arXiv:2304.07012v2 [math.QA] 3 May 2023

浅谈 Drinfel'd结合子 S

Martin Bordemann、Andrea Rivezzi 和 Thomas Weigel

摘要

本文介绍由 Knizhnik-Zamolodchikov 联络产生的 Drinfel’d 结合子，并以自成一体的方式证明六边形方程和五边形方程。证明只需极少的分析或微分几何知识：我们采用的是具体平行移动的极限。

目录

引言 1

1 一些分析 形式平行传输的分析 5
1.1 分段 $\mathcal{C}^\infty$-函数的初等分析.5 1.2 形式线性常微分方程.8 1.3 范数与极限.12 1.4 形式联络与平行传输.18 1.5 平坦形式连接.23

2 Drinfel'd结合子及其恒等式 24
2.1 Knizhnik-Zamolodchikov 联络与 Drinfel’d-Kohno（李）代数.24 2.2 Drinfel'd结合子：定义与基本性质 27 2.3 六边形方程.32 2.4 五边形方程.38

A 部分定 第1.4节定理的证明 9
A.1 命题 10 的证明.49 A.2 命题12 的证明.49 A.3 定理 13 的证明.50 A.4 推论 14 的证明.51

2020 年数学主题分类：16T05、16W60、34M25、53B05。关键词：Drinfel'd 结合子、五边形方程、六边形方程、Knizhnik-Zamolodchikov 联络、平行传输。

引言

本文不包含 20 世纪 90 年代中期以来的任何新结果，而是旨在以一种教学性的方式介绍 V.G. Drinfel'd 关于结合子 Φ（借助 Knizhnik-Zamolodchikov 联络构造）满足六边形方程和五边形方程的著名工作，参见 [8] 和 [9]。

自问世以来，Drinfel'd 结合子已在许多重要领域得到应用，例如 P.I.Etingof 和 D.A.Kazhdan 对李双代数量子化问题的解决 [12]（1996 年）（另见 P. ˇSevera 的工作 [30]（2016 年））、D.E.Tamarkin 将其用于 M.L.Kontsevich 变形量子化形式性定理 [24]（1997 年）的方法[32]（1999 年），以及 B.Enriquez 和 G.Halbout 对李拟双代数量子化问题的解决 [10] 和 [11]（2010 年，另见 [29]）。此外，将结合子视为由两个不同元素生成的自由代数中的形式幂级数时，其系数与多重ζ值直接相关，参见例如 [13, 第 209 页-213], ，从而建立了与数论的重要联系。

本工作的目的是详细阐述——我们希望是自成一体的——如何定义由 Knizhnik-Zamolodchikov 联络导出的特定结合子，以及如何证明六边形方程和五边形恒等式。简而言之，这意味着：设 $\mathcal{A}$ 是任意一个复含幺结合代数。对于任意给定的元素 $A, B \in \mathcal{A}$，Drinfel'd 结合子 $\Phi(A, B)$ 是一个可逆的形式幂级数，其系数是关于 A, B 的非交换多项式（形式参数为 λ）；我们假设 $\Phi(A, B)^{-1} = \Phi(B, A)$，并且它在以下情境中满足两个恒等式：对于一个正整数 $n \geqslant 2$， $\mathcal{A}$ 中由元素组成的有限族 $(A_{ij})_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n}$ 满足无穷小辫群关系，当且仅当

$$A_{ij} - A_{ji} = 0 \qquad \forall\, 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, \tag{0.1a}$$

$$[A_{ij} + A_{ik}, A_{jk}] = 0 \qquad \forall i, j, k \in \{1, \dots, n\} \text{ such that } \#\{i, j, k\} = 3, \tag{0.1b}$$

$$[A_{ij}, A_{kl}] = 0 \qquad \forall i, j, k, l \in \{1, \dots, n\} \text{ such that } \#\{i, j, k, l\} = 4. \tag{0.1c}$$

Φ 的六边形方程是关于 $n = 3$ 的如下恒等式,

$$e^{\lambda \mathbf{i} \pi (A_{13} + A_{23})} \;=\; \Phi\left(A_{13}, A_{12}\right)\, e^{\lambda \mathbf{i} \pi A_{13}}\, \Phi\left(A_{23}, A_{13}\right)\, e^{\lambda \mathbf{i} \pi A_{23}}\, \Phi\left(A_{12}, A_{23}\right), \tag{0.2}$$

而对于 Φ，五边形方程是关于 $n = 4$ 的以下恒等式,

$$\Phi\left(A_{12}, A_{23} + A_{24}\right)\, \Phi\left(A_{13} + A_{23}, A_{34}\right) = \Phi\left(A_{23}, A_{34}\right)\, \Phi\left(A_{12} + A_{13}, A_{24} + A_{34}\right)\, \Phi\left(A_{12}, A_{23}\right). \tag{0.3}$$

求解并非易事：例如，朴素地取 $\Phi(A, B) = 1$ 虽然能满足五边形方程，但对于不交换的 A_{13}, A_{23}，显然无法满足六边形方程。

我们仅提及以下非详尽的重要成果列表，而不作任何讨论：存在有理结合子，参见 [8], [9], 以及 Bar-Natan 的工作， [3] (1998)。A.Y.Alekseev、B.Enriquez、C.Torossian [1](2010) 构造了其他与 Kashiwara-Vergne 猜想相关的结合子。此外，五边形方程的非平凡解会自动满足某个

六边形方程，参见 H.Furusho 的工作[15]。

Drinfel'd 最初的方法，见 [8], [9], ，另见例如 [18], [13], ，是比较线性系统（一个一阶线性偏微分方程）的不同全局解（定义于 $\mathbb{R}^N$ 的某些单连通区域内）在某些复超平面或实超平面处的极点结构；这称为"单值化"，另见 T.Kohno 的著作 [22]。这一方法部分受到奇异微分方程理论的启发，可比较例如 [5] 或 [7]。从微分几何的角度来看，这相当于计算一个平凡向量丛中关于平坦联络的协变常值截面，这些截面由其在给定点处的取值唯一确定。

据我们所知，文献中关于 Drinfel'd结合子及其恒等式的大多数论述都有些粗略。起初，我们并不清楚要理解其中的细节究竟需要多少分析学知识：例如，我们曾被类似'$z^{\lambda B}$'这样的符号弄糊涂——其中 z 是复平面某个开域中的复坐标，而 B 是给定结合代数中的形式级数——这些符号出现在一些文本中，却没有得到解释，而且似乎需要对复对数作适当处理。它们类似于"多值函数"，而根据 Deligne（见 [7,第37页，D´ef. 6.2.]），这类函数应定义在该域的万有覆盖上；然而，即使在双重穿孔平面这一重要情形下，万有覆盖似乎也不易用于计算。对我们来说，另一个难点是理解 Drinfel'd 的"区域"所编码的极限过程的细节；这一过程尤其用于证明五边形方程。

我们选择了一种稍微基础一些的方法，只需要初步的分析知识；我们希望，这种方法甚至会令最不喜欢分析的代数学家感兴趣：由于某点 x处的协变常值截面（线性系统的解）的取值，可以通过沿连接参考点与 x的连续分段光滑路径进行平行移动来定义，因此我们认为，重点研究形式平行传输是合理的（在给定的带幺复结合代数 $\mathcal{A}[[\lambda]]$中的所有形式幂级数构成的代数里）；也就是说，研究沿具体的连续分段光滑路径的一阶常微分方程，这些路径位于明确给定的 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}^2$ 的可缩区域内，并且相对于某个源自 Knizhnik-Zamolodchikov 联络的平坦形式连接。然而，在 Drinfel'd 的方法中，"参考点"在某种意义上"位于一个奇异点"；为捕捉这一点，我们采用众所周知的正则化过程：首先，让定义域内的路径依赖于一个严格为正的"小"参数 δ，使得在极限$\delta \to 0$ 中，这些依赖于 δ的路径 c_δ 会被推向这些区域的边界，在那里联络变为奇异。然后，我们在定义域内计算依赖于 δ的平行传输；在该定义域内，一如既往，路径复合对应于相应平行传输在 $\mathcal{A}[[\lambda]]$中的乘法。我们将会发现，每个这样的平行传输 $W^{(c_\delta)}$ 都可以分解为可逆形式幂级数的乘积，形式如下

$$W^{(c_\delta)} = S^{(c_\delta)} G^{(c_\delta)} H^{(c_\delta)} \tag{0.4}$$

其中 $S^{(c_\delta)}$ 是"奇异"的，也就是说，当 $\delta \to 0$ 时，它会按 $|\ln(\delta)|$ 的幂次发散； $G^{(c_\delta)}$ 是"良好"的，

也就是说，当 $\delta \to 0$ 时，它会收敛到所需项；而 $H^{(c_\delta)}$ 是“无害”的，也就是说，当 $\delta \to 0$ 时它会收敛到 1，其中与 $\lambda^n, n > 0$ 成正比的项在 $\delta^\beta, \beta > 0$ 时趋于零，且受某个“幂律”支配。事实证明，无害项在与奇异项共轭时保持稳定。由于所用联络的平坦性，沿着具有相同起点和终点的不同（复合）路径进行的平行移动相等；例如，著名的 Knizhnik-Zamolodchikov 联络便是如此，由此导出代数恒等式：在所有重要的恒等式中，对于所有严格为正的 δ，奇异项都会相互抵消，而剩余项则在 $\delta \to 0$ 的极限下给出所需的恒等式。

本文的结构如下： §1 是对 $\mathbb{R}^N$ 开子集上（形式）线性平行输运的介绍，旨在明确阐述 §2 中所用的方法；该文讨论了 Drinfel’d 结合子及其六边形恒等式和五边形恒等式。

我们在 §1.1中回顾分段 $\mathcal{C}^\infty$ 函数的分析（这里特指只有有限个间断点，且在这些点左右极限均存在的情形）：事实证明，将它们视为仅定义在定义区间去掉有限个奇点后所得开子集上的函数颇为有用；除非函数在奇点处连续，否则不为这些点定义函数值。我们认为，介绍这类函数的一些细节可能会有所帮助，因为之后按照代数拓扑的意义复合光滑路径时，复合路径仍然连续，但通常只在拼接点处分段光滑；例如参见 [21, 第71页, 命题3.3]。分段情形下存在一个与微积分基本定理完全类似的定理，这并不令人意外，参见定理1。

在 §1.2 中，我们简要回顾某些形式线性常微分方程（这是 K.-T. Chen 经典工作的一个特例 [4]），这些方程由任意含幺结合代数$\mathcal{A}$上所有形式幂级数空间中的左乘法定义。

$$\frac{\mathrm{d}W_{\cdot\alpha}}{\mathrm{d}s} = \lambda Y W_{\cdot\alpha} \quad \text{and} \quad W_{\alpha\alpha} = 1$$

其中 Y 是一个适当的形式幂级数，其系数是分段 $\mathcal{C}^\infty$函数，取值于 $\mathcal{A}$：这里每个分量 $Y_r, r \in \mathbb{N}$ 都属于区间上复值分段光滑函数代数与 $\mathcal{A}$ 的代数张量积。由于形式参数的存在，解 $s \mapsto W_{s\alpha}$ （要求连续）的存在唯一性理论相当初等且具有代数性质，无需在 $\mathcal{A}$ 上引入任何额外的拓扑结构。用众所周知的迭代积分来表述（见 (1.14)）是自动得到的，而与“向量场” Y 及其关于重参数化的“传播子” $W_{\beta\alpha}$ 之间的关系则在命题 2 中加以总结。

§1.3 致力于建立一个简单的框架，以考察向量场 Y依赖一个或多个非形式的“小”参数 $\boldsymbol{\delta} = (\delta, \epsilon, \ldots)$ 时传播子 $\mathcal{A}$ 的极限：对于这些极限，在复向量空间 $\mathcal{A}$ （通常它并非赋范代数）上任意选取一种范数，且可能存在许多彼此不等价的范数。不过，对于形式参数的每次幂，极限都将分别进行；而且，受限标架的选择至关重要，在该标架中考虑 Y，进而考虑 W，从而对于形式参数的每次幂，由所有相关系数张成的 $\mathcal{A}$ 子空间始终是有限维的，因此所选范数在这些子空间上的限制

众所周知，它等价于将任何其他范数限制在 $\mathcal{A}$ 的相同子空间上。这使我们能够定义与代数结构相容的极限 $\delta、\epsilon \to 0$，且其定义不依赖于在 $\mathcal{A}$ 上所选择的范数，参见命题 3。我们还给出了参数依赖元素子空间的定义及其若干性质：该子空间中的元素的范数（逐阶而言）由参数的幂或其对数的幂所控制，参见命题 4 和引理 7。这对于精确定义因式分解方程 (0.4) 中出现的各项将变得十分重要。

最后两节 §1.4 和 §1.5 讨论形式线性联络 Γ（定义在平凡丛上），它将给定的连续分段光滑路径与形式线性常微分方程联系起来：其传播子是微分几何中众所周知的平行移动，参见例如 [21, p.68]。我们回顾它们在重参数化下的不变性、相对于路径复合的乘法性，以及与拉回的简单关系，参见定理 9。若联络是平坦的（参见例如 [21, p.92]），则在 $\mathbb{R}^N$ 的星形开集中，平行移动与路径无关。我们详细给出这些定理的证明（参见定理 13、引理 25 和推论 14），并在附录中讨论它们与复坐标的关系。

在第二部分中，我们回顾 Drinfel'd-Kohno（李）代数、复构形空间 Y_n，以及 §2 中的 Knizhnik-Zamolodchikov 联络。在 §2.2 中，我们将 Drinfel'd结合子定义为从 $\delta > 0$ 到 $1-\epsilon < 1$、带有 $0 < \delta, \epsilon \leqslant \frac{1}{4}$ 的开单位区间上的平行移动的非奇异部分：这一思路源自 [18, p.465], 中的量 $G_a(1-a)$（对于 $0 < a < 1$）。我们在定理 20 中证明分解方程（见 [18, p.465，引理 XIX.6.3]）：我们采用一种技巧，将路径 $\delta \to 1-\epsilon$ 分成两半（使用中点 $1/2$），并以“指数方式”进行参数化，从而得到平行移动的两个“平方根”，每个平方根都只有一个奇异因子，见引理19；它们出乎意料地容易估计。根据平行传输的参数化不变性，这便得到 Drinfel’d 的原始定义 [9, p.833，方程 (2.1)]。事实证明，在稍后证明六边形和五边形恒等式时，使用两个参数很有帮助：这将在第 §2.3 节和第 §2.4 节完成。

关于六边形方程的证明，参见 §2 中的 (0.2) 和 (2.27)。在 §2.3 中，选取从 Y_3 拉回到双重穿孔平面 $\mathbb{C}^{\times\times}$ 上的 Knizhnik-Zamolodchikov 联络，并考察沿着一个环路的平行移动；该环路依赖于小参数 δ，位于上半平面的补集中，由三条线段和三个下半圆组成。利用双重穿孔平面的一种循环对称性（由三个简单明确的复有理函数给出），我们只需计算沿其中一个半圆的平行移动，它等于一个指数函数乘以一个在 $\delta \to 0$ 时趋于 1 的“无害”项；而沿线段的平行传输则给出结合子和奇异项，后者被证明会在方程中相互抵消。

最后， §2.4 专门用于证明五边形方程，参见 (0.3)：这里，与 Drinfel’d 的工作 [9, p.834] 中的做法一样，我们首先使用 $\mathbb{R}^4$ 中的楔形区域 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$，令 $x_1 = 0$ 和 $x_4 = 1$，并根据对 Drinfel’d 的“区域”（zones）的理解，在剩余的 x_2-x_3 平面中选取五条线段，这些线段取决于两个尺度 δ 和 δ^2，参见 [8, p.1454] 或 [9, p.834]。沿这五条路径的平行移动（相对于 Y_4 上 Knizhnik-Zamolodchikov 联络的拉回）所满足的恒等式，将在极限下给出五边形方程。

$\delta \to 0$ 在证明了分解为奇异项、有界项和无害项，并证明奇异项相消之后，请参见定理 23 和定理 24。

约定与记号

符号 $\mathcal{A}$ 始终表示复数域 $\mathbb{C}$上的含幺结合代数。未加修饰的张量积始终指关于 $\mathbb{C}$的张量积，即 $\otimes = \otimes_{\mathbb{C}}$。对于非空集合 M 和复向量空间 E，符号 Fun(M, E)表示所有 E值映射 $M \to E$构成的复向量空间。接下来，我们的形式参数λ 等于 Drinfel'd 的 $\frac{h}{2\pi \mathrm{i}}$，后者在 [18]中记作 $\overline{h}$。

致谢

作者谨向 A.Appel、P.Clavier、F.Corniquel、S.Goette、B.Hurle、D.Manchon、D.Panazzolo 和 S.Waldmann 致谢，感谢他们所进行的有益讨论。

1 形式平行传输的一些分析

设 $\mathcal{A}$ 是一个固定的复含幺结合代数。我们用 $\mathcal{A}[[\lambda]]$ 表示所有系数取自 $\mathcal{A}$ 的形式幂级数构成的 $\mathbb{C}[[\lambda]]$-模，而 $\mathcal{A}$ 本身是环 $\mathbb{C}[[\lambda]]$上的含幺结合代数。

1.1 分段 $\mathcal{C}^\infty$函数的初等分析

本节回顾分段光滑函数，因为后文需要沿复合路径进行平行移动，而这类路径通常在“拼接点”处并不光滑。推广到分段 $\mathcal{C}^k$函数是显而易见的，但后文并不需要。给定两个实数 $a < b$，令 $]a, b[$ 表示满足 $a < s < b$ 的所有实数 s 所构成的开区间。回顾复向量空间 $\mathcal{C}^k\big(]a, b[, \mathbb{C}\big)$，它由定义在 $]a, b[$ 上的所有复值函数构成；这些函数的 r 阶导数对所有阶数 r 均存在且连续（若$k = \infty$，则相应如此）。在逐点乘法下，它是一个含幺、交换且结合的复代数。每当$U \subset \mathbb{R}$ 是有限个开区间的并时，用 $\mathcal{C}^\infty\big(U, \mathbb{C}\big)$ 表示上述概念的显然推广。

接下来，我们需要讨论更严格意义下的分段函数，即只有有限个“良好”的间断点的函数，参见例如 [2, p.158, Def. IV.4.2]：我们选择了一种避免在“奇异点”处选取函数值的表述方式。更准确地说：设 $[a, b]$ 为满足 $a \leqslant s \leqslant b$的所有实数 s 构成的闭区间。选取一个包含 a, b的有限子集 $D \subset [a, b]$，因此 D 具有如下的一般形式 $D = \{a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m < a_{m+1} := b\}$，其中 m 为非负整数。我们将 D 称为（潜在的）奇异集，并将其开稠密补集 $[a, b] \setminus D$ 称为正则集。定义所有分段函数构成的空间。

以如下稍微不同寻常的方式定义 $\mathcal{C}^\infty$ 上的函数空间，其奇异集为 $D \subset [a,b]$：

$$\mathcal{C}^\infty_D([a,b],\mathbb{C}) \;:=\; \Big\{ f \in \mathcal{C}^\infty([a,b]\setminus D,\mathbb{C}) \;\Big|\; \forall\, r,i \in \mathbb{N} \text{ with } 1 \leqslant i \leqslant m+1 : \lim_{\epsilon\downarrow 0} f^{(r)}(a_i-\epsilon) \text{ exists and } \forall\, 0 \leqslant i \leqslant m : \lim_{\epsilon\downarrow 0} f^{(r)}(a_i+\epsilon) \text{ exists} \Big\} \tag{1.1}$$

其中，$\epsilon \downarrow 0$ 表示在取极限时只考虑严格为正的实数 ϵ。换言之，$\mathcal{C}^\infty_D([a,b],\mathbb{C})$中的每个元素 f在奇异集 D之外都是 $\mathcal{C}^\infty$-函数，并且在奇异点处，所有高阶导数的左极限和右极限都必须存在，但不必相等。因此，将每个 $f^{(r)}$、$r \in \mathbb{N}$限制在每个开区间 $]a_i, a_{i+1}[$, $0 \leqslant i \leqslant m$, 上，便可唯一延拓为定义在闭区间 $[a_i, a_{i+1}]$ 上的连续函数$f_i^{(r)}$；在 a_i 处取右极限，在 a_{i+1}处取左极限即可。显然，对于满足 $\{a,b\} \subset D \subset [a,b]$的每个有限集 D，复向量空间 $\mathcal{C}^\infty_D([a,b],\mathbb{C})$在正则子集上的逐点乘法下构成一个含幺交换结合代数，这归功于高阶导数的莱布尼茨法则；例如参见 [2,第 178], 页。我们有典范映射

$$\forall\; D \subset D' : \mathcal{C}^\infty_D([a,b],\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty_{D'}([a,b],\mathbb{C})$$

由显然的限制映射诱导而来；这些映射是单射，因为正则集在闭区间 $[a,b]$ 中稠密。这些单射都是含幺复代数的态射。我们不再显式地记出它们。此外，通常的导数（仅在正则集 $[a,b]\setminus D$ 上定义）显然与左极限和右极限相容，因此诱导出代数的一个导子

$$\mathcal{C}^\infty_D([a,b],\mathbb{C}) \to \mathcal{C}^\infty_D([a,b],\mathbb{C}) : f \mapsto \frac{\mathsf{d}f}{\mathsf{d}s}. \tag{1.2}$$

我们将经常用到 $\mathcal{C}^\infty_D([a,b],\mathbb{C})$ 的以下子代数：

$$\mathcal{C}^\infty_D([a,b],\mathbb{C})^0 := \big\{ f \in \mathcal{C}^\infty_D([a,b],\mathbb{C}) \;\big|\; f \text{ extends to a continuous function } [a,b] \to \mathbb{C} \big\}. \tag{1.3}$$

显然，这种连续延拓的存在等价于在 f 的奇异点处左极限和右极限（但不一定是其高阶导数的左极限和右极限）相等，因此，如果这种延拓存在，则它是唯一的。注意，对于这些空间，函数在 $\alpha \in [a,b]$ 处的通常取值是有意义的，这与一般情形不同，因为在一般情形下，奇异点处的函数值并未定义。我们还需要对这些分段 $\mathcal{C}^\infty$ 函数进行复合：除了闭区间 $[a,b]$ 和奇异子集 $\{a,b\} \subset D \subset [a,b]$之外，再选取另一个闭区间 $[a',b']$ （其中 $a' < b'$ 为实数）以及 $[a',b']$ 的一个有限子集 $D' = \{a' = a'_0 < a'_1 < \cdots < a'_{m'} < a'_{m'+1} = b'\}$，使得 $\{a',b'\} \subset D' \subset [a',b']$。如果满足以下条件，我们就称定义在 $[a',b']$ 上、奇异集为 D' 的分段 $\mathcal{C}^\infty$ 函数 θ 与 $[a,b]$和 D 相容：

$$\theta\big([a',b']\setminus D\big) \subset [a,b] \subset \mathbb{R} \quad \text{and} \quad \theta|^{-1}(D) \text{ is finite subset of } [a',b'] \tag{1.4}$$

其中，$\theta|$ 表示其奇异集之外的 $\mathcal{C}^\infty$函数 $[a',b']\setminus D' \to [a,b]$。显然，复合函数 $f\circ\theta$ 在 $[a',b']\setminus\big(D'\cup\theta|^{-1}(D)\big)$上是定义良好的函数，并且迭代链式法则（也称为 Faà di Bruno 定理，参见例如 [2, 第 291 页，公式 (3)]）表明它是一个 $\mathcal{C}^\infty$函数。r阶导数 $f\circ\theta$ 在 $D'\cup\theta|^{-1}(D)$中的奇异点处的左极限和右极限均存在，这可由限制函数 $\theta^{(r)}$在 $]a'_j$上的连续延拓 $\theta_j^{(r)}$：$[a'_j,a'_{j+1}]\to[a,b]$的连续性直接得出，其中对所有整数 $r\geqslant 0$ 和 $0\leqslant j\leqslant m'$均成立。因此，我们可以定义复合函数

$$f\circ\theta\in\mathcal{C}^\infty_{D'\cup\theta|^{-1}(D)}\big([a',b'],\mathbb{C}\big). \tag{1.5}$$

不难看出，链式法则适用于这种复合与微分 (1.2)。接下来，我们需要用到著名的黎曼积分：注意，对于每个元素 $f\in\mathcal{C}^\infty_D([a,b],\mathbb{C})$ 和 $\alpha,\beta\in[a,b]$，我们都可以定义黎曼积分

$$I_\alpha^\beta(f):=\begin{cases}\int_\alpha^\beta \hat f(s)ds & \text{if } \alpha\leqslant\beta\\ -\int_\beta^\alpha \hat f(s)ds & \text{if } \alpha\geqslant\beta\end{cases} \tag{1.6}$$

^^其中 f 是 f 从 $[a,b]\setminus D$ 到 $[a,b]$ 的任意延拓（例如 $f(a_i)=0$ 对所有 $0\leqslant i\leqslant N+1$ 都成立）：众所周知，任何这样的延拓都是黎曼可积的，并且积分与延拓无关，也就是说，与积分域内奇异点处选取的 f 值无关，参见例如 [25, 第 273] 页。回顾任意 $f\in\mathcal{C}^\infty_D([a,b],\mathbb{C})$ 的夏斯勒法则：

$$\forall\ \alpha,\beta,\gamma\in[a,b]:\quad I_\alpha^\gamma(f)=I_\alpha^\beta(f)+I_\beta^\gamma(f).$$

回顾复值函数 $[a,b]\to\mathbb{C}$，它对每个 $f\in\mathcal{C}^\infty_D([a,b],\mathbb{C})$ 定义为

$$I_\alpha(f)(s):=I_\alpha^s(f)$$

是 f 的通常原函数。我们回顾原函数的以下性质，它们是众所周知的微积分基本定理的变体以及标准积分技巧：

定理 1. 设 a、$b\in\mathbb{R}$ 满足 $a<b$，并设 $D\subset\mathbb{R}$ 是一个有限集合，使得 $\{a,b\}\subset D\subset[a,b]$。那么，对任意 f、$g\in C^\infty_D\big([a,b],\mathbb{C}\big)$ 以及 $h\in C^\infty_D\big([a,b],\mathbb{C}\big)^0$，有：

i.) 对任意 $\alpha\in[a,b]$，原函数 I_α 定义了一个 $\mathbb{C}$-线性映射 $C^\infty_D\big([a,b],\mathbb{C}\big)\to C^\infty_D\big([a,b],\mathbb{C}\big)^0$，因此 $I_\alpha(f)$ 总是连续的。此外，

$$I_\alpha(f)(\alpha)=0. \tag{1.7}$$

ii.) 微积分基本定理：对于导数（按 (1.2) 的意义），有

$$\frac{\mathsf{d}I_\alpha(f)}{\mathsf{d}s}=f\quad\text{and}\quad I_\alpha\left(\frac{\mathsf{d}h}{\mathsf{d}s}\right)=h-h(\alpha). \tag{1.8}$$

此外，任何满足 $\frac{\mathsf{d}F}{\mathsf{d}s}=f$ 且 $F(\alpha)=0$ 等于 $I_\alpha(f)$ 的元素 $F\in C^\infty_D\big([a,b],\mathbb{C}\big)^0$。

iii.) 设 $a', b' \in \mathbb{R}$ 满足 $a' < b'$，设 D' 为一个满足 $\{a', b'\} \subset D' \subset [a', b']$ 的有限集，设 $\theta \in \mathcal{C}^\infty_{D'}\big([a', b'], \mathbb{R}\big)^0$ 使得 θ 与 $[a, b]$ 和 D 兼容，参见 (1.4)。那么复合 $f \circ \theta$（参见 (1.5)）属于 $\mathcal{C}^\infty_{D' \cup \theta|^{-1}(D)}\big([a', b'], \mathbb{C}\big)$。此外，对于每个$\alpha' \in [a', b']$，都有通常的"变量替换法则"

$$I_{\theta(\alpha')}(f) \circ \theta = I_{\alpha'}\left((f \circ \theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right) \tag{1.9}$$

其中，前述等式两边都是 $\mathcal{C}^\infty_{D' \cup \theta|^{-1}(D)}\big([a', b'], \mathbb{C}\big)^0$ 的元素。

证明说明：所有结论的证明可参见例如朗的著作 $[25,$ 第272页-$274]$ 。分段连续函数的原函数是连续的，这是标准结论，可由夏斯勒法则以及分段连续性 f 可推出任何延拓 f 在 $[a, b]$上有界这一事实得出。其他结论在正则集上可由连续函数的相应熟知结论推出。注意，结论 $ii.)$ 中 F 的连续性至关重要： $F - I_\alpha(f)$ 的导数在正则点处为零，由连续性可知， $F - I_\alpha(f)$ 是处处为常数的连续函数；由 $F(\alpha) = 0 = I_\alpha(f)(\alpha)$ 可知该常数为零。等式（1.9）可由上述讨论推出：对等式两边在正则点处求导，应用微积分基本定理（（1.8）中的左侧等式）以及归一化条件（1.7）。

我们将由满足前述定理 1 的陈述 $iii.)$ 的假设的连续映射 $\theta\colon [a', b'] \to [a, b]$ 构成的三元组 $(\theta, [a', b'], D')$ 称为 $\big([a, b], D\big)$ 的连续分段 $\mathcal{C}^\infty$ 重参数化。

1.2 形式线性常微分方程

在本节中，我们回顾 K.-T. Chen 的经典著作 $[4,$ 第 110 页-$115]$中所述一般理论的一个特例。

固定任意含幺结合复代数 $\mathcal{A}$、任意两个实数 a, b，使得 $a < b$，以及实数的任意有限子集 D，使得 $\{a, b\} \subset D \subset [a, b]$。考虑复交换含幺结合代数 $\mathcal{C}^\infty_D\big([a, b], \mathbb{C}\big)$，它由定义在 $[a, b]$ 上、取复值且分段为 $\mathcal{C}^\infty$ 的所有函数构成，可能的奇异集为 D；详情参见 §1.1。构造代数张量积 $\mathcal{C}^\infty_D\big([a, b], \mathbb{C}\big) \otimes \mathcal{A}$，并考虑由系数属于 $\mathcal{C}^\infty_D\big([a, b]$ 的所有形式幂级数组成的 $\mathbb{C}[[\lambda]]$-模 $\mathbb{C}\big) \otimes \mathcal{A}$,

$$\Big(\mathcal{C}^\infty_D\big([a, b], \mathbb{C}\big) \otimes \mathcal{A}\Big)[[\lambda]]. \tag{1.10}$$

注意，前面的 $\mathbb{C}[[\lambda]]$-模又是一个关于 $\mathbb{C}[[\lambda]]$ 的含幺结合代数（相对于张量积乘法和形式幂级数的柯西乘积而言）。进一步注意，该代数中的每个元素 F 都可以自然地视为一个从 $[a, b] \setminus D$ 到 $\mathcal{A}[[\lambda]]$ 的函数，我们有时会使用记号 $s \mapsto F(s) = \sum_{r=0}^\infty F_r(s)\lambda^r$。然而，代数 (1.10) 通常远小于.....的空间。

所有从 $[a,b]\setminus D$ 到 $\mathcal{A}[[\lambda]]$ 的“适当”函数，其中连续性之类的问题处理起来更加微妙；特别是在重要的无限维 $\mathcal{A}$ 情形下。请注意，代数 (1.10) 中的每个元素 F 因而都是一个形式幂级数 $F=\sum_{r=0}^{\infty}F_r\lambda^r$，且对于每个非负整数 r，其分量 F_r 都是有限个形如 $f\otimes A$ 的项之和，其中 $f\in\mathcal{C}_D^{\infty}\big([a,b]、\ \mathbb{C}\big)$ 和 $A\in\mathcal{A}$。我们将在 §1.3 中更详细地讨论这一重要问题。

将通常的导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$（见 (1.2)）与 $\mathcal{A}$ 上的恒等映射作张量积，并按通常的“逐分量”方式将其扩展到形式幂级数上，我们便得到代数 (1.10) 的一个“导数”，它仍然是代数的导子。我们仍用同一符号 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$表示它。以完全类似的方式，我们可以将黎曼积分 I_α^β 和原函数$\overline{I}_\alpha$ 扩展到代数 (1.10) 上，并继续使用相同的符号。显然，I_α^β 的取值属于 $\mathcal{A}[[\lambda]]$，且当 f、g 和 h 替换为相应代数 (1.10) 中的元素时，定理 1 的所有结论仍然成立。

固定 $Y\in\Big(\mathcal{C}_D^{\infty}\big([a,b],\mathbb{C}\big)\otimes\mathcal{A}\Big)[[\lambda]]$。我们考虑以下形式线性常微分方程（形式线性常微分方程）

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}s} &= \lambda Y\omega\\ \omega(\alpha) &= \omega_\alpha\end{cases}\tag{1.11}$$

其中 $\alpha\in[a,b]$，‘初始值’ ω_α 是 $\mathcal{A}[[\lambda]]$的一个元素，我们要寻找解

$$\omega\in\Big(\mathcal{C}_D^{\infty}\big([a,b],\mathbb{C}\big)^0\otimes\mathcal{A}\Big)[[\lambda]],$$

微分方程 (1.11) 的解，因此 ω 必须是连续且分段$\mathcal{C}^\infty$的。众所周知，这些形式线性常微分方程的存在唯一性理论，比通常微分方程的相关理论简单得多。事实上，首先可以像通常的常微分方程理论中那样，将其改写为积分方程：先假设 ω 是 (1.11) 的一个连续分段 $\mathcal{C}^\infty$ 解。对等式两边取原函数，并使用定理 1 中的 (1.8) 的第二个方程，得到‘积分方程’

$$\omega=\omega_\alpha+\lambda I_\alpha\big(Y\omega\big)\tag{1.12}$$

其中 ω_α 被视为 $[a,b]$ 上的常函数，其值为 ω_α。另一方面，如果连续分段 $\mathcal{C}^\infty$ 元素 ω 是形式积分方程 (1.12) 的解，那么根据 (1.7)，$\omega(\alpha)=\omega_\alpha$，对积分方程求导，并使用 (1.8) 的第一个方程，就得到形式线性常微分方程 (1.11)。

接下来，由于 Y 前面有因子 λ，求解形式积分方程 (1.12) 相当简单：考虑以下 $\mathbb{C}[[\lambda]]$-线性映射

$$\begin{aligned}L_Y:\Big(\mathcal{C}_D^{\infty}\big([a,b],\mathbb{C}\big)^0\otimes\mathcal{A}\Big)[[\lambda]]&\to\Big(\mathcal{C}_D^{\infty}\big([a,b],\mathbb{C}\big)\otimes\mathcal{A}\Big)[[\lambda]]\\ F&\mapsto L_Y(F):=YF\end{aligned}$$

and

$$I_\alpha : \Big(\mathcal{C}_D^\infty\big([a,b],\mathbb{C}\big)\otimes\mathcal{A}\Big)[[\lambda]] \to \Big(\mathcal{C}_D^\infty\big([a,b],\mathbb{C}\big)^0\otimes\mathcal{A}\Big)[[\lambda]].$$

于是，复合映射 $I_\alpha\circ L_Y$ 是 $\mathbb{C}[[\lambda]]$-模 $\Big(\mathcal{C}_D^\infty\big([a,b],\mathbb{C}\big)^0\otimes\mathcal{A}\Big)[[\lambda]]$ 上定义良好的 $\mathbb{C}[[\lambda]]$-线性自同态。因此，形式积分方程 (1.12) 可改写为

$$\big(\mathrm{id}-\lambda I_\alpha\circ L_Y\big)(\omega)=\omega_\alpha,\quad \text{hence}\quad \omega=\big(\mathrm{id}-\lambda I_\alpha\circ L_Y\big)^{-1}(\omega_\alpha)=\sum_{r=0}^{\infty}\lambda^r\big(I_\alpha\circ L_Y\big)^{\circ r}(\omega_\alpha) \tag{1.13}$$

因为显然——得益于因子 λ 的存在——形式级数 $\mathsf{id}-\lambda I_\alpha\circ L_Y$ 在所有 $\mathbb{C}[[\lambda]]$-线性自同态构成的代数中总是可逆的 $\Big(\mathcal{C}_D^\infty\big([a,b],\mathbb{C}\big)^0\otimes\mathcal{A}\Big)_{[[\lambda]]}$ 视为一个 $\mathbb{C}[[\lambda]]$-模，其依据是通常的几何级数公式。请注意，公式 (1.13) 常常写成迭代积分的形式:

$$\omega(s)=\omega_\alpha+\sum_{r=1}^{\infty}\lambda^r\left(\int_\alpha^s\left(\hat{Y}(s_1)\int_\alpha^{s_1}\left(\hat{Y}(s_2)\int_\alpha^{s_2}\left(\cdot\,\cdot\int_\alpha^{s_{r-1}}\hat{Y}(s_r)ds_r\right)\cdot\cdot ds_3\right)ds_2\right)ds_1\right)\omega_\alpha \tag{1.14}$$

ˆ其中 Y 表示将 Y 从 $[a,b]\backslash D$ 延拓到 $[a,b]$ 的任意延拓。我们将 $W_{\cdot\alpha}:=(s\mapsto W_{s\alpha})$ 记作形式常微分方程 (1.11) 在初始条件 $\omega_\alpha=1$（代数 $\Big(\mathcal{C}_D^\infty\big([a,b],\mathbb{C}\big)^0\otimes\mathcal{A}\Big)[[\lambda]]$ 的单位元）下的特解 ω，因此

$$\begin{cases}\dfrac{\mathsf{d}W_{\cdot\alpha}}{\mathsf{d}s} &= \lambda Y W_{\cdot\alpha}\\ W_{\cdot\alpha}(\alpha)=W_{\alpha\alpha} &= 1\end{cases} \tag{1.15}$$

并将其称为在 α 处归一化的形式常微分方程 (1.11) 的基本解，参见例如 [5, 第 69] 页。此外，我们将基本解在 $\beta\in[a,b]$ 处的值 $W_{\cdot\alpha}$ 称为

$$W_{\beta\alpha}:=W_{\cdot\alpha}(\beta)\in\mathcal{A}[[\lambda]] \tag{1.16}$$

传播子（从 α 到 β）。

We 下面汇总上述形式线性常微分方程的一些性质

命题 2。 在上述假设和记号下，我们有:

i.) 每个形式线性常微分方程 (1.11) 都有唯一的（连续！）解 ω，由公式 (1.13) 或 (1.14) 给出。它可以通过在 α 处归一化的基本解 $W_{\cdot\alpha}$ 按如下方式表示:

$$\omega=W_{\cdot\alpha}\omega_\alpha. \tag{1.17}$$

ii.) 群胚性质：每个基本解 $W_{\cdot\alpha}$ 在 $\mathcal{A}[[\lambda]]$ 中的取值都是可逆值，并且对于所有 α、β、$\gamma\in[a,b]$，传播子满足以下恒等式

$$W_{\alpha\alpha}=1,\quad W_{\gamma\beta}W_{\beta\alpha}=W_{\gamma\alpha},\quad W_{\alpha\beta}=W_{\beta\alpha}^{-1}. \tag{1.18}$$

iii.) 重参数化：设 a'、$b' \in \mathbb{R}$ 满足 $a' < b'$，设 D' 为具有 $\{a', b'\} \subset D' \subset [a', b']$ 的有限集，设 $\theta \in \mathcal{C}^\infty_{D'}\big([a', b'], \mathbb{R}\big)^0$ 是 $\big([a, b], D\big)$ 的连续分段 $\mathcal{C}^\infty$ 重参数化，见（1.4）。设 $\alpha' \in [a', b']$，并设 $W_{\cdot\theta(\alpha')}$ 为在 $\theta(\alpha')$ 处归一化的（1.15）的基本解。那么，$W'_{\cdot\alpha'} := W_{\cdot\theta(\alpha')} \circ \theta$ 是在 α' 处归一化的形式线性常微分方程的基本解

$$\frac{\mathsf{d}W'_{\cdot\alpha'}}{\mathsf{d}s'} = \big(Y \circ \theta\big)\frac{\mathsf{d}\theta}{\mathsf{d}s'}W'_{\cdot\alpha'}, \text{ hence } \forall\, \alpha, \beta \in [a, b]: \ W'_{\beta'\alpha'} = W_{\theta(\beta')\theta(\alpha')} \in \mathcal{A}[[\lambda]]. \tag{1.19}$$

此外，传播子 $W_{\beta\alpha}$ 仅取决于 α 和 β 之间 Y 的取值。

iv.）因式分解：设 $Y = Y_0 + Z$ 与 Y_0、$Z \in \Big(\mathcal{C}^\infty_D\big([a, b], \mathbb{C}\big) \otimes \mathcal{A}\Big)[[\lambda]]$，并设 $W_{\cdot\alpha}$ 和 $U_{\cdot\alpha}$ 是在 α 处归一化的形式线性常微分方程的基本解。

$$\frac{\mathsf{d}W_{\cdot\alpha}}{\mathsf{d}s} = \lambda Y W_{\cdot\alpha} \ \text{ and } \ \frac{\mathsf{d}U_{\cdot\alpha}}{\mathsf{d}s} = \lambda Y_0 U_{\cdot\alpha}.$$

然后，$W_{\cdot\alpha}$ 按以下方式因式分解：

$$W_{\cdot\alpha} = U_{\cdot\alpha}\Xi_{\cdot\alpha} \quad \text{where} \quad \frac{\mathsf{d}\Xi_{\cdot\alpha}}{\mathsf{d}s} = \lambda\left(U^{-1}_{\cdot\alpha} Z U_{\cdot\alpha}\right)\Xi_{\cdot\alpha} \ \text{ and } \ \Xi_{\alpha\alpha} = 1. \tag{1.20}$$

v.) 假设 $YI_\alpha(Y) = I_\alpha(Y)Y$。那么形式线性常微分方程 (1.15) 的基本解 $W_{\cdot\alpha}$ 显式地表示为

$$W_{\cdot\alpha} = e^{\lambda I_\alpha(Y)}. \tag{1.21}$$

证明概要： $i.$）存在性和唯一性可由（1.13）中的讨论得出，而（1.17）可由（1.14）直接读出。

$ii.$) 再由 (1.13) 和 (1.14) 可立即得出，$W_{\cdot\alpha}$ 是含幺结合代数 $\Big(\mathcal{C}^\infty_D\big([a, b], \mathbb{C}\big)^0 \otimes \mathcal{A}\Big)[[\lambda]]$ 中的形式级数，其常数项为 1，因此显然可通过类似的几何级数论证证明其可逆。(1.18) 的第一个等式是定义 (1.15) 的一部分。对于第二个等式，注意 $W_{\cdot\beta}$ 和 $W_{\cdot\alpha}$ 满足相同的形式线性常微分方程，且初始条件（在 β处）分别为 1 和 $W_{\beta\alpha}$。因此，由 (1.17) 可得$W_{\cdot\alpha} = W_{\cdot\beta}W_{\beta\alpha}$，取 $s = \gamma$即得到 (1.18) 的第二个等式。令 $\alpha = \gamma$，由第一个和第二个等式即可推出 (1.18) 的第三个等式。

$iii.$) 公式 (1.19) 是链式法则和公式 (1.11) 的直接推论。最后一个结论可由迭代积分形式 (1.14) 直接得出，也可在假设 $\alpha \leqslant \beta$ 不失一般性的情况下，通过选取 $[a', b'] = [\alpha, \beta]$ 和 θ： $[\alpha, \beta] \to [a, b]$ 典范嵌入得出。

$iv.$) 运用众所周知的公式 $\frac{\mathsf{d}(U^{-1}_{\cdot\alpha})}{\mathsf{d}s} = -U^{-1}_{\cdot\alpha}\frac{\mathsf{d}U_{\cdot\alpha}}{\mathsf{d}s}U^{-1}_{\cdot\alpha}$，对 $\Xi_{\cdot\alpha} = U^{-1}_{\cdot\alpha}W_{\cdot\alpha}$ 求导后即可得出结果。

$v.$) 对每个正整数 r，对 $I_\alpha(Y)^r$ 的 r 次幂求导，得到 $rYI_\alpha(Y)^{r-1}$，这是根据假设 $YI_\alpha(Y) = I_\alpha(Y)Y$得出的，它表明对指数级数 $e^{\lambda I_\alpha(Y)} = \sum_{r=0}^\infty \frac{\lambda^r}{r!} I_\alpha(Y)^r$ 求导时结果成立。

1.3 范数与极限

我们将讨论由代数 (1.10) 的元素 Y给出的形式线性常微分方程的解的极限，这些元素依赖于某个子集 J $\subset \mathbb{R}^\ell$中的参数 $\boldsymbol{\delta}$；我们关注的是当 $\boldsymbol{\delta} \to \boldsymbol{\delta}_0$ 时的“极限”，其中 $\boldsymbol{\delta}_0$ 是 J 的一个聚点。由于复结合含幺代数 $\mathcal{A}$ 完全任意，我们必须加以讨论，以便明确这些极限的含义。

回忆一下，复向量空间 E 上的范数是一个映射 $||\ ||: E \to \mathbb{R}$，其取值均为非负数，满足 $||\xi|| = 0$ 当且仅当 $\xi = 0$，对所有 $\xi \in E$成立；满足 $||z\xi|| = |z|\ ||\xi||$，对所有 $z \in \mathbb{C}$ 和 $\xi \in E$成立；并满足三角不等式 $||\xi + \eta|| \leqslant ||\xi|| + ||\eta||$，对所有$\xi$、$\eta \in E$成立。每个向量子空间 $V \subset E$ 在将范数限制到 V后，自然成为赋范空间。显然，每个复向量空间至少有一个范数：事实上，设 B :=$(e_i)_{i\in\mathfrak{S}}$ 是 E 的一组基，其指标集为 $\mathfrak{S}$：每个向量$\xi \in E$ 都可表示为线性组合 $\xi = \sum_{i\in\mathfrak{S}} x_i e_i$，其中所有 $x_i \in \mathbb{C}$ 均为.....，且满足 $x_i \neq 0$ 的 $\mathfrak{S}$ 构成有限集。定义

$$||\xi||_{\mathsf{B}} = ||\xi|| \coloneqq \max\big\{|x_i| \ \big|\ i \in \mathfrak{S}\big\}, \tag{1.22}$$

而范数的性质很容易直接验证。 E 也可以视为巴拿赫空间 B $\to \mathbb{C}$ 的一个子空间，其中 B $\to \mathbb{C}$ 由所有配备上确界范数的有界函数组成，不过对于此处给出的初等论述，这一点并非必要。

有了范数，我们便可以定义极限：更确切地说，对于给定的正整数 ℓ，令 J $\subset \mathbb{R}^\ell$ 为一个非空集合，并令 Fun(J E)表示从 J $\to E$出发的所有映射构成的复向量空间。在 E上固定一个范数 $||\ ||$，在 $\mathbb{R}^\ell$上固定某个范数 $|\ |$，并取一个函数 $f \in$ Fun(J E)。令 $\boldsymbol{\delta}_0$为 J 的一个聚点。对于任意 $\zeta \in E$，回顾极限的如下定义：

$$\begin{aligned}\lim_{\boldsymbol{\delta}\to\boldsymbol{\delta}_0} f(\boldsymbol{\delta}) = \zeta \text{ w.r.t. } ||\ || \quad \text{iff} \quad & \forall\ \epsilon \in \mathbb{R},\ \epsilon > 0\ \exists\ \epsilon' \in \mathbb{R},\ \epsilon' > 0 :\ \forall\ \boldsymbol{\delta} \in \mathbf{J} : \\ & \text{if } |\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\delta}_0| < \epsilon' \ \text{ then } \ ||f(\boldsymbol{\delta}) - \zeta|| < \epsilon. \end{aligned} \tag{1.23}$$

与通常一样，如果极限存在，则它是唯一的。然而，极限是否存在，先验而言取决于所使用的范数 $|\ |$ 和 $||\ ||$。回顾一下，如果 $||\ ||$ 和 $||\ ||'$ 是 E 上的两个范数，则称它们等价，当且仅当：

$$\exists\ C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ C_1, C_2 > 0\ \ \forall\ \xi \in E : \quad C_1||\xi|| \leqslant ||\xi||' \leqslant C_2||\xi||.$$

因此，如果 E 上的范数 $||\ ||$ 和 $||\ ||'$ 等价，并且 $\mathbb{R}^\ell$ 上的范数 $|\ |$ 和 $|\ |'$ 等价，那么很容易看出，在 (1.23) 中，使用 $||\ ||$ 和 $|\ |$ 的表述与使用 $||\ ||'$ 和 $|\ |'$ 的表述等价：在这种情况下，极限不依赖于所使用的范数。一般而言，复向量空间上的两个给定范数并不等价；然而，在有限维向量空间这个非常重要的情形下，众所周知，任意两个范数都等价，参见例如 [25, 第145页，定理4.3。]。这始终适用于 (1.23) 中 $\mathbb{R}^\ell$ 上的范数 $|\ |$和 $|\ |'$，但一般不适用于 E 上的范数 $||\ ||$和 $||\ ||'$。在本文中，相关极限总是在代数 $||\ ||$ 的有限维子空间中“进行”

，从而确保极限计算不依赖于所选范数。更确切地说，考虑以下代数

$$\Big(\mathrm{Fun}\big(\mathbf{J},\mathbb{C}\big)\otimes\mathcal{A}\Big)[[\lambda]]. \tag{1.24}$$

该代数的每个元素 F 都是一个形式幂级数 $F=\sum_{r=0}^{\infty}\lambda^r F_r$，其中每个分量 F_r 都是 $\mathrm{Fun}\big(\mathrm{J}\ \mathbb{C}\big)\otimes\mathcal{A}$ 的一个元素，因此可以视为一个映射 $\mathrm{J}\to\mathcal{A}$；在 $\mathcal{A}$ 上选取一个范数 $||\ ||$，并在 $\mathbb{R}^\ell\supset\mathrm{J}$ 上选取一个范数 $|\ |$ ——在所有等价范数中任选其一——我们便可以按照定义（1.23）的意义，分别对每个非负整数 r 考虑极限 $F_r\to\xi_r\in\mathcal{A}$。因此，对于任意 $\xi=\sum_{r=0}^{\infty}\lambda^r\xi_r\in\mathcal{A}[[\lambda]]$，我们为代数（1.24）中的每个 F 定义逐分量极限：

$$\lim_{\boldsymbol{\delta}\to\boldsymbol{\delta}_0}F(\boldsymbol{\delta})=\xi\ \text{w.r.t.}\ ||\ ||\quad\text{iff}\quad\forall\, r\in\mathbb{N}:\quad\lim_{\boldsymbol{\delta}\to\boldsymbol{\delta}_0}F_r(\boldsymbol{\delta})=\xi_r\ \text{w.r.t.}\ ||\ ||. \tag{1.25}$$

我们列举　　代数（1.24）中极限的一些重要性质如下

命题 3。设 $\mathrm{J}\subset\mathbb{R}^\ell$ 如上，设 $\boldsymbol{\delta}_0\in\mathbb{R}^\ell$ 是 J 的一个聚点，并设 $F=\sum_{r=0}^{\infty}\lambda^r F_r$ 是 $\Big(\mathrm{Fun}\big($ J $\mathbb{C}\big)\otimes\mathcal{A}\Big)[[\lambda]]$ 的一个元素。

i.) 对于每个 $r\in\mathbb{N}$，都存在一个有限维子空间 $V_{(F)r}\quad=V_r$，使得对于每个 $r\in\mathbb{N}$

$$F_r\in\mathrm{Fun}\big(\mathbf{J},\mathbb{C}\big)\otimes V_r. \tag{1.26}$$

ii.) 设 $||\ ||$ 和 $||\ ||'$ 是复向量空间 $\mathcal{A}$ 上的两个范数，并设 $\xi=\sum_{r=0}^{\infty}\lambda^r\xi_r\in\mathcal{A}[[\lambda]]$。那么命题

$$\lim_{\boldsymbol{\delta}\to\boldsymbol{\delta}_0}F(\boldsymbol{\delta})=\xi\ \text{w.r.t.}\ ||\ ||\quad\text{is equivalent to}\quad\lim_{\boldsymbol{\delta}\to\boldsymbol{\delta}_0}F(\boldsymbol{\delta})=\xi\ \text{w.r.t.}\ ||\ ||',$$

因此，代数 (1.24) 中的极限与所用范数无关。

iii.) 设 $\tilde{F}=\sum_{r=0}^{\infty}\lambda^r\tilde{F}_r$ 是 $\Big($函数空间$\big($J $\mathbb{C}\big)\otimes\mathcal{A}\Big)[[\lambda]]$ 中的另一个元素，并设 $\tilde{\xi}\in\mathcal{A}[[\lambda]]$ ˜ ˜，使得相对于 $\mathcal{A}$ 上的任意范数，$\lim_{\boldsymbol{\delta}\to\boldsymbol{\delta}_0}F(\boldsymbol{\delta})=\xi$。那么对于所有 α、$\beta\in\mathbb{C}$:

$$\lim_{\boldsymbol{\delta}\to\boldsymbol{\delta}_0}\Big(\alpha F(\boldsymbol{\delta})+\beta\tilde{F}(\boldsymbol{\delta})\Big)=\alpha\lim_{\boldsymbol{\delta}\to\boldsymbol{\delta}_0}F(\boldsymbol{\delta})+\beta\lim_{\boldsymbol{\delta}\to\boldsymbol{\delta}_0}\tilde{F}(\boldsymbol{\delta})=\alpha\xi+\beta\tilde{\xi} \tag{1.27}$$

and

$$\lim_{\boldsymbol{\delta}\to\boldsymbol{\delta}_0}\Big(F(\boldsymbol{\delta})\tilde{F}(\boldsymbol{\delta})\Big)=\Big(\lim_{\boldsymbol{\delta}\to\boldsymbol{\delta}_0}F(\boldsymbol{\delta})\Big)\Big(\lim_{\boldsymbol{\delta}\to\boldsymbol{\delta}_0}\tilde{F}(\boldsymbol{\delta})\Big)=\xi\tilde{\xi}. \tag{1.28}$$

证明。 *i.)* 根据代数张量积的定义，每个 F_r 都是有限和 $F_{r1}\otimes A_{r1}+\cdots+F_{rN_r}\otimes A_{rN_r}$ 其中 N_r 是一个非负整数，F_{r1}、.....、F_{rN_r} 是函数 $J\to\mathbb{C}$，而 A_{r1}、.....、A_{rN_r} 是 $\mathcal{A}$的元素。将 V_r 定义为 A_{r1}、.....、A_{rN_r}的复线性张成，即可证明该命题。

ii.) 我们将证明一个稍微一般化的命题：对于每个非负整数 r，令V_r' 为 $\mathcal{A}$ 的另一个有限维子空间，使其满足 (1.26)。那么，每个F_r 显然都是 $\mathrm{Fun}\big(J,\mathbb{C}\big)\otimes\big(V_r\cap V_r'\big)$ 的元素。我们至多可以将每个 V_r, V_r'扩充一个维度，以包含 ξ_r。根据极限 (1.23) 的定义，显然只需考察范数 $||\,||$ 和 $||\,||'$ 在 $\mathcal{A}$ 上的限制，以及它们在有限维子空间 V_r, V_r'和 $V_r\cap V_r'$ 上的限制：由于 $V_r\cap V_r'$是有限维的，范数 $||\,||$ 在 $V_r\cap V_r'$上的限制与范数 $||\,||'$ 的限制等价；这表明，关于范数 $||\,||$ 和 $||\,||'$ 的极限陈述是等价的。

iii.) 第一个等式 (1.27) 是通常的表述：在任何赋范向量空间中，加法和标量乘法都是连续的。所有极限都不依赖于˜范数（例如，对每个 $r\in\mathbb{N}$，取有限维向量空间 V_r+V_r即可），这要归功于前面的表述 *ii.*）。第二个表述 (1.28) 稍微复杂一些，因为赋范向量空间 $\big(\mathcal{A},||\,||\big)$ 通常并不是一个赋范代数，也就是说，对于所有 $A,A'\in\mathcal{A}$，$||AA'||\leqslant||A||\,||A'||$。我们先证明一个中间估计：˜ ˜ ˜对于每个 $r\in\mathbb{N}$，选取一个有限维子空间 V_r，使得 $F_r\in$函数空间$(J,\mathbb{C})\otimes V_r$（这是可能的，多亏了表述 *i.*））。对于每个 $r\in\mathbb{N}$，我们有

$$\Big(F(\boldsymbol{\delta})\tilde{F}(\boldsymbol{\delta})\Big)_r=\sum_{u=0}^{r}F_u(\boldsymbol{\delta})\tilde{F}_{r-u}(\boldsymbol{\delta})\in\sum_{u=0}^{r}V_u\tilde{V}_{r-u}\subset\big(V_0+\cdots+V_r\big)\big(\tilde{V}_0+\cdots+\tilde{V}_r\big)=:V_{(r)}\tilde{V}_{(r)}. \tag{1.29}$$

˜显然， $\mathcal{A}$的子空间 $V_{(r)}$ 和 $V_{(r)}$ 是有限维的。考虑˜代数乘法 μ在有限维向量空间 $V_{(r)}\otimes V_{(r)}$上的限制： $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\to\mathcal{A}$，其像 $\mu\left(V_{(r)}\otimes\tilde{V}_{(r)}\right)=V_{(r)}\tilde{V}_{(r)}$ 仍然是 $\mathcal{A}$的一个有限维子空间。选取 $\mathcal{A}$ 的有限维子空间 $V_{(r)}+V_{(r)}+V_{(r)}V_{(r)}$的一组基 $e_1,\ldots,e_M$，使其与子空间 $V_{(r)}$、 $V_{(r)}$和 $V_{(r)}V_{(r)}$相容，将元素 $A\in V_{(r)}$、˜ ˜$A\in V_{(r)}$ 按该基展开，并按照（1.22）中的方法，通过将所选基扩充为 $\mathcal{A}$ 的基，使用范数 $||\,||$，我们得到中间估计。

$$\exists\, C_{V_{(r)}\tilde{V}_{(r)}}\in\mathbb{R}, C_{V_{(r)}\tilde{V}_{(r)}}\geqslant 0\ \ \forall\ A\in V_{(r)}\ \forall\ \tilde{A}\in\tilde{V}_{(r)}:\quad ||A\tilde{A}||\leqslant C_{V_{(r)}\tilde{V}_{(r)}}||A||\,||\tilde{A}||.$$

˜这表明，乘法在 $V_{(r)}\otimes V_{(r)}$ 上的限制是一个到其像 $V_{(r)}V_{(r)}$ 上的连续映射˜：这一事实结合 (1.29) 证明了命题 (1.28)。 □

本节余下部分中，我们在 $\mathbb{R}^\ell$ 上选取最大范数 $|\,|$，参见相对于典范基的 (1.22)，并假设

$$\emptyset\neq\mathbf{J}\subset\big\{\boldsymbol{\delta}\in\mathbb{R}^\ell\setminus\{0\}\ \big|\ |\boldsymbol{\delta}|\leqslant 1/4\big\}\quad\text{and}\quad 0\text{ is an accumulation point of J.} \tag{1.30}$$

现在我们将区分代数 (1.24) 的三个重要子集 $\mathcal{L}$、 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{H}$，分别称为至多对数发散、有界和无害元素的集合：对于 $\Big(\mathrm{Fun}\,(\mathrm{J}\ \mathbb{C})\otimes\mathcal{A}\Big)[[\lambda]]$ 中的元素 $F=\sum_{r=0}^{\infty}F_r\lambda^r$

我们称

$$\begin{aligned}
&F \in \mathcal{L} \text{ 当且仅当 } \forall r \in \mathbb{N} \quad \exists C_r, \alpha_r \in \mathbb{R},\ C_r \geqslant 0,\ \alpha_r > 0 \quad \forall \boldsymbol{\delta} \in \mathbf{J} : ||F_r(\boldsymbol{\delta})|| \ \leqslant \ C_r |\ln(|\boldsymbol{\delta}|)|^{\alpha_r}, \\
&F \in \mathcal{B} \text{ 当且仅当 } \forall r \in \mathbb{N} \qquad \exists C_r \in \mathbb{R},\ C_r \geqslant 0, \qquad \forall \boldsymbol{\delta} \in \mathbf{J} : ||F_r(\boldsymbol{\delta})|| \ \leqslant \ C_r, F \in \mathcal{H} \\
&\text{当且仅当 } \forall r \in \mathbb{N} \quad \exists C_r, \beta_r \in \mathbb{R},\ C_r \geqslant 0,\ \beta_r > 0 \quad \forall \boldsymbol{\delta} \in \mathbf{J} : ||F_r(\boldsymbol{\delta})|| \ \leqslant \ C_r |\boldsymbol{\delta}|^{\beta_r}.
\end{aligned} \tag{1.31}$$

在本文后续的所有计算中，我们处理的所有项按上述意义至多是对数发散的。令 $\mathcal{G}:$ $= 1 + \lambda\Big(\text{Fun}\,(J, \mathbb{C}) \otimes \mathcal{A}\Big)[[\lambda]]$，并定义以下子集

$$\mathcal{G}_{\mathcal{L}} := 1 + \lambda\mathcal{L}, \ \ \mathcal{G}_{\mathcal{B}} := 1 + \lambda\mathcal{B}, \ \ \mathcal{G}_{\mathcal{H}} := 1 + \lambda\mathcal{H}. \tag{1.32}$$

并分别称它们为群 $\mathcal{G}$中至多对数发散、有界和无害的子群。这些术语将在以下内容中变得清楚

命题 4. 在上述假设下，代数 (1.24) 满足以下性质:

i.) 定义 (1.31) 与所选范数无关。

ii.) $\mathcal{L}$和 $\mathcal{B}$是 $\Big(\text{Fun}\,(\mathbf{J}\ \mathbb{C}) \otimes \mathcal{A}\Big)[[\lambda]]$上的 $\mathbb{C}[[\lambda]]$ 含幺子代数，且 $\mathcal{H}$是 $\mathcal{L}$的双边理想。以下包含关系成立:

$$\mathcal{L} \supset \mathcal{B} \supset \mathcal{H}. \tag{1.33}$$

iii.) 对所有 $H \in \mathcal{H}$: $\lim_{\boldsymbol{\delta}\to 0} H(\boldsymbol{\delta}) = 0$。

iv.) $\mathcal{G}$是 $\Big(\text{Fun}(\mathbf{J}\ \mathbb{C}) \otimes \mathcal{A}\Big)[[\lambda]]$ 的所有可逆元素构成的群的一个子群，而 $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \supset \mathcal{G}_{\mathcal{B}} \supset \mathcal{G}_{\mathcal{H}}$ 是 $\mathcal{G}$的子群，其中 $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}$ 是 $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$的正规子群，也就是说，它在与 $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$中的所有元素作共轭运算时保持不变。

v.) 对所有 $\Psi \in \mathcal{G}_{\mathcal{H}}$: $\lim_{\boldsymbol{\delta}\to 0} \Psi(\boldsymbol{\delta}) = 1$。

在给出该命题的证明之前，我们先回顾以下初等不等式

引理 5. Fo　　对于所有 $\delta \in\ ]0$、$1/4]$ 和 α、$\beta \in \mathbb{R}$、α、$\beta > 0$，我们有以下不等式 s

$$\delta \ \leqslant \ \frac{1}{2} \ \leqslant \ |\ln(\delta)|, \tag{1.34}$$

$$|\ln(\delta)|^{\alpha}\delta^{\beta} \ \leqslant \ \left(\frac{2\alpha}{\beta}\right)^{\alpha} \delta^{\beta/2}. \tag{1.35}$$

证明。回顾以下初等不等式：对于每个满足 $0 < t \leqslant 1$ 的实数 t

$$1 \leqslant \frac{1}{t} \quad \text{hence} \quad 1-\delta = \int_\delta^1 dt \leqslant \int_\delta^1 \frac{1}{t} dt = -\ln(\delta) = |\ln(\delta)|$$

这就证明了 (1.34)，注意到 $\delta \leqslant 1/4 < 1/2 < 1-\delta$ 即可。此外，由于 $\frac{1}{t} \leqslant \left(\frac{1}{t}\right)^{1+\frac{\beta}{2\alpha}}$，我们得到

$$|\ln(\delta)| = -\ln(\delta) = \int_\delta^1 \frac{1}{t} dt \leqslant \int_\delta^1 \left(\frac{1}{t}\right)^{1+\frac{\beta}{2\alpha}} dt = \frac{2\alpha}{\beta}\left(\delta^{-\beta/(2\alpha)} - 1\right) \leqslant \frac{2\alpha}{\beta}\delta^{-\beta/(2\alpha)},$$

由此——将这个不等式两边乘以 $\delta^{\beta/\alpha}$，然后再取 α 次幂——我们便得到结果（1.35）。 □

证明（命题 4）：
i.) 由于每个 F_r 的取值都属于有限维向量空间，因此任何其他范数在此子空间上的限制都与范数 $||\ |$等价：这只会改变定义中的“C-常数”，但不会改变属于 $\mathcal{L}$、$\mathcal{B}$ 或 $\mathcal{H}$的判据。

ii.) 显然，$\mathcal{L}$、$\mathcal{B}$和 $\mathcal{H}$ 是复向量空间：如果 F、F' 属于这三个子集中的一个，那么根据每个 $F_r(j)$ 和 $F'_r(j)$ 范数的上界，我们便能得到每个 $zF_r + z'F'_r$（其中 z、$z' \in \mathbb{C}$）的范数的上界：取两个常数 $|z|C_r$、$|z'|C_r$ 的两倍中的较大值，并取 $|\ln(|\boldsymbol{\delta}|)|$ 的指数 α_r、α'_r 中的较大值——后者为 > 1——（分别取指数 β_r、β'_r 中的较小值，其中 $|\boldsymbol{\delta}|$——后者为 < 1）。接下来，对于 FF' 的乘法，我们有每个 $\big(F(\boldsymbol{\delta})F'(\boldsymbol{\delta})\big)_r (r \in \mathbb{N})$都等于和 $\sum_{u=0}^r F_u(\boldsymbol{\delta})F'_{r-u}(\boldsymbol{\delta})$。首先假设 F、$F' \in \mathcal{L}$。由于根据命题 3，对每个 $\boldsymbol{\delta} \in \mathsf{J}$，每个 $F_u(\boldsymbol{\delta})$都是某个有限维子空间V_u 的元素（仅取决于 F_u），而每个 $F'_{r-u}(\boldsymbol{\delta})$都是另一个有限维子空间 V'_{r-u} 的元素（仅取决于 F_{r-u}），因此如命题 3 的证明、等式 (1.29) 中那样——令 $V_{(r)} = V_0 + \cdots + V_r$ 且 $V'_{(r)} = V_0 + \cdots + V'_r$——对所有 $\boldsymbol{\delta} \in \mathsf{J}$，以下估计成立。

$$||\big(F(\boldsymbol{\delta})F'(\boldsymbol{\delta})\big)_r|| \ \leqslant \ \sum_{u=0}^r C_u C'_{r-u} C_{V_{(r)}V'_{(r)}} |\ln(|\boldsymbol{\delta}|)|^{\alpha_u + \alpha'_{r-u}} \ \leqslant \ C|\ln(|\boldsymbol{\delta}|)|^{\alpha}$$

其中，C 是“C-常数”所有三重乘积的最大值的 $r+1$ 倍，而 α是所有数 $\alpha_u + \alpha'_{r-u}$中的最大值。对于 $\mathcal{B}$和$\mathcal{H}$，也可用类似的方法证明 $\mathcal{L}$、$\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{H}$ 对乘法封闭。显然，$\mathbb{C}[[\lambda]]$ 属于 $\mathcal{L}$和 $\mathcal{B}$，因此尤其是 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{B}$ 都是 $\mathbb{C}[[\lambda]]$-子模及含幺结合代数。不等式（1.34）立即推出包含关系（1.33）。最后，对于任意 $F \in \mathcal{L}$ 和$F' \in \mathcal{H}$，利用第二个不等式（1.35），可按上述类似方法证明 FF'和 $F'F$属于 $\mathcal{H}$。这说明 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{L}$ 的双边理想，因此也是一个$\mathbb{C}[[\lambda]]$-子模。

iii.) 和 *v.)* 可立即由定义 $\mathcal{H}$ 的上界推出。*iv.)* 我们只需注意到，每个元素 $1+\lambda F$（其中 F 属于一个 $\mathbb{C}[[\lambda]]$-子代数）

总是有逆元，即众所周知的几何级数 $\sum_{r=0}^{\infty}(-\lambda)^r F^r$；其中正阶项都属于给定的子代数，由此可证明 $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$、 $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$ 和 $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}$ 是 $\mathcal{G}$ 的子群。 $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}$ 的正规性源于 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{L}$ 的双边理想这一事实。□

现在我们将这些极限考量应用于形式线性常微分方程中出现的项 Y，见（1.11）。 Y 通常属于代数（1.10）。为了纳入极限，我们将令 Y 依赖于集合 $\mathbf{J} \subset \mathbb{R}^{\ell}$ 中的参数 $\boldsymbol{\delta}$，见（1.30），也就是说，我们考虑

$$Y \in \Big(\mathrm{Fun}\Big(\mathbf{J}, \mathcal{C}_D^{\infty}\big([a,b],\mathbb{C}\big)\Big) \otimes \mathcal{A}\Big)[[\lambda]]. \tag{1.36}$$

因此，每个元素 Y 都是一个形式幂级数 $\sum_{r=0}^{\infty} Y_r \lambda^r$，其中每个 Y_r 都是一个（不唯一的）有限和 $Y_r = Y_{r1} \otimes A_{r1} + \cdots + Y_{rN_r} \otimes A_{rN_r}$，其中 N_r 是非负整数， A_{r1}、.....、 $A_{rN_r} \in \mathcal{A}$ 和 Y_{r1}、.....、 Y_{rN_r} 是定义在 $\mathbf{J}$ 上、取值于 $\mathcal{C}_D^{\infty}([a,b],\mathbb{C})$ 的函数（见（1.1））， 其中 $a < b$ 是两个固定的实数，而 D 是一个有限集，满足 $\{a,b\} \subset D \subset [a,b]$。对于这些依赖于 $\mathbf{J}$ 的 Y，考虑形式线性常微分方程（1.11）是有意义的：

命题 6. 设 Y 是代数 (1.36) 的一个元素。
对于每个 $\alpha \in [a,b]$，都存在唯一的元素

$$W_{\cdot\alpha} \in \Big(\mathrm{Fun}\Big(\mathbf{J}, \mathcal{C}_D^{\infty}\big([a,b],\mathbb{C}\big)^0\Big) \otimes \mathcal{A}\Big)[[\lambda]] \tag{1.37}$$

满足关于参数 $s \in [a,b]$ 的形式线性 J-依赖常微分方程 (1.15)，对每个满足 $W_{\alpha\alpha} = 1$ 的 $\boldsymbol{\delta} \in \mathbf{J}$ 均成立。我们称 $W_{\cdot\alpha}$ 为在 α 处归一化的形式线性 J-依赖常微分方程 (1.15) 的基本解。此外，对每个 $\beta \in [a,b]$，J-依赖传播子 $W_{\beta\alpha} := W_{\cdot\alpha}(s=\beta)$ 满足

$$W_{\beta\alpha} \in \Big(\mathrm{Fun}\,(\mathbf{J},\mathbb{C}) \otimes \mathcal{A}\Big)[[\lambda]]. \tag{1.38}$$

证明。证明过程与 §1.2 中的处理完全类似，我们可以直接按照 (1.11)、积分方程 (1.12)——将原始 I_{α} 先与取值于左侧张量因子中的 $\mathcal{C}_D^{\infty}\big([a,b],\mathbb{C}\big)$ 的 $\mathbf{J}$ 上的函数复合，再与 $\mathcal{A}$ 上的恒等映射张量积，最后逐分量扩展，从而将其扩展到 (1.36) 中出现的代数——以及迭代积分方程 (1.14) 进行。这证明了存在唯一的基本解 $W_{\cdot\alpha}$，如 (1.37) 所示。在 β 处计算 s，得到 (1.38)。 □

下面这个初等引理将成为后文证明传播子中的某些因子属于“无害群” $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}$的关键判据。首先，一如往常，在固定一个范数|| || 于 $\mathcal{A}$ 之后，我们用同一个符号 || || 表示映射

$$\begin{aligned} \mathrm{Fun}\Big(\mathbf{J}, \mathcal{C}_D^{\infty}\big([a,b],\mathbb{C}\big)\Big) \otimes \mathcal{A} \;&\to\; \mathrm{Fun}\Big(\mathbf{J}, \mathcal{C}_D^{0}\big([a,b],\mathbb{R}\big)\Big) : \\ \Big((\boldsymbol{\delta},s) \mapsto G(\boldsymbol{\delta},s)\Big) \;&\mapsto\; \Big((\boldsymbol{\delta},s) \mapsto ||G(\boldsymbol{\delta},s)||\Big) \end{aligned}$$

对所有 $s \in [a,b] \setminus D$ 均成立。将 G 写成函数空间$\Big(\mathbf{J}\,\mathcal{C}^{\infty}_{D}\big([a,b]$中的元素，并在 $\mathcal{A}$ 的一组基 $((e_i)_{i\in\mathfrak{S}})$ 下写为$G = G_0 e_0 + \cdots + G_N e_N$，我们得到如下众所周知的估计——利用黎曼积分的单调性——对任意 $\alpha \leqslant s \leqslant \beta \in [a,b]$:

$$\begin{aligned}\left|\left|\int_{\alpha}^{s} \hat{G}(\boldsymbol{\delta}, s_1)\mathsf{d}s_1\right|\right| &\leqslant \int_{\alpha}^{s} ||\hat{G}(\boldsymbol{\delta}, s_1)||\mathsf{d}s_1 \\ &\leqslant \int_{\alpha}^{\beta} ||\hat{G}(\boldsymbol{\delta}, s_1)||\mathsf{d}s_1 \leqslant (\beta-\alpha)\sup\left\{||\hat{G}(\boldsymbol{\delta}, s_1)|| \;\middle|\; s_1 \in [0,1]\right\}\end{aligned} \tag{1.39}$$

其中，按照惯例，我们将函数 G 从 $\mathbf{J}\times\big([a,b]\setminus D\big)$ 延拓到 $\mathbf{J}\times[a,b]$ 的任意延拓记作 $\hat{}G$。

引理 7. 设 $Y = \sum_{r=0}\lambda^r Y_r$ 是代数 (1.36) 的一个元素。在 $\mathcal{A}$ 上任取一个范数 $||\ ||$，并任取两个元素 α、$\beta \in [a,b]$。考虑关于 Y 的以下三个条件 $\hat{}$，称为 Y 的上界条件：存在 Y 到 $[a,b]$ 的一个延拓 Y，使得对每个非负整数 r，都有：

$$\begin{aligned}
(L):&\quad \exists C_r,\alpha_r\in\mathbb{R}, C_r\geqslant 0, \alpha_r>0 \quad \forall\boldsymbol{\delta}\in\mathbf{J}:\sup\left\{||\hat{Y}_r(\boldsymbol{\delta},s)|| \;\middle|\; s\in[a,b]\right\} &&\leqslant\ C_r|\ln(|\boldsymbol{\delta}|)|^{\alpha_r},\\
(B):&\quad \exists C_r\in\mathbb{R}, C_r\geqslant 0, \qquad\ \forall\boldsymbol{\delta}\in\mathbf{J}:\sup\left\{||\hat{Y}_r(\boldsymbol{\delta},s)|| \;\middle|\; s\in[a,b]\right\} &&\leqslant\ C_r,\\
(H):&\quad \exists C_r,\beta_r\in\mathbb{R}, C_r\geqslant 0, \beta_r>0 \quad \forall\boldsymbol{\delta}\in\mathbf{J}:\sup\left\{||\hat{Y}_r(\boldsymbol{\delta},s)|| \;\middle|\; s\in[a,b]\right\} &&\leqslant\ C_r|\boldsymbol{\delta}|^{\beta_r}.
\end{aligned} \tag{1.40}$$

那么，这三个条件与所用的范数无关。此外，若条件 (L)（分别为 (B)、(H)）成立，则 Y 的传播子 $W_{\beta\alpha}$（见 (1.38)）属于 $\mathcal{G}$ 的子群 $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$（分别为 $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$、$\mathcal{G}_{\mathcal{H}}$）。

证明。范数无关性源于范数总是限制在 $\mathcal{A}$ 的有限维子空间上这一事实。关于第二个陈述，我们先证明 $\alpha \leqslant \beta$ 的情形：将传播子 $W_{\beta\alpha}$ 写成迭代积分的形式，如方程 (1.14) 中所示（适用于 $s=\beta$），利用估计式 (1.39) 作简单归纳即可看出，每个迭代积分的上界都是形如 $\boldsymbol{\delta}\mapsto\int_{\alpha}^{\beta}||\hat{}Y_i(\boldsymbol{\delta},s)||\mathsf{d}s$ 的积分之积；每个这样的积分都可由 (1.39) 中最后一个不等式给出上界，因此根据条件 (L)、(B) 或 (H)，即可得到所需的上界。对“类型 C”的常数取适当的最大值，对“类型 α_i”的指数和取适当的最大值，并对“类型 β”的指数取适当的最小值，即可得到 (1.31) 所需的上界。$\alpha\geqslant\beta$ 的情形则完全类似，只需使用规则 (1.6)。

□

1.4 形式联络和平行传输

设 $N\geqslant 1$ 为一个整数，并设 $U\subset\mathbb{R}^N$ 为一个非空开子集。

定义 8. 形式联络 Γ on U 由 N 个元素给出。

$$\Gamma_1,\ldots,\Gamma_N\in\big(C^{\infty}(U,\mathbb{C})\otimes\mathcal{A}\big)[[\lambda]].$$

这里， $C^\infty(U,\mathbb{C})$ 表示由所有关于 N 个变量 $f:U\to\mathbb{C}$ 的光滑函数（即属于 C^∞ 类的函数）构成的含幺结合交换复代数：这意味着 f 的所有高阶偏导数均存在且连续。我们将通过在 $x\in U$ 处取值，将每个 Γ_i 视为一个函数 $\Gamma_i:U\to\mathcal{A}[[\lambda]]$。然而，需要注意的是，由于代数张量积 $\otimes$ 的存在，这些函数具有特殊性。因此，代数 $\big(C^\infty(U,\mathbb{C})$ 中的每个元素 Γ_i 都是一个形式幂级数 $\Gamma_i=\sum_{r=0}^{\infty}\Gamma_{ir}\lambda^r$，对于每个非负整数 r，其分量 Γ_{ir} 都是若干形如 $f\otimes A$ 的项的有限和，其中 $f\in\mathcal{C}^\infty\big(U、\ \mathbb{C}\big)$ 和 $A\in\mathcal{A}$。从微分几何中借用的一种非常常见的记法是 $\Gamma=\sum_{i=1}^{N}\Gamma_i\mathrm{d}x_i$，它与微分形式（联络 1-形式）有关。不过，为了避免引入额外的符号，我们将对 Γ 采用一种不同于微分几何中所使用的符号约定。

接下来，固定两个实数 $a<b$，固定一个有限子集 $D\subset[a,b]$，使得 $\{a,b\}\subset D$。我们考虑连续分段 $\mathcal{C}^\infty$-路径 $c:[a,b]\to U$，因此

$$c\in\mathcal{C}^\infty_D\big([a,b],U\big)^0. \tag{1.41}$$

这意味着 c 的每个实分量 $c_1,\ldots,c_N$ 都是 $\mathcal{C}^\infty_D\big([a,b],\mathbb{R}\big)^0$ 的元素，并且对于每个 $s\in[a,b]$，值 $c(s)$ 都属于 $U\subset\mathbb{R}^N$。最基本的路径是线段，也就是说，给定两个点 $\xi,\ \eta\in\mathbb{R}^N$，我们可以考虑连接初始点 ξ 和终点 η 的仿射路径，其定义方式如下：

$$c_{\eta\leftarrow\xi}=c:[0,1]\to\mathbb{R}^N:s\mapsto(1-s)\xi+s\eta, \tag{1.42}$$

因此 $c(0)=\xi$ 和 $c(1)=\eta$。如果 ξ、η 是开子集 U 的元素，当然还需检查仿射路径的所有取值是否也都属于 U。如果是这样，那么显然存在 $\epsilon\in\mathbb{R}$、$\epsilon>0$，使得 (1.42) 的右端在较大的开区间 $]-\epsilon、\ 1+\epsilon[$ 上有意义，并且是一个从该区间到 U的 $\mathcal{C}^\infty$函数。

回到一般的连续分段光滑路径，我们可以为每条由 (1.41) 中的 c 定义的路径关联元素 $Y:=\Gamma^{(c)}$，它是形式线性常微分方程的解，定义为

$$\Gamma^{(c)}\coloneqq\sum_{i=1}^{N}\big(\Gamma_i\circ c\big)\frac{\mathrm{d}c_i}{\mathrm{d}s}\quad\in\quad\Big(\mathcal{C}^\infty_D\big([a,b],\mathbb{C}\big)\otimes\mathcal{A}\Big)[[\lambda]].$$

固定 α、$\beta\in[a,b]$，然后我们可以考虑在选择 $Y=\Gamma^{(c)}$ 下的形式线性常微分方程 (1.15)，以及其特解 ${}^{\Gamma}W_{(c)\cdot\alpha}$，该解在 α 处归一化。在微分几何中，传播子 ${}^{\Gamma}W^{(c)}_{\beta\alpha}=W_{\beta\alpha}\in\mathcal{A}[[\lambda]]$（见 (1.16)）称为沿路径 c（相对于联络 Γ）从 $c(\alpha)$ 到 $c(\beta)$ 的平行移动。由于平行传输是传播子，命题 2 的所有结论对平行传输均成立。注意，对于常值路径 $c_\xi(s)$，对所有 $s\in[a,b]$ 都有 $=\xi\in U$，元素 $\Gamma^{(c_\xi)}=0$，且平行移动简化为 $\mathcal{A}$ 的单位元。

接下来，我们需要一个对后续计算非常重要的工具，即两个连续分段光滑路径的复合 $c_1:[0,1]\to U$，其奇异集为 D_1；以及 $c_2:\ [0,1]\to U$，其奇异集为 D_2，且二者在群胚意义下相容

c_2**(0)** $= c_1$**(1)**。回顾代数拓扑中复合路径 $c_2 * c_1$ 的经典定义（采用"从右到左"的约定）：$[0,1] \to U$，其奇异集为 $D_{12} \coloneqq \left(\frac{1}{2}D_1\right) \cup \left(\frac{1}{2}D_2 + \frac{1}{2}\right)$:

$$\text{if } c_1(1) = c_2(0): \qquad (c_2 * c_1)(s) \coloneqq \begin{cases} c_1(2s) & \text{if } \ 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ c_2(2s-1) & \text{if } \ \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases} \tag{1.43}$$

根据定义显然，$c_2 * c_1$ 是连续的（得益于条件 c_2**(0)** $= c_1$**(1)**），并且是分段光滑的，其奇异集为 D_{12}。关键事实是，对于 $k \geqslant 1$，复合可能会在点 $s = \frac{1}{2}$ 处为路径的更高 k阶导数产生新的奇点。

现在介绍另一项重要工具，即形式联络的拉回：令 N'为正整数，令 U'为 $\mathbb{R}^{N'}$的非空开子集，并令 $\Theta\colon U' \to U$为一个$\mathcal{C}^\infty$-映射。对于 U 上的任意形式联络 Γ，定义拉回联络 $\Gamma' \coloneqq \Theta^*\Gamma$于 U' 上，其定义为

$$\forall\, j \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant j \leqslant N': \quad \left(\Theta^*\Gamma\right)_j \coloneqq \sum_{i=1}^{N} \left(\Gamma_i \circ \Theta\right) \frac{\partial \Theta_i}{\partial x'_j}. \tag{1.44}$$

现在说明上述对形式联络和路径的运算如何转化为平行传输:

定理 **9**。令 $U \subset \mathbb{R}^N$ 为一个非空开子集，并令 Γ 为定义在 U上的形式联络。令 $c\colon [a,b] \to U$以及 $c_1, c_2\colon [0,1] \to U$为连续分段光滑路径。则有如下结论:

i.) 设 θ 是 $\big([a,b]$的连续分段 $\mathcal{C}^\infty$ 重参数化，$D\big)$（即 $a' < b'$ 是实数，$\{a', b'\} \subset D' \subset [a', b']$ 是有限子集，且 $\theta \in \mathcal{C}^\infty_{D'}\big([a', b']$、$\mathbb{R}\big)^0$ 满足 **(1.4)**）。那么

$$\Gamma^{(c\circ\theta)} = \left(\Gamma^{(c)} \circ \theta\right) \frac{\mathsf{d}\theta}{\mathsf{d}s'}, \quad \text{and} \quad {}^{\Gamma}W^{(c)}_{\theta(\beta')\theta(\alpha')} = {}^{\Gamma}W^{(c\circ\theta)}_{\beta'\alpha'} \quad \in \quad \mathcal{A}[[\lambda]]. \tag{1.45}$$

这表明，只要初点和终点保持不变，这些路径的重参数化（按 **(1.4)** 的定义）就不会改变平行移动。

ii.) 在前述命题中，假设 $a' = a$、$b' = b$、$D' = D$，使得 $\big([a,b]$的连续分段光滑重参数化 θ、$D\big)$ 还满足反转条件

$$\theta(\alpha) = \beta \quad \text{and} \quad \theta(\beta) = \alpha.$$

然后我们得到众所周知的反演公式

$${}^{\Gamma}W^{(c\circ\theta)}_{\beta\alpha} = \left({}^{\Gamma}W^{(c)}_{\beta\alpha}\right)^{-1} \tag{1.46}$$

iii.) 沿复合路径 $c_2 * c_1$ 的平行移动： $[0,1] \to U$，见 **(1.43)**，如下所示

$$ {}^{\Gamma}W_{10}^{(c_2 * c_1)} \;=\; {}^{\Gamma}W_{10}^{(c_2)}\; {}^{\Gamma}W_{10}^{(c_1)}. \tag{1.47} $$

iv.) 设 $U' \subset \mathbb{R}^{N'}$为非空开子集，设 $\Theta\colon\; U' \to U$为光滑映射，设 $\Gamma' = \Theta^*\Gamma$为拉回的形式联络，并设 $c'\colon\; [a,b] \to U'$为连续分段光滑路径。则对所有 α、$\beta \in [a,b]$

$$ (\Theta^*\Gamma)^{(c')} = \Gamma^{(\Theta \circ c')} \quad \text{and} \quad {}^{\Theta^*\Gamma}W_{\beta\alpha}^{(c')} = {}^{\Gamma}W_{\beta\alpha}^{(\Theta\circ c')}. \tag{1.48} $$

证明。 *i.)* 关于 $\Gamma^{(c\circ\theta)}$ 的公式是直接的，而平行输运的方程由（**1.19**）推出。

ii.) 这是（**1.45**）和（**1.18**）的最后一个方程的直接推论。*iii.)* 定义两个光滑重参数化 θ_1、$\theta_2\colon\; [0,1] \to [0,1]$，其定义为 $\theta_1(s) = \frac{1}{2}s$和 $\theta_2(s) = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}$。我们有（省略符号 Γ）

$$ W_{10}^{(c_2*c_1)} \overset{(1.18)}{=} W_{1\frac{1}{2}}^{(c_2*c_1)}\, W_{\frac{1}{2}0}^{(c_2*c_1)} \overset{(1.45)}{=} W_{10}^{((c_2*c_1)\circ\theta_2)}\, W_{10}^{((c_2*c_1)\circ\theta_1)} \;=\; W_{10}^{(c_2)}\, W_{10}^{(c_1)}. $$

iv.) 由定义以及偏导数的链式法则可直接得出。

□

例如，通常的区间仿射反演 j，即由 $\iota(s) = a + b - s$ 定义的 $[a,b]$，对所有 $s \in [a,b]$ 都成立，可作为这样的重参数化，用于选择 $\alpha = a$，以及用于在 *ii.)* 处进行反演的 $\beta = b$。

众所周知，路径复合通常不满足结合律，也就是说，若 $c_3\colon\; [0,1] \to U$ 是第三条路径，且 $c_2(1) = c_3(0)$，那么一般而言 $c_3 * (c_2 * c_1) \neq (c_3 * c_2) * c_1$；但相应的平行传输乘积不依赖于加括号的方式，即

$$ W_{10}^{(c_3*(c_2*c_1))} \overset{(1.47)}{=} W_{10}^{(c_3)}\, W_{10}^{(c_2)}\, W_{10}^{(c_1)} \overset{(1.47)}{=} W_{10}^{((c_3*c_2)*c_1)}. $$

事实证明，某些联络可以用复坐标来表达，从而使计算大为简化：我们无需深入探讨一般的全纯联络，因为对于这项工作，研究复有理联络就足够了。更确切地说，设 $U \subset \mathbb{C}^N$ 是一个非空开集。回顾一下，在 U 上定义的 N 个复变量 $z = (z_1, \ldots, z_N)$ 的复有理函数，是一个商 $f(z) = {}^{g}/_{(z)\,h(z)}$，其中 f、$g \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]$ 因而是 N 个变量的复多项式，且 g 不是零多项式，而 g 的零点都属于 $\mathbb{C}^N \setminus U$。因此，函数 $z \mapsto {}^{g}/_{(z)\;h(z)}$ 在 U 上是定义良好的函数。按照通常的方式，将每个复变量分解为实部和虚部，

$$ z_1 = x_1 + \mathbf{i}y_1, \ldots, z_N = x_N + \mathbf{i}y_N \quad \text{or} \quad z = x + \mathbf{i}y, $$

显然，每个复有理函数 f 都是 $2N$ 个实变量 x_1、…、x_N、y_1、…、$y_N =: (x,y)$ 的一个特殊的复值有理函数，我们可以将其写成如下形式

$$f(z) = f(x+\mathbf{i}y) =: \check{f}(x,y) =: f^{(1)}(x,y) + \mathbf{i}f^{(2)}(x,y) \tag{1.49}$$

其中 $f^{(1)}$、f 是唯一的实有理函数(2)。因此，每个复有理函数都是实变量上的一个 $\mathcal{C}^\infty$-函数。记 $\mathbb{C}_U(z)$ 为所有在 U 上有定义的复有理函数构成的集合。容易验证，它们构成 $\mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{C})$ 的一个复含幺子代数。回顾一下对所有整数 $1 \leqslant j \leqslant N$ 都成立的复导数的下列熟知规则：

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z_j}\right)^\vee = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \check{f}}{\partial x_j} - \mathbf{i}\frac{\partial \check{f}}{\partial y_j}\right) \quad \text{and} \quad \frac{\partial \check{f}}{\partial x_j} + \mathbf{i}\frac{\partial \check{f}}{\partial y_j} = 0, \quad \text{hence} \quad \frac{\partial \check{f}}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial f}{\partial z_j}\right)^\vee = -\mathbf{i}\frac{\partial \check{f}}{\partial y_j} \tag{1.50}$$

对于所有复有理函数 f，前两个等式容易在多项式上验证，第二个等式则正是关于复共轭变量的熟知“全纯性条件”$\partial f/\partial \bar{z}_j = 0$。接下来，设 Γ 是 U 上的一个形式联络，并且它按以下方式是复有理的：

$$\Gamma(z) = \sum_{j=1}^N \Gamma_j(z)\mathsf{d}z_j \quad \text{and} \quad \forall\, 1 \leqslant j \leqslant N: \;\; \Gamma_j \in \Big(\mathbb{C}_U(z) \otimes \mathcal{A}\Big)[[\lambda]]. \tag{1.51}$$

注意，这里的线性组合是关于复数 $\mathsf{d}z_j$ 的！我们可以在 $2N$ 实 x 和 y 坐标下重写这个表达式：

$$\begin{aligned}\Gamma(z) \;\; &= \;\; \sum_{j=1}^N \Gamma_j(z)\mathsf{d}z_j = \sum_{j=1}^N \Gamma_j(x+\mathbf{i}y)(\mathsf{d}x_j + \mathbf{i}\mathsf{d}y_j) = \sum_{j=1}^N \check{\Gamma}_j(x,y)\mathsf{d}x_j + \sum_{j=1}^N \mathbf{i}\check{\Gamma}_j(x,y)\mathsf{d}y_j \\ &=: \;\; \sum_{j=1}^N \check{\Gamma}_j^{[1]}(x,y)\mathsf{d}x_j + \sum_{j=1}^N \check{\Gamma}_j^{[2]}(x,y)\mathsf{d}y_j =: \check{\Gamma}(x,y).\end{aligned} \tag{1.52}$$

从而得到一个普通的形式联络，其在 x_j 方向上的分量为 $\check{}\Gamma_j^{[1]} = \check{}\Gamma_j$，在 y_j 方向上的分量为 $\check{}\Gamma_j^{[2]} = \mathbf{i}\check{}\Gamma_j$。

对于复拉回，我们有以下完全不足为奇但很有用的结果：设 N'为正整数，$U' \subset \mathbb{C}^{N'}$ 为非空开集，$z' = x' + \mathbf{i}y' = (z'_1, \ldots, z'_{N'})$ 为复坐标，且 $\Theta_1, \ldots \Theta_N$：$U' \to \mathbb{C}$为复有理函数，使映射 $\Theta = (\Theta_1, \ldots, \Theta_N)$：$U' \to \mathbb{C}^N$的值域包含于 U。我们记作

$$\Theta(z') = \Theta(x'+\mathbf{i}y') = \check{\Theta}(x',y') = \Theta^{(1)}(x',y') + \mathbf{i}\Theta^{(2)}(x',y') \tag{1.53}$$

其中 $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}$：$U' \to \mathbb{R}^N$为实有理函数。证明见附录。下面给出

命题 10. 设 Γ 是 $U \subset \mathbb{C}^N$ 上的复有理联络，并将公式 **(1.44)** 中的 x'_j 替换为 z'_j，据此定义复拉回 $\Theta^*\Gamma$。则

$$(\Theta^*\Gamma)^\vee = \check{\Theta}^*\check{\Gamma}. \tag{1.54}$$

1.5 平坦形式联络

设 N 是正整数， $U \subset \mathbb{R}^N$ 是非空开子集， Γ 是 U 上的形式联络。若满足以下条件，则称 Γ 为平坦的（更准确地说，形式平坦）：

$$\forall\, i,j \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant i,j \leqslant N: \quad 0 = \frac{\partial \Gamma_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_j}{\partial x_i} + \lambda\Big(\Gamma_i\Gamma_j - \Gamma_j\Gamma_i\Big). \tag{1.55}$$

显然， $\mathbb{R}^1$ 的任意开集上的形式联络都是平坦的。此外，复有理平坦性等价于如下意义下的平坦性：

命题 11. 设 $U \subset \mathbb{C}^N$ 为一个开集，且 Γ 为一个按 (1.51) 的意义定义的复有理形式联络。令 $\check{}\Gamma$ 为按 (1.52) 的意义定义的形式联络。则 Γ 在复意义下是平坦的，即

$$\forall\, i,j \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant i,j \leqslant N: \quad 0 = \frac{\partial \Gamma_i}{\partial z_j} - \frac{\partial \Gamma_j}{\partial z_i} + \lambda\Big(\Gamma_i\Gamma_j - \Gamma_j\Gamma_i\Big) \tag{1.56}$$

当且仅当 $\check{}\Gamma$ 在通常的“实意义”下是平坦的；对于 $2N$ 个实变量 (x, y)，参见 (1.55)。

证明. 我们用 R_{ij}表示 (1.56) 的右端。(1.50) 允许我们将复导数 $\partial/\partial z_i$ 替换为实导数；又由 (1.52)， $\check{}\, R_{ij}$ 等于

$$\begin{aligned}\frac{\partial \check{\Gamma}_i^{[1]}}{\partial x_j} - \frac{\partial \check{\Gamma}_j^{[1]}}{\partial x_i} + \lambda\big[\check{\Gamma}_i^{[1]}, \check{\Gamma}_j^{[1]}\big] &= -\left(\frac{\partial \check{\Gamma}_i^{[2]}}{\partial y_j} - \frac{\partial \check{\Gamma}_j^{[2]}}{\partial y_i} + \lambda\big[\check{\Gamma}_i^{[2]}, \check{\Gamma}_j^{[2]}\big]\right) \\ &= -\mathbf{i}\left(\frac{\partial \check{\Gamma}_i^{[2]}}{\partial x_j} - \frac{\partial \check{\Gamma}_j^{[1]}}{\partial y_i} + \lambda\big[\check{\Gamma}_i^{[2]}, \check{\Gamma}_j^{[1]}\big]\right)\end{aligned}$$

这恰好给出了 $\check{}\Gamma$ 的 (1.55) 右端各分量，因此结论成立。

□

特别地， $\mathbb{C}^1$ 的任意复有理形式联络都是平坦的。此外，我们提及以下众所周知的结果（证明见附录）：

命题12. 设 N、N'为正整数， $U \subset \mathbb{R}^N$和 $U' \subset \mathbb{R}^{N'}$为非空开子集， $\Theta: U' \to U$ 为一个 $\mathcal{C}^\infty$-映射，且 Γ 为 U上的平坦形式连接。那么，拉回的形式联络 $\Gamma' := \Phi^*\Gamma$（见（1.44））也是平坦的。

平坦联络的重要性体现在以下关于平行传输与路径无关的众所周知的结果中；证明见附录：

定理 13. 设 $N \geqslant 1$, $U \subset \mathbb{R}^N$ 是一个非空开子集， Γ 是一个平坦形式连接。设 $p, q \in U$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ 和 $c_0, c_1 :]a-\epsilon, b+\epsilon[\to U$ 是两条光滑路径（不仅仅是分段光滑！），满足

(i) $c_0(a) = p = c_1(a)$, $c_0(b) = q = c_1(b)$;

(ii) 存在一个光滑同伦 F，连接 c_0 和 c_1：更准确地说，存在一个开子集 $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$，其中 $]a-\epsilon, b+\epsilon[\times]-\epsilon, 1+\epsilon[\subset \mathcal{O}$, 和 $F\colon \mathcal{O} \to U$ 是一个 $\mathcal{C}^\infty$-映射，满足

$$\begin{aligned} \forall\, s \in\,]a-\epsilon, b+\epsilon[\;\;:\;\; F(s,0) = c_0(s) \quad \text{and} \quad F(s,1) = c_1(s), \\ \forall\, t \in\,]-\epsilon, 1+\epsilon[\;\;:\;\; F(a,t) = p \qquad \text{and} \qquad F(b,t) = q. \end{aligned} \tag{1.57}$$

那么，相对于 Γ，从 p 到 q 沿 c_0 的平行移动，等于相对于 Γ，从 p 到 q 沿 c_1 的平行移动:

$$ {}^{\Gamma}W_{ba}^{(c_0)} = {}^{\Gamma}W_{ba}^{(c_1)}. $$

我们将给出前述定理的一个推论，以涵盖后文讨论的所有情形：首先需要建立连续分段光滑路径（在进行路径复合时会出现）与整体光滑路径之间的关系。将 $[a,b] = [0,1]$ 特化（后文中它将是唯一的参数区间），可证明下面这个非常有用的推论；证明见附录:

推论 14. 设 $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$、$U \subset \mathbb{R}^N$ 是非空开集，Γ 是定义在 U 上的平坦形式连接，且 c_1、$c_2\colon [0,1] \to U$ 是具有相同初始点 p 和终点 q 的两条连续分段光滑路径。假设存在开集 $U' \subset \mathbb{R}^N$ 和点 $\varpi \in U'$，使得 c_1 和 c_2 的所有取值都在 $U' \subset U$ 中，并且该开集以 $\varpi \in U'$ 为中心呈星形，即:

$$ \forall\, t \in [0,1]\ \forall\, x \in U' : \quad (1-t)x + t\varpi \in U'. $$

于是，沿着 c_1 和沿着 c_2 的平行传输 $p \to q$ 相等。特别地，沿任意连续分段光滑环路 $c_3\colon [0,1] \to U' \subset U$（回忆一下 $c_3(0) = c_3(1)$）的平行传输都是平凡的，即等于 $1 \in \mathcal{A}$。

2 Drinfel'd结合子及其恒等式

2.1 Knizhnik-Zamolodchikov 联络与 Drinfel'd-Kohno（李）代数

我们只需在讨论五边形方程时用到本节的内容，见 §2.4。不过，这些几何考量或许能为后续各节中的构造提供动机。以下定义出自 T.Kohno 的著作，[23, 第 142 页，式 (1.1.4)] 和 [23, 第 146 页，式 (1.3.2)]:

定义 15. 设 $n \geqslant 2$ 是一个整数，$\mathbb{K}$ 是一个特征为零的域。第 n 个 Drinfel'd–Kohno 代数是由 n^2-n 个元素生成的带单位结合 $\mathbb{K}$–代数 $\mathcal{T}_n$

$$ t_{ij}, \qquad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n $$

满足以下关系，这些关系有时称为无穷小辫群关系：

$$t_{ij} - t_{ji} = 0 \qquad \forall\ 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, \tag{2.1a}$$

$$[t_{ij} + t_{ik}, t_{jk}] = 0 \qquad \forall i, j, k \in \{1, \ldots, n\} \quad \textit{such that } \#\{i, j, k\} = 3, \tag{2.1b}$$

$$[t_{ij}, t_{kl}] = 0 \qquad \forall i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\} \quad \textit{such that } \#\{i, j, k, l\} = 4. \tag{2.1c}$$

其中 $[\ ,\ ]$ 表示结合代数中的交换子 $[A, B] = AB - BA$。

鉴于第一个关系式 (2.1a)，Drinfel'd-Kohno 代数也可以仅用$\binom{n}{2}$ 生成元 t_{ij} 来定义，其中 $i < j$。不过，在具体计算中，使用「无序」生成元 $t_{ij} = t_{ji}$ 实用得多（可以将指标视为二元素集合 $\{i, j\}$）。上述定义的李代数对应物更为人熟知：

定义 16. 设 $n \geqslant 2$ 为一个整数， $\mathbb{K}$ 为特征为零的域。第 n 个 Drinfel'd–Kohno 李代数是由 $n^2 - n$ 个生成元t_{ij}生成的 $\mathbb{K}$–李代数 $\mathfrak{t}_n$，满足关系式 (2.1a)、(2.1b) 和 (2.1c)，这些关系式被视为由 t_{ij}生成的自由李代数中的李括号。

不难看出（尽管这对于后续各小节的证明并非必要），Drinfel'd-Kohno（李）代数是通常意义下带有关系的自由（李）代数，即左伴随函子的自由代数：对于任意含幺结合代数 $\mathcal{A}$ （分别为李代数 $\mathfrak{g}$），代数态射集合 $\mathcal{T}_n \to \mathcal{A}$ （分别为李代数态射集合 $\mathfrak{t}_n \to \mathfrak{g}$）与 A （分别为 $\mathfrak{g}$）中满足关系式 (2.1a)、(2.1b) 和 (2.1c) 的元素集合 $A_{ij} = A_{ji}$ （$1 \leqslant i < j \leqslant n$）之间存在自然双射；这些关系由态射在生成元 ($t_{ij}$) 上的取值所确定。

在下文中，我们将采用更一般的情形，即考虑一个一般的含幺结合复代数 $\mathcal{A}$，其元素 $A_{ij} = A_{ji}$ 满足上述关系。不难验证，每个 $\mathcal{T}_n$ 都同构于李代数 $\mathfrak{t}_n$的泛包络代数，但我们不需要这一结果。

例如，将由符号a_1、...、a_n生成的自由含幺结合代数（分别为自由含幺结合交换代数）记作 $\mathbb{K}\langle a_1、\ldots、\ a_n\rangle$（分别记作 $\mathbb{K}[a_1, \ldots, a_n]$），则有以下同构

$$\mathcal{T}_2 \ \cong\ \mathbb{K}\langle t_{12}\rangle \ \cong\ \mathbb{K}[t_{12}] \quad \text{and} \quad \mathcal{T}_3 \ \cong\ \mathbb{K}\langle t_{12}, t_{23}\rangle \otimes \mathbb{K}[t_{12} + t_{13} + t_{23}].$$

第一个同构显然。对于第二个同构，先利用关系式 (2.1a) 将所有内容表示为关于 t_{ij}和 $i < j$的形式，再将 $\big(t_{12}、\ t_{13}、\ t_{23}\big)$ 基变换为$\big(t_{12}、\ t_{23}、\ \Lambda :=\ t_{12} + t_{13} + t_{23}\big)$，并注意到定义 15 中关于$\mathcal{T}_3$ 的关系式 (2.1b) 等价于 $[t_{12}, \Lambda] = 0$ 和 $[t_{23}, \Lambda] = 0$。当然，条件 (2.1c) 对于$n = 3$是空的。

回到一般的 n，进一步注意，所有 n 字母的置换群 S_n，通过将每个生成元 t_{ij} 映射到 $t_{\sigma(i)\sigma(j)}$，以含幺代数自同构的方式作用在 $\mathcal{T}_n$ 的左侧。接下来，对于每个整数 $n \geqslant 2$，令 $Y_n \subset \mathbb{C}^n$ 为开子集（参见例如 [18, 第267]页）

$$Y_n \coloneqq \big\{ z \in \mathbb{C}^n \ \big|\ \forall\ i, j \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant i, j \leqslant n :\ \text{if } i \neq j \text{ then } z_i \neq z_j \big\}$$

这就是众所周知的有序构型空间： Y_n 中的每个元素都包含了平面上 n 个可区分粒子的坐标信息，且任意两个粒子都不占据同一位置。

回顾一下，坐标的通常置换定义了置换群 S_n 在 $\mathbb{C}^n$ 上的良定义右作用，即对每个置换 $\sigma \in S_n$，都有 $z = (z_1, \ldots, z_n) \mapsto (z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(n)}) =: z\sigma$ 。显然，这个右作用保持其自由作用的空间 Y_n 不变，而商空间 $X_n := Y_n/S_n$ 是一个复 n 维流形，称为（无序）构型空间。构型空间已得到广泛研究，例如参见书籍 [14]。已知 X_n 和 Y_n 的基本群分别同构于 n 股辫群 B_n和 n股纯辫群 $P_n \subset B_n$。此外，尽管这一事实对下文并非必要，“无穷小辫群关系”这一名称源于以下事实：关于由自由代数所诱导的自然滤过完备化的第 n 个 Drinfel'd-Kohno 代数，与关于增广理想完备化的纯辫群 P_n 的群代数完备化同构；详情参见例如 [22] 和 [23, 第147页命题1.3。3]

以下这个著名的（形式）联络非常重要，参见 [19]:

定义 17. 设 $n \geqslant 2$ 和 $\mathcal{A}$ 为含有 $n(n-1)/2$ 个元素 $A_{ij} = A_{ji}$ （由 $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ 索引）的含幺结合复代数，这些元素满足无穷小辫群关系 (2.1b) 和 (2.1c)，其中生成元 t_{ij} 被元素 A_{ij} 所替代。形式 Knizhnik–Zamolodchikov (KnZa) 联络 ${}^{(n)}\Gamma_{\text{КнЗа}}$ 在 Y_n 上（关于 $\mathcal{A}$）定义如下:

$$ {}^{(n)}\Gamma_{\text{КнЗа}}(z_1, \ldots, z_n) := \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{A_{ij}}{z_i - z_j}(\mathsf{d}z_i - \mathsf{d}z_j). \tag{2.2} $$

显然，KnZa-联络在 (1.51) 的意义下是复有理的。我们有如下结果。

定理 18. 对所有整数 $n \geqslant 2$ ，Knizhnik–Zamolodchikov 联络（形式上）是平坦的。

关于该命题的详细证明可见 C.Kassel 的著作 [18, p.452-454]。容易看出，对于所有整数 $n \geqslant 2$ ，KnZa-联络${}^{(n)}\Gamma_{\text{КнЗа}}$ 在所有关于平移 $T_v\colon Y_n \to Y_n\colon z \mapsto z + (v, v, \ldots, v)$的拉回下（对所有 $v \in \mathbb{C}$），以及关于所有由 $z \mapsto pz$ 给出的复数伸缩 $H_p\colon Y_n \to Y_n$ 的拉回下（对所有$p \in \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$），均保持不变，也就是说，$T_v^* \left({}^{(n)}\Gamma_{\text{КнЗа}}\right) = {}^{(n)}\Gamma_{\text{КнЗа}}$ 且 $H_p^* \left({}^{(n)}\Gamma_{\text{КнЗа}}\right) = {}^{(n)}\Gamma_{\text{КнЗа}}$。还要注意，对于任意整数 $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$，如果“粒子 i 靠近粒子 j”（即距离 $|z_i - z_j|$ 变得“非常小”），那么 KnZa-联络中包含 A_{ij} 的项相较于其他项将变得“非常大”：这一直觉将为后续各节中路径的选择提供依据。

对于 $n = 2$ 和 $n = 3$ ，存在以下 $\mathbb{C}^2$ 和 $\mathbb{C}^3$的开集之间的同构，它们由显式的双射复有理映射给出:

$$ Y_2 \cong \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C} \quad \text{and} \quad Y_3 \cong \mathbb{C}^{\times\times} \times \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C} $$

其中， $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C}\setminus\{0\}$ 和 $\mathbb{C}^{\times\times} := \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ 分别是仅去掉一个点的复平面和去掉两个点的复平面——后者将在下文中发挥重要作用。事实上，可逆线性映射 $(z_1, z_2) \mapsto (z_1 - z_2, z_1 + z_2)$ 给出了第一个同构。对于 $n = 3$，由以下公式给出的可逆有理映射 $Y_3 \to \mathbb{C}^{\times\times} \times \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}$

$$(z_1, z_2, z_3) \mapsto \left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}, z_3 - z_1, z_1\right) \quad \text{with inverse} \quad \vartheta : (z, v, w) \mapsto (w, zv+w, v+w) \tag{2.3}$$

定义了关于 Y_3 的一个同构，另见 [8, 第 1453] 页或 [18, 第 469 页，式 (7.3)]。通过初等计算可知，对于 $n = 3$，相对于有理映射 $\vartheta\colon \mathbb{C}^{\times\times} \times \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C} \to Y_3$（见 (2.3)），${}_{(3)}\Gamma_{\text{КнЗа}}$ 的拉回等于

$$\left(\vartheta^* \left({}^{(3)}\Gamma_{\text{КнЗа}}\right)\right)(z, v, w) = \left(\frac{A_{12}}{z} + \frac{A_{23}}{z-1}\right)\mathsf{d}z \; + \; \frac{A_{12} + A_{13} + A_{23}}{v}\mathsf{d}v \tag{2.4}$$

这里用到了命题 10 以及等式 (1.44) 和 (1.54)。这为以下各节所用的联络提供了重要动机，因为它们与前一等式 (2.4) 右侧的第一项相似。还要注意，置换群 S_3 在 Y_3 上的右作用，可以借助映射 (2.3) 转移到 $\mathbb{C}^{\times\times} \times \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}$，并投影到双重穿孔平面 $\mathbb{C}^{\times\times}$。容易计算得出，这在 $\mathbb{C}^{\times\times}$ 上给出以下映射：

$$\tau_{12}(z) = \tfrac{z}{z-1}, \quad \tau_{23}(z) = \tfrac{1}{z}, \quad \tau_{13}(z) = 1 - z, \quad \zeta(z) = \tfrac{1}{1-z}, \quad \zeta^{-1}(z) = \zeta\big(\zeta(z)\big) = \tfrac{z-1}{z} \tag{2.5}$$

其中， τ_{ij} 表示交换 i和 j的对换，而 ζ 表示循环置换 (1, 2, 3) $\mapsto$ (3, 1, 2)。无需借助构型空间Y_3，也可以直接证明，(2.5) 中的映射是双重穿孔平面上的良定义复有理双射，并满足对称群 S_3 右作用的恒等式。

2.2 Drinfel'd结合子：定义与初等性质

本节讨论 Drinfel’d结合子：我们不采用通常的定义，而是将 [18, 第465页引理 XIX.63] 中的陈述作为定义。我们感兴趣的平行移动在该处记作 $G_a(1-a)$，其中 $a = \delta$。

设 $\mathcal{A}$ 是任意复含幺结合代数。令 $U :=]0,1[\subset \mathbb{R}$。对于任意给定的两个元素 $A, B \in \mathcal{A}$，定义形式联络

$$\Gamma(B, A)(x) := \left(\frac{1}{x}A + \frac{1}{x-1}B\right)\mathsf{d}x \tag{2.6}$$

在 U 上显然定义良好，而且还是平坦形式连接，见 §1.5，因为 U 是一维的。使用它的动机之一，是.....的实版本

（2.4）的第一项。另请注意，由下式定义的区间反演 $\iota:\ ]0,\ 1[\ \to\ ]0,\ 1[$

$$\iota(x) = 1 - x \tag{2.7}$$

定义良好且光滑，并且容易计算拉回联络

$$\iota^*\Gamma(B, A) = \Gamma(A, B). \tag{2.8}$$

对于所有的 $\delta, \epsilon \in J := \ ]0, 1/4]$，我们定义从 δ到 $1-\epsilon$的仿射路径 $c_{(\delta\epsilon)}: [0,1] \to U$，即

$$c_{(\delta\epsilon)}(s) := (1-s)\delta + s(1-\epsilon) = \delta + s(1-\delta-\epsilon). \tag{2.9}$$

Then

$$\Gamma(B, A)^{(c_{(\delta\epsilon)})}(s) = \frac{1-\delta-\epsilon}{\delta + s(1-\delta-\epsilon)}A + \frac{1-\delta-\epsilon}{\delta - 1 + s(1-\delta-\epsilon)}B. \tag{2.10}$$

我们关注沿路径 $c_{(\delta\epsilon)}$从 δ到 $1-\epsilon$的平行移动 ${}^{\Gamma_{(B,\ A)}}W^{(c_{(\delta\epsilon)})}_{10}$，定义和记号见 §1.4。令 $J' := J \times J$，由 §1.3 中描述的一般理论可知，映射 $(\delta, \epsilon) \mapsto {}^{\Gamma_{(B,\ A)}}W^{(c_{(\delta\epsilon)})}_{10}$是代数$\Big($函数空间$\big(J', \mathbb{C}\big) \otimes \mathcal{A}\Big)[[\lambda]]$的一个元素，见 (1.38)。它可以用迭代积分表示如下：作变量替换 $u := \delta + s(1-\delta-\epsilon)$，并令 $A_0 := A, A_1 := B$。因此，

$$\begin{aligned}{}^{\Gamma(B,A)}W^{(c_{(\delta\epsilon)})}_{10} = 1 \\ + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r \sum_{i_1,\dots,i_r=0}^{1} \left(\int_\delta^{1-\epsilon} \frac{1}{u_1 - i_1} \left(\int_\delta^{u_1} \frac{1}{u_2 - i_2} \left(\cdots \left(\int_\delta^{u_{r-1}} \frac{1}{u_r - i_r} \mathsf{d}u_r \right) \cdots \right) \mathsf{d}u_2 \right) \mathsf{d}u_1 \right) \\ A_{i_1} \cdots A_{i_r}\end{aligned} \tag{2.11}$$

可以预料，每当 $\delta \to 0$ 或$\epsilon \to 0$时，前面的表达式都会变得奇异：为了看清这一点，暂且假设 A 和 B 可交换。显然，$\Gamma(B, A)^{(c_{(\delta\epsilon)})}$ 与其原函数可交换，按照命题 2 的公式 (1.21) 进行简单计算可得

$$\text{if } AB = BA \quad \text{ then } \quad {}^{\Gamma(B,A)}W^{(c_{(\delta\epsilon)})}_{10} = e^{\lambda \ln(\epsilon) B} e^{\lambda\left(\ln(1-\epsilon)A - \ln(1-\delta)B\right)} e^{-\lambda \ln(\delta) A} \tag{2.12}$$

这表明，平行移动的发散部分是左因子和右因子；在这一特定情形下，当 $\delta \to 0$ 或 $\epsilon \to 0$ 时，它们呈对数发散，而中间因子则收敛至1。

回到一般情形，为了捕捉奇异项，我们将计算分为两部分，并以中点 $1/2$ 为界：考虑以下“指数半路径” $\tilde{c}_{(1,\delta)}$、$\tilde{c}_{(2,\epsilon)}: \ [0,1] \to U$定义为

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{(1,\delta)}(s) &:= \tfrac{1}{2} e^{\ln(2\delta)(1-s)} \quad \text{joining} \quad \delta \ \to \ \tfrac{1}{2}, \\ \tilde{c}_{(2,\epsilon)}(s) &:= 1 - \tfrac{1}{2} e^{\ln(2\epsilon)s} \quad \text{joining} \quad \tfrac{1}{2} \ \to \ 1 - \epsilon. \end{aligned} \tag{2.13}$$

因此，复合路径 $\tilde{c}_{(2,\epsilon)} * \tilde{c}_{(1,\delta)}$ 是连续且分段光滑的，其奇异集为 $D = \{0, 1/2, 1\}$，并连接 $\delta \to 1 - \epsilon_\circ$ 以下连续分段光滑重参数化 $\gamma\colon\ [0,1] \to [0,1]$（其奇异集为 $\{0, 1/2, 1\}$）显然将仿射路径 $c_{(\delta\epsilon)}$ 与 $\tilde{c}_{(2,\epsilon)} * \tilde{c}_{(1,\delta)}$ 连接起来：

$$\gamma(s) \coloneqq \begin{cases} \frac{\frac{1}{2}e^{\ln(2\delta)(1-2s)} - \delta}{1-\delta-\epsilon} & \text{if } 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ \frac{1-\frac{1}{2}e^{\ln(2\delta)(2s-1)} - \delta}{1-\delta-\epsilon} & \text{if } \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{hence} \quad c_{(\delta\epsilon)} \circ \gamma = \tilde{c}_{(2,\epsilon)} * \tilde{c}_{(1,\delta)}. \tag{2.14}$$

利用区间反演 ι 作为连续分段光滑重参数化 $[0,1] \to [0,1]$（由 (2.7) 给出），我们可以写成

$$\tilde{c}_{(1,\delta)} = \iota \circ \tilde{c}_{(2,\delta)} \circ \iota.$$

由于 平行移动不依赖于重参数化，见 (1.45)，我们得到 t

$$\begin{aligned} {}^{\Gamma(B,A)}W_{10}^{(c_{(\delta\epsilon)})} &= {}^{\Gamma(B,A)}W_{10}^{(c_{(\delta\epsilon)}\circ\gamma)} \overset{(2.14)}{=} {}^{\Gamma(B,A)}W_{10}^{(\tilde{c}_{(2,\epsilon)} * \tilde{c}_{(1,\delta)})} \\ &\overset{(1.47)}{=} {}^{\Gamma(B,A)}W_{10}^{(\tilde{c}_{(2,\epsilon)})}\ {}^{\Gamma(B,A)}W_{10}^{(\iota\circ\tilde{c}_{(2,\delta)}\circ\iota)} \\ &\overset{(1.48),(2.8)(1.46)}{=} {}^{\Gamma(B,A)}W_{10}^{(\tilde{c}_{(2,\epsilon)})}\ \left({}^{\Gamma(A,B)}W_{10}^{(\tilde{c}_{(2,\delta)})}\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

由此可知，只需计算沿指数半路径$\tilde{c}_{(2,\epsilon)}$的平行移动；沿另一半路径 $\tilde{c}_{(1,\delta)}$ 的平行移动可由对称性以及交换 A 和 B得到。

选择 路径 $\tilde{c}_{(2,\epsilon)}$ 中的指数函数，在计算时便显而易见 g

$$\Gamma(B,A)^{(\tilde{c}_{(2,\epsilon)})}(s) = \ln(2\epsilon)B + \frac{-\ln(2\epsilon)}{2e^{-\ln(2\epsilon)s} - 1}A, \tag{2.16}$$

并且我们看到， B 前面的项与 s无关。

引理19. 我们在代数 $\Big($函数空间$\big(]0,1/4], \mathcal{C}^\infty_{\{0,1\}}([0,1],\mathbb{C})\big) \otimes \mathcal{A}\Big)[[\lambda]]$中，对平行移动 $s \mapsto {}^{\Gamma}{}_{(B,\ A)}\ W^{(\tilde{c}_{(2,\epsilon)})}\ {}_{s0}$有如下因式分解

$${}^{\Gamma(B,A)}W_{s0}^{(\tilde{c}_{(2,\epsilon)})} = e^{\lambda\ln(\epsilon)sB}\psi_\epsilon(B,A)(s) \tag{2.17}$$

其中 $(s,\epsilon) \mapsto \psi_\epsilon(B,A)$ (s) 属于有界项的群 $\mathcal{G}_\mathcal{B}$（相对于 (s,ϵ)，参见和（ *(1.31)* 1.32））。我们令

$$\psi_\epsilon(B,A) \coloneqq \psi_\epsilon(B,A)(1).$$

此外，存在定义良好的元素 $\psi(B,A) \in \mathcal{A}[[\lambda]]$，使得以下极限存在

$$\lim_{\epsilon\to 0}\psi_\epsilon(B,A)(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s = 0, \\ \psi(B,A) \in \mathcal{A}[[\lambda]] & \text{if } 0 < s \leqslant 1, \end{cases} \tag{2.18}$$

按照 §*1*.3 中讨论的极限意义，参见 (1.23)、(1.25) 和命题 3。

证明。在 (2.16) 中，我们令

$$Y_\epsilon(s) \coloneqq \ln(2\epsilon)B \quad \text{and} \quad Z_\epsilon(s) \coloneqq \frac{-\ln(2\epsilon)}{2e^{-\ln(2\epsilon)s}-1}A$$

并使用分解陈述 (1.20)：

$$^{\Gamma(B,A)}W_{s0}^{(\tilde{c}_{(2,\epsilon)})} = U_{s0}^{(\epsilon)}\Xi_{s0}^{(\epsilon)}. \tag{2.19}$$

显然，初始条件为 1 的形式线性常微分方程 $\mathsf{d}U_{(\cdot 0}^{\epsilon)} = \mathsf{d}s = \lambda Y_\epsilon U_{\cdot 0}^{(\epsilon)}$ 可直接由指数函数 $U_{s0}^{(\epsilon)} = e^{\lambda \ln(2\epsilon)^{sB}}$ 给出，因此我们需要求解初始条件为 1 的形式线性常微分方程，

$$\frac{\mathsf{d}\Xi_{s0}^{(\epsilon)}}{\mathsf{d}s}(s) = e^{-\lambda\ln(2\epsilon)sB}Z_\epsilon(s)e^{\lambda\ln(2\epsilon)sB}\Xi_{s0}^{(\epsilon)} = e^{-\lambda\ln(2\epsilon)s\mathsf{ad}_B}\big(Z_\epsilon(s)\big)\Xi_{s0}^{(\epsilon)}$$

其中，$\mathsf{ad}_B\colon\ \mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 表示通常的伴随映射 $\xi\mapsto B\xi-\xi B$；我们使用了这一众所周知的恒等式：指数函数的共轭作用等于 ad 的指数，这在李群理论中是标准结果，参见例如 [20, 第 38 页，推论 4.25], ，也可以通过代数方法轻松证明。我们可以用迭代积分表示解 $\Xi_{s0}^{(\epsilon)}$ ，见 (1.14)。为便于计算，采用以下缩写：令

$$\nu \coloneqq -\ln(2\epsilon) \quad \text{and} \quad \tau \coloneqq \nu s, \tau_i \coloneqq \nu s_i \ \ \forall\, i\in\mathbb{N}.$$

由于 $0<2\epsilon\leqslant 1/2<1$ ，可得 $\nu>0$ ，且极限 $\lim_{\epsilon\to 0}$ 对应于 $\lim_{\nu\to+\infty}$。于是 Ξ_ϵ 由下式给出：

$$\begin{aligned}\Xi_{s0}^{(\epsilon)} \;=\; & 1+\sum_{r=1}^{\infty}\lambda^r\sum_{\ell_1,\dots,\ell_r=0}^{\infty}\frac{\lambda^{\ell_1+\cdots+\ell_r}}{\ell_1!\cdots\ell_r!}\mathsf{ad}_B^{\ell_1}(A)\cdots\mathsf{ad}_B^{\ell_r}(A)\\ & \underbrace{\left(\int_0^{\nu s}\frac{\tau_1^{\ell_1}}{2e^{\tau_1}-1}\left(\int_0^{\tau_1}\frac{\tau_2^{\ell_2}}{2e^{\tau_2}-1}\left(\cdot\cdot\left(\int_\delta^{\tau_{r-1}}\frac{\tau_r^{\ell_r}}{2e^{\tau_r}-1}\mathsf{d}\tau_r\right)\cdot\cdot\right)\mathsf{d}\tau_2\right)\mathsf{d}\tau_1\right)}_{\coloneqq I_{r,\ell_1,\dots,\ell_r}(s,\nu)}\end{aligned} \tag{2.20}$$

我们将证明，对于所有非负整数 r、ℓ_1、…、ℓ_r，满足 $r\geqslant 1$，以及所有 $s\in[0,1]$，(2.20) 末尾的迭代实积分 $I_{r,\ell_1,\dots,\ell_r}(s,\nu)$ 收敛到一个非负实数，其中 $\nu\to+\infty$：这将证明极限 $\lim_{\epsilon\to 0}\Xi_\epsilon(s)$ 存在。当 $s=0$ 时，这显然成立，因为所有这些积分都为零。对于 $s>0$，关键的观察是，所有实数 τ_1、…、τ_r 都是非负的，因此所有函数 $\tau_i\mapsto\frac{\tau_i^{\ell_i}}{2e^{\tau_i}-1}$、$i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ 在区间 $[0,\nu s]$ 上均取非负值。根据黎曼积分的单调性可知，增大 ν 会使区间 $[0,\nu s]$ 变大，进而使迭代积分的值增大：因此，由 $\nu\mapsto I_{r,\ell_1,\dots,\ell_r}(s,\nu)$ 给出的函数 $[\ln(2)\ +\infty[\ \mapsto\ [0,+\infty[$ 是严格递增的。根据一个众所周知的原理，即每个递增的有界实数序列都收敛。

只需证明所有积分 $I_{r,\ell_1,\ldots,\ell_r}(s,\nu)$ 均存在一个与所有 $s\in[0,1]$ 和 $\nu\in[\ln(2)\ +\infty[$ 无关的上界：事实上，初等不等式 $e^{\tau_i}-1\geqslant 0$ 对所有正整数 i 均成立（因为 $\tau_i\geqslant 0$），这意味着

$$\forall\, i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}:\quad 2e^{\tau_i}-1=e^{\tau_i}+e^{\tau_i}-1\geqslant e^{\tau_i},\quad \text{hence}\quad \frac{\tau_i^{\ell_i}}{2e^{\tau_i}-1}\leqslant \tau_i^{\ell_i}e^{-\tau_i},$$

并且积分 $I_{r,\ \ell_1,\ \ldots\ldots,\ \ell_r}(s,\nu)$ 可以由以下内容控制

$$I_{r,\ell_1,\ldots,\ell_r}(s,\nu)\leqslant\left(\int_0^{\nu s}\tau_1^{\ell_1}e^{-\tau_1}\mathsf{d}\tau_1\right)\cdots\left(\int_0^{\nu s}\tau_r^{\ell_r}e^{-\tau_r}\mathsf{d}\tau_r\right)\leqslant \ell_1!\cdots\ell_r!$$

得益于众所周知的积分（对所有非负整数 n）

$$\int_0^\infty\tau^n e^{-\tau}\mathsf{d}\tau=n!.$$

这表明极限 $\lim_{\epsilon\to 0}\Xi_\epsilon(s)$ 存在，且不依赖于 $0<s\leqslant 1$。利用分解方程 (2.19)、$\ln(2\epsilon)\ =\ \ln(2)+\ln(\epsilon)$ 这一显然事实，并定义

$$\psi_\epsilon(B,A)(s)\coloneqq e^{\lambda\ln(2)sB}\Xi_\epsilon(s)$$

这给出了分解方程 (2.17) 和极限 (2.18)。特别地，这意味着$\epsilon\mapsto\psi_\epsilon(B,A)$ 有界，也就是说，它是 $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$ 的一个元素。 □

这个引理——连同分解方程 (2.15)——有以下直接且非常重要的推论

定理 20. 使用上述记号：沿路径 $c_{(\delta\epsilon)}$（见 (2.9)）的平行移动 ${}^{\Gamma_{(B,\ A)}}W^{(c_{(\delta\epsilon)})}_{\ 10}$ 可按以下方式进行因式分解

$${}^{\Gamma(B,A)}W_{10}^{(c_{(\delta\epsilon)})}=e^{\lambda\ln(\epsilon)B}\Phi_{\delta,\epsilon}(A,B)e^{-\lambda\ln(\delta)A},\tag{2.21}$$

with

$$\Phi_{\delta,\epsilon}(A,B)\coloneqq\psi_\epsilon(B,A)\left(\psi_\delta(A,B)\right)^{-1}.\tag{2.22}$$

下列极限存在,

$$\lim_{(\delta,\epsilon)\to(0,0)}\Phi_{\delta,\epsilon}(A,B)\coloneqq\Phi(A,B)\ \in\ \mathcal{A}[[\lambda]],\tag{2.23}$$

并称为相对于 A、$B\in\mathcal{A}$ 的 Drinfel'd结合子。

我们保留了所有文献中使用的 Drinfel'd结合子的记号，尽管将参数置换为 $\Phi(B,A)$ 会使恒等式中的各项“更好地连接”。下面列出 Drinfel'd结合子的一些性质：

$$\Phi_{\delta,\epsilon}(A,B)^{-1}=\Phi_{\epsilon,\delta}(B,A)\quad\text{hence}\quad\boxed{\Phi(A,B)^{-1}=\Phi(B,A)}\tag{2.24}$$

这可由定义 (2.22) 和 (2.23) 立即推出。接下来，计算 (2.21) 中 λ^1 的系数，我们从右侧得到

$$\ln(\epsilon)B + (\Phi_{\delta,\epsilon}(A,B))_1 - \ln(\delta)A$$

以及左边的积分（比较（2.11））

$$\int_\delta^{1-\epsilon} \frac{du}{u}A - \int_\delta^{1-\epsilon} \frac{du}{1-u}B = \ln(1-\epsilon)A - \ln(\delta)A + \ln(\epsilon)B - \ln(1-\delta)B$$

表明

$$(\Phi_{\delta,\epsilon}(A,B))_1 = \ln(1-\epsilon)A - \ln(1-\delta)B, \quad \text{hence} \quad \boxed{\Phi(A,B) - 1 \in \lambda^2\mathcal{A}[[\lambda]]}.$$

因为显然 $\ln(1-x) \to 0$ if $x \to 0$，由此 $\lim_{(\delta,\epsilon)\to(0,0)} (\Phi_{\epsilon,\ \delta}(B,A))_1 = 0$。进一步假设存在元素 $\Lambda, \Lambda' \in \mathcal{A}$，它们对 A, B 是中心的，具体来说

$$[\Lambda, A] = 0 = [\Lambda', A] \ \text{ and } \ [\Lambda, B] = 0 = [\Lambda', B] \ \text{ and } \ [\Lambda, \Lambda'] = 0.$$

由于联络 $\Gamma(B+\Lambda', A+\Lambda)$ 在路径 $c_{(\delta\epsilon)}$, $\Gamma(B+\Lambda', A+\Lambda)^{(c_{(\delta\epsilon)})}$ 上的取值，见（2.10），等于 $\Gamma(\Lambda', \Lambda)^{(c_{(\delta\epsilon)})} + \Gamma(B, A)^{(c_{(\delta\epsilon)})}$，我们可以对 $Y = \Gamma(\Lambda', \Lambda)^{(c_{(\delta\epsilon)})}$、$Z = \Gamma(B, A)^{(c_{(\delta\epsilon)})}$使用分解陈述（1.20），并且由于 Λ 和 Λ' 与 $\mathcal{A}$ 中所有字均可交换（其字母为 A、B、Λ 或 Λ'，故 $U_{\cdot 0}^{-1} Z U_{\cdot 0} = Z$ 符合（1.20）），我们可以使用（1.21）和（2.12）得出

$$\Phi_{\delta,\epsilon}(A+\Lambda, B+\Lambda') = e^{\lambda\left(\ln(1-\epsilon)\Lambda - \ln(1-\delta)\Lambda'\right)} \Phi_{\delta,\epsilon}(A,B)$$

因此，取极限 $(\delta,\epsilon) \to (0,0)$,

$$\text{if } \Lambda, \Lambda' \text{ are central for } A, B: \quad \boxed{\Phi(A+\Lambda, B+\Lambda') = \Phi(A,B)}. \tag{2.25}$$

请注意——不过后文并不需要这一点——如果 $\mathcal{A}$ 具有双代数结构（见 [18],第 III.2 节），且 A、$B \in \mathcal{A}$ 是本原元，那么 $\Phi(A,B)$就是一个（形式）类群元（见 [9], 第 836 页）。特别是，当 $\mathcal{A} = \mathbb{C}\langle A, B\rangle$ 时，Drinfel'd结合子因此是一个形式指数级数，其指数是一个形式幂级数中的元素，该幂级数的系数取自由两个元素生成的自由李代数。

2.3 六边形方程

设 $\mathcal{A}$ 是任意复含幺结合代数。设 A、B、$C \in \mathcal{A}$ 是三个任意元素，使得它们的和 $\Lambda := A + B + C$ 与这三个元素都可交换，即

$$A\Lambda = \Lambda A, \ B\Lambda = \Lambda B, \ C\Lambda = \Lambda C. \tag{2.26}$$

一个重要的特例是任意选取 A 和 B，并令 $C=-A-B$ whence$\Lambda=0$。另一个重要的特例是 $\mathcal{A}=\mathcal{T}_3$，其中 $A=t_{12}$、$B=t_{23}$ 和 $C=t_{13}$。我们希望证明 Drinfel'd结合子的六边形方程，即

$$e^{\lambda\pi\mathbf{i}\Lambda} \;=\; e^{\lambda\pi\mathbf{i}A}\;\Phi(C,A)\;e^{\lambda\pi\mathbf{i}C}\;\Phi(B,C)\;e^{\lambda\pi\mathbf{i}B}\;\Phi(A,B). \tag{2.27}$$

这个方程具有显而易见的循环对称性 $A\to B\to C\to A$，并且包含复数 π 和 i。以下数据并非牵强附会：令 $U\subset\mathbb{C}$ 为穿孔两次的复平面，即

$$U\coloneqq\mathbb{C}^{\times\times}\coloneqq\mathbb{C}\setminus\{0,1\}.$$

选取联络 $\Gamma(B,A)$ 的复数版本，见 (2.6)，即

$$\Gamma(B,A)\coloneqq\left(\frac{1}{z}A+\frac{1}{z-1}B\right)\mathrm{d}z \tag{2.28}$$

它是平坦的，见命题 11。最初的动机是使用构型空间 Y_3 上的 KnZa-联络$_{(3)}\Gamma_{\text{КнЗа}}$，见 (2.2)，以及它的拉回，见 (2.4) 的第一项。有些公式在 Y_3 上看起来更自然，但在穿孔两次的复平面上计算更快。

回忆由 $\zeta(z)=\frac{1}{1-z}$ 和 $\zeta^{-1}(z)=\frac{z-1}{z}$ 定义的有理映射 $\zeta,\zeta\circ\zeta=\zeta^{-1}\colon\mathbb{C}^{\times\times}\to\mathbb{C}^{\times\times}$，它们来自 Y_3 中的循环置换，见 (2.5)。我们计算联络 (2.28) 的拉回：利用命题 10，令 $C\coloneqq-A-B=C-\Lambda$ 后可得

$$\begin{aligned}\left(\zeta^{*}\Gamma(B,A)\right)(z) \qquad &= \qquad \Gamma(B,A)\left(\frac{1}{1-z}\right)\frac{1}{(1-z)^2}=\frac{1}{1-z}A+\frac{1}{z(1-z)}B\\ &\overset{\text{partial fraction dec.}}{=}\quad \frac{1}{z}B+\frac{-A-B}{z-1}=\Gamma(\tilde{C},B)(z).\end{aligned} \tag{2.29}$$

反复迭代这个公式（回想一下 $\zeta\circ\zeta=\zeta^{-1}$）可得

$$\left(\left(\zeta^{-1}\right)^{*}\Gamma(B,A)\right)(z)=\Gamma(A,\tilde{C})(z). \tag{2.30}$$

现在我们将考虑关于联络 $\Gamma(B,A)$ 的平行移动，它沿着一个依赖于参数 $\delta\in J=\;]0$ 的连续分段光滑环路 c_δ 进行，并以点 $\delta\in\mathbb{C}^{\times\times}$ 为基点；该环路由六条路径复合而成，

$$c_\delta\coloneqq c_{(\mathrm{VI},\delta)}*\Big(c_{(\mathrm{V},\delta)}*\Big(c_{(\mathrm{IV},\delta)}*\big(c_{(\mathrm{III},\delta)}*\big(c_{(\mathrm{II},\delta)}*c_{(\mathrm{I},\delta)}\big)\big)\Big)\Big) \tag{2.31}$$

给定为

$$
\begin{array}{lcccccccc}
c_{(\mathrm{I},\delta)}(s) & \coloneqq & (1-s)\delta + s(1-\delta) & = & \delta + s(1-2\delta) & \text{joining} & \delta & \to & 1-\delta, \\
c_{(\mathrm{II},\delta)}(s) & \coloneqq & \frac{1-\frac{\delta}{2}-\frac{\delta}{2}e^{\mathbf{i}\pi s}}{1-\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}e^{\mathbf{i}\pi s}} & = & 1-\frac{\delta}{\left(1-\frac{\delta}{2}\right)e^{-\mathbf{i}\pi s}+\frac{\delta}{2}} & \text{joining} & 1-\delta & \to & \frac{1}{1-\delta}, \\
c_{(\mathrm{III},\delta)}(s) & \coloneqq & \zeta\left(c_{(\mathrm{I},\delta)}(s)\right) & = & \frac{1}{1-\delta-s(1-2\delta)} & \text{joining} & \frac{1}{1-\delta} & \to & \frac{1}{\delta}, \\
c_{(\mathrm{IV},\delta)}(s) & \coloneqq & \zeta\left(c_{(\mathrm{II},\delta)}(s)\right) & = & \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{2}\right)e^{-\mathbf{i}\pi s} & \text{joining} & \frac{1}{\delta} & \to & -\frac{1}{\delta}+1, \\
c_{(\mathrm{V},\delta)}(s) & \coloneqq & \zeta\left(\zeta\left(c_{(\mathrm{I},\delta)}(s)\right)\right) & = & \frac{\delta-1+s(1-2\delta)}{\delta+s(1-2\delta)} & \text{joining} & -\frac{1}{\delta}+1 & \to & -\frac{\delta}{1-\delta}, \\
c_{(\mathrm{VI},\delta)}(s) & \coloneqq & \zeta\left(\zeta\left(c_{(\mathrm{II},\delta)}(s)\right)\right) & = & \frac{\delta}{-\left(1-\frac{\delta}{2}\right)e^{-\mathbf{i}\pi s}+\frac{\delta}{2}} & \text{joining} & -\frac{\delta}{1-\delta} & \to & \delta.
\end{array}
\tag{2.32}
$$

很容易验证，六条路径的所有取值都位于下半平面内（包括 x 轴，但不包括 0 和 1）。

因此，环路 c_δ 的奇异集 D 等于 $\left\{0, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right\}$。

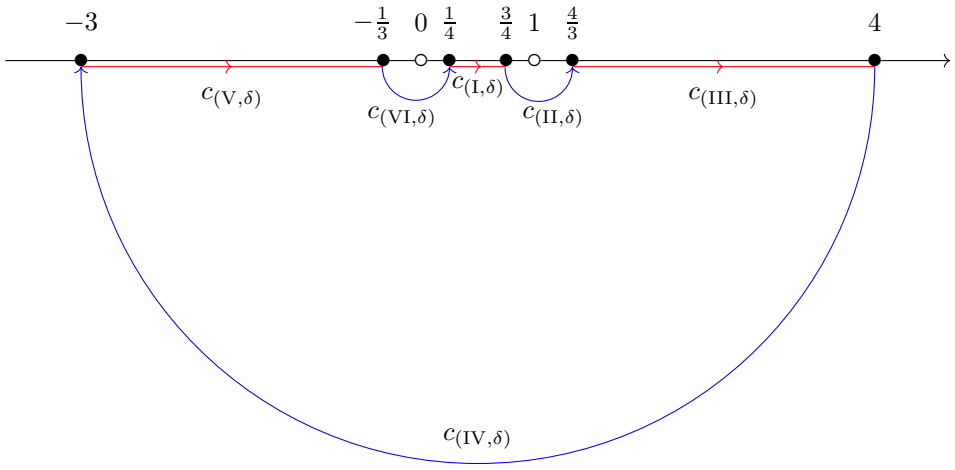


图 1： $\delta = 1/4$ 处的路径 (2.32)

以下关于这些路径的几何描述（见图 1）或许有助于阐明整个过程：三个“奇数”路径$c_{(\mathrm{I},\delta)}$、$c_{(\mathrm{III},\delta)}$和$c_{(\mathrm{V},\delta)}$ 分别沿着 x轴对闭区间 $[\delta, 1-\delta]$、 $\zeta\big([\delta, 1-\delta]\big) = [1/(1-\delta)\ 1/\delta]$和 $\zeta^2\big([\delta, 1-\delta]\big) = [-(1/\delta)+1、\ -\delta/(1-\delta)]$,进行参数化。注意，$c_{(\mathrm{III},\delta)}$ 和$c_{(\mathrm{V},\delta)}$ 并非式 (1.42) 意义下的仿射路径。三个“偶数”路径$c_{(\mathrm{II},\delta)}$、 $c_{(\mathrm{IV},\delta)}$和$c_{(\mathrm{VI},\delta)}$ 分别对圆心为$1 + \frac{\delta^2}{2-2\delta}$、$1$ 2和 $-\frac{\delta^2}{2-2\delta}$、半径分别为 $\frac{2\delta-\delta^2}{2-2\delta}$、 $\frac{1}{\delta} - \frac{1}{2}$和$\frac{2\delta-\delta^2}{2-2\delta}$ 的下半圆进行参数化，这一点可以通过冗长但初等的计算加以验证。$c_{(\mathrm{II},\delta)}$ 和$c_{(\mathrm{VI},\delta)}$ 沿逆时针方向描绘（参数化并非均匀的），而 $c_{(\mathrm{IV},\delta)}$则以均匀参数化沿顺时针方向描绘。如果想要了解下半周期$c_{(\mathrm{II},\delta)}$这种“奇特”形式的动机（尽管这对于我们接下来要给出的论证并非必要）：如果我们考虑均匀参数化的半周期 $[0, 1] \to Y_3$ ， 在.....

构型空间 Y_3 由此给出

$$s \mapsto \left(0, 1-\frac{\delta}{2}-\frac{\delta}{2}e^{\mathbf{i}\pi s}, 1-\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}e^{\mathbf{i}\pi s}\right)$$

并应用同构 (2.3) 的第一个分量，$(z_1, z_2, z_3) \mapsto \frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$，于是我们得到路径 $c_{(\mathrm{II},\delta)}$。C. Kassel 的书 [18, 第 474 页图 8.1] 中以定性方式展示 Y_3 中这些路径的图示，对我们很有启发。最后请注意，双重穿孔平面中的六条路径的整体图示也具有显而易见的反射对称性（关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 的"反全纯"映射 $\mathsf{s}: z \mapsto 1-\bar{z}$）。因此，通过对区间 $[0,1]$, $\iota(s) = 1-s$ 进行通常的区间反演 ι，利用具体公式 (2.32)，很容易看出以下结论成立：$\mathsf{s} \circ c_{(\mathrm{I},\delta)} \circ \iota = c_{(\mathrm{I},\delta)}$，$\mathsf{s} \circ c_{(\mathrm{II},\delta)} \circ \iota = c_{(\mathrm{VI},\delta)}$，$\mathsf{s} \circ c_{(\mathrm{III},\delta)} \circ \iota = c_{(\mathrm{V},\delta)}$，以及 $\mathsf{s} \circ c_{(\mathrm{IV},\delta)} \circ \iota = c_{(\mathrm{IV},\delta)}$。

现在我们来计算沿这六条路径的六个平行传输。首先，平行传输 ${}^{\Gamma_{(B,A)}}W^{(c_{(\mathrm{I},\delta)})}{}_{10}$ 显然与前一节中的平行传输 ${}^{\Gamma_{(B,A)}}W^{(c_{\delta\delta})}{}_{10}$相同，参见 (2.11)：利用光滑单射 $]0,1[\to \mathbb{C}^{\times\times}$ 将联络 (2.28) 拉回到区间上即可看出这一点。使用公式 (2.29) 和 (2.30)，并利用 $c_{(\mathrm{III},\delta)} = \zeta \circ c_{(\mathrm{I},\delta)}$ 和 $c_{(\mathrm{V},\delta)} = \zeta \circ \zeta \circ c_{(\mathrm{I},\delta)}$这一事实（参见 (2.32)），再应用 (1.48)，我们得到以下公式

$$\begin{array}{lllll}
{}^{\Gamma_{(B,A)}}W_{10}^{(c_{(\mathrm{I},\delta)})} & = & {}^{\Gamma_{(B,A)}}W_{10}^{(c_{\delta\delta})} & \overset{(2.21)}{=} & e^{\lambda \ln(\delta) B}\Phi_{\delta,\delta}(A,B)e^{-\lambda\ln(\delta)A}, \\
{}^{\Gamma_{(B,A)}}W_{10}^{(c_{(\mathrm{III},\delta)})} & \overset{(2.29)}{=} & {}^{\Gamma_{(\tilde{C},B)}}W_{10}^{(c_{\delta\delta})} & \overset{(2.21)}{=} & e^{\lambda \ln(\delta) \tilde{C}}\Phi_{\delta,\delta}(B,\tilde{C})e^{-\lambda\ln(\delta)B}, \\
{}^{\Gamma_{(B,A)}}W_{10}^{(c_{(\mathrm{V},\delta)})} & \overset{(2.30)}{=} & {}^{\Gamma_{(A,\tilde{C})}}W_{10}^{(c_{\delta\delta})} & \overset{(2.21)}{=} & e^{\lambda \ln(\delta) A}\Phi_{\delta,\delta}(\tilde{C},A)e^{-\lambda\ln(\delta)\tilde{C}}.
\end{array} \tag{2.33}$$

对于偶数路径，我们可以完全以相同的方式进行：利用 $c_{(\mathrm{IV},\delta)} = \zeta \circ c_{(\mathrm{II},\delta)}$和 $c_{(\mathrm{VI},\delta)} = \zeta \circ \zeta \circ c_{(\mathrm{I},\delta)}$这一事实（参见 (2.32)），再应用 (1.48)，我们得到以下公式：

$${}^{\Gamma_{(B,A)}}W_{10}^{(c_{(\mathrm{IV},\delta)})} = {}^{\Gamma_{(\tilde{C},B)}}W_{10}^{c_{(\mathrm{II},\delta)}} \quad \text{and} \quad {}^{\Gamma_{(B,A)}}W_{10}^{(c_{(\mathrm{VI},\delta)})} = {}^{\Gamma_{(A,\tilde{C})}}W_{10}^{c_{(\mathrm{II},\delta)}}, \tag{2.34}$$

因此，只需计算 ${}^{\Gamma_{(B,A)}}W^{(c_{(\mathrm{II},\delta)})}{}_{10}$。

引理 21. 根据上述定义和记号：沿路径 $c_{(\mathrm{II},\delta)}$ 关于联络 $\Gamma(B,A)$ 的平行移动 ${}^{\Gamma_{(B,A)}}W^{(c_{(\mathrm{II},\delta)})}{}_{10}$ 可按以下方式分解

$${}^{\Gamma_{(B,A)}}W_{10}^{(c_{(\mathrm{II},\delta)})} = e^{\lambda \mathbf{i}\pi B} H^{(\delta)}(B,A) \tag{2.35}$$

其中，$\Big($函数空间（$]0,\ 1/4]$，$\mathbb{C}$）$\otimes \mathcal{A}\Big)[[\lambda]]$ 中的元素 $\delta \mapsto H^{(\delta)}$（$B$，$A$）是一个无害的群项，参见（1.31）、（1.32）和命题 4。

证明。我们计算

$$\begin{aligned}\Gamma(B,A)^{(c_{(\mathrm{II},\delta)})}(s) &= -\mathbf{i}\pi\frac{\delta\left(1-\frac{\delta}{2}\right)e^{\mathbf{i}\pi s}}{\left(1-\frac{\delta}{2}\right)^2-\frac{\delta^2}{4}e^{\mathbf{i}2\pi s}}A+\mathbf{i}\pi\frac{1-\frac{\delta}{2}}{1-\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}e^{\mathbf{i}\pi s}}B \\ &= \underbrace{\mathbf{i}\pi B}_{=:Y_0(s)} \underbrace{-\mathbf{i}\pi\delta\left(\frac{\frac{1}{2}e^{\mathbf{i}\pi s}}{1-\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}e^{\mathbf{i}\pi s}}B+\frac{\left(1-\frac{\delta}{2}\right)e^{\mathbf{i}\pi s}}{\left(1-\frac{\delta}{2}\right)^2-\frac{\delta^2}{4}e^{\mathbf{i}2\pi s}}A\right)}_{=:Z^{(\delta)}(s)}. \quad (2.36)\end{aligned}$$

现在我们可以应用命题 2 的分解陈述 iv），参见（1.20）：显然，形式线性常微分方程 $\mathsf{d}U_{\cdot 0}/\mathsf{d}s=\lambda Y_0U_{\cdot 0}$ 的基本解 $U_{\cdot 0}$（s）就是形式指数 $U_{\cdot 0}(s)=e^{\lambda\mathbf{i}\pi sB}$，因此，根据（1.20），对于所有 $s\in[0,1]$，平行移动 ${}^{\Gamma(B,A)}W^{(c_{(\mathrm{II},\delta)})}{}_{\cdot 0}$ 可因式分解如下

$${}^{\Gamma(B,A)}W_{s0}^{(c_{(\mathrm{II},\delta)})} = e^{\lambda\mathbf{i}\pi sB}\,H^{(\delta)}(B,A)(s)$$

其中 $H^{(\delta)}(B,A)(s)$ 是形式线性常微分方程的一个基本解

$$\frac{\mathsf{d}H^{(\delta)}(B,A)}{\mathsf{d}s}(s)=\lambda e^{-\lambda\mathbf{i}\pi sB}Z^{(\delta)}(s)e^{\lambda\mathbf{i}\pi sB}H^{(\delta)}(B,A)(s)=\lambda\underbrace{\left(e^{-\lambda\mathbf{i}\pi s\mathsf{ad}_B}\left(Z^{(\delta)}(s)\right)\right)}_{=:\tilde{Z}^{(\delta)}(s)}H^{(\delta)}(B,A)(s)$$

其初始条件为 $H^{(\delta)}(B,A)(0)=1$。我们将对 $\tilde{Z}^{(\delta)}(s)$ 进行上界检验 (1.40)，见引理 7：令 $\tilde{Z}^{(\delta)}(s)=\sum_{r=0}^{\infty}\lambda^r\tilde{Z}_r^{(\delta)}(s)$，利用复向量空间 $\mathcal{A}$ 上的任意范数 $||\ ||$（更多细节见 §1.3），对于每个 $r\in\mathbb{N}$，令 $d_{r0}:=1$（若 $r=0$），否则令 $d_{r0}:=0$：

$$\begin{aligned}\left|\left|\tilde{Z}_r^{(\delta)}(s)\right|\right| &= \left|\left|\frac{\mathbf{i}^r\pi^r s^r}{r!}\mathsf{ad}_B^{\circ r}\left(Z^{(\delta)}(s)\right)\right|\right| \\ &\overset{(2.36)}{=} \frac{\pi^{r+1}s^r}{r!}\delta\left|\left|\frac{d_{r0}\,\frac{1}{2}e^{\mathbf{i}\pi s}}{1-\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}e^{\mathbf{i}\pi s}}B+\frac{\left(1-\frac{\delta}{2}\right)e^{\mathbf{i}\pi s}}{\left(1-\frac{\delta}{2}\right)^2-\frac{\delta^2}{4}e^{\mathbf{i}2\pi s}}\mathsf{ad}_B^{\circ r}(A)\right|\right| \\ &\leqslant \underbrace{\frac{\pi^{r+1}}{r!}\left(||B||+2\,||\mathsf{ad}_B^{\circ r}(A)||\right)}_{=:\check{C}_r}\delta\end{aligned}$$

其中我们已 对每个实数 τ 使用了 $|e^{\mathbf{i}\tau}|=1$，以及初等下界 s

$$\begin{aligned}\left|1-\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}e^{\mathbf{i}\pi s}\right| &\geqslant 1-\frac{\delta}{2}-\left|\frac{\delta}{2}e^{\mathbf{i}\pi s}\right|=1-\delta\geqslant\frac{1}{2}, \\ \left|\left(1-\frac{\delta}{2}\right)^2-\frac{\delta^2}{4}e^{\mathbf{i}2\pi s}\right| &\geqslant \left(1-\frac{\delta}{2}\right)^2-\left|\frac{\delta^2}{4}e^{\mathbf{i}2\pi s}\right|=1-\delta\geqslant\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

对于分母。由此可知，$\delta\mapsto H^{(\delta)}(B,A)$ 是一个无害的群项。 □

现在我们需要将环路 c_δ 放入 $\mathbb{C}^{\times\times}$ 的一个星形开集 U' 中，因为 $\mathbb{C}^{\times\times}$ 不是星形的（它甚至不是单连通的）。定义

$$U' := \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{1-\mathbf{i}}{2} + t(\gamma+\mathbf{i}) \in \mathbb{C} \;\middle|\; t \in \mathbb{R},\ t \geqslant \frac{1}{2},\ \gamma \in \{-1,1\} \right\} \tag{2.37}$$

它是复平面去掉两条闭半直线后的集合：一条从 0 出发，斜率为 -1，另一条从 1 出发，斜率为 1，二者的方向均为非负虚部方向。显然，0 和 1 不属于 U'，因此 $U' \subset \mathbb{C}^{\times\times}$ 是一个开子集。由初等线性代数可知，平面 $\mathbb{C}$ 中的每个点 z 都位于一条经过点 $q = (1-\mathbf{i})/2$ 的直（实）线上。如果 z 不在斜率为 1 或 -1 的两条直线上，根据 U' 的定义，经过 q 和 z 的唯一一条直线显然属于 U'。另一方面，若 $z \in U'$ 中有一点位于斜率为 1 或 -1 的直线上，则其虚部必定严格小于 0。显然，所谓的下半平面 H^-（即所有虚部严格小于 0 的点构成的子集）属于 U'，包含 q，并且显然是凸的；也就是说，连接两个不同点 z_1、$z_2 \in H^-$ 的线段仍包含在 H^- 中。由上述讨论可知，U' 以 $q = 1-$ 为星形中心。$\mathbf{i}_2$ 且 $\forall \delta \in]0$、$1/4]$ 时，我们有 $c_\delta(s) \in U'$。现在我们已具备证明下述结论所需的全部信息。

定理 22（六边形方程）。设 $\mathcal{A}$ 是任意复结合含幺代数，且 A、B、$C \in \mathcal{A}$ 是满足 (2.26) 的三个元素。则 Drinfel'd 结合子的六边形方程 (2.27) 成立。

证明。由于复合环路 c_δ（见 (2.31)）包含在星形开子集 U' 中（见 (2.37)），我们可以应用推论 14，得出沿平坦联络 $\Gamma(B,A)$（见 (2.28)）绕环路 c_δ 的平行移动等于 1。对于任意分段光滑路径 $c\colon [0,1] \to U'$，将 $\Gamma_{(B,\ A)} W_{10}^{(c)}$ 简记为 $W_{(c)\ 10}$，可得

$$\begin{aligned} 1 = W_{10}^{(c_\delta)} &\overset{(1.47)}{=} W_{10}^{(c_{(\mathrm{VI},\delta)})} W_{10}^{(c_{(\mathrm{V},\delta)})} W_{10}^{(c_{(\mathrm{IV},\delta)})} W_{10}^{(c_{(\mathrm{III},\delta)})} W_{10}^{(c_{(\mathrm{II},\delta)})} W_{10}^{(c_{(\mathrm{I},\delta)})} \\ &\overset{(2.34),(2.35),(2.33)}{=} e^{\lambda \mathbf{i}\pi A}\ H^{(\delta)}(A,\tilde{C})\quad e^{\lambda \ln(\delta) A}\ \Phi_{\delta,\delta}(\tilde{C},A)\ e^{-\lambda \ln(\delta)\tilde{C}} \\ &\qquad e^{\lambda \mathbf{i}\pi \tilde{C}}\ H^{(\delta)}(\tilde{C},B)\quad e^{\lambda \ln(\delta)\tilde{C}}\ \Phi_{\delta,\delta}(B,\tilde{C})\ e^{-\lambda \ln(\delta) B} \\ &\qquad e^{\lambda \mathbf{i}\pi B}\ H^{(\delta)}(B,A)\quad e^{\lambda \ln(\delta) B}\ \Phi_{\delta,\delta}(A,B)\ e^{-\lambda \ln(\delta) A}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

显然，三个奇异项 $\delta \mapsto e^{\lambda \ln(\delta) A}$、$\delta \mapsto e^{\lambda \ln(\delta) B}$ 和 $\delta \mapsto e^{\lambda \ln(\delta)^C}$ 属于至多按对数发散的群项 $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$，关于 $J =]0$、$1/4]$，见 (1.32)。因此，根据命题 4 的陈述 $iv.$)，以下三个共轭再次定义了无害群项：

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{(\delta)}(A,\tilde{C}) &:= e^{-\lambda \ln(\delta) A}\ H^{(\delta)}(A,\tilde{C})\ e^{\lambda \ln(\delta) A}, \\ \tilde{H}^{(\delta)}(\tilde{C},B) &:= e^{-\lambda \ln(\delta)\tilde{C}}\ H^{(\delta)}(\tilde{C},B)\ e^{\lambda \ln(\delta)\tilde{C}}, \\ \tilde{H}^{(\delta)}(B,A) &:= e^{-\lambda \ln(\delta) B}\ H^{(\delta)}(B,A)\ e^{\lambda \ln(\delta) B}. \end{aligned}$$

利用这些无害群项改写 (2.38)，我们看到，上面提到的三个奇异项˜，即 $e^{\lambda_{\ln(\delta)A}}$、 $e^{\lambda_{\ln(\delta)B}}$ 和 $e^{\lambda_{\ln(\delta)^C}}$，相互抵消，最终得到以下恒等式：

$$1 = e^{\lambda \mathbf{i}\pi A}\ \tilde{H}^{(\delta)}(A,\tilde{C})\ \Phi_{\delta,\delta}(\tilde{C},A)\ e^{\lambda \mathbf{i}\pi \tilde{C}}\ \tilde{H}^{(\delta)}(\tilde{C},B)\ \Phi_{\delta,\delta}(B,\tilde{C})\ e^{\lambda \mathbf{i}\pi B}\ \tilde{H}^{(\delta)}(B,A)\ \Phi_{\delta,\delta}(A,B).$$

取极限 $\delta \to 0$，根据极限规则 (1.28)、Drinfel'd结合子的定义 (2.23)，以及无害群项在 $\delta \to 0\tilde{}$ 时趋于 1 这一事实（见命题 4 的陈述 $v.$），我们得到以下方程（回忆 $C = C - \Lambda$）

$$1 = e^{\lambda\pi\mathbf{i}A}\Phi(C-\Lambda,A)e^{\lambda\pi\mathbf{i}(C-\Lambda)}\Phi(B,C-\Lambda)e^{\lambda\pi\mathbf{i}B}\Phi(A,B).$$

由于 Λ 与 A、B 和 C 对易，因此由 (2.25) 可得 $\Phi(C-\Lambda,A) = \Phi(C,A)$， $\Phi(B,C-\Lambda) = \Phi(B,C)$，从而立即得到六边形方程 (2.27)。

□

2.4 五边形方程

设 $\mathcal{A}$ 是任意复含幺结合代数。设 $A_{12} = A_{21}$、$A_{13} = A_{31}$、$A_{14} = A_{41}$、$A_{23} = A_{32}$、$A_{24} = A_{42}$、$A_{34} = A_{43} \in \mathcal{A}$ 是满足无穷小辫群关系 (0.1b) 和 (0.1c) 的六个元素。我们希望证明 Drinfel'd结合子的五边形方程，见 (0.3)。

最初几条直观的观察如下：元素 A_{14} 没有出现在方程中；取逆并将 (1, 2, 3, 4) 替换为 (4, 3, 2, 1)（此时使用 (2.24)）显然会产生一种对称性。此外，右侧的右结合子只取决于数字 1、2、3，而右侧的左结合子只取决于数字 2、3、4。最后，元素 A_{23} 没有出现在右侧的中间因子中。

我们将尝试用三条路径的复合所对应的平行移动来表示五边形方程 (0.3) 的右侧，用两条路径 $c_{(\mathrm{V},\delta)} * c_{(\mathrm{IV},\delta)}$ 的复合所对应的平行移动来表示左侧；两者具有相同的起点和终点。由于数字 1、2、3、4 都出现了，使用开集 $U \subset \mathbb{R}^4$似乎是合理的，

$$U \coloneqq \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \right\},$$

它可以被解释为实线上四个粒子的所有有序构型所构成的空间，参见 [9, 第834页第 2] 行。显然， U 是构型空间 Y_4的子集。遵循 Drinfel'd 的做法，我们将使用 KnZa 联络 ${}_{(4)}\Gamma_{\text{КнЗа}}$ 从 Y_4 到U 的拉回（相对于典范嵌入 $U \to Y_4$）；该拉回仍然是平坦的，参见定理18和命题12。由于 KnZa 联络在同时平移下保持不变，因此假设所有路径的第一个坐标 x_1 固定为0并非不合理。接下来， A_{14} 没有出现在五边形方程中，这一事实或许会使我们猜想差值 $x_4 - x_1$ 应保持恒定；另一方面，五边形方程中存在既不含1也不含4的项，这一事实则表明

因此 x_4 应当“远离 $x_1 = 0$”，于是我们令 $x_1 = 0$ 和 $x_4 = 1$。定义开满三角形

$$U' \coloneqq \big\{(x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; 0 < x_2 < x_3 < 1\big\}.$$

注意，U' 在对合微分同胚作用下保持不变

$$\Theta : U' \to U' : (x_2, x_3) \mapsto (1 - x_3, 1 - x_2)\,.$$

此外，很容易看出 U' 是凸的，也就是说，对于每一对元素（x_2, x_3）和（y_2, y_3），线段 $s \mapsto \big((1-s)x_2 + sy_2,\;\; (1-s)x_3 + sy_3\big)$ 都包含在 U' 中。此外，点 $\big(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\big)$ 包含在 U' 中，因此 U' 以 $\big(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\big)$ 为中心呈星形。

利用单射 $i\colon\; U' \to U \to Y_4 \colon (x_2, x_3) \mapsto (0, x_2, x_3, 1)$，我们可以将 KnZa-联络 ${}^{(4)}\Gamma_{\text{КнЗа}}$ 拉回到 U'。记（A_{ij}）为（$A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{23}, A_{24}, A_{34}$），经过简单计算可得

$$\begin{aligned}
\Gamma(x_2, x_3) \coloneqq \Gamma\big((A_{ij})\big)(x_2, x_3) \;&\coloneqq\; \Big(i^*\big({}^{(4)}\Gamma_{\text{КнЗа}}\big)\Big)(x_2, x_3) \\
&= \left(\frac{1}{x_2}A_{12} + \frac{1}{x_2 - x_3}A_{23} + \frac{1}{x_2 - 1}A_{24}\right)\mathrm{d}x_2 \\
&\quad + \left(\frac{1}{x_3}A_{13} - \frac{1}{x_2 - x_3}A_{23} + \frac{1}{x_3 - 1}A_{34}\right)\mathrm{d}x_3. \qquad (2.39)
\end{aligned}$$

显然，根据定理18和命题12，Γ（形式上）具有平坦性，但其（形式）平坦性也可以直接由公式（2.39）轻易计算出来。此外，容易计算得

$$\Theta^*\big(\Gamma\big((A_{ij})\big)\big) = \Gamma\big((A_{\sigma(i)\sigma(j)})\big) \quad \text{with} \quad \sigma : (1,2,3,4) \mapsto (4,3,2,1). \qquad (2.40)$$

接下来，我们希望用路径来具体说明 Drinfel'd 在其文章中提到的五个“区域”，参见 [8, 第1454] 页，或 [9, 第834页，第 3,4] 行（其中，第五个区域在 [9]的英文译本中被遗漏了；完整描述请参见俄文原文第154页、引理之前的段落）：在这里，某些坐标对彼此“非常接近”，另一些“中等接近”，还有一些“相距很远”，这通过使用符号 $\ll$ 的不等式来表示：使用实数 $\delta \in\;]0,\; 1/4]$ ——其意图是令其趋于零——我们将“非常接近”——作为经验法则——解释为 $\approx \delta^2$，“中等接近”解释为大约 $\approx \delta$，而“相距很远”解释为 ≈ 1。受图[18, 第478页、图8.2.] 的启发，我们首先采用以下对区间 $]0, 1[$, 的划分，并设想 x_2 和 x_3 都在所选定的位置之间“移动”，

$$0 \;<\; \delta^2 \;<\; \delta - \delta^2 \;<\; \delta \;<\; 1 - \delta \;<\; 1 - \delta + \delta^2 \;<\; 1 - \delta^2 \;<\; 1,$$

并且——我们充分意识到这一选择并非唯一——将 U'（作为 (x_2, x_3) 平面的一部分）中的以下五个点关联起来，将其解释为五个区域（请记住，

$x_1 = 0$ 和 $x_4 = 1$):

$$\begin{aligned}
&\text{zone } 1: \quad "x_2 - x_1 \ll x_3 - x_1 \ll x_4 - x_1" \quad \text{interpreted as} \quad (\delta^2, \delta) &&=: p_1,\\
&\text{zone } 2: \quad "x_3 - x_2 \ll x_3 - x_1 \ll x_4 - x_1" \quad \text{interpreted as} \quad (\delta - \delta^2, \delta) &&=: p_2,\\
&\text{zone } 3: \quad "x_3 - x_2 \ll x_4 - x_2 \ll x_4 - x_1" \quad \text{interpreted as} \quad (1-\delta, 1-\delta+\delta^2) &&=: p_3,\\
&\text{zone } 4: \quad "x_4 - x_3 \ll x_4 - x_2 \ll x_4 - x_1" \quad \text{interpreted as} \quad (1-\delta, 1-\delta^2) &&=: p_4,\\
&\text{zone } 5: \quad "x_2 - x_1 \ll \quad \ll x_4 - x_1 \quad \text{and}\\
&\qquad\qquad x_4 - x_3 \ll \quad \ll x_4 - x_1" \quad \text{interpreted as} \quad (\delta^2, 1-\delta^2) &&=: p_5.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

因此，以下是一个简单的设想：随后用连接上述五个点的唯一线段，依次连接以下五条仿射路径，见 (1.42)，其中ι：$[0,1] \to [0,1]$ 表示通常的区间反演 $s \mapsto 1 - s$:

$$\begin{aligned}
&c_{(\mathrm{I},\delta)} \coloneqq c_{p_2 \leftarrow p_1}, \qquad c_{(\mathrm{II},\delta)} \coloneqq c_{p_3 \leftarrow p_2} = \Theta \circ c_{(\mathrm{II},\delta)} \circ \iota, \quad c_{(\mathrm{III},\delta)} \coloneqq c_{p_4 \leftarrow p_3} = \Theta \circ c_{(\mathrm{I},\delta)} \circ \iota,\\
&c_{(\mathrm{IV},\delta)} \coloneqq c_{p_5 \leftarrow p_1}, \qquad c_{(\mathrm{V},\delta)} \coloneqq c_{p_4 \leftarrow p_5} = \Theta \circ c_{(\mathrm{IV},\delta)} \circ \iota.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

这可以用图2来描绘，图中描述了一个非正则五边形，其顶点是五个“区域”点（2.41），边则是五条仿射路径（2.42）的像。注意，对称性 Θ ——它是五边形的对称性——是关于方程为 $x_3 = 1 - x_2$ 的直线的反射。还要注意，第二条路径是唯一一条两个坐标 x_2, x_3 都在移动的路径，但它们之间的距离保持不变（这一点受到如下观察的启发：五边形方程（0.3）右端中间因子缺少 A_{23} ）。

现在，我们将计算相对于联络 Γ 沿 (2.42) 中五条路径的平行传输，见 (2.39)。利用 (2.40)、(1.46) 和 (1.48)，只需计算平行传输 $W^{(c_{(\mathrm{I},\delta)})_{10}}$、 $W_{(c_{(\mathrm{II},\delta)})_{10}}$ 和 $W^{(c_{(\mathrm{IV},\delta)})_{10}}$——从此我们省略附加在 W 上的符号 Γ ——，其余两项可直接由上述关于平行传输的对称性与重参数化的恒等式得出。

我们得到以下引理:

引理 23. 使用上述记号，我们得到以下关于五种平行

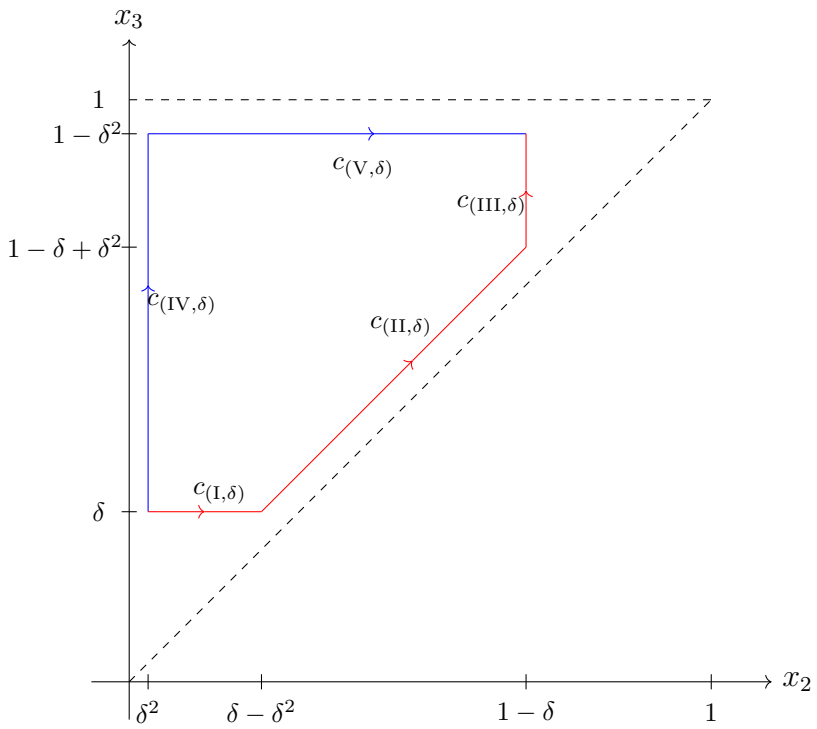


图2： x_2-x_3平面中的路径 (2.42)

传输的结果，对所有 $\delta \in \mathsf{J} = J = \,]0, 1/4]$ 均成立：

$$
\begin{aligned}
W_{10}^{(c_{(\mathrm{I},\delta)})} &= e^{\lambda \ln(\delta) A_{23}}\ \psi_\delta(A_{23}, A_{12})\ H^{(\mathrm{I},\delta)}\ \psi_\delta(A_{12}, A_{23})^{-1}\ e^{-\lambda \ln(\delta) A_{12}},\\
W_{10}^{(c_{(\mathrm{II},\delta)})} &= e^{\lambda \ln(\delta)(A_{24}+A_{34})}\ \psi_\delta(A_{24}+A_{34}, A_{12}+A_{23})\ H^{(\mathrm{II},\delta)}\ \psi_\delta(A_{12}+A_{13}, A_{24}+A_{34})^{-1}\\
&\quad\ e^{-\lambda \ln(\delta)(A_{12}+A_{13})},\\
W_{10}^{(c_{(\mathrm{III},\delta)})} &= e^{\lambda \ln(\delta) A_{34}}\ \psi_\delta(A_{34}, A_{23})\ H^{(\mathrm{III},\delta)}\ \psi_\delta(A_{23}, A_{34})^{-1}\ e^{-\lambda \ln(\delta) A_{23}},\\
W_{10}^{(c_{(\mathrm{IV},\delta)})} &= e^{\lambda \ln(\delta^2) A_{34}}\ \psi_{\delta^2}(A_{34}, A_{13}+A_{23})\ H^{(\mathrm{IV},\delta)}\ \psi_\delta(A_{13}+A_{23}, A_{34})^{-1}\ e^{-\lambda \ln(\delta)(A_{13}+A_{23})},\\
W_{10}^{(c_{(\mathrm{V},\delta)})} &= e^{\lambda \ln(\delta)(A_{23}+A_{24})}\ \psi_\delta(A_{23}+A_{24}, A_{12})\ H^{(\mathrm{V},\delta)}\ \psi_{\delta^2}(A_{12}, A_{23}+A_{24})^{-1}\ e^{-\lambda \ln(\delta^2) A_{12}}.
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

其中， ψ项定义于 (2.17) 中，另见 (2.18) 和 (2.22)； $\delta \mapsto H^{(i,\delta)}$对应 $i =$ I、II、III、IV、V 的项是无害群项，见 (1.31)、(1.32) 和命题 4。请注意，项 $W^{(c_{(\mathrm{IV},\delta)})\ 10}$ 和 $W^{(c_{(\mathrm{V},\delta)})\ 10}$ 中出现 δ^2 对定理 24 至关重要。

证明。为了计算平行传输，我们将再次使用已在 §2.2 中用过的半指数路径，其形式为 (2.13)。更确切地说，对于三条路径 $c_{(\mathrm{I},\delta)}$、$c_{(\mathrm{II},\delta)}$、$c_{(\mathrm{IV},\delta)}$ 中的每一条——请回想，沿 $c_{(\mathrm{III},\delta)}$ 和 $c_{(\mathrm{V},\delta)}$ 的平行传输可以利用 (2.42) 中指出的对称性来计算——我们在相应直线上选取一个中点。

U'中的线段，并且我们将每条仿射路径 $c_{(i,\delta)}$ 替换为两条指数半路径的复合，它们沿着相同的线段描绘，$\tilde{c}_{(i,2,\delta)} * \big(\check{c}_{(i,1,\delta)} \circ \iota\big)$ 其中 $i =$ I、II、III、IV、V，$\iota\colon\ [0,1] \to [0,1]\colon\ s \mapsto 1-s$ 是通常的区间反演，$\check{c}_{(i,1,\delta)}$ 连接中点与初始点，而 $\tilde{c}_{(i,2,\delta)}$ 连接中点与终点。由于 $c_{(i,\delta)}$ 和 $\tilde{c}_{(i,2,\delta)} * \big(\check{c}_{(i,1,\delta)} \circ \iota\big)$ 只相差一个重参数化，它们诱导相同的平行移动，见 (1.45)，这意味着

$$W_{10}^{(c_{(i,\delta)})} = W_{10}^{(\tilde{c}_{(i,2,\delta)})} \left(W_{10}^{(\check{c}_{(i,1,\delta)})}\right)^{-1} \tag{2.44}$$

其中使用了反演公式 (1.46)。因此，我们选择以下路径 ˆ（其中 $\delta := \delta(1-\delta/2)$ ）

$$\begin{array}{rcccccl}
\check{c}_{(\mathrm{I},1,\delta)}(s) & := & \big(\frac{\delta}{2} e^{\ln(2\delta)s}, \delta\big) & \text{joining} & \big(\frac{\delta}{2}, \delta\big) & \to & (\delta^2, \delta)\,, \\
\tilde{c}_{(\mathrm{I},2,\delta)}(s) & := & \big(\delta - \frac{\delta}{2} e^{\ln(2\delta)s}, \delta\big) & \text{joining} & \big(\frac{\delta}{2}, \delta\big) & \to & (\delta - \delta^2, \delta)\,, \\
\check{c}_{(\mathrm{II},1,\delta)}(s) & := & \Theta\big(\tilde{c}_{(\mathrm{II},2,\delta)}(s)\big) & \text{joining} & \left(\frac{1-\delta^2}{2}, \frac{1+\delta^2}{2}\right) & \to & (\delta - \delta^2, \delta), \\
\tilde{c}_{(\mathrm{II},2,\delta)}(s) & := & \left(1 - \frac{1}{2} e^{\ln(2\hat{\delta})s}\right)(1,1) + (-\frac{\delta^2}{2}, \frac{\delta^2}{2}) & \text{joining} & \left(\frac{1-\delta^2}{2}, \frac{1+\delta^2}{2}\right) & \to & (1-\delta, 1-\delta+\delta^2)\,, \\
\check{c}_{(\mathrm{IV},1,\delta)}(s) & := & \big(\delta^2, \frac{1}{2} e^{\ln(2\delta)s}\big) & \text{joining} & \big(\delta^2, \frac{1}{2}\big) & \to & (\delta^2, \delta), \\
\tilde{c}_{(\mathrm{IV},2,\delta)}(s) & := & \left(\delta^2, 1 - \frac{1}{2} e^{\ln(2\delta^2)s}\right) & \text{joining} & \big(\delta^2, \frac{1}{2}\big) & \to & (\delta^2, 1-\delta^2)\,.
\end{array} \tag{2.45}$$

当我们计算 $\Gamma^{(c_{(i,u,\delta)})}(s)$（对于 $i =$ I,II,III,IV,V 和 $u =$ 1,2）时，稍后我们将看到，我们总是得到以下形式——用 d 表示路径 $\check{c}_{(i,1,\delta)}$ 或 $\tilde{c}_{(i,2,\delta)}$:

$$\Gamma^{(d)}(s) = \underbrace{\ln(2\epsilon(\delta))B + \frac{-\ln(2\epsilon(\delta))}{2e^{-\ln(2\epsilon(\delta))s} - 1} A}_{=: Y_0(B,A)(s,\epsilon)} + \underbrace{\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} f_{ij}(s,\delta) A_{ij}}_{=: Z(s,\delta)}, \tag{2.46}$$

–这由 §2.2、(2.16) 众所周知–其中 $\epsilon\colon\ J \to J$ 是 δ 的一个形如$\epsilon(\delta) = \delta^\ell$ 的单项式，其中 ℓ 是正整数，A、B 是代数元素 A_{ij} 的某些线性组合，而 f_{ij} 是 $s \in [0,1]$ 和 $\delta \in J$ 的实值函数: $= \,]0,\ 1/4]$。根据一般因式分解陈述 (1.20) 以及引理19 的解 (2.17)——它们导出结合子——我们有因式分解

$$W_{s0}^{(c_{(i,u,\delta)})} \ = \ \underbrace{e^{\lambda \ln(\epsilon) s B}\ \psi_\epsilon(B,A)(s)}_{=: U_{s0}^{(\epsilon)}}\ H_{s0}^{(i,u,\delta)}, \tag{2.47}$$

其中 $s \mapsto H_{s0}^{(i,u,\delta)}$ 是形式线性常微分方程的一个基本解

$$\frac{\mathsf{d} H_{s0}^{(i,u,\delta)}}{\mathsf{d} s} \ = \ \lambda U_{s0}^{(\epsilon)^{-1}}\ Z(s,\delta)\ U_{s0}^{(\epsilon)}\ H_{s0}^{(i,u,\delta)} \ =: \ \lambda \tilde{Z}(s,\delta)\ H_{s0}^{(i,u,\delta)}.$$

我们稍后将证明，所有这些因子 $\delta \mapsto H_{10}^{(i,u,\delta)}$ 都是无害群项：首先，我们将证明，只需证明对于每个 $1 \leqslant i < j \leqslant 4$，都存在非负实数 C_{ij} 和 $\beta_{ij} > 0$，使得

$$\forall\ s \in [0,1],\ \forall\ \delta \in J: \quad |f_{ij}(s,\delta)| \leqslant C_{ij}\delta^{\beta_{ij}}. \tag{2.48}$$

事实上，我们验证前述条件 (2.48) 蕴含了 (H) 型估计 (1.40)：令 $\psi_\epsilon(B,A)(s) = \sum_{r=0}^{\infty} \psi_r(s,\epsilon)\lambda^r$，并将其逆元 $\psi_\epsilon(B,A)(s)^{-1}$ 写作 $\sum_{r=0}^{\infty} \hat{}\psi_r(s,\epsilon)\lambda^r\hat{}$，其中显然 $\psi_0(s,\epsilon) = 1 = \psi_0(s,\epsilon)$。在复向量空间 $\mathcal{A}$上取一个范数 $||\ ||$。由于 $s = |s| \leqslant 1$，且对每个非负整数 r，都存在正实常数 $C_r\hat{}\hat{}\hat{}$ 和 C_r，使得 $||\psi_r(s,\epsilon)|| \leqslant C_r$ 和 $||\psi_r(s,\epsilon)|| \leqslant C_r$ 不依赖于 s,ϵ，由引理19可知，对每个非负整数 r

$$\begin{aligned}
\left|\left|\tilde{Z}(s,\delta)_r\right|\right| &= \left|\left|\left(e^{\lambda \ln(\epsilon) s \mathrm{ad}_B}\left(\sum_{u,v=0}^{\infty}\psi_u(s,\epsilon)Z(s,\delta)\hat{\psi}_v(s,\epsilon)\lambda^{u+v}\right)\right)_r\right|\right| \\
&= \left|\left|\sum_{v,w=0}^{r}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} f_{ij}(s,\delta)\frac{(\ln(\epsilon))^w s^w}{w!} f_{ij}(s,\delta)\,(\mathrm{ad}_B)^{\circ w}\left(\psi_{r-v-w}(s,\epsilon)A_{ij}\hat{\psi}_v(s,\epsilon)\right)\right|\right| \\
&\leqslant \sum_{w=0}^{r}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}|f_{ij}(s,\delta)|\,\frac{\ell^w|\ln(\delta)|^w}{w!}\left|\left|\sum_{v=0}^{r}(\mathrm{ad}_B)^{\circ w}\left(\psi_{r-v-w}(s,\epsilon)A_{ij}\hat{\psi}_v(s,\epsilon)\right)\right|\right| \\
&\overset{(2.48)}{\leqslant} \sum_{w=0}^{r}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} C_{ij}\delta^{\beta_{ij}}|\ln(\delta)|^w C'_w \overset{(1.35)}{\leqslant} C''_r\delta^{\beta_r}
\end{aligned}$$

其中，非负实常数 C'_w $(0 \leqslant w \leqslant r)$ 是 v 上有界代数元素有限和的上界，$0 < \beta_r$ 是所有 $\beta_{ij}/2,\ 1 \leqslant i < j \leqslant 4$ 中的最小值，这些量来自不等式 (1.35)；非负实数 C''_r 则是所有出现的非负乘法上界中的最大值。这就证明了 (1.40) 中最后一个不等式，并根据引理 7，证明了每个 $\delta \mapsto H_{10}^{(i,u,\delta)}$ 都是一个无害的群项。下面我们将证明每条路径都满足判据 (2.48)，其中下列初等不等式将频繁出现：

$$\forall\ s \in [0,1]\ \forall\ \gamma \in J = \ ]0,1[: \quad 1 \leqslant e^{-\ln(\gamma)s} \leqslant \frac{1}{\gamma}. \tag{2.49}$$

回想一下，对数 $\ln(2\delta)$、$\ln(2\hat{}\delta)$ 和 $\ln\left(1-\frac{\delta}{2}\right)$ 都是非正数。

I. 初等计算得出以下公式：$\Gamma^{(\check{c}_{(\mathrm{I},1,\delta)})}$ 和 $\Gamma^{(\check{c}_{(\mathrm{I},2,\delta)})}$，这表明它们具有形式 (2.46)，其中 $\epsilon = \delta$；对于第一条路径，$B = A_{12}$、$A = A_{23}$，而

对于第二条路径： $B = A_{23}$、 $A = A_{12}$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(\tilde{c}_{(\mathrm{I},1,\delta)})}(s) &= \ln(2\delta)A_{12} + \frac{-\ln(2\delta)}{2e^{-\ln(2\delta)s}-1}A_{23} + \underbrace{\delta\frac{(-\ln(2\delta))}{2e^{-\ln(2\delta)s}-\delta}}_{=:f_{24}^{(\mathrm{I},1,\delta)}(s)}A_{24},\\
\Gamma^{(\tilde{c}_{(\mathrm{I},2,\delta)})}(s) &= \ln(2\delta)A_{23} + \frac{-\ln(2\delta)}{2e^{-\ln(2\delta)s}-1}A_{12} + \underbrace{\delta\frac{\ln(2\delta)}{2(1-\delta)e^{-\ln(2\delta)s}+\delta}}_{=:f_{24}^{(\mathrm{I},2,\delta)}(s)}A_{24}.
\end{aligned}$$

对于 $f^{(\mathrm{I},1,\delta)}(s)$ 和 $f_{(\mathrm{I}2,\ \delta)}(s)$ 的两个分母，不等式 (2.49) 给出了显然的下界 $2-\delta>1$ (for $s=0$)，因此

$$\begin{aligned}
\left|f_{24}^{(\mathrm{I},1,\delta)}(s)\right| &\leqslant \delta\big(\ln(2)+|\ln(\delta)|\big) \overset{(1.35)}{\leqslant} 3\delta^{1/2},\\
\left|f_{24}^{(\mathrm{I},2,\delta)}(s)\right| &\leqslant \delta\big(\ln(2)+|\ln(\delta)|\big) \overset{(1.35)}{\leqslant} 3\delta^{1/2},
\end{aligned}$$

由于 ln(2) 6 1 且对于所有 $\delta\in]0,1]$ 都有 $\delta\leqslant\delta^{1/2}$ ，根据判据 (2.48)，因式分解方程 (2.47) 中的项 $\delta\mapsto H^{(\mathrm{I},1,\delta))}$ 和 $\delta\mapsto H^{(\mathrm{I},2,\delta))}$ 因而是无害群项。因式分解方程 (2.47) 和 (2.44) 证明了 (2.43) 中的第一个等式，令 $H^{(\mathrm{I},\delta))}:=H^{(\mathrm{I},2,\delta))}\big(H^{(\mathrm{I},1,\delta))}\big)^{-1}$ 即可。

II：经过初等但冗长的计算，可得以下公式 $\Gamma^{(\tilde{c}_{(\mathrm{II},2,\delta)})}$ ，这表明它具有 (2.46) 的形式，其中 $\epsilon=\delta$、 $B=A_{24}+A_{34}$ 和 $A=A_{12}+A_{13}$：

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(\tilde{c}_{(\mathrm{II},2,\delta)})} &= \ln(2\delta)\,(A_{24}+A_{34}) + \frac{-\ln(2\delta)}{2e^{-\ln(2\delta)s}-1}\,(A_{12}+A_{13})\\
&+ \underbrace{\frac{\ln\left(1-\frac{\delta}{2}\right)-\delta^2\ln(2\delta)e^{-\ln(2\hat{\delta})s}}{1+\delta^2e^{-\ln(2\hat{\delta})s}}}_{=:f_{24}^{(\mathrm{II},2,\delta)}(s)}A_{24} + \underbrace{\frac{\ln\left(1-\frac{\delta}{2}\right)+\delta^2\ln(2\delta)e^{-\ln(2\hat{\delta})s}}{1-\delta^2e^{-\ln(2\hat{\delta})s}}}_{=:f_{34}^{(\mathrm{II},2,\delta)}(s)}A_{34}\\
&+ \underbrace{\frac{\ln\left(1-\frac{\delta}{2}\right)-\ln(2\hat{\delta})2e^{-\ln(2\delta)s}+\ln(2\delta)(2-\delta^2)e^{-\ln(2\hat{\delta})s}}{\Big((2-\delta^2)e^{-\ln(2\hat{\delta})s}-1\Big)\,(2e^{-\ln(2\delta)s}-1)}}_{=:f_{12}^{(\mathrm{II},2,\delta)}(s)}A_{12}\\
&+ \underbrace{\frac{\ln\left(1-\frac{\delta}{2}\right)-\ln(2\hat{\delta})2e^{-\ln(2\delta)s}+\ln(2\delta)(2+\delta^2)e^{-\ln(2\hat{\delta})s}}{\Big((2+\delta^2)e^{-\ln(2\hat{\delta})s}-1\Big)\,(2e^{-\ln(2\delta)s}-1)}}_{=:f_{13}^{(\mathrm{II},2,\delta)}(s)}A_{13}
\end{aligned}$$

现在我们将 证明这四个函数空间 $f_{24}^{(\mathrm{II},2,\delta)}$ 、 $f_{34}^{(\mathrm{II},2,\delta)}$ 、 $f^{(\mathrm{II},2,\delta}$ 的上界 (2.48) $_{12}$),

和 $f_{13}^{(\mathrm{II},2,\delta)}$ 的上界。首先注意，对所有 $0<\delta\leqslant 1/4$，都有以下初等不等式

$$\left|\ln\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\right| = -\ln\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\leqslant\delta. \tag{2.50}$$

事实上，对于所有的 $0<x\leqslant 1$，我们都有 $\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{x^2}$，因此

$$-\ln\left(1-\frac{\delta}{2}\right) \;=\; \int_{1-\frac{\delta}{2}}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x \;\leqslant\; \int_{1-\frac{\delta}{2}}^{1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \;=\; \frac{\delta}{2-\delta} \;\leqslant\; \delta.$$

对于 $f_{(\mathrm{II}2,\delta)\,24}$，以及 $f_{34}^{(\mathrm{II},2,\delta)}$，根据 (2.49) 中的下界 1，我们可以从下方用 $1/2$ 对两个分母进行估计。在分子中，根据 (2.49)，指数函数 $e^{-\ln(2\delta)s}$ 的上界为 $_{1\,2\hat{\delta}} = {}_{2\delta}{}^{1}(1-\frac{\delta}{2})$ $\leqslant\frac{1}{\delta}$。因此，~~这两个~~函数都有以下上界（这里还用到了不等式 (2.50)）：对于所有的 $s\in[0,1]$ 和 $\delta\in\,]0,\;1/4]$

$$\begin{cases}\left|f_{24}^{(\mathrm{II},2,\delta)}(s)\right|\\ \left|f_{34}^{(\mathrm{II},2,\delta)}(s)\right|\end{cases} \;\leqslant\; 2\delta+2\ln(2\delta)\delta^2\frac{1}{\delta}\overset{(1.35)}{\leqslant}\;8\delta^{\frac{1}{2}},$$

这里用到了不等式 $\delta\leqslant\delta^{\frac{1}{2}}$ 和 ln(2) 6 1。由此可知，对于 $f_{24}^{(\mathrm{II},2,\delta)}$ 和 $f_{34}^{(\mathrm{II},2,\delta)}$，判据 (2.48) 成立。

对于 $f_{(\mathrm{II}2,\;\delta)\,12}$，$f_{13}^{(\mathrm{II},2,\delta)}$ 首先注意到，它们的分子可以表示成以下形式，其中我们提取了因子 $\frac{1}{2}e^{-\ln(2\delta)^s}$：

$$\frac{1}{2}e^{-\ln(2\delta)s}\left(-2\ln\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\left(2-e^{\ln(2\delta)s}\right)+4\ln(2\delta)\left(e^{-\ln\left(1-\frac{\delta}{2}\right)s}-1\right)-2g\ln(2\delta)\delta^2e^{-\ln\left(1-\frac{\delta}{2}\right)s}\right).$$

其中 $g\in\{-1,1\}$。另一方面，在 $f_{(\mathrm{II}2,\;\delta)\,12}$和 $f_{13}^{(\mathrm{II},2,\delta)}$的分母中，根据 (2.49) 中的下界 1，可以将两个左侧因子的下界都取为 $_{1\,2}$，并将两个右侧因子的下界都取为 $e^{-\ln(2\delta)s}$。由此可得，对所有 $s\in[0,1]$ 和 $\delta\in\,]0,\;1/4]$

$$\begin{aligned}\begin{cases}\left|f_{12}^{(\mathrm{II},2,\delta)}(s)\right|\\ \left|f_{13}^{(\mathrm{II},2,\delta)}(s)\right|\end{cases} &\leqslant\; 2\left|\ln\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\right|\left(2-e^{\ln(2\delta)s}\right)+4|\ln(2\delta)|\left(e^{-\ln\left(1-\frac{\delta}{2}\right)s}-1\right)\\ &\quad +2|\ln(2\delta)|\delta^2e^{-\ln\left(1-\frac{\delta}{2}\right)s}\\ &\leqslant\; 4\delta+4\big(\ln(2)+|\ln(\delta)|\big)\left(e^{-\ln\left(1-\frac{\delta}{2}\right)s}-1\right)+4\big(\ln(2)+|\ln(\delta)|\big)\delta^2.\end{aligned}$$

这里我们使用了不等式 (2.50)，以及 $e^{\ln(2\delta)s}\;\geqslant\;2\delta$和 $e^{-\ln(1-\frac{\delta}{2})^s}\leqslant 1/(1-\delta/2)$ 6 2，这要归功于 (2.49) 中的上界。最后，根据 (2.49) 对于$\gamma=\big(1-\frac{\delta}{2}\big)$，我们再次得到，

$$e^{-\ln\left(1-\frac{\delta}{2}\right)s}-1\leqslant\frac{1}{1-\frac{\delta}{2}}-1=\frac{\delta}{2-\delta}\leqslant\delta,$$

再次利用不等式 (1.35)，我们得到最终的上界

$$\left|f_{12}^{(\mathrm{II},2,\delta)}(s)\right| \leqslant 24\delta^{\frac{1}{2}} \quad \text{and} \quad \left|f_{13}^{(\mathrm{II},2,\delta)}(s)\right| \leqslant 24\delta^{\frac{1}{2}}$$

由于 ln(2) 6 1 且 $\delta \leqslant \delta^{\frac{1}{2}}$。由此可知，对于 $f_{12}^{(\mathrm{II},2,\delta)}$ 和 $f_{13}^{(\mathrm{II},2,\delta)}$，判据 (2.48) 成立。这些上界表明，沿路径 $\check{c}_{(\mathrm{II},2,\delta)}$ 的平行移动按 (2.47) 分解:

$$W_{10}^{(c_{(\mathrm{II},2,\delta)})} \;=\; e^{\lambda \ln(\delta)(A_{24}+A_{34})}\; \psi_\delta(A_{24}+A_{34}, A_{12}+A_{13})\; H^{(\mathrm{II},2,\delta)}, \tag{2.51}$$

其中 $\delta \mapsto H^{(\mathrm{II},2,\delta)}$ 是一个无害项。利用 (2.40) 和 (2.42) 的第二个方程，可以得出平行移动 $W^{(\check{c}_{(\mathrm{II},1,\delta)})\ 10}$ 由公式 (2.51) 给出，其指标变换由反演置换 σ 诱导，参见 (2.40)。对 $W^{(\check{c}_{(\mathrm{II},1,\delta)})\ 10}$ 取逆，并利用公式 (2.44)，令 $H^{(\mathrm{II},\delta))} := H^{(\mathrm{II},2,\delta))}\big(H^{(\mathrm{II},1,\delta))}\big)^{-1}$，即可证明 (2.43) 的第二个方程。

III：由于对称性 $c_{(\mathrm{III},\delta)} = \Theta \circ c_{(\mathrm{I},\delta)} \circ \iota$，取第一个公式，应用反演置换 σ（见 (2.40)），再取逆，即可得到 (2.43) 的第三个公式。

IV：经过初等计算，可得以下关于 $\Gamma^{(\check{c}_{(\mathrm{IV},1,\delta)})}$ 和 $\Gamma^{(\check{c}_{(\mathrm{IV},2,\delta)})}$的公式，表明它们具有 (2.46) 的形式，其中 $\epsilon = \delta$；对于第一条路径，$B = A_{13} + A_{23}$, $A = A_{34}$；对于第二条路径，$\epsilon = \delta^2$ (!)，$B = A_{34}$, $A = A_{13} + A_{23}$：

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(\check{c}_{(\mathrm{IV},1,\delta)})}(s) \;&=\; \ln(2\delta)\,(A_{13}+A_{23}) + \frac{-\ln(2\delta)}{2e^{-\ln(2\delta)s}-1}A_{34} + \underbrace{\frac{2\ln(2\delta)\delta^2 e^{-\ln(2\delta)s}}{1-2\delta^2 e^{-\ln(2\delta)s}}}_{=:f_{23}^{(\mathrm{IV},1,\delta)}(s)} A_{23},\\
\Gamma^{(\check{c}_{(\mathrm{IV},2,\delta)})}(s) \;&=\; \ln(2\delta^2)A_{34} + \frac{-\ln(2\delta^2)}{2e^{-\ln(2\delta^2)s}-1}\,(A_{13}+A_{23})\\
&\quad - \underbrace{\frac{2\ln(2\delta^2)\delta^2 e^{-\ln(2\delta^2)s}}{(2e^{-\ln(2\delta^2)s}-1)\,(2(1-\delta^2)e^{-\ln(2\delta^2)s}-1)}}_{=:f_{23}^{(\mathrm{IV},2,\delta)}(s)} A_{23}.
\end{aligned}$$

利用 (2.49) 中关于 $\gamma = 2\delta$的不等式上界，可将 $\left|f_{23}^{(\mathrm{IV},1,\delta)}(s)\right|$ 的分母下界估计为 $1/2$。分子中的指数函数可由 (2.49) 再次给出上界$\frac{1}{2\delta}$，因此

$$\left|f_{23}^{(\mathrm{IV},1,\delta)}(s)\right| \leqslant 2(\ln(2)+|\ln(\delta)|)\delta \overset{(1.35)}{\leqslant} 6\delta^{\frac{1}{2}}, \tag{2.52}$$

因此，判据 (2.48) 对 $f_{23}^{(\mathrm{IV},1,\delta)}(s)$ 成立。
接下来，$\left|f_{23}^{(\mathrm{IV},2,\delta)}(s)\right|$ 分母中的右因子可由下界限定为

$1/2$ 利用不等式 (2.49) 中对 $\gamma = 2\delta^2$ 给出的下界。该分母中的左因子可由下界限定为 $e^{-\ln(2\delta^2)}$ ^{s}，因此

$$\left|f_{23}^{(\mathrm{IV},2,\delta)}(s)\right| \leqslant 4\big(\ln(2) + 2|\ln(\delta)|\big)\delta^2 \overset{(1.35)}{\leqslant} 12\delta, \tag{2.53}$$

因此，判据 (2.48) 对 $f_{23}^{(\mathrm{IV},2,\delta)}(s)$ 成立。两个上界 (2.52) 证明，平行传输 $W^{(\check{c}_{(\mathrm{IV},1,\delta)}}$ (2.55)
和 $W^{(\tilde{c}_{(\mathrm{IV},2,\delta)})}$ ^{10} 都按 (2.47) 中所述的方式分解，分别带有无害群项 $\delta \mapsto H^{(\mathrm{IV},1,\delta)}$ 和 $\delta \mapsto H^{(\mathrm{IV},2,\delta)}$。令 $H^{(\mathrm{IV},\delta))} := H^{(\mathrm{IV},2,\delta))}\big(H^{(\mathrm{IV},1,\delta))}\big)^{-1}$，即可由此证明 (2.43) 中的第四个平行传输方程。

V：由于对称性 $c_{(\mathrm{IV},\delta)} = \Theta \circ c_{(\mathrm{I},\delta)} \circ \iota$，取 (2.43) 中的第四个公式，应用反演置换 σ（见 (2.40)），再取逆，即可得到第五个公式。 □

借助这些信息，我们可以证明五边形方程：

The定理 24. Drinfel'd结合子的五边形方程 (0.3) 成立 .

证明. 根据推论 14，沿路径 (2.42) 的平行移动满足以下等式，因为 U' 以 $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$为中心呈星形，而两条复合路径 $c_{(\mathrm{V},\delta)} * c_{(\mathrm{IV},\delta)}$ 和 $c_{(\mathrm{III},\delta)} * \big(c_{(\mathrm{II},\delta)} * c_{(\mathrm{I},\delta)}\big)$ 均连续且分段光滑，并且具有相同的初始点 (δ^2, δ) 和终点 $(1-\delta, 1-\delta^2)$：

$$W^{(c_{(\mathrm{V},\delta)})}\, W^{(c_{(\mathrm{IV},\delta)})} \;=\; W^{(c_{(\mathrm{III},\delta)})}\, W^{(c_{(\mathrm{II},\delta)})}\, W^{(c_{(\mathrm{I},\delta)})}. \tag{2.54}$$

鉴于前述引理 23 中公式 (2.43) 的长度，我们定义以下缩写，其中 ϵ, ϵ' 是 δ 中的单项式（实际上是 δ 或 δ^2），A, B 是元素 $A_{ij} = A_{ji} \in \mathcal{A}$（$1 \leqslant i < j \leqslant 4$）的某些线性组合，而 i 是 {I, II, III, IV, V}中的一个元素：

$$\Phi_{\epsilon,\epsilon'}\left(A, B, H^{(i,\delta)}\right) \;:=\; \psi_{\epsilon'}(B, A)\; H^{(i,\delta)}\; \psi_{\epsilon}(A, B)^{-1}. \tag{2.55}$$

我们回顾一下由条件 (2.1b) 和 (2.1c) 得出的相关元素 A_{ij} 的对易关系：

$$\begin{aligned}
[A_{12}, A_{34}] &= 0, && (2.56)\\
[A_{12}, A_{13} + A_{23}] &= 0 = [A_{12}, A_{12} + A_{13} + A_{23}], && (2.57)\\
[A_{23}, A_{12} + A_{13}] &= 0 = [A_{23}, A_{12} + A_{13} + A_{23}], && (2.58)\\
[A_{23}, A_{24} + A_{34}] &= 0 = [A_{23}, A_{23} + A_{24} + A_{34}], && (2.59)\\
[A_{34}, A_{23} + A_{24}] &= 0 = [A_{34}, A_{23} + A_{24} + A_{34}]. && (2.60)
\end{aligned}$$

此外，回想一下，若 $A \in \mathcal{A}$ 与 $B_1, \ldots, B_N \in \mathcal{A}$ 对易，则形式指数$e^{\lambda\gamma A}$ ($\gamma \in \mathbb{C}$)与任意系数由关于 $B_1, \ldots, B_N \in \mathcal{A}$的非交换多项式构成的形式级数对易，因此尤其是

$$[A, B] = 0 \quad \text{implies} \quad e^{\lambda\gamma A} e^{\lambda\gamma' B} = e^{\lambda(\gamma A + \gamma' B)} = e^{\lambda\gamma' B} e^{\lambda\gamma A}. \tag{2.61}$$

与六边形方程 (2.27) 的证明中一样，我们将无害项 $\delta \mapsto H^{(i,\delta)}$ 被至多对数发散项 $\delta \mapsto L_\delta$ 共轭后所得的结果（作为 $\big($函数空间$\big(]0,\ 1/4],\ \mathbb{C}\big) \otimes \mathcal{A}\big)[[\lambda]]$中的元素）记为 $\tilde{H}^{(i,\delta)}$。另请注意，

$$L_\delta\ \Phi_{\epsilon,\epsilon'}\left(A, B, H^{(i,\delta)}\right)\ L_\delta^{-1}\ =\ \Phi_{\epsilon,\epsilon'}\left(L_\delta A L_\delta^{-1}, L_\delta B L_\delta^{-1}, \tilde{H}^{(i,\delta)}\right). \tag{2.62}$$

我们计算 (2.54) 的左侧，并尝试将形如$e^{\lambda \ln(\epsilon) A}$ （带有 $\epsilon = \delta$ 或 $\epsilon = \delta^2$）的“奇异项”分别“推”到左侧和右侧：这里将用到 (2.61)：

$$\begin{aligned}
W_{10}^{(c_{(\mathrm{V},\delta)})}\ W_{10}^{(c_{(\mathrm{IV},\delta)})} &= e^{\lambda \ln(\delta)(A_{23}+A_{24})}\ \Phi_{\delta^2,\delta}\left(A_{12}, A_{23}+A_{24}, H^{(\mathrm{V},\delta)}\right)\ e^{-\lambda \ln(\delta^2) A_{12}} \\
&\quad e^{\lambda \ln(\delta^2) A_{34}}\ \Phi_{\delta,\delta^2}\left(A_{13}+A_{23}, A_{34},\ H^{(\mathrm{IV},\delta)}\right)\ e^{-\lambda \ln(\delta)(A_{13}+A_{23})} \\
&= e^{\lambda \ln(\delta)(A_{23}+A_{24})}\ \Phi_{\delta^2,\delta}\left(A_{12}, A_{23}+A_{24}, H^{(\mathrm{V},\delta)}\right)\ e^{\lambda \ln(\delta^2) A_{34}} \\
&\quad e^{\lambda \ln(\delta^2) A_{34}}\ \Phi_{\delta,\delta^2}\left(A_{13}+A_{23}, A_{34},\ H^{(\mathrm{IV},\delta)}\right)\ e^{-\lambda \ln(\delta)(A_{13}+A_{23})} \\
&= e^{\lambda \ln(\delta)(A_{23}+A_{24}+2A_{34})}\ \Phi_{\delta^2,\delta}\left(A_{12}, A_{23}+A_{24}, \tilde{H}^{(\mathrm{V},\delta)}\right) \\
&\quad \Phi_{\delta,\delta^2}\left(A_{13}+A_{23}, A_{34},\ \tilde{H}^{(\mathrm{IV},\delta)}\right)\ e^{-\lambda \ln(\delta)(2A_{12}+A_{13}+A_{23})},
\end{aligned} \tag{2.63}$$

其中，第一个等号由 (2.43) 得出，第二个由 (2.56) 得出，第三个由 (2.56)、(2.60)、(2.57)、(2.62)、(2.61) 得出。接下来，我们用类似的方法计算 (2.54) 的右侧：

$$\begin{aligned}
&W_{10}^{(c_{(\mathrm{III},\delta)})}\ W^{(c_{(\mathrm{II},\delta)})}{}_{10}\ W_{10}^{(c_{(\mathrm{I},\delta)})} \\
&\overset{(2.43)}{=} e^{\lambda \ln(\delta) A_{34}}\ \Phi_{\delta,\delta}\left(A_{23}, A_{34},\ H^{(\mathrm{III},\delta)}\right)\ e^{-\lambda \ln(\delta) A_{23}} \\
&\quad e^{\lambda \ln(\delta)(A_{24}+A_{34})}\ \Phi_{\delta,\delta}\left(A_{12}+A_{13}, A_{24}+A_{34}, H^{(\mathrm{II},\delta)}\right)\ e^{-\lambda \ln(\delta)(A_{12}+A_{13})} \\
&\quad e^{\lambda \ln(\delta) A_{23}}\ \Phi_{\delta,\delta}\left(A_{12}, A_{23}, H^{(\mathrm{I},\delta)}\right)\ e^{-\lambda \ln(\delta) A_{12}} \\
&\overset{(2.59),(2.58)}{=} e^{\lambda \ln(\delta) A_{34}}\ \Phi_{\delta,\delta}\left(A_{23}, A_{34},\ H^{(\mathrm{III},\delta)}\right)\ e^{\lambda \ln(\delta)(A_{24}+A_{23}+A_{34})} \\
&\quad e^{-\lambda \ln(\delta) 2A_{23}}\ \Phi_{\delta,\delta}\left(A_{12}+A_{13}, A_{24}+A_{34}, H^{(\mathrm{II},\delta)}\right)\ e^{\lambda \ln(\delta) 2A_{23}} \\
&\quad e^{-\lambda \ln(\delta)(A_{12}+A_{13}+A_{23})}\ \Phi_{\delta,\delta}\left(A_{12}, A_{23}, H^{(\mathrm{I},\delta)}\right)\ e^{-\lambda \ln(\delta) A_{12}} \\
&\overset{(2.59),(2.60),(2.57),(2.58)(2.62)}{=} e^{\lambda \ln(\delta)(A_{23}+A_{24}+2A_{34})}\ \Phi_{\delta,\delta}\left(A_{23}, A_{34},\ \tilde{H}^{(\mathrm{III},\delta)}\right) \\
&\quad \Phi_{\delta,\delta}\left(A_{12}+A_{13}, A_{24}+A_{34}, \tilde{H}^{(\mathrm{II},\delta)}\right) \\
&\quad \Phi_{\delta,\delta}\left(A_{12}, A_{23}, \tilde{H}^{(\mathrm{I},\delta)}\right)\ e^{-\lambda \ln(\delta)(2A_{12}+A_{13}+A_{23})}.
\end{aligned} \tag{2.64}$$

比较前面的方程 (2.63) 和 (2.64) 可立即看出，奇异项 $e^{\lambda \ln(\delta)(A_{23}+A_{24}+2A_{34})}$ 和 $e^{-\lambda \ln(\delta)(2A_{12}+A_{13}+A_{23})}$ 在 (2.54) 中相互抵消，只留下形如 (2.55) 的项的乘积；当 $\delta \to 0$ 趋于极限时，这些乘积趋于所需的 Drinfel'd 结合子的乘积，从而得到五边形方程 (0.3)。这是 $\delta \to 0$ 由于极限规则 (1.28)、Drinfel'd 结合子的定义 (2.23)，以及无害群项趋于 1 这一事实（参见命题 4 的陈述 v.）而成立的。 □

A 第1节中若干定理的证明。

A.1 命题 10 的证明

证明。我们使用 (1.52) 进行计算：

$$\begin{aligned}\left(\check{\Theta}^{*}\check{\Gamma}\right)(x',y') &= \sum_{j=1}^{N'}\sum_{i=1}^{N}\Bigg(\check{\Gamma}_i^{[1]}\left(\Theta^{(1)}(x',y'),\Theta^{(2)}(x',y')\right)\frac{\partial\Theta_i^{(1)}}{\partial x'_j}(x',y')\mathsf{d}x'_j \\ &\quad+\check{\Gamma}_i^{[1]}\left(\Theta^{(1)}(x',y'),\Theta^{(2)}(x',y')\right)\frac{\partial\Theta_i^{(1)}}{\partial y'_j}(x',y')\mathsf{d}y'_j \\ &\quad+\check{\Gamma}_i^{[2]}\left(\Theta^{(1)}(x',y'),\Theta^{(2)}(x',y')\right)\frac{\partial\Theta_i^{(2)}}{\partial x'_j}(x',y')\mathsf{d}x'_j \\ &\quad+\check{\Gamma}_i^{[2]}\left(\Theta^{(1)}(x',y'),\Theta^{(2)}(x',y')\right)\frac{\partial\Theta_i^{(2)}}{\partial y'_j}(x',y')\mathsf{d}y'_j\Bigg),\end{aligned}$$

因此，结合 (1.52) 和 (1.53)，我们得到

$$\begin{aligned}\left(\check{\Theta}^{*}\check{\Gamma}\right)(x',y') &\overset{(1.49)}{=} \sum_{j=1}^{N'}\sum_{i=1}^{N}\Gamma_i\big(\Theta(z')\big)\left(\frac{\partial\check{\Theta}_i}{\partial x'_j}(x',y')\mathsf{d}x'_j+\frac{\partial\check{\Theta}_i}{\partial y'_j}(x',y')\mathsf{d}y'_j\right) \\ &\overset{(1.50)}{=} \sum_{j=1}^{N'}\sum_{i=1}^{N}\big(\Gamma_i\circ\Theta\big)^{\vee}(x',y')\left(\frac{\partial\Theta_i}{\partial z'_j}\right)^{\vee}(x',y')\mathsf{d}z'_j=\left(\sum_{j=1}^{N'}\left(\Theta^{*}\Gamma\right)_j\mathsf{d}z'_j\right)^{\vee}(x',y'),\end{aligned}$$

这就证明了该命题。 □

A.2 命题12的证明

证明。我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Gamma'_u}{\partial x'_v}-\frac{\partial\Gamma'_v}{\partial x'_u}+\lambda\Big(\Gamma'_u\Gamma'_v-\Gamma'_v\Gamma'_u\Big) &= \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\left((\Gamma_i\circ\Theta)\dfrac{\partial\Theta_i}{\partial x'_u}\right)}{\partial x'_v}-\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\left((\Gamma_j\circ\Theta)\dfrac{\partial\Theta_j}{\partial x'_v}\right)}{\partial x'_u} \\ &\quad+\lambda\sum_{i,j=1}^{N}\Big((\Gamma_i\circ\Theta)(\Gamma_j\circ\Theta)-(\Gamma_j\circ\Theta)(\Gamma_i\circ\Theta)\Big)\frac{\partial\Theta_i}{\partial x'_u}\frac{\partial\Theta_j}{\partial x'_v} \\ &= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial^2\Theta_i}{\partial x'_v\partial x'_u}-\frac{\partial^2\Theta_i}{\partial x'_u\partial x'_v}\right)(\Gamma_i\circ\Theta) \\ &\quad+\sum_{i,j=1}^{N}\left(\left(\frac{\partial\Gamma_i}{\partial x_j}-\frac{\partial\Gamma_j}{\partial x_i}+\lambda\Big(\Gamma_i\Gamma_j-\Gamma_j\Gamma_i\Big)\right)\circ\Phi\right)\frac{\partial\Theta_i}{\partial x'_u}\frac{\partial\Theta_j}{\partial x'_v} \\ &= 0+0=0,\end{aligned}$$

根据链式法则、施瓦茨法则以及 Γ 的平坦性，因此 Γ' 是平坦的。 □

A.3 定理13的证明

证明。考虑由下式给出的光滑映射 $\Gamma^{(F)} \in \Big(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O},\mathbb{C}) \otimes \mathcal{A}\Big)[[\lambda]]$

$$\Gamma^{(F)}(s,t) \coloneqq \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i\big(F(s,t)\big)\frac{\partial F_i}{\partial s}(s,t). \tag{A.1}$$

此外，对于每个 $(s,t) \in \mathcal{O}$，令 $W_{(F)\cdot a}(s,t)$ 表示沿光滑路径 $s \to F(s,t)$ 从 p 到 $F(s,t)$ 的平行移动，即 $W_{(F)\cdot a}$（在本证明中，我们省略附加在 W 上的符号 Γ）满足微分方程

$$\frac{\partial W^{(F)}_{\cdot a}}{\partial s} = \lambda\Gamma^{(F)}W^{(F)}_{\cdot a}. \tag{A.2}$$

由于 Γ 和 F 是光滑的，因此 $(s,t) \mapsto W_{(F)\cdot a}$ 是光滑的，因而是 $\big(C^\infty(\mathcal{O},\mathbb{C}) \otimes A\big)[[\lambda]]$ 中的一个元素：事实上，由于 $W_{(F)\cdot a}$ 是由迭代积分（沿 s 方向）构成的，根据通常的含参积分求导法则即可得出该结论：

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_a^s f(t,s')\mathsf{d}s' = \int_a^s \frac{\partial f}{\partial t}(t,s')\mathsf{d}s'.$$

对方程（A.2）关于 t 求导，并利用方程（A.1），再根据所有偏导数均可交换的施瓦茨法则，可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 W^{(F)}_{\cdot a}}{\partial t\partial s} &= \lambda\frac{\partial}{\partial t}\Big(\sum_{i=1}^{N}(\Gamma_i\circ F)\frac{\partial F_i}{\partial s}W^{(F)}_{\cdot a}\Big)\\
&= \lambda\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial\Gamma_i}{\partial x_j}\circ F\right)\frac{\partial F_j}{\partial t}\frac{\partial F_i}{\partial s}W^{(F)}_{\cdot a} + \lambda\sum_{i=1}^{N}(\Gamma_i\circ F)\frac{\partial^2 F_i}{\partial t\partial s}W^{(F)}_{\cdot a} + \lambda\sum_{i=1}^{N}(\Gamma_i\circ F)\frac{\partial F_i}{\partial s}\frac{\partial W^{(F)}_{\cdot a}}{\partial t}\\
&\overset{(1.55)}{=} \underline{\lambda\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial\Gamma_j}{\partial x_i}\circ F\right)\frac{\partial F_j}{\partial t}\frac{\partial F_i}{\partial s}W^{(F)}_{\cdot a}}\\
&\quad - \lambda^2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(\Gamma_i\circ F)(\Gamma_j\circ F)\frac{\partial F_j}{\partial t}\frac{\partial F_i}{\partial s}W^{(F)}_{\cdot a} + \underline{\lambda^2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(\Gamma_j\circ F)(\Gamma_i\circ F)\frac{\partial F_j}{\partial t}\frac{\partial F_i}{\partial s}W^{(F)}_{\cdot a}}\\
&\quad + \underline{\lambda\sum_{i=1}^{N}(\Gamma_i\circ F)\frac{\partial^2 F_i}{\partial t\partial s}W^{(F)}_{\cdot a}} + \lambda\sum_{i=1}^{N}(\Gamma_i\circ F)\frac{\partial F_i}{\partial s}\frac{\partial W^{(F)}_{\cdot a}}{\partial t}\\
&\overset{(A.2)}{=} \underline{\lambda\frac{\partial}{\partial s}\left(\sum_{i=1}^{N}(\Gamma_i\circ F)\frac{\partial F_i}{\partial t}W^{(F)}_{\cdot a}\right)} + \lambda\Gamma^{(F)}\left(\frac{\partial W^{(F)}_{\cdot a}}{\partial t} - \lambda\sum_{j=1}^{N}(\Gamma_j\circ F)\frac{\partial F_j}{\partial t}W^{(F)}_{\cdot a}\right).
\end{aligned}$$

因此，令

$$H \coloneqq \frac{\partial W^{(F)}_{\cdot a}}{\partial t} - \lambda\sum_{j=1}^{N}(\Gamma_j\circ F)\frac{\partial F_j}{\partial t}W^{(F)}_{\cdot a} \in \Big(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O},\mathbb{C})\otimes\mathcal{A}\Big)[[\lambda]],$$

前面的方程给出了形式线性常微分方程

$$\frac{\partial H}{\partial s} = \lambda \Gamma^{(F)} H \tag{A.3}$$

在 $s = a$ 处满足初始条件，对每个满足 $\mathcal{O}'' = \{t \in \mathbb{R} \mid (a,t) \in \mathcal{O}\}$ 的 $t \in \mathcal{O}''$，注意到 $[0,1] \subset \mathcal{O}''$:

$$H(a,t) = \frac{\partial W_{aa}^{(F)}(t)}{\partial t} - \lambda \sum_{j=1}^{N} \Gamma_j\big(F(a,t)\big) \frac{\partial F_j}{\partial t}(a,t) W_{aa}^{(F)}(t) \overset{(1.57)}{=} \frac{\partial 1}{\partial t}(t) - \lambda \sum_{j=1}^{N} \Gamma_j(p) \frac{\partial p}{\partial t}(t) = 0.$$

因此，形式线性常微分方程 (A.3) 有唯一解

$$H(s,t) = 0 \qquad \forall (s,t) \in \mathcal{O} \supset [a,b] \times [0,1].$$

根据 H 的定义可知，关于 t 有如下形式线性常微分方程:

$$\frac{W_{\cdot a}^{(F)}}{\partial t}(s,t) = \lambda \sum_{j=1}^{N} \Gamma_j\big(F(s,t)\big) \frac{\partial F_j}{\partial t}(s,t) W_{\cdot a}^{(F)}(s,t),$$

由于该方程中没有关于 s 的导数，因此我们可以令 $s = b$，得到

$$\frac{W_{ba}^{(F)}}{\partial t}(t) = \lambda \sum_{j=1}^{N} \Gamma_j\big(F(b,t)\big) \frac{\partial F_j}{\partial t}(b,t) W_{ba}^{(F)}(t) \overset{(1.57)}{=} \lambda \sum_{j=1}^{N} \Gamma_j\big(q\big) \frac{\partial q}{\partial t}(t) W_{ba}^{(F)}(t) = 0.$$

由此可知，平行移动 $W_{(F)\,ba}$ 不依赖于 t，因此特别地

$$W_{ba}^{(c_0)} = W_{ba}^{(F)}(t=0) = W_{ba}^{(F)}(t=1) = W_{ba}^{(c_1)}.$$

□

A.4 推论 14 的证明

首先，我们需要以下著名的平滑引理，它是一种用于平滑重参数化的技术工具：仅在推论 14 的证明中需要用到:

引理 25（光滑化引理）。设 $a < b$ 为实数，$\{a,b\} \subset D \subset [a,b]$ 为一个有限子集，其元素由 $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_m < a_{m+1} = b$ 给出，并设 $c\colon [a,b] \to U \subset \mathbb{R}^N$ 为一条连续分段光滑路径。则存在一个光滑映射 $\theta\colon \mathbb{R} \to [a,b]$，使得其在 $[a,b]$ 上的限制严格单调且满射（因而在 $[a,b]$ 上有连续逆映射），在 D 上诱导恒等映射，并且其所有高阶导数在 D 中的点处均为零。此外，复合映射 $c \circ \theta\colon \mathbb{R} \to [a,b]$（按 (1.5) 的意义）处处有定义且光滑，其所有高阶导数（对于 $r \geqslant 1$）在 D 中的所有点处均为零。对于所有 $s \leqslant a$，映射 $c \circ \theta$ 取常值 $c(a)$；对于所有 $s \geqslant b$，它取常值 $c(b)$。特别地，对于每个正的 ϵ，将 $c \circ \theta$ 限制在 $[a - \epsilon, b + \epsilon]$ 上，即可得到一条光滑的重参数化路径。

证明。设 $\rho\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为下列函数，它在分析学和微分几何中广为人知：

$$\rho(s)\coloneqq\begin{cases} e^{-1/s} & \text{if } s>0,\\ 0 & \text{if } s\leqslant 0.\end{cases}$$

众所周知，而且不难看出，ρ是 $\mathcal{C}^\infty$，其所有高阶导数在 0 处均为零，且对 $s>0$只取严格正值。定义函数 $\vartheta\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 如下：

$$\vartheta(s)\coloneqq\sum_{i=0}^{m}\big(a_{i+1}-a_i\big)\frac{\rho(s-a_i)\rho(a_{i+1}-s)}{\int_{a_i}^{a_{i+1}}\rho(s'-a_i)\rho(a_{i+1}-s')\mathsf{d}s'}$$

以及由 ϑ的原函数定义 $\theta\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$：

$$\theta(s)\coloneqq a+\int_a^s\vartheta(s')\mathsf{d}s'.$$

于是，θ 的所有性质都可由以下事实推出：$a_{i+1}-a_i>0$，并且光滑函数 $s\mapsto\rho(s-a_i)\rho(a_{i+1}-s)$在 $]a_i,\ a_{i+1}[$ 上严格为正，在 $]a_i,\ a_{i+1}[$之外为零。此外，显然，复合映射 $c\circ\theta$ 作为光滑映射的复合，在 $[a,b]\setminus D$ 上光滑。由反复应用链式法则可知，$c\circ\theta$的所有高阶导数在 D 各点处都趋于零，因为 θ 的所有高阶导数在这些点处均趋于零，而 c 所有高阶左导数和右导数则保持有界。 □

证明。（推论 14 的证明）：
设 $c\colon\ [0,1]\to U'\subset U$是连续分段光滑环路，满足 $c(0)=c(1)=p$，由复合映射 $(c_2\circ\iota)*c_1$ 定义，其中 $\iota\colon\ [0,1]\to[0,1]$ 是区间反演$\iota(s)=1-s$。此外，设 $d\colon\ [0,1]\to U'$是连接 ϖ与 p的仿射路径，即 $d(s)=(1-s)\varpi+sp$。设$\check{}c\colon\ [0,1]\to U'$是分段光滑路径$\check{}c\colon=\big(d\circ\iota\big)*(c*d)$，它由分段光滑路径复合而成。显然，$\check{}c$ 是以 ϖ为基点的连续分段光滑环路。按照前述引理 25 的意义，选取路径$\check{}c$ 的一个光滑重参数化 θ。回忆一下，θ 是一个光滑映射 $\mathbb{R}\to[0,1]$，对所有$s\leqslant 0$ 都有 $\theta(s)=0$，对所有 $s\geqslant b$都有 $\theta(s)=1$。由（1.45）以及 $\theta(0)=0$、$\theta(1)=1$这一事实，我们得到以下平行移动等式

$$\Gamma W_{10}^{(\check{c}\circ\theta)}=\Gamma W_{10}^{(\check{c})}=\Gamma W_{10}^{((d\circ\iota)*(c*d))}\overset{(1.47)}{=}\Gamma W_{10}^{(d)^{-1}}\,\Gamma W_{10}^{(c)}\,\Gamma W_{10}^{(d)}. \tag{A.4}$$

接下来，由下式定义映射 $\tilde{F}\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^N$

$$\tilde{F}(s,t)=(1-t)\check{c}\big(\theta(s)\big)+tq$$

显然是光滑的，因此特别是连续的，由此可知，逆像 $\mathcal{O}\coloneqq\tilde{F}^{-1}(U')$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个开子集，其中包含矩形 $[0,1]\times[0,1]$，这归因于以下假设：U' 关于 ϖ 是星形的，并且环路 c 上的所有点，以及$\check{}c$ 上的所有点，都位于U' 中。根据 $[0,1]$ 的紧致性，存在一个严格为正的实数 ϵ，使得该开...

由于海涅–博雷尔定理，矩形 $]-\epsilon,1+\epsilon[\times]-\epsilon,1+\epsilon[$ 仍然包含在 $\mathcal{O}$ 中。如果你认为这已经超出了本科阶段的数学分析范围，那么可以采用以下大一水平的论证：如果对于每个非负整数 n，都存在 $t_n\in[0,1]$ 使得 $\left(-\frac{1}{n+1},t_n\right)\notin\mathcal{O}$，那么根据博尔查诺–魏尔施特拉斯定理，存在子序列 $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛到 $\tau\in[0,1]$。然而，$\mathbb{R}^2$ 中的极限点 $(0,\tau)$ 包含在开子集 $\mathcal{O}$ 中，因此存在一个严格为正的实数 δ，使得 $(0,\tau)\in[0,0-\delta[\times]\tau-\delta,\tau+\delta[\subset\mathcal{O}$。但这样一来，子序列 $\left(-\frac{1}{n_k+1},t_{n_k}\right)$ 中足够接近的元素也会属于 $\mathcal{O}$，这与假设矛盾。通过合理地重复这一论证，即可证明该命题。令$F\colon\mathcal{O}\to U'\subset\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^N$ 表示 $\tilde{F}$ 在 $\mathcal{O}$ 上的限制。那么 F 显然满足定理 13 的所有假设：对于所有 $s\in]-\epsilon,1+\epsilon[$，我们有 $F(s,0)=\check{c}\big(\theta(s)\big)=:c_{(0)}(s)$，并且$F(s,1)=\varpi=:c_{(1)}(s)$（在 ϖ 处的常值环路）；当然，对于所有 $t\in]-\epsilon,1+\epsilon[$，我们都有 $F(0,t)=\varpi=F(1,t)$。

由定理 13 可得

$$^{\Gamma}W_{10}^{(\check{c}\circ\theta)}={}^{\Gamma}W_{10}^{(c_{(1)})}=1$$

由于 $c_{(1)}$ 是常值环路，因此 $\Gamma^{(c_{(1)})}=0$。根据等式 (A.4)，可得

$$1={}^{\Gamma}W_{10}^{(c)}=\left({}^{\Gamma}W_{10}^{(c_2)}\right)^{-1}{}^{\Gamma}W_{10}^{(c_1)}$$

这就证明了该命题。以p 为基点的连续分段光滑环路 c_3，是前述结论的一个特例：取经过 p的常值环路 c_4 作为第二条路径即可。

□

参考文献

[1] Alekseev, A.Y., Enriquez, B., Torossian, C.: Drinfeld 结合子、辫群与´ Kashiwara-Vergne 方程的显式解。Publ. Math. Inst. Hautes Etudes 112 (2010), 143–189.[2] Arnaudi`es, J.-M., Fraysse, H.: 数学课程。2.（法语） [数学课程。 2] 分析。 [分析] Dunod Universit´e：基础著作。 [Dunod University：基础著作] Dunod, Paris, 1988.[3]Bar-Natan, D.: 关于结合子与 Grothendieck-Teichmuller 群。I. Sel. Math. 4 (1998), 183–212.[4] Chen, K.-T.: 形式微分方程。Ann. Math. 73 (1961), 110-133.[5] Coddington, E.A.; Levinson, N: 常微分方程论，1955。第三版，Tata McGraw Hill, New Delhi, 1972.[6] De Concini, C., Procesi, C.: 超平面配置与整体性方程。Selecta Mathematica 1 (1995), 495–535.

[7]Deligne, P.: 正则奇点处的微分方程。LNM 163, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1970.[8] Drinfel'd, V.G.: 拟 Hopf 代数。Leningrad Math. J. 1 (1990), 1419–1457.[9] Drinfel'd, V.G.: 关于拟三角拟 Hopf 代数及与 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 密切相关的一个群。Leningrad Math. J. 2 (1991), 829–860.[10]Enriquez, B., Halbout, G.: 拟李双代数的量子化。J. Amer. Math. Soc. 23 (2010), 611–653.[11]Enriquez, B., Halbout, G.: 余边界李双代数的量子化。Ann. of Math. 171 (2010), 1267–1345.[12] Etingof, P.I., Kazhdan, D.A.: 李双代数的量子化。I. Selecta Math. (N.S.) 2 (1996), 1–41.[13] Etingof, P.I., Schiffmann, O.: 量子群讲义。 2^{nd} 版。International Press, Somerville, MA, USA, 2002.[14] Fadell, E.R.:, Husseini, S.Y.: 构型空间的几何与拓扑。Springer, Heidelberg, 2001.[15] Furusho, H.: 五边形方程与六边形方程。Ann. Maths. 171 (2010), 545–556.[16] Jacobson, N.: 李代数。Dover, New York, 1979, 1962 年原版重印。[17] Jacobson, N.: 基础代数 II，第 1 版，Freeman and Co., San Francisco, Ca, 1980.[18] Kassel, C.: 量子群。Springer Verlag, Berlin, 1995.[19] Knizhnik, V.G., Zamolodchikov, A.B.: 二维中的流代数与 Wess-Zumino 模型。Nuclear Phys. B 247 (1984), 83-103.[20]Kol´aˇr, I., Michor, P., Slov´ak, J.: 微分几何中的自然运算。Springer, Berlin, 1993.[21] Kobayashi, S., Nomizu, K.: 微分几何基础，第一卷，Interscience Publishers, Wiley and Sons, New York, 1963.[22]Kohno, T.: 与纯辫群相关的 Poincar´e-Koszul 级数。Invent. math. 82 (1985), 57–75.[23] Kohno, T.: 辫群的单值表示与 Yang-Baxter 方程。Annales de l'institut Fourier, 37 (1987), p. 139–160.[24]Kontsevich, M.L.: Poisson 流形的变形量子化。Lett. Math. Phys. 66 (2003), 157–216.

[25] 朗，S.：《本科分析》。第2版，施普林格出版社，纽约，1997年。[26] 麦克莱恩，S.：《工作数学家的范畴论》。第2版，施普林格出版社，纽约，1998年。[27] 奎伦，D.：有理同伦论，《数学年刊》（第2辑）90（1969），205–295。[28] 鲁特瑙尔，C.：《自由李代数》。克拉伦登出版社，牛津，1993年。[29] 萨卡洛什，Š.，舍韦拉，P.：关于拟李双代数的量子化。《精选数学》21（2015），649–729。[30] 舍韦拉，P.：李双代数的量子化再探。《精选数学》22（2016），1563–1581。[31] 斯威德勒，M.E.：《霍普夫代数》。数学讲义丛书，本杰明出版社，纽约，1969年。[32] 塔马金，D.E.：M. 康采维奇形式化定理的拟运算子证明。博士论文，宾夕法尼亚州立大学，1999年，共51页。ISBN：978-0599-42500-2。

(M. Bordemann) Département de Mathématiques, Laboratoire IRIMAS, Université de HauteAlsace, 18, rue des Frères Lumière, 68093 Mulhouse, France.电子邮箱：Martin.Bordemann@uha.fr, (A. Rivezzi) Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Milano-Bicocca, ViaR.Cozzi 55, 20125 Milano, Italy.现地址：Département de Mathématiques, Laboratoire IRIMAS, Université deHaute Alsace, 18, rue des Frères Lumière, 68093 Mulhouse, France.电子邮箱：a.rivezzi@campus.unimib.it, (Th. Weigel) Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Milano-Bicocca, ViaR.Cozzi 55, 20125 Milano, Italy电子邮箱：thomas.weigel@unimib.it。