子空间干扰中的目标检测检测器设计与性能分析

刘伟健，IEEE 高级会员；刘军，IEEE 高级会员；刘涛、陈辉和王永亮，IEEE 会员。

arXiv:2304.07005v1 [stat.AP] 14 Apr 2023

摘要——自适应信号检测通常难以获得足够的训练数据，而这些数据是计算未知噪声协方差矩阵所必需的。此外，干扰也经常存在，使检测问题变得更加复杂。为解决未知高斯噪声和子空间干扰条件下的信号检测问题，我们提出了一种称为检测前干扰抵消（ICBD）的两步方法。第一步是将测试数据和训练数据投影到与干扰正交的子空间中，以抑制干扰。第二步则采用传统的自适应检测器设计思路。由于投影后数据的维度较低，基于ICBD的检测器仅需少量训练数据即可运行。与传统检测器相比，ICBD还具有两项优势：计算负担更低，并且能够在训练数据中存在干扰的情况下正常工作。我们还给出了基于ICBD的检测器的统计特性，并证明在训练数据量充足且不含干扰这一特殊情况下，它们与传统检测器具有等价性。

索引词——自适应检测、子空间干扰、样本匮乏环境。

一、引言

自适应信号检测是信号处理中的一个基础问题，其噪声协方差矩阵未知，因此需要使用一组训练数据来推断噪声协方差矩阵 [1]–[3]。子空间干扰是另一种常见现象，它发生在已知子空间中，但坐标未知 [4]。文献 [5]–[13],提出了许多针对子空间干扰和未知噪声的检测器。上述文章采用了两个常见的假设：一是训练数据充足；二是干扰仅出现在测试数据中。然而，在许多情况下，获取足够的训练数据可能颇具挑战，和/或干扰可能占据全部距离单元，因此同时存在于测试数据和训练数据中 [14], [15]。在第一种情况下，样本协方差矩阵（SCM）是奇异的，这使得文献 [5]–[8], [12], [13] 中的检测器无法使用。对于后一种情况，针对最常用的三种检测器设计准则，即广义似然比检验（GLRT）、Wald检验和Rao检验，目前缺乏有效的检测器 [16]–[18]。这是由于未知参数空间过于庞大所导致的 [19]。

本研究部分得到了中国国家自然科学基金（项目编号：62071482、61871469 和 62171452）的资助。W. Liu、H. Chen 和 Y.-L. Wang 均任职于武汉电子信息研究所（中国武汉，430019）（电子邮箱：liuvjian@163.com、chhglr@sina.com 和 ylwangkjld@163.com）。J. Liu 任职于中国科学技术大学电子工程与信息科学系（中国合肥，230027）（电子邮箱：junliu@ustc.edu.cn）。T. Liu 任职于海军工程大学电子工程学院（中国武汉，430033）（电子邮箱：liutao1018@hotmail.com）。

在这封信中，我们研究了测试数据和训练数据均包含子空间干扰，且训练数据数量过少而无法构成可逆样本协方差矩阵（SCM）时的信号检测难题。我们提出了一种简单且高效的解决方案。本研究主要有三项贡献。首先，我们提出了一种两步检测方法。在第一阶段，利用半酉矩阵对测试数据和训练数据进行变换，以实现干扰抑制。该半酉矩阵的列张成一个与干扰正交的子空间。在第二阶段，利用广义似然比检验（GLRT）、Rao检验和Wald检验的检测器设计准则构建检测器。我们将这种新方法称为检测前干扰抵消（ICBD）。其次，我们证明，当干扰仅出现在测试数据中且训练数据充足时，基于ICBD的GLRT、Rao检验和Wald检验分别与传统方法等价。在这种情况下，与传统方法相比，ICBD方法具有多项优势，其中包括由于数据维度较低而带来的较低处理成本。第三，我们推导了基于ICBD的检测器的统计分布，并证明，当无干扰的训练数据充足时，基于ICBD的检测器与传统检测器等价。

II. 问题表述

以下二元假设检验描述了待解决的检测问题：

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0 : \mathbf{x} = \mathbf{J}\boldsymbol{\phi} + \mathbf{n}, \quad \mathbf{x}_l = \mathbf{J}\boldsymbol{\phi}_l + \mathbf{n}_l, \ l = 1, \cdots, L, \\ \mathrm{H}_1 : \mathbf{x} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{J}\boldsymbol{\phi} + \mathbf{n}, \quad \mathbf{x}_l = \mathbf{J}\boldsymbol{\phi}_l + \mathbf{n}_l, \ l = 1, \cdots, L, \end{cases} \tag{1}$$

其中，在假设 H_0 下，$N \times 1$ 测试数据向量 $\mathbf{x}$ 由噪声 $\mathbf{n}$ 和子空间干扰 $\mathbf{J}\boldsymbol{\phi}$ 构成，其中$N \times q$ 满列秩矩阵 $\mathbf{J}$ 张成干扰子空间，记为 $<\mathbf{J}>$，$q \times 1$ 向量 $\boldsymbol{\phi}$ 为干扰坐标向量。在假设 H_1，下，$\mathbf{x}$ 除了包含噪声和干扰外，还包含信号 $\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}$，其中 $N \times p$ 满列秩矩阵 $\mathbf{H}$ 张成信号子空间 $<\mathbf{H}>$，$p \times 1$ 向量 $\boldsymbol{\theta}$ 为信号坐标向量。$\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{J}$ 均为先验已知，而 $\boldsymbol{\theta}$和 $\boldsymbol{\phi}$ 未知。此外，在两种假设下，$\mathbf{n}$ 的协方差矩阵（记为 R_t）均未知。需要一组无信号训练数据（记为 $\mathbf{x}_l, l = 1, 2, \cdots, L$）来估计 R_t，其中 $\mathbf{n}_l$ 和 $\boldsymbol{\phi}_l$ 分别表示 $\mathbf{x}_l$ 中噪声和干扰的坐标向量。在式（1）中，

测试数据和训练数据中的干扰共享同一个子空间。实际中，当干扰变化不太快时，可能会出现这种情况。

对于式（1）中的检测问题，不存在高效的传统检测器，原因有两个：一是训练数据中存在干扰；二是训练数据不足（即 $L < N$），导致样本协方差矩阵（SCM）不可逆。本文考虑了 R_t 的两种情况。一种是同质环境（HE），其中 $\mathrm{R}_t = \mathrm{R}$ [20], ，R 表示训练数据的噪声协方差矩阵。另一种是部分同质环境（PHE），其中 $\mathrm{R}_t = \sigma^2\mathrm{R}$ [21], ，且 σ^2 是一个未知的正比例因子，表示训练数据与测试数据中的噪声功率失配。

III. 所提出的检测前干扰抵消（ICBD）

A. 基于ICBD的检测器的推导

矩阵 J 的极分解为 [22, p.348]

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_u \mathbf{D}_{\mathbf{J}}, \tag{2}$$

其中，$\mathrm{J}_u = \mathrm{J}(\mathrm{J}^H\mathrm{J})^{-\frac{1}{2}}$和 $\mathrm{D}_{\mathbf{J}} = (\mathrm{J}^H\mathrm{J})^{\frac{1}{2}}$，其中 $(\cdot)^H$表示共轭转置。注意，$<\mathrm{J}>=<\mathrm{J}_u>$。存在一个$N\times(N-q)$矩阵 $\mathrm{J}_\perp$，使得增广矩阵 $\mathrm{U} = [\mathrm{J}_u, \text{其中 } \mathrm{J}_\perp]$ 是一个满足 $\mathrm{J}_\perp^H\mathrm{J}_\perp = \mathrm{I}_{N-q}$和 $\mathrm{J}_\perp^H\mathrm{J} = \mathbf{0}_{(N-q)\times q}$的 $N \times N$酉矩阵。将式 (1) 左乘 $\mathrm{J}_\perp^H$，结合 $\mathrm{J}_\perp^H\mathrm{J} = \mathbf{0}_{(N-q)\times q}$这一事实，可得

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0 : \mathbf{y} = \mathbf{w}, \ \mathbf{y}_l = \mathbf{w}_l, \ l = 1, 2, ..., L, \\ \mathrm{H}_1 : \mathbf{y} = \mathbf{H}_{\mathbf{J}_\perp}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{w}, \ \mathbf{y}_l = \mathbf{w}_l, \ l = 1, 2, ..., L, \end{cases} \tag{3}$$

其中，$\mathrm{y} = \mathrm{J}_\perp^H\mathrm{x}$，$\mathrm{H}_{\mathbf{J}_\perp} = \mathrm{J}_\perp^H\mathrm{H}$，$\mathrm{w} = \mathrm{J}_\perp^H\mathrm{n}$，且 $\mathrm{w}_l = \mathrm{J}_\perp^H\mathrm{n}_l$。w 和 w_l 的协方差矩阵分别为 $\mathrm{R}_{t\mathbf{J}_\perp} \triangleq \mathrm{J}_\perp^H\mathrm{R}_t\mathrm{J}_\perp$ 和 $\mathrm{R}_{\mathbf{J}_\perp} \triangleq \mathrm{J}_\perp^H\mathrm{R}\mathrm{J}_\perp$。

有趣的是，干扰在检验数据和训练数据中均被抑制（3）。此外，（3）中的检测问题与 [23]–[26]中的检测问题具有相同的结构。因此，我们可以利用 [23]–[26]中的结果，轻松推导出针对（3）中检测问题的广义似然比检验、Rao检验和Wald检验。由此得到的HE中的广义似然比检验、Rao检验和Wald检验分别称为ICBD-GLRT-HE、ICBD-Rao-HE和ICBD-Wald-HE。类似地，PHE中的广义似然比检验、Rao检验和Wald检验分别记为ICBD-GLRT-PHE、ICBD-Rao-PHE和ICBD-Wald-PHE。具体而言，根据 [23]–[25], [26] ，ICBD-GLRT-HE、ICBD-Rao-HE和ICBD-Wald-HE分别为

$$t_{\text{ICBD-GLRT-HE}} = \frac{\tilde{\mathbf{y}}^H\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{J}_\perp}}\tilde{\mathbf{y}}}{1 + \tilde{\mathbf{y}}^H\mathbf{P}^{\perp}_{\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{J}_\perp}}\tilde{\mathbf{y}}}, \tag{4}$$

$$t_{\text{ICBD-Rao-HE}} = \frac{\tilde{\mathbf{y}}^H\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{J}_\perp}}\tilde{\mathbf{y}}}{(1 + \tilde{\mathbf{y}}^H\tilde{\mathbf{y}})(1 + \tilde{\mathbf{y}}^H\mathbf{P}^{\perp}_{\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{J}_\perp}}\tilde{\mathbf{y}})}, \tag{5}$$

and

$$t_{\text{ICBD-Wald-HE}} = \tilde{\mathbf{y}}^H\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{J}_\perp}}\tilde{\mathbf{y}}, \tag{6}$$

分别地，其中 $\tilde{\mathrm{y}} = \mathrm{S}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{J}_\perp\mathrm{y}$，$\tilde{\mathrm{H}}_{\mathbf{J}_\perp} = \mathrm{S}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{J}_\perp\mathrm{H}_{\mathbf{J}_\perp}$，$\mathrm{P}^{\perp}_{\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{J}_\perp}} = \mathrm{I}_N - \mathrm{P}_{\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{J}_\perp}}$，$\mathrm{P}_{\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{J}_\perp}} = \tilde{\mathrm{H}}_{\mathbf{J}_\perp}(\tilde{\mathrm{H}}^H_{\mathbf{J}_\perp}\tilde{\mathrm{H}}_{\mathbf{J}_\perp})^{-1}\tilde{\mathrm{H}}^H_{\mathbf{J}_\perp}$，$\mathrm{S}_{\mathbf{J}_\perp} = \mathrm{J}_\perp^H\mathrm{S}\mathrm{J}_\perp$、$\mathrm{S} = \mathrm{X}_L\mathrm{X}_L^H$，以及 $\mathrm{X}_L = [\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, ..., \mathrm{x}_L]$。类似地，利用 [24], [27], [28], 中的结果，ICBD-GLRT-PHE、ICBD-Rao-PHE 和 ICBD-Wald-PHE 彼此一致，均可表示为

$$t_{\text{ICBD-GLRT-PHE}} = t_{\text{ICBD-Rao-PHE}} = t_{\text{ICBD-Wald-PHE}} = \frac{\tilde{\mathbf{y}}^H\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{J}_\perp}}\tilde{\mathbf{y}}}{\tilde{\mathbf{y}}^H\tilde{\mathbf{y}}}. \tag{7}$$

需要注意的是，L 不能太小。为确保 $\mathrm{S}_{\mathbf{J}_\perp}$ 不奇异，必须满足条件 $L \geq N - q$。

B. 基于ICBD的检测器的统计特性

Let

$$\beta_{\text{ICBD}} = (1 + \tilde{\mathbf{y}}^H\mathbf{P}^{\perp}_{\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{J}_\perp}}\tilde{\mathbf{y}})^{-1}, \tag{8}$$

这被称为基于ICBD的检测器的损失因子。利用公式 (4) 和 (8)，我们可以将公式 (5) 、 (6) 和 (7) 重写为

$$t_{\text{ICBD-Rao-HE}} = \frac{t_{\text{ICBD-GLRT-HE}}\beta_{\text{ICBD}}}{1 + t_{\text{ICBD-GLRT-HE}}}, \tag{9}$$

$$t_{\text{ICBD-Wald-HE}} = \frac{t_{\text{ICBD-GLRT-HE}}}{\beta_{\text{ICBD}}}, \tag{10}$$

and

$$t_{\text{ICBD-GLRT-PHE}} = \frac{t_{\text{ICBD-GLRT-HE}}}{1 - \beta_{\text{ICBD}} + t_{\text{ICBD-GLRT-HE}}}, \tag{11}$$

分别。

利用 [23], [25], 中的结果，我们可以证明，在给定 β_{ICBD} 的条件下，式 (4) 中基于 ICBD 的 GLRT-HE 服从一个具有 p 和 $L - N + q + 1$ 自由度（DOFs）的复非中心F分布，其非中心参数为

$$\rho_{\text{ICBD}} = \boldsymbol{\theta}^H\mathbf{H}^H\mathbf{J}_\perp(\mathbf{J}_\perp^H\mathbf{R}\mathbf{J}_\perp)^{-1}\mathbf{J}_\perp^H\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}, \tag{12}$$

定义为有效信噪比（eSNR）。在假设 H_1 下，ICBD-GLRT-HE 的条件分布符号表示为

$$t_{\text{ICBD-GLRT-HE}} \sim \mathcal{CF}_{p,L-N+q+1}(\rho_{\text{ICBD}}\beta_{\text{ICBD}}) \text{ under } \mathrm{H}_1, \tag{13}$$

在 H_0, 下，ICBD-GLRT-HE 的统计分布简化为

$$t_{\text{ICBD-GLRT-HE}} \sim \mathcal{CF}_{p,L-N+q+1} \text{ under } \mathrm{H}_0. \tag{14}$$

此外，应用 [23], [25], 中的结果，即可快速验证（8）中的损失因子服从具有 $L - N + p + q + 1$ 和 $N - p - q$ 个自由度的复中心Beta分布。

$$\beta_{\text{ICBD}} \sim \mathcal{CB}_{L-N+p+q+1,N-p-q} \text{ under } \mathrm{H}_1 \text{ and } \mathrm{H}_0. \tag{15}$$

利用式（13）、（14）和（15）中的统计分布，可以推导出 ICBD-GLRT-HE 的检测概率（PD）和虚警概率（PFA）的表达式。此外，根据式（9）–（11）中的统计依赖关系，以及式（13）、（14）和（15）中的统计分布，可以得到 ICBD-Rao-HE、ICBD-Wald-HE 和 ICBD-GLRT-PHE 的检测概率（PD）和虚警概率（PFA）。然而，由于篇幅限制，此处不提供检测概率和虚警概率的详细表达式。

除了非确定性参数 eSNR 之外，当训练数据数量充足且干扰仅出现在测试数据中时，式（4）中的 ICBD-GLRT-HE 的条件分布似乎与式（1）中的 GLRT-HE 相同。事实上，式（12）中的 ICBD-GLRT-HE 的 eSNR 等价于 GLRT-HE 的 eSNR，其表达式为

$$\rho_{\text{CON}} = \boldsymbol{\theta}^H \bar{\mathbf{H}}^H \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{J}}}^{\perp} \bar{\mathbf{H}} \boldsymbol{\theta}, \tag{16}$$

其中，$\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{H}$，$\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{J}}}^{\perp} = \mathbf{I}_N - \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{J}}}$，$\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{J}}} = \bar{\mathbf{J}}(\bar{\mathbf{J}}^H\bar{\mathbf{J}})^{-1}\bar{\mathbf{J}}^H$，以及 $\bar{\mathbf{J}} = \mathbf{R}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{J}$。(12) 式与 (16) 式相等的证明见附录A。

在训练数据充足且干扰仅存在于测试数据中的情况下，使用广义似然比检验、Rao检验和Wald检验开发的基于ICBD的检测器，实际上分别等同于对应的传统检测器。下一小节将讨论这一事实。

C. 训练数据充足且干扰仅存在于测试数据中时基于ICBD的检测器与传统检测器的等价性

当式 (1) 中的检测问题修改为 \($\mathbf{x}_l = \mathbf{n}_l$ and $L \geq N$\) 的情况时，HE 中的广义似然比检验、Rao检验和Wald检验为 [6], [12]

$$t_{\text{GLRT-HE}} = \frac{\tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{J}}}^{\perp}\tilde{\mathbf{H}}}\tilde{\mathbf{x}}}{1 + \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{J}}}^{\perp}\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{J}}}^{\perp}\tilde{\mathbf{H}}}\tilde{\mathbf{x}}}, \tag{17}$$

$$t_{\text{Rao-HE}} = \frac{\tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{J}}}^{\perp}\tilde{\mathbf{H}}}\tilde{\mathbf{x}}}{(1 + \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{J}}}^{\perp}\tilde{\mathbf{x}})(1 + \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{B}}}^{\perp}\tilde{\mathbf{x}})}, \tag{18}$$

and

$$t_{\text{Wald-HE}} = \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{J}}}^{\perp}\tilde{\mathbf{H}}}\tilde{\mathbf{x}}, \tag{19}$$

分别为，其中 $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x}$，$\tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{J}$，$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{J}}}^{\perp} = \mathbf{I}_N - \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{J}}}$，$\tilde{\mathbf{J}} = \tilde{\quad}$，$\tilde{\quad} = \tilde{\quad}$，$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{J}}} = \tilde{\mathbf{J}}(\tilde{\mathbf{J}}^H\tilde{\mathbf{J}})^{-1}\tilde{\mathbf{J}}^H$，$\tilde{\mathbf{B}}\,\mathbf{S}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{B}$, $\mathbf{B} = [\mathbf{H}\,\mathbf{J}]$, $\mathbf{P}\,\mathbf{B}\,\mathbf{B}(\mathbf{B}^H\tilde{\mathbf{B}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}}^H$, $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{B}}}^{\perp} = \mathbf{I}_N - \mathbf{P}$ -B, $\mathbf{H} = \mathbf{S}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{H}$, and $\mathbf{P}_{\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{J}}}^{\perp}\tilde{\mathbf{H}}} = \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{J}}}^{\perp}\tilde{\mathbf{H}}(\tilde{\mathbf{H}}^H\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{J}}}^{\perp}\tilde{\mathbf{H}})^{-1}\tilde{\mathbf{H}}^H\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{J}}}^{\perp}$. 对于式（1）中的问题，当 $\mathbf{x}_l = \mathbf{n}_l$ and $L \geq N$ 时，PHE 中的广义似然比检验、Rao检验和Wald检验彼此一致，结果为 [12]

$$t_{\text{GLRT-PHE}} = t_{\text{Rao-PHE}} = t_{\text{Wald-PHE}} = \frac{\tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{J}}}^{\perp}\tilde{\mathbf{H}}}\tilde{\mathbf{x}}}{\tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{J}}}^{\perp}\tilde{\mathbf{x}}}, \tag{20}$$

为证明当 $\mathbf{x}_l = \mathbf{n}_l$ 和 $L \geq N$ 时，基于检测前干扰抵消的检测器与传统检测器等价，我们分别需要证明式 (4)-(7)和式(17)-(20)相等。详细证明见附录B。

当电子支援措施（ESM）预先获得干扰矩阵 J 时，基于ICBD的检测器的主要计算复杂度是维度为 $(N-q)\times(N-q)$ 的矩阵求逆，而式（17）—（20）中的传统检测器的主要计算复杂度是维度为 $N \times N$ 的矩阵求逆。因此，基于ICBD的检测器的计算复杂度低于传统检测器。此外，当训练数据的数量小于测试数据的维度时，基于ICBD的检测器仍能运行，即，

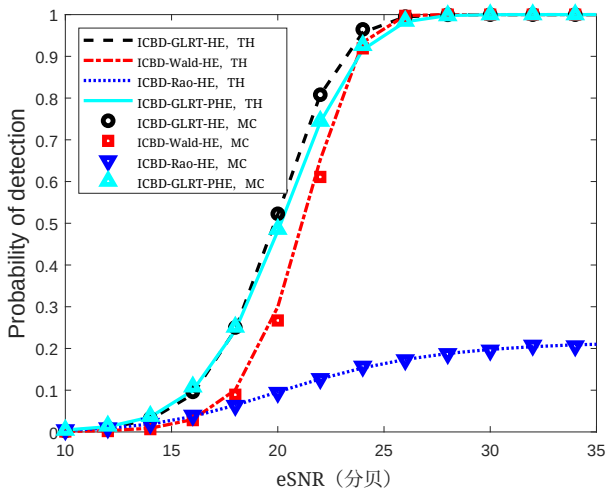


图1：所提出检测器在不同 eSNR 下的检测概率。

$L < N$，而式（17）—（20）中的传统检测器则无法做到这一点，因为传统样本协方差矩阵 S 是奇异的。然而，基于ICBD的检测器需要 $L \geq N - q$，以确保变换后的样本协方差矩阵 $\mathbf{S}_{\mathbf{J}^{\perp}}$ 非奇异。

IV. 数值示例

我们通过一个数值示例来说明所提出的检测器在样本匮乏场景下的检测性能。为简单起见，我们仅考虑 HE 情况。为了展示所提出的检测器在样本匮乏场景下的检测性能，我们给出了一个数值示例。在蒙特卡罗仿真中，我们设置 $\mathbf{R}(i,j) = \epsilon^{|i-j|^2}$，$10^4$，并进行 $100/$ 次独立试验，分别计算 PFA 和检测概率。其余参数为：$N = 24$, $L = 23$, $p = 2$, $q = 6$, $\sin^2\psi = 0.9$, $\cos^2\vartheta = 1$, $\epsilon = 0.95$，以及 PFA $= 10^{-4}$，其中 $\sin^2\psi$ 和 $\cos^2\vartheta$ 分别在 [29] 的式 (73) 和式 (74) 中定义。我们选择 $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 a$, $\boldsymbol{\theta}_0$，并随机生成 $\boldsymbol{\phi}$。然而，生成后，$\boldsymbol{\theta}_0$ 和 $\boldsymbol{\phi}$ 保持固定。常数 a 根据给定的 eSNR 进行选取。

理论结果和仿真结果分别用图例“TH”和“MC”表示。图1的结果表明，理论发现与蒙特卡罗仿真结果吻合良好。在所有检测器中，ICBD-GLRT-HE的检测性能最佳。图1中还观察到两个值得关注的发现：一是当eSNR低于23.7分贝时，ICBD-GLRT-PHE的检测概率高于ICBD-Wald-HE；二是ICBD-Rao-HE的检测概率极低。

V. 结论

在包含干扰的训练数据有限时，我们提出了 ICBD 技术，用于在干扰和噪声中检测信号。干扰抑制和传统自适应检测器设计构成了 ICBD 技术的两个基本组成部分。在训练数据充足且不含干扰的特殊情况下，

ICBD-GLRT-HE、ICBD-Rao-HE、ICBD-Wald-HE 和 ICBD-GLRT-PHE 分别等价于 GLRT-HE、Rao-HE、Wald-HE 和 GLRT-PHE。然而，在训练数据有限的一般场景下，基于ICBD的检测器能够正常工作。此外，在上述特殊场景下，基于ICBD的检测器的计算开销低于传统检测器。数值示例表明，ICBD-GLRT-HE 的检测概率最高。但是，为确保变换后的样本协方差矩阵非奇异，训练数据的数量应不少于 $N-q$。

未来的研究工作可以包括将这些结果推广到分布式目标的情形，或对干扰子空间的知识不准确的情形。

Appendix A
Proof of the Equality of (12) and (16)

为证明式（12）和式（16）相等，我们需要证明

$$\mathbf{R}^{-1}-\mathbf{R}^{-1}\mathbf{J}_u(\mathbf{J}_u^H\mathbf{R}^{-1}\mathbf{J}_u)^{-1}\mathbf{J}_u^H\mathbf{R}^{-1}=\mathbf{J}_\perp(\mathbf{J}_\perp^H\mathbf{R}\mathbf{J}_\perp)^{-1}\mathbf{J}_\perp^H, \tag{21}$$

其中 $\mathrm{J}_u=\mathrm{J}(\mathrm{J}^H\mathrm{J})^{-\frac{1}{2}}$。不难验证。

$$\mathbf{U}^H\mathbf{J}_u=\mathbf{E}_q=[\mathbf{I}_q,\mathbf{0}_{q\times(N-q)}]^T, \tag{22}$$

$$\mathbf{U}^H\mathbf{J}_v=\mathbf{V}_{N-q}=[\mathbf{0}_{(N-q)\times q},\mathbf{I}_{N-q}]^T, \tag{23}$$

其中，$\mathrm{U}=[\mathrm{J}_u,\mathrm{J}_\perp]$。分别在式（21）的左侧和右侧乘以 U^H 和 U，并利用式（22）和式（23），可得

$$\begin{aligned}&\mathbf{R}_{\mathbf{U}}^{-1}-\mathbf{R}_{\mathbf{U}}^{-1}\mathbf{E}_q(\mathbf{E}_q^H\mathbf{R}_{\mathbf{U}}^{-1}\mathbf{E}_q)^{-1}\mathbf{E}_q^H\mathbf{R}_{\mathbf{U}}^{-1}\\&\quad=\mathbf{V}_{N-q}(\mathbf{V}_{N-q}^H\mathbf{R}_{\mathbf{U}}\mathbf{V}_{N-q})^{-1}\mathbf{V}_{N-q}^H,\end{aligned} \tag{24}$$

其中 \(R_U = U_^H RU\)。根据式（23），式（24）的右端还可以进一步表示为

$$\mathbf{V}_{N-q}(\mathbf{V}_{N-q}^H\mathbf{R}_{\mathbf{U}}\mathbf{V}_{N-q})^{-1}\mathbf{V}_{N-q}^H=\mathbf{G}, \tag{25}$$

其中，$\mathrm{G}=\left[\mathbf{0}_{q,q},\ \mathbf{0}_{q,N-q};\mathbf{0}_{N-q,q}、\ \mathrm{R}_{22}^{-1}\right]$、$\mathrm{R}_{22}$ 分别为$\mathrm{R}_{\mathbf{U}}$的最后 $N-q$ 行和 $N-q$ 列。根据分块矩阵求逆公式 [30, p.1350],, 我们有

$$\mathbf{R}_{\mathbf{U}}^{-1}-\mathbf{R}_{\mathbf{U}}^{-1}\mathbf{E}_q(\mathbf{E}_q^H\mathbf{R}_{\mathbf{U}}^{-1}\mathbf{E}_q)^{-1}\mathbf{E}_q^H\mathbf{R}_{\mathbf{U}}^{-1}=\mathbf{G}. \tag{26}$$

因此，式（21）得证。证明至此完成。

附录B
式（4）–（7）与式（17）–（20）等式的证明

我们依次证明式（6）与式（19）、式（4）与式（17）、式（5）与式（18）、式（7）与式（20）相等。为证明式（6）与式（19）相等，我们需要证明

$$\mathbf{S}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{P}_{\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{J}}}^{\perp}\tilde{\mathbf{H}}}\mathbf{S}^{-\frac{1}{2}}=\mathbf{J}_\perp\mathbf{S}_{\mathbf{J}_\perp}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{J}_\perp}}\mathbf{S}_{\mathbf{J}_\perp}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{J}_\perp^H. \tag{27}$$

为此，我们先证明以下等式

$$\mathrm{Ker}(\widehat{\mathbf{J}}_\perp^H)=<\tilde{\mathbf{J}}>, \tag{28}$$

其中 $\widehat{\mathrm{J}}_\perp=\mathrm{S}^{\frac{1}{2}}\mathrm{J}_\perp$，$\mathrm{Ker}<\cdot>$表示零空间。注意，若 $<\widehat{\mathrm{J}}_\perp>^\perp=<\tilde{\mathrm{J}}>$，即 $<\mathrm{S}^{\frac{1}{2}}\mathrm{J}_\perp>^\perp=<\mathrm{S}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{J}>$，则式 (28) 成立，其中 $<\cdot>^\perp$表示正交补。令 $\mathrm{t}\in<\mathrm{S}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{J}>$且 $\mathrm{z}\in<\mathrm{S}^{\frac{1}{2}}\mathrm{J}_\perp>$。那么存在两个向量 x_1和 x_2，使得 $\mathrm{t}=\mathrm{S}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{J}\mathrm{x}_1$且 $\mathrm{z}=\mathrm{S}^{\frac{1}{2}}\mathrm{J}_\perp\mathrm{x}_2$。因此，$\mathrm{t}^H\mathrm{z}=\mathrm{x}_1^H\mathrm{J}^H\mathrm{S}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{S}^{\frac{1}{2}}\mathrm{J}_\perp\mathrm{x}_2=0$。于是，$<\mathrm{S}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{J}>\subseteq<\mathrm{S}^{\frac{1}{2}}\mathrm{J}_\perp>^\perp$。反过来，设 $\mathrm{z}\in<\mathrm{S}^{\frac{1}{2}}\mathrm{J}_\perp>^\perp$，则 $\mathrm{z}^H\mathrm{S}^{\frac{1}{2}}\mathrm{J}_\perp=\mathbf{0}_{(N-q)\times1}^T$。定义 $\mathrm{F}=\mathrm{S}^{-\frac{1}{2}}[\mathrm{J},\ \mathrm{J}_\perp]$，它可以张成整个空间。由此可知，存在两个列向量 x_3和 x_4，使得 $\mathrm{z}=\mathrm{F}[\mathrm{x}_3^T,\ \mathrm{x}_4^T]^T=\mathrm{S}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{J}\mathrm{x}_3+\mathrm{S}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{J}_\perp\mathrm{x}_4$。将上述恒等式左乘 $\mathrm{J}_\perp^H\mathrm{S}^{\frac{1}{2}}$，并结合 $\mathrm{z}^H\mathrm{S}^{\frac{1}{2}}\mathrm{J}_\perp=\mathbf{0}_{(N-q)\times1}^T$和 $\mathrm{J}^H\mathrm{J}_\perp=\mathbf{0}_{q\times(N-q)}$，得到 $\mathrm{J}_\perp^H\mathrm{J}_\perp\mathrm{x}_4=\mathbf{0}_{(N-q)\times1}$。因此，$\mathrm{x}_4=\mathbf{0}_{(N-q)\times1}$和 $\mathrm{z}=\mathrm{S}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{J}\mathrm{x}_3$。所以，$<\mathrm{S}^{\frac{1}{2}}\mathrm{J}_\perp>^\perp\subseteq<\mathrm{S}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{J}>$。这就完成了对式 (28) 的证明。由式 (28) 可知，

$$\mathbf{P}_{\widehat{\mathbf{J}}_\perp}=\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{J}}}^{\perp}. \tag{29}$$

因此，式（27）的左侧可展开为

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{P}_{\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{J}}}^{\perp}\tilde{\mathbf{H}}}\mathbf{S}^{-\frac{1}{2}}&=\mathbf{S}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{P}_{\widehat{\mathbf{J}}_\perp}\mathbf{S}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{H}\\&\cdot(\mathbf{H}^H\mathbf{S}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{P}_{\widehat{\mathbf{J}}_\perp}\mathbf{S}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^H\mathbf{S}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{P}_{\widehat{\mathbf{J}}_\perp}\mathbf{S}^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{30}$$

（27）式的右端可以改写为

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_\perp\mathbf{S}_{\mathbf{J}_\perp}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{J}_\perp}}\mathbf{S}_{\mathbf{J}_\perp}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{J}_\perp^H&=\mathbf{J}_\perp(\widehat{\mathbf{J}}_\perp^H\widehat{\mathbf{J}}_\perp)^{-1}\mathbf{J}_\perp^H\mathbf{H}\\&\cdot[\mathbf{H}^H\mathbf{J}_\perp(\widehat{\mathbf{J}}_\perp^H\widehat{\mathbf{J}}_\perp)^{-1}\mathbf{J}_\perp^H\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^H\mathbf{J}_\perp(\widehat{\mathbf{J}}_\perp^H\widehat{\mathbf{J}}_\perp)^{-1}\mathbf{J}_\perp^H.\end{aligned} \tag{31}$$

根据$\widehat{\mathrm{J}}_\perp$的定义（见式（28）下方一行），可知式（31）等于式（30）。至此，式（19）与式（6）相等的证明完成。

接下来，我们证明 (4) 和 (17) 相等。分别在 (27) 左右两侧预乘 x^H 并后乘 x，得到

$$\tilde{\mathbf{y}}^H\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{J}_\perp}}\tilde{\mathbf{y}}=\tilde{\mathbf{x}}^H\mathbf{P}_{\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{J}}}^{\perp}\tilde{\mathbf{H}}}\tilde{\mathbf{x}}. \tag{32}$$

此外，根据 \(y\) 的定义，我们有

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{y}}^H\tilde{\mathbf{y}}&=\mathbf{x}^H\mathbf{J}_\perp(\mathbf{J}_\perp^H\mathbf{S}\mathbf{J}_\perp)^{-1}\mathbf{J}_\perp^H\mathbf{x}\\&=\tilde{\mathbf{x}}^H\mathbf{S}^{\frac{1}{2}}\mathbf{J}_\perp(\mathbf{J}_\perp^H\mathbf{S}\mathbf{J}_\perp)^{-1}\mathbf{J}_\perp^H\mathbf{S}^{\frac{1}{2}}\tilde{\mathbf{x}}\\&=\tilde{\mathbf{x}}^H\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{J}}}^{\perp}\tilde{\mathbf{x}},\end{aligned} \tag{33}$$

其中，我们使用了式（29）。将式（33）从式（32）中相减，得到

$$\tilde{\mathbf{y}}^H\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{J}_\perp}}^{\perp}\tilde{\mathbf{y}}=\tilde{\mathbf{x}}^H\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{J}}}^{\perp}\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{x}}^H\mathbf{P}_{\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{J}}}^{\perp}\tilde{\mathbf{H}}}\tilde{\mathbf{x}}. \tag{34}$$

至此，式（4）与式（17）的相等性得证。

利用（27）和（33）可以证明（5）与（18）相等，而利用（27）、（33）和（34）可以证明（7）与（20）相等。

参考文献

[1] M. Tang、Y. Rong、A. De Maio、C. Chen 和 J. Zhou，《基于不变性理论的结构化协方差矩阵高斯扰动中的自适应雷达检测》，IEEE 信号处理汇刊，第 67 卷，第 21 期，第 5671–5685 页，2019 年。[2] Y. Rong、A. Aubry、A. De Maio 和 M. Tang，《基于不变性理论的低秩异质杂波自适应雷达检测》，IEEE 信号处理汇刊，第 69 卷，第 1492–1506 页，2021 年。[3] W. Liu、J. Liu、C. Hao、Y. Gao 和 Y.-L. Wang，《多通道自适应信号检测：基础理论与文献综述》，《中国科学：信息科学》，第 65 卷，第 2 期，文章编号 121301，2022 年。[4] L. L. Scharf 和 B. Friedlander，《匹配子空间检测器》，IEEE 信号处理汇刊，第 42 卷，第 8 期，第 2146–2156 页，1994 年。[5] F. Bandiera、O. Besson、D. Orlando、G. Ricci 和 L. L. Scharf，《齐次噪声与子空间干扰中的基于广义似然比检验的方向检测器》，IEEE 信号处理汇刊，第 55 卷，第 6 期，第 2386–2394 页，2007 年。

[6] F. Bandiera、A. De Maio、A. S. Greco 和 G. Ricci，《齐次及部分齐次噪声与子空间干扰中的分布式目标自适应雷达检测》，IEEE 信号处理汇刊，第 55 卷，第 4 期，第 1223–1237 页，2007 年。[7] W. Liu、J. Liu、L. Huang、D. Zou 和 Y. Wang，《干扰与噪声中的分布式目标检测 Rao 检验》，《信号处理》，第 117 卷，第 333–342 页，2015 年。[8] W. Liu、J. Liu、H. Li、Q. Du 和 Y. Wang，《子空间干扰与高斯噪声中的基于 Wald 检验的多通道信号检测》，IEEE 航空航天与电子系统汇刊，第 55 卷，第 3 期，第 1370–1381 页，2019 年。[9] P. Schniter 和 E. Byrne，《低秩干扰中的结构化信号自适应检测》，IEEE 信号处理汇刊，第 67 卷，第 13 期，第 3439–3454 页，2019 年。[10] M. Fazlollahpoor、M. Derakhtian 和 S. Khorshidi，《具有直达路径干扰的无源 MIMO 雷达 Rao 检测器》，IEEE 航空航天与电子系统汇刊，第 56 卷，第 4 期，第 2999–3009 页，2020 年。[11] L. Yan、P. Addabbo、C. Hao、D. Orlando 和 A. Farina，《针对类噪声和/或相干干扰机的新型电子对抗技术》，IEEE 航空航天与电子系统汇刊，第 56 卷，第 2 期，第 1172–1188 页，2020 年。[12] M. Sun、W. Liu、J. Liu 和 C. Hao，《相干干扰中的目标检测 Rao 检验与 Wald 检验》，IEEE 航空航天与电子系统汇刊，第 58 卷，第 3 期，第 1906–1921 页，2022 年。[13] M. Sun、W. Liu、J. Liu、P. Tang 和 C. Hao，《基于梯度检验的正交干扰自适应子空间检测》，IEEE 航空航天与电子系统汇刊，第 58 卷，第 3 期，第 1868–1877 页，2022 年。[14] I. P. Kirsteins 和 D. W. Tufts，《利用数据矩阵低秩近似进行自适应检测》，IEEE 航空航天与电子系统汇刊，第 30 卷，第 1 期，第 55–67 页，1994 年。[15] Y.-L. Gau 和 I. S. Reed，《一种改进的降秩 CFAR 空时自适应雷达检测算法》，IEEE 信号处理汇刊，第 46 卷，第 8 期，第 2139–2146 页，1998 年。[16] A. De Maio、S. M. Kay 和 A. Farina，《广义似然比检验、Rao检验与Wald检验的不变性、重合性及统计等价性》，IEEE 信号处理汇刊，第 58 卷，第 4 期，第 1967–1979 页，2010 年。[17] W. Liu、Y. Wang 和 W. Xie，《复值信号的 Fisher 信息矩阵、Rao检验与Wald检验及其应用》，《信号处理》，第 94 卷，第 1–5 页，2014 年。[18] S. Kay 和 Z. Zhu，《复参数 Rao 检验》，IEEE 信号处理汇刊，第 64 卷，第 4 期，第 6580–6588 页，2016 年。[19] A. Aubry、A. De Maio、D. Orlando 和 M. Piezzo，《齐次杂波与子空间干扰中的点状目标自适应检测》，IEEE 信号处理快报，第 21 卷，第 7 期，第 848–852 页，2014 年。[20] E. J. Kelly，《一种自适应检测算法》，IEEE 航空航天与电子系统汇刊，第 22 卷，第 1 期，第 115–127 页，1986 年。[21] E. Conte、A. De Maio 和 G. Ricci，《基于广义似然比检验的距离扩展目标自适应检测算法》，IEEE 信号处理汇刊，第 49 卷，第 7 期，第 1336–1348 页，2001 年。[22] G. A. F. Seber，《统计学家矩阵手册》。新泽西州霍博肯：Wiley-Interscience，2008 年。[23] R. S. Raghavan、N. Pulsone 和 D. J. McLaughlin，《自适应向量子空间检测中广义似然比检验的性能》，IEEE 航空航天与电子系统汇刊，第 32 卷，第 4 期，第 1473–1487 页，1996 年。[24] S. Kraut 和 L. L. Scharf，《自适应子空间检测器》，IEEE 信号处理汇刊，第 49 卷，第 1 期，第 1–16 页，2001 年。[25] D. Pastina、P. Lombardo 和 T. Bucciarelli，《相干雷达自适应极化目标检测（第一部分）：针对高斯背景的检测》，IEEE 航空航天与电子系统汇刊，第 37 卷，第 4 期，第 1194–1206 页，2001 年。[26] W. Liu、W. Xie、J. Liu 和 Y. Wang，《高斯背景中的自适应双子空间信号检测——第一部分：齐次环境》，IEEE 信号处理汇刊，第 62 卷，第 9 期，第 2345–2357 页，2014 年。[27] A. De Maio 和 S. Iommelli，《部分齐次环境中 Rao检验、Wald检验与广义似然比检验的重合性》，IEEE 信号处理快报，第 15 卷，第 385–388 页，2008 年。[28] W. Liu、W. Xie、J. Liu 和 Y. Wang，《高斯背景中的自适应双子空间信号检测——第二部分：部分齐次环境》，IEEE 信号处理汇刊，第 62 卷，第 9 期，第 2358–2369 页，2014 年。[29] W. Liu、J. Liu、L. Huang、C. Hao 和 Y.-L. Wang，“子空间干扰和高斯噪声中点目标自适应检测器的性能分析”，IEEE 航空航天与电子系统汇刊，第 54 卷，第 1 期，第 429–441 页，2018 年。[30] H. L. Van Trees，《检测、估计与调制理论》第四部分：最优阵列处理。纽约：Wiley，2002 年。