(u)du-D_k(b_k)\sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\int_{\mathbb{C}}Z_{iT}^{\epsilon}(b_k/T;u)\delta_i(u)du\right]\\
&+\frac{1}{|\mathcal{C}(b_k)|^{1/2}}\left[D_k^2(b_k)-D_k^2(t)\right]\sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\|\delta_i\|^2
\end{aligned}\tag{B.21}$$

对于任意 $b_k-\varepsilon\varpi_k\leqslant t<b_k$、$k=1$、$\cdots$、$K_0$。

由（B.18）和（4.14），对所有 $k=1,\ \cdots,\ K_0$,

$$\frac{1}{|\mathcal{C}(b_k)|^{1/2}}\left[D_k^2(b_k)-D_k^2(t)\right]\sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\|\delta_i\|^2>2m_0(b_k-t)\frac{1}{|\mathcal{C}(b_k)|^{1/2}}\sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\|\delta_i\|^2\to\infty\tag{B.22}$$

对于任意 $b_k-\varepsilon\varpi_k\leqslant t<b_k$。接下来我们考虑（B.21）右侧的第四项。注意到

$$D_k(t)\sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\int_{\mathbb{C}}Z_{iT}^{\epsilon}(t/T;u)\delta_i(u)du-D_k(b_k)\sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\int_{\mathbb{C}}Z_{iT}^{\epsilon}(b_k/T;u)\delta_i(u)du$$

$$
\begin{aligned}
&= D_k(t) \sum_{i \in \mathcal{C}(b_k)} \int_{\mathbb{C}} [Z^{\epsilon}_{iT}(t/T;u) - Z^{\epsilon}_{iT}(b_k/T;u)]\, \delta_i(u) du \\
&\quad + [D_k(t) - D_k(b_k)] \sum_{i \in \mathcal{C}(b_k)} \int_{\mathbb{C}} Z^{\epsilon}_{iT}(b_k/T;u) \delta_i(u) du.
\end{aligned}
$$

与（B.16）的证明类似，我们可以证明

$$
\begin{aligned}
&\max_{b_k - \varepsilon \varpi_k \leqslant t < b_k} \frac{1}{|\mathcal{C}(b_k)|^{1/2}} \left| [D_k(t) - D_k(b_k)] \sum_{i \in \mathcal{C}(b_k)} \int_{\mathbb{C}} Z^{\epsilon}_{iT}(b_k/T;u) \delta_i(u) du \right| \\
&= O_P\left(\frac{\varpi_k}{(T|\mathcal{C}(b_k)|)^{1/2}} \left(\sum_{i \in \mathcal{C}(b_k)} \|\delta_i\|^2 \right)^{1/2} \right) \\
&= O_P\left(\frac{1}{|\mathcal{C}(b_k)|^{1/2}} \left(\frac{1}{|\mathcal{C}(b_k)|^{1/2}} \sum_{i \in \mathcal{C}(b_k)} \|\delta_i\|^2 \right)^{1/2} \right). \qquad \text{(B.23)}
\end{aligned}
$$

另一方面，请注意

$$
Z^{\epsilon}_{iT}(t/T,u) - Z^{\epsilon}_{iT}(b_k/T,u) = \frac{1}{\sqrt{T}} \left[- \sum_{s=t+1}^{b_k} \epsilon_{is}(u) + \frac{b_k - t}{T} \sum_{s=1}^{T} \epsilon_{is}(u) \right]
$$

对于 $b_k - \varepsilon \varpi_k \leqslant t < b_k$，并且

$$
\begin{aligned}
&\max_{b_k - \varepsilon \varpi_k \leqslant t < b_k} \left| \frac{D_k(t)}{(T|\mathcal{C}(b_k)|)^{1/2}} \sum_{i \in \mathcal{C}(b_k)} \sum_{s=t+1}^{b_k} \int_{\mathbb{C}} \epsilon_{is}(u) \delta_i(u) du \right| \\
&= O_P\left(\frac{\varpi_k^{1/2}}{|\mathcal{C}(b_k)|^{1/2}} \left(\sum_{i \in \mathcal{C}(b_k)} \|\delta_i\|^2 \right)^{1/2} \right) \\
&= O_P\left(\frac{T^{1/4}}{|\mathcal{C}(b_k)|^{3/8}} \left(\frac{1}{|\mathcal{C}(b_k)|^{1/2}} \sum_{i \in \mathcal{C}(b_k)} \|\delta_i\|^2 \right)^{1/2} \right), \qquad \text{(B.24)}
\end{aligned}
$$

and

$$
\max_{b_k - \varepsilon \varpi_k \leqslant t < b_k} \left| \frac{(t - b_k) D_k(t)}{|\mathcal{C}(b_k)|^{1/2} T^{3/2}} \sum_{i \in \mathcal{C}(b_k)}^{N} \sum_{s=1}^{T} \int_{\mathbb{C}} \epsilon_{is}(u) \delta_i(u) du \right|
$$

$$= O_P\left(\frac{\varpi_k}{(|\mathcal{C}(b_k)|T)^{1/2}}\left(\sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\|\delta_i\|^2\right)^{1/2}\right)$$
$$= O_P\left(\frac{1}{|\mathcal{C}(b_k)|^{1/2}}\left(\frac{1}{|\mathcal{C}(b_k)|^{1/2}}\sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\|\delta_i\|^2\right)^{1/2}\right). \tag{B.25}$$

根据（B.23）–（B.25）并注意到 $T = O(|\mathcal{C}_\bullet|^{3/2})$，可以证明，等式（B.21）右端的第四项在 $o_P\left(\frac{1}{|\mathcal{C}(b_k)|^{1/2}}\sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\|\delta_i\|^2\right)$ 上一致成立。根据（B.14），以趋近于 1 的概率，等式（B.21）右端的前两项在$b_k - \varepsilon\varpi_k \leqslant t < b_k$ 上一致有界。根据（B.19）和（B.20），可以证明，等式（B.21）右端的第三项为 $o\left(\frac{b_k-t}{|\mathcal{C}(b_k)|^{1/2}}\sum_{i\in\mathcal{C}(b_k)}\|\delta_i\|^2\right)$，对任意 $b_k-\varepsilon\varpi_k \leqslant t < b_k$ 均成立。综合上述论证，可证明等式（B.21）右端的第四项是渐近主导项。因此，我们可以得出结论：

$$P\left(\max_{b_k-\varepsilon\varpi_k\leqslant t<b_k} Z(t;\mathcal{C}(b_k)) < Z(b_k;\mathcal{C}(b_k))\right) \to 1. \tag{B.26}$$

完全同样地，我们还可以证明

$$P\left(\max_{b_k<t\leqslant b_k+\varepsilon\varpi_k} Z(t;\mathcal{C}(b_k)) < Z(b_k;\mathcal{C}(b_k))\right) \to 1. \tag{B.27}$$

结合（B.26）和（B.27），命题 A.5 的证明即告完成。 □

参考文献

DE ACOSTA, A. (1981). B 值随机向量的不等式及其在大数强律中的应用。概率年刊**9**，157–161。

DE ACOSTA, A. (1982). B 值随机向量三角阵的概率不变性原理及其若干应用。概率年刊**10**，346–373。

BERKES, I., HORV´ATH, L. 和 RICE, G. (2013). 相依随机函数和的弱不变性原理。随机过程及其应用**123**，385–403。

BILLINGSLEY, P.（1968年）。概率测度的收敛。Wiley，纽约。

BOSQ, D.（2000）。函数空间中的线性过程。纽约：施普林格。

DUDLEY, R. M. 和 PHILIPP, W.（1983）。Banach空间值随机元素之和与经验过程的不变性原理。概率论与相关领域杂志**62**，509–552。HORV ´ATH, L. 和 HU˘SKOV ´A, M.（2012年）。面板数据中的变点检测。《时间序列分析杂志》**33**，631–648。OSE.KOWSKI. A.（2012年）。关于Burkholder-Rosenthal不等式的注记。波兰科学院数学通报**60**，177–185。PHILLIPS, P. C. B. 和 SOLO, V.（1992）。线性过程的渐近理论。统计年鉴**20**，971–1001。