arXiv:2304.07028v1 [math.AT] 14 Apr 2023

关于 ∞-双范畴的共尾函子

Fernando Abellán 与 Walker H. Stern

摘要

本文研究了关于部分松弛余极限理论的 ∞-双范畴共尾函子概念。本文的主要结果是通过推广 Quillen 定理 A 的条件，刻画 ∞-双范畴的共尾函子。作为证明主定理的关键环节，我们为每个 ∞-双范畴函子$f : \mathfrak{f} \to \mathbb{B}$构造了一个外2-笛卡尔纤维化 F(f) → B，并将其识别为函子 f 上的自由纤维化。

关键词：部分松弛余极限、余终性、格罗滕迪克构造、(∞,2)-范畴。

数学主题分类：18N65, 18N40, 18N99.

目录

1 引言 **1**

1.1 部分松弛（余）极限.11.2 共尾性定理.31.3 一类示例.51.4 变差性.6

2 预备知识 **7**

2.1 带标记的双缩放单纯集合与外部 2-笛卡尔纤维化.72.2 ∞-双范畴格罗滕迪克构造.10

3 主定理 **11**

3.1 自由 2-笛卡尔纤维化.123.2 部分松弛余极限与余终性.19

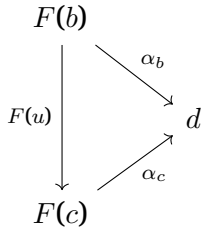
1 引言

1.1 部分松弛（余）极限

当我们尝试将 1-范畴中的余极限概念推广到 2-范畴时，会立即遇到一个问题：该采用哪种余极限定义。粗略地说，任何余极限的定义都应配备一个泛锥。然而，如果我们考虑一个 2-函子 $F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$，就会遇到定义关于 F 的锥的问题。以 d 为锥顶、关于 F 的锥应由以下内容组成：

- 对于每个对象 $c \in \mathbb{C}$，都有一个态射 $\alpha_c : F(c) \to d$。

- 对于 C 中的每个态射 $u\colon\ b \to c$，有一个图表



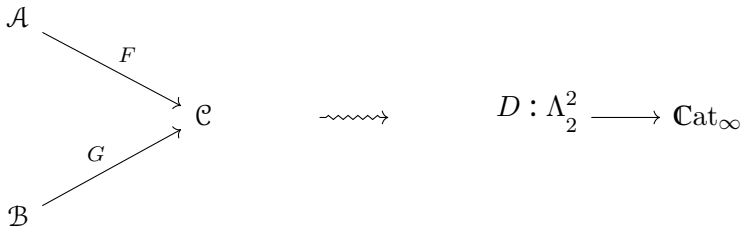
  并且以适当的方式交换。

问题恰恰出在这里：这个定义存在缺陷——有多种 2-范畴概念都可以用来描述图表“以适当的方式交换”，而每一种都会导出不同的余极限概念。例如，如果要求这些三角形仅在非可逆 2-态射意义下交换，就会得到 lax 余极限的概念。另一方面，如果要求交换关系在可逆 2-态射意义下成立，那么相应的余极限概念就是 伪余极限。

解决二维余极限定义多样性的一种传统方法，是通过定义更一般的加权余极限概念，使其能够特化为上述各种情形（例如参见 [22]）。然而，近年来，另一种不同但等价的方法因其适用于高阶范畴的单纯模型中的应用而逐渐受到重视，即：部分松弛余极限。

在定义部分松弛余极限时，我们考虑一个配备了一组带标记 1-态射的 $(\infty,2)$-范畴 $\mathfrak{f}$（我们通常使用下标记法 $\mathfrak{f}^\natural$ 表示这些态射），并要求当 u 是一个带标记态射时，使上述三角形交换的所选 2-态射是可逆的。与 Cat 加权极限或 $\mathfrak{fat}_\infty$-加权极限相比，这种解决上述问题的方法并未损失任何内容，因为这两种理论是等价的（更多细节请参见 [2, 定理 4.7] 和 [14,第 5] 节）。尽管这种 2-范畴极限的定义实际上是 ∞-范畴理论研究中的一个新概念，但它在严格 2-范畴领域中的应用早已确立，如 [11] 中所示。

在继续一般性讨论之前，我们先给出一些例子。令 Λ^2_2 为由三个对象 0,1,2 以及态射 $1 \to 2$ 和 $0 \to 2$ 组成的偏序集。假设给定一个图表



并让我们计算 D 的 lax 极限。我们将这个记作 $\mathcal{A} \times^{\flat}_{\mathcal{C}} \mathcal{B}$ 的 lax 极限非正式地描述如下：

- 对象由以下数据给出：三个对象 $a \in \mathcal{A}$、$b \in \mathcal{B}$ 和 $c \in \mathcal{C}$，以及态射 $\alpha_a\colon F(a) \to c$ 和 $\alpha_b\colon G(b) \to c$。
- $(a, b, c, \alpha_a, \alpha_b) \to (a\prime b\prime c\prime \alpha_{a'}\ \alpha_{b'})$ 之间的一个态射由态射 $a \to a\prime$、$b \to b\prime$和 $c \to c\prime$ 以及 $\mathcal{C}$中的一个交换图给出

$$\begin{array}{ccccc} F(a) & \xrightarrow{\alpha_a} & c & \xleftarrow{\alpha_b} & G(b) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F(a') & \xrightarrow{\alpha_{a'}} & c' & \xleftarrow{\alpha_{b'}} & G(b'). \end{array}$$

这种构造称为松弛拉回，已在 [32] 中用于理解任意局部化不变量的切除性质为何失效。伪极限 $\mathcal{A} \times^{\sharp}_{\mathcal{C}} \mathcal{B}$（与通常的 ∞-范畴拉回一致）是 $\mathcal{A} \times^{\flat}_{\mathcal{C}} \mathcal{B}$ 的满子范畴，由满足以下条件的元组（$a, b, c, \alpha_a, \alpha_b$）组成：两者 α_a 和 α_b 都是等价。

现在，设 Λ^2_2 带有一个标记，该标记由边 $0 \to 2$ 组成，而该边$\overset{\to}{}$对应于函子 $G\colon\ \mathcal{B} \to \mathcal{C}$。在这种情况下，我们将部分松弛极限记为 $\mathcal{A} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{B}$。可以证明，依赖于标记的极限由如下元组组成的子范畴给出：$(a, b, c, \alpha_a, \alpha_b)$，其中 α_b 是 $\mathcal{C}$中的一个等价。在此情形下，我们可以如下描述 ∞-范畴$\to \mathcal{A} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{B}$：

- 对象由三元组 (a, b, α) 给出，其中 $a \in \mathcal{A}$、$b \in \mathcal{A}$ 和 $\alpha\colon\ F(a) \to G(b)$。
- 态射 $(a, b, \alpha) \to (a' b' \alpha')$ 由态射 $a \to a'$、$b \to b'$ 以及一个交换图给出

$$\begin{array}{ccc} F(a) & \xrightarrow{\alpha} & F(b) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(a') & \xrightarrow{\alpha'} & F(b') \end{array}$$

$\leftarrow$类似地定义 ∞-范畴 $\mathcal{A} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{B}$，它对应于$D\colon\ \Lambda^2_2 \to \mathfrak{fat}_\infty$ 的部分松弛极限，其中我们标记了 Λ^2_2 中的边 $0 \to 1$。

即便在较简单的例子中，∞-双范畴中的（余）极限理论也能刻画有趣的现象。例如，给定稳定 ∞-范畴 $F\colon\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$的一个正合函子，将其视为一个图表 $E\colon\ \Delta^1 \to \mathbb{S}\mathrm{t}$，其取值于稳定 ∞-范畴及正合函子构成的 ∞-双范畴。E 的松极限是一个稳定 ∞-范畴，对应于 [9]和 $\mathcal{A}$ 沿粘合函子 $\mathcal{B}$ 给出的半正交分解（参见 F）。特别地，这使我们能够用二维泛性质来刻画稳定 ∞-范畴的半正交分解。

1.2 余终性定理

设 $f\colon \mathfrak{f}^\dagger \to \mathfrak{„}^\dagger$ 是一个 ∞-双范畴之间的保标记函子。我们称 f 为带标记余终，如果对每个图表 $F\colon \mathfrak{„} \to \mathbb{A}$，典范比较映射

$$\mathrm{colim}^\dagger_{\mathbb{C}} Ff \xrightarrow{\simeq} \mathrm{colim}^\dagger_{\mathbb{D}} F$$

是 $\mathbb{A}$中的一个等价。

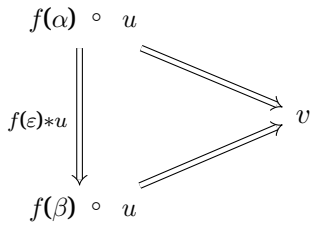
本文的主定理给出了共尾函子的完整刻画。我们先引入一些预备记号，以便更好地理解我们的主要结果。

定义 1.1. 设 $f\colon \mathfrak{f}^\dagger \to \mathfrak{„}^\dagger$ 是保标记的 ∞-双范畴函子。给定一个对象 $d \in \mathfrak{„}$，我们如下定义带标记逗号 ∞-双范畴 $\mathfrak{f}^\dagger_d$：

对象由对 (u, c) 给出，其中 $u\colon\ d \to f(c)$ 是 $\mathfrak{„}$ 中源为 d 的态射，而 c 是 $\mathfrak{f}$ 的一个对象。

- 从 $u\colon\ d \to f(c)$ 到 $v\colon\ d \to f(c')$ 的一个 1-态射由 $\mathfrak{f}$ 中的一个 1-态射 $\alpha\colon\ c \to c'$ 以及一个 2-态射 $f(\alpha) \circ u \Rightarrow v$ 给出。
- $\mathfrak{f}_{\dagger\, d}$ 中的一个 2-态射由一个 2-态射 ε 给出：$\alpha \Rightarrow \beta$ 使得下图

交换



- $\mathbf{f}_{\dagger\, d}$ 中的态射当且仅当 $\alpha:\, c \to c\prime$ 在 $\mathbf{f}_{\dagger}$ 中带标记，且相应的 2-态射可逆时，才是带标记的。

如果函子 f 在带标记的 ∞-双范畴 $\mathbb{„}^{\dagger}$ 上是恒等函子，我们将使用记号 $\mathbb{„}^{\dagger}_{d}$。

我们陈述主定理，该定理见定理 3.31

定理。 设 $f:\mathbb{C}^{\dagger} \to \mathbb{D}^{\dagger}$ 是 ∞ 双范畴之间的保标记函子。则以下陈述等价：

i) 函子 f 是带标记余终的。

ii) 对于每个 $d \in \mathbb{D}$，函子 f 诱导出 ∞-范畴局部化之间的等价 $L_W(\mathbb{C}^{\dagger}_{d}) \to L_W(\mathbb{D}^{\dagger}_{d})$。

我们想指出，在 定理 3.31 中，我们给出了与以下条件等价的一组条件：$i)$ 和 $ii)$，这些条件的计算性质更强。

首先，让我们从前面的定理推导出一些推论。假设 $\mathbf{f}^{\dagger} = \mathcal{C}^{\sharp}$，$\mathbb{„}^{\dagger} = \mathcal{D}^{\sharp}$，即两个 ∞-双范畴实际上都是所有态射均带标记的 ∞-范畴。由于对于每个 $d \in \mathcal{D}$，∞-范畴 $\mathcal{D}_{d/}$ 都有一个始对象，因此可知，在所有态射处进行的 ∞-范畴局部化（这恰好由几何实现给出）必定是一个可缩空间 $L_W(\mathcal{D}^{\sharp}_{d/}) \simeq |\mathcal{D}_{d/}| \simeq *$。于是，我们定理中的第二个陈述可简化为：

- 对于每个 $d \in \mathcal{D}$，逗号范畴 $|\mathcal{C}_{d/}| \simeq *$ 的几何实现都是可缩的。

换言之，我们的定理恢复了 Joyal 给出的 ∞-范畴之间共尾函子的刻画。正如可以从主要余终性结论中恢复 Quillen 的原始定理一样，在我们的情形下，我们可以得到以下 Quillen 定理 A 的推广。

推论。 设 $f:\mathbb{C}^{\dagger} \to \mathbb{D}^{\dagger}$ 是 ∞-双范畴之间的保标记函子，并假设满足以下条件

- 对于每个 $d \in \mathbb{D}$ 函子 f，它都会诱导出一个等价的 ∞-范畴局部化 $L_W(\mathbb{C}_{\dagger\, d}) \to L_W(\mathbb{D}_{\dagger\, d})$.

然后，f 在取 ∞-范畴局部化后诱导一个等价。

$$L_W(f): L_W\left(\mathbb{C}^{\dagger}\right) \xrightarrow{\simeq} L_W(\mathbb{D}^{\dagger}).$$

我们的主定理的证明依赖于这样一个事实（见 [14] 中最后一节）：带标记的 ∞-双范畴 $f:\mathbb{C}^{\dagger} \to \mathbb{D}^{\dagger}$ 是共尾的，当且仅当它定义了一个关于 $\mathbb{D}$ 的外笛卡尔等价。我们的证明策略是证明 $\mathbb{C}^{\dagger} \to \mathbb{D}$（经适当的纤维化替换后）由函子分类：

$$L_W\left(\mathbb{C}^{\dagger}_{\mathbb{D}}\right): \mathbb{D}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{C}\mathrm{at}_{\infty}, \quad d \mapsto L_W\left(\mathbb{C}^{\dagger}_{d}\right)$$

类似地，$\mathrm{„}^{\dagger} \to \mathrm{„}$ 由函子分类：

$$L_W\left(\mathbb{D}^{\dagger}_{\mathbb{D}}\right) : \mathbb{D}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{C}\mathrm{at}_{\infty}, \quad d \mapsto L_W\left(\mathbb{D}^{\dagger}_{d}\right)$$

以便我们可以将映射 $f : \mathfrak{f}^{\dagger} \to \mathrm{„}^{\dagger}$ 与其对应的自然变换视为同一对象，该自然变换的分量是典范映射

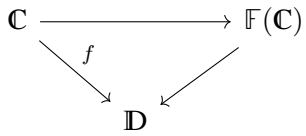
$$L_W\left(\mathbb{C}^{\dagger}_{d}\right) \to L_W\left(\mathbb{D}^{\dagger}_{d}\right)$$

这一论证大量运用了作者在 ∞中研究的-双范畴格罗滕迪克构造 [6]。事实上，为了获得函子 $L_W\left(\mathfrak{f}^{\dagger}{}_{\mathbb{D}}\right)$，我们对每个 ∞-双范畴函子 $f : \mathfrak{f} \to \mathrm{„}$ 构造一个外2-笛卡尔纤维化 $\mathrm{F}(\mathfrak{f}) \to \mathrm{„}$；在我们的格罗滕迪克构造下，它对应于函子

$$\mathbb{C}_{\mathbb{D}} : \mathbb{D}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{B}\mathrm{icat}_{\infty}, \ d \mapsto \mathbb{C}^{\natural}_{d}$$

其中，$\mathfrak{f}^{\natural}$ 的标记由等价构成。我们的定理可由一个简单的局部化论证以及下面的结果推出；该结果表明，$F(\mathfrak{f}) \to \mathrm{„}$ 是函子 f 上的自由 2-笛卡尔纤维化。

定理 1　　.2. 设 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ 是一个 ∞-双范畴函子。则存在一个在 $\mathbb{D}$ 上的态射



这是在 *[5, §3]*中定义的外部 *2*-笛卡尔纤维化模型结构中的一个等价。

1.3 一类例子

我们以一个较为一般的例子结束本节，该例说明了我们的定理的适用范围。

令 K 为一个普通范畴。我们如下定义一个 2-范畴 $2[K]$：

- 我们有一对对象 0，1。
- 映射范畴由 $2[K](\varepsilon, \varepsilon) = \Delta^0$ 给出，其中 $\varepsilon \in \{0, 1\}$，$2[K](0, 1) = K$ 和 $2[K](1, 0) = \varnothing$。

给定一个 1-范畴的函子 $p : K \to S$，我们得到一个（严格）2-函子 $\mathrm{p}: 2[K] \to 2[S]$。我们将研究这些态射

$$\mathbb{b}^{i} : 2[K]_i \longrightarrow 2[S]_i \ , \quad \text{for } i = 0, 1.$$

由于函子 $\mathbb{b}^{1}$ 是同构，情形 $i = 1$ 是平凡的。我们转而关注情形$i = 0$。注意，由于 $\mathbb{b}$ 在对象上是同构，因此 $2[K]_0$ 和 $2[S]_0$具有相同的对象，这些对象恰好由对象 $s \in S$ 以及对象 0 上的恒等态射表示。令 $s_1, s_2 \in S$。则 $\mathbb{b}^{0}$ 诱导出一个同构

$$2[K]_0\ (s_1, s_2) \simeq 2[S]_0\ (s_1, s_2) \simeq \mathrm{Hom}_S(s_1, s_2)$$

类似地，我们得到

$$2[K]_0\ (s, \mathrm{id}) \simeq 2[S]_0\ (s, \mathrm{id}) \simeq \varnothing, \quad 2[K]_0\ (\mathrm{id}, \mathrm{id}) \simeq 2[S]_0\ (\mathrm{id}, \mathrm{id}) \simeq \Delta^0$$

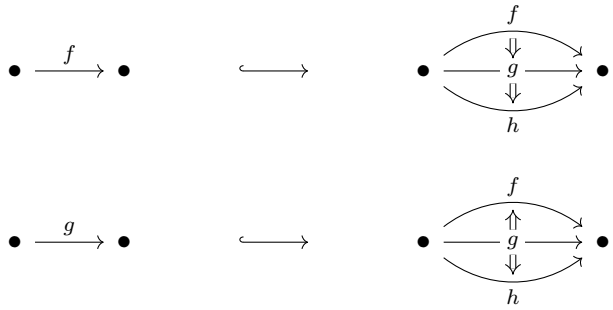
因此，最后一种需要分析的情形给出

$$K_{/s} = 2[K]_0\ (\mathrm{id}, s) \longrightarrow 2[S]_0\ (\mathrm{id}, s) = S_{/s}$$

其中 $K_{/s}$ 是[1] 的对偶版本， $K_{s/}$ 其对象由态射 $u : p(k) \to s$ 在 S 中的态射给出，而其态射由使显然图表交换的映射 $k \to k'$ 给出。现在，我们可以利用对 ∞-双范畴中共尾函子的刻画，得到以下结果。

命题。 设 $p : K \to S$ 是普通 *1*-范畴之间的函子。当且仅当 $p^{\mathrm{op}} : K^{\mathrm{op}} \to S^{\mathrm{op}}$ 是 *1*-范畴之间的共尾函子时，$\mathbb{D}$: $2[K] \to 2[S]$ 是 *2*-范畴之间的共尾函子（相对于最小标记）。

利用这个命题，我们可以给出一些自然的共尾映射实例



1.4 变差

在 [14], 所阐述的部分松弛（余）极限理论中，实际上有四种版本需要考虑。按照经典术语，它们分别对应弱极限、强极限、弱余极限和强余极限。这些概念通过无穷双范畴的 1-态射与 2-态射对偶相关联，因此，我们的余终性判据为：限制函子沿函子 $F\colon \mathbb{CD}$ 的 ∞-双范畴保留部分（反）弱（余）极限的条件提供了形式对偶的刻画。也就是说，通过将我们的判据应用于适当的形式对偶，即可处理所有变差。

此外，（op）lax（余）极限可能具有的四种变差，分别对应于（∞，2）-范畴格罗滕迪克构造的一种变差。本文采用我们在 [6], 中发展的格罗滕迪克构造，并相应地采用 lax 余极限。由于这一格罗滕迪克构造也通过对偶单纯集合给出了第二种构造，因此立即为四种变差中的两种提供了显式构造。

不过，我们的论证几乎可以原封不动地推广到其他变差；只需在适用的情况下调换 Gray 张量积的顺序，并将 Gray 函子范畴（以 lax 变换为态射）换成 opGray 函子范畴（以 oplax 变换为态射）。第一作者即将开展的工作 [1] 将给出剩余两种格罗滕迪克构造的模型范畴构造，可用于使对偶论证更加明确。

在我们取带有标记的严格 2-范畴上的部分松余极限这一特殊情形中，可以使用严格 2-范畴方法计算松切片来检验上述推论的判据，而无需使用 ∞-双范畴版本，正如我们在定理 3.42中所展示的那样。特别重要的是，这意味着可以对所涉及的*2*-范畴取适当的对偶，然后应用该推论的判据，从而检验其他变差方向所对应的共尾性概念。因此，在实践中，只要我们以严格 2-范畴作为指标范畴，无论变差方向如何，该推论的计算判据都非常易于处理。

[1]这些范畴 ries 控制着共初函子的对偶概念：函子 f 是共初的，当沿 f 的限制保持 es 极限

2 预备知识

若要回顾（∞，2）-范畴及其余极限理论中所有必要的背景知识，这一预备部分将比论文的其余部分还要长。因此，我们决定只纳入以往工作中的相关结果 [5] 和 [6]，它们在我们的论证中发挥核心作用，即:

- 带标记的双缩放单纯集合理论及外2-笛卡尔纤维化的模型结构。
- 双范畴的格罗滕迪克构造。

关于缩放单纯集合及相应模型结构的详尽研究，请参阅 [26]。关于部分松弛（余）极限理论，请参阅[14]。

2.1 带标记的双缩放单纯集合与外2-笛卡尔纤维化。

定义 2.1. 带标记的双尺度单纯集合（**MB** 单纯集合）由以下数据给出 ta

- 一个单纯集合 X。
- 一个包含所有退化边的边集 $E_X \in X_1$。
- 一个包含所有退化三角形的三角形集 $T_X \in X_2$。我们将此集合中的元素称为薄三角形。
- 一个三角形集 $C_X \in X_2$，满足 $T_X \subseteq C_X$。我们将此集合中的元素称为瘦三角形。

我们将这样的对象记作三元组 $(X, E_X, T_X \subseteq C_X)$。映射 $(X, E_X, T_X \subseteq C_X) \to (Y, E_Y, T_Y \subseteq C_Y)$ 由一个单纯集合映射 $f\colon X \to Y$ 给出，并且与上述边集和三角形集相容。我们用 $\mathrm{Set}_{\Delta}^{\mathbf{mb}}$ 表示**MB**单纯集合范畴。

记号。 设 $(X, E_X, T_X \subseteq C_X)$ 是一个 **MB** 单纯集合。假设集合 E_X 仅由退化边组成。那么我们固定记号 $(X, E_X, T_X \subseteq C_X) = (X, \flat, T_X \subseteq E_X)$，并对集合 T_X 作类似处理。如果 C_X 仅由退化三角形组成，我们固定记号 $(X, E_X, T_X \subseteq C_X) = (X, E_X, \flat)$。类似地，我们将使用符号“♯”表示包含所有边（分别地，所有三角形）的集合。最后，假设 $T_X = C_X$，那么我们将采用记号 (X, E_X, T_X)。

注 2.2. 定义集合 E_X（分别为 T_X、C_X）时，我们常常会滥用记号，只指定其非退化边（分别为非退化三角形）。

定义 2.3. 生成 ***MB*-无干扰映射 MB** 是由以下映射组成的**MB** 单纯集合之间的映射集合:

(A1) 内角包含

$$(\Lambda^n_i, \flat, \{\Delta^{\{i-1,i,i+1\}}\}) \to (\Delta^n, \flat, \{\Delta^{\{i-1,i,i+1\}}\}) \quad , \quad n \geqslant 2 \quad , \quad 0 < i < n;$$

(A2) 映射

$$(\Delta^4, \flat, T) \to (\Delta^4, \flat, T \cup \{\Delta^{\{0,3,4\}},\ \Delta^{\{0,1,4\}}\}),$$

其中我们定义

$$T \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\Delta^{\{0,2,4\}},\ \Delta^{\{1,2,3\}},\ \Delta^{\{0,1,3\}},\ \Delta^{\{1,3,4\}},\ \Delta^{\{0,1,2\}}\};$$

（A3）映射集合

$$\Big(\Lambda^n_0 \coprod_{\Delta^{\{0,1\}}} \Delta^0, \flat, \flat \subset \{\Delta^{\{0,1,n\}}\}\Big) \to \Big(\Delta^n \coprod_{\Delta^{\{0,1\}}} \Delta^0, \flat, \flat \subset \{\Delta^{\{0,1,n\}}\}\Big) \quad , \quad n \geqslant 2.$$

这些映射迫使左退化瘦缩放三角形表示映射范畴中的余笛卡尔边。

（A4）映射集合

$$\Big(\Lambda^n_n, \{\Delta^{\{n-1,n\}}\}, \flat \subset \{\Delta^{\{0,n-1,n\}}\}\Big) \to \Big(\Delta^n, \{\Delta^{\{n-1,n\}}\}, \flat \subset \{\Delta^{\{0,n-1,n\}}\}\Big) \quad , \quad n \geqslant 2.$$

这迫使标记态射相对于给定的薄三角形和瘦三角形为 p-笛卡尔。

(A5) 终端顶点的包含

$$\Big(\Delta^0, \sharp, \sharp\Big) \to \Big(\Delta^1, \sharp, \sharp\Big).$$

这要求基底中态射的 p-笛卡尔提升存在。

(S1) 映射

$$\Big(\Delta^2, \{\Delta^{\{0,1\}}, \Delta^{\{1,2\}}\}, \sharp\Big) \to \Big(\Delta^2, \sharp, \sharp\Big),$$

要求 p-笛卡尔态射能够沿薄三角形复合。

(S2) 映射

$$\Big(\Delta^2, \flat, \flat \subset \sharp\Big) \to \Big(\Delta^2, \flat, \sharp\Big),$$

它要求薄三角形上的精瘦三角形本身也是薄的。

(S3) 映射

$$\Big(\Delta^3, \flat, \{\Delta^{\{i-1,i,i+1\}}\} \subset U_i\Big) \to \Big(\Delta^3, \flat, \{\Delta^{\{i-1,i,i+1\}}\} \subset \sharp\Big) \quad , \quad 0 < i < 3$$

其中 U_i 是除 i 面之外所有三角形的集合。这一生成元及接下来的两个生成元旨在确立精瘦三角形的可合成性和有限的三取二性质。

(S4) 映射

$$\Big(\Delta^3 \coprod_{\Delta^{\{0,1\}}} \Delta^0, \flat, \flat \subset U_0\Big) \to \Big(\Delta^3 \coprod_{\Delta^{\{0,1\}}} \Delta^0, \flat, \flat \subset \sharp\Big)$$

其中 U_0 是除第 0 个面以外的所有三角形的集合。

(S5) 映射

$$\Big(\Delta^3, \{\Delta^{\{2,3\}}\}, \flat \subset U_3\Big) \to \Big(\Delta^3, \{\Delta^{\{2,3\}}\}, \flat \subset \sharp\Big)$$

其中 U_3 是除第 3 个面以外的所有三角形的集合。

(E) 对于每个 Kan 复形 K，映射

$$\Big(K, \flat, \sharp\Big) \to \Big(K, \sharp, \sharp\Big).$$

这要求每个等价都是标记态射。

单纯集合的映射**MB** 若属于**MB**的弱饱和闭包，则称为**MB**-无峰态射。

定义 2.4. 设 $f\colon (X, E_X, T_X \subseteq C_X) \to (Y, E_Y, T_Y \subseteq C_Y)$ 是单纯集合**MB**的一个映射。若 f 对 **MB**-无峰态射这一类具有右提升性质，则称 f 为一个**MB**-纤维化。

定义 2.5. 给定两个 **MB** 单纯集合 $(K, E_K, T_K \subseteq C_K), (X, E_X, T_X \subseteq C_X)$，我们定义另一个 **MB** 单纯集合，记为 $\mathbf{Fun^{mb}}(K, X)$，并由以下泛性质刻画。

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{mb}}}\Big(A, \mathrm{Fun}^{\mathbf{mb}}(K, X)\Big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{mb}}}\Big(A \times K, X\Big).$$

命题 2.6. 设 $f\colon (X, E_X, T_X \subseteq C_X) \to (Y, E_Y, T_Y \subseteq C_Y)$ 是一个 ***MB***-纤维化。则对于每个 $K \in \mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{mb}}$，诱导的态射 $\mathrm{Fun}^{\mathbf{mb}}(K, X) \to \mathrm{Fun}^{\mathbf{mb}}(K, Y)$ 是一个 ***MB***-纤维化。

定义 2.7。 令 $f\colon X \to S$ 为 **MB** 单纯集合的一个态射，另一个映射 $g\colon X \to Y$。我们通过拉回方块定义一个 **MB** 单纯集合 $\mathbf{Map}_Y(K, X)$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}_Y(K, X) & \longrightarrow & \mathrm{Fun}^{\mathbf{mb}}(K, X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^0 & \xrightarrow{g} & \mathrm{Fun}^{\mathbf{mb}}(K, Y) \end{array}$$

如果 $f\colon X \to Y$ 是一个**MB**-纤维化，那么由前一个命题可知，$\mathbf{Map}_Y(K, X)$ 是一个 ∞-双范畴。

令 $S \in \mathbf{Set}_\Delta^{\mathbf{sc}}$ 表示本节余下部分中 $(S, \sharp, T_S \subset \sharp)$ 上的 **MB** 单纯集合范畴 $(\mathbf{Set}_\Delta^{\mathbf{mb}})_{/S}$。

定义 2.8. 我们称 $(\mathbf{Set}_\Delta^{\mathbf{mb}})_{/S}$ 中的对象 $\pi : X \to S$ 是一个 外部 2-笛卡尔 纤维化，当且仅当它是一个 **MB**-纤维化。

注 2.9.我们将经常滥用记号，将外部 2-笛卡尔纤维化称为*2*-笛卡尔纤维化。

定义 2.10. 设 $\pi : X \to S$ 是一个 **MB** 单纯集合的态射。给定一个对象 $K \to S$，我们将 $\mathbf{Map}_S^{\natural}(K, X)$ 定义为仅由薄三角形组成的 **MB** 单纯子集。注意，若 π 是一个 2-笛卡尔纤维化，则这恰好是 $\mathbf{Map}_S(K, X)$ 的底层 ∞-范畴。

类似地，我们用 $\mathbf{Map}_S^{\simeq}(K, X)$ 表示由薄三角形和标记边组成的 mb 单纯子集。与前面一样，注意若 π 是一个 2-笛卡尔纤维化，则单纯集合 $\mathbf{Map}_S^{\simeq}(K, X)$ 可与 $\mathbf{Map}_S(K, X)$ 中的极大 Kan 复形等同。

定义 2.11. 设 $L \overset{h}{\rightarrow} K \overset{p}{\rightarrow} S$ 是一个 $(\mathbf{Set}_\Delta^{\mathbf{mb}})_{/S}$中的态射。我们称 h 为余纤维化，当且仅当它是单纯集合之间的单态射。若对每个 2-笛卡尔纤维化 h，$\pi : X \to S$ 所诱导的态射

$$h^*\colon \mathrm{Map}_S(K, X) \longrightarrow \mathrm{Map}_S(L, X)$$

是双范畴等价。

现在我们可以回顾 [5] 的主要结果。

定理 2.12（[5] 定理 3.38）。设 S 为一个标度单纯集。则在 $(\mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{mb}})_{/S}$ 上存在一个左正则、组合的单纯模型结构，且该结构由以下性质唯一刻画：

C) 态射 $f\colon X \to Y$ 在 $(\mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{mb}})_{/S}$ 中是余纤维化，当且仅当 f 在底层单纯集合之间诱导一个单态射。

F) 对象 $X \in (\mathrm{Set}_{\Delta}^{\mathbf{mb}})/S$ 是纤维化的，当且仅当 X 是一个 *2*-笛卡尔纤维化。

2.2 ∞-双范畴格罗滕迪克构造。

一个特别值得关注的定理 2.12 模型结构特例是 $S = \Delta^0$ 为终端标度单纯集合的情形。此时，根据 [5, 定理 3.39], 所得的 Set 上的模型结构$_{\Delta}^{\mathbf{mb}}$与 Set 上的 ∞-双范畴模型结构$_{\Delta}^{\mathbf{sc}}$Quillen 等价。在这种情形下，两种标度的数据变得高度冗余——对于任意纤维化对象，这两种标度都相同；从直观上说，它们不再编码不同的信息。

我们可以通过定义一种同时包含标记和标度、但避免双重标度所造成冗余的进一步模型结构来避免这种冗余。本截面的目标是定义这种模型结构，并说明它与**MB** 模型结构的关系。

定义 2.13. 一个标记标度单纯集合由以下组成

- 一个单纯集合 X。
- 一个包含所有退化边的边集 $E_X \subseteq X_1$ 。我们将其元素称为 E_X标记边。
- 一个包含所有退化三角形的三角形集合 $T_X \subseteq X_2$ 。我们将其元素称为T_X 薄三角形。

定义 2.14。由标记标度单纯集合之间的映射组成的生成**MS**-无害映射**MS** 集合为:

(MS1) 内角包含

$$(\Lambda_i^n, \flat, \{\Delta^{\{i-1,i,i+1\}}\}) \to (\Delta^n, \flat, \{\Delta^{\{i-1,i,i+1\}}\}) \quad , \quad n \geqslant 2 \quad , \quad 0 < i < n;$$

(MS2) 映射

$$(\Delta^4, \flat, T) \longrightarrow (\Delta^4, \flat, T \cup \{\Delta^{\{0,3,4\}}, \Delta^{\{0,1,4\}}\})$$

其中 T 定义同定义 2.3，(A2)。

(MS3) 映射集合

$$\Big(\Lambda_0^n \coprod_{\Delta^{\{0,1\}}} \Delta^0, \flat, \{\Delta^{\{0,1,n\}}\}\Big) \to \Big(\Delta^n \coprod_{\Delta^{\{0,1\}}} \Delta^0, \flat, \{\Delta^{\{0,1,n\}}\}\Big) \quad , \quad n \geqslant 2.$$

(MS4) 映射集合

$$\Big(\Lambda_n^n, \{\Delta^{\{n-1,n\}}\}, \{\Delta^{\{0,n-1,n\}}\}\Big) \to \Big(\Delta^n, \{\Delta^{\{n-1,n\}}\}, \{\Delta^{\{0,n-1,n\}}\}\Big) \quad , \quad n \geqslant 2.$$

(MS5) 终端顶点的包含

$$\Big(\Delta^0, \sharp, \sharp\Big) \longrightarrow \Big(\Delta^1, \sharp, \sharp\Big)$$

(MS6) 映射

$$\Big(\Delta^2, \{\Delta^{\{0,1\}}, \Delta^{\{1,2\}}\}, \sharp\Big) \to \Big(\Delta^2, \sharp, \sharp\Big),$$

(MS7) 映射

$$\Big(\Delta^3 \coprod_{\Delta^{\{0,1\}}} \Delta^0, \flat, U_0\Big) \to \Big(\Delta^3 \coprod_{\Delta^{\{0,1\}}} \Delta^0, \flat, \sharp\Big)$$

其中 U_0 是除第 0 个面外的所有三角形的集合。

(MS8) 映射

$$\Big(\Delta^3, \{\Delta^{\{2,3\}}\}, U_3\Big) \to \Big(\Delta^3, \{\Delta^{\{2,3\}}\}, \sharp\Big)$$

其中 U_3 是除第 3 个面之外的所有三角形的集合。

(MSE) 对于每个 Kan 复形 K，映射

$$\Big(K, \flat, \sharp\Big) \to \Big(K, \sharp, \sharp\Big).$$

如果一个 $\mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{ms}}$**MS**-无碍态射属于 **MS** 的饱和包，则称其为 $\mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{ms}}$**MS**-无碍态射。

引理 2.15. 该态射

$$\Big(\Delta^3, \flat, \{\Delta^{\{i-1,i,i+1\}}\} \subset U_i\Big) \to \Big(\Delta^3, \flat, \{\Delta^{\{i-1,i,i+1\}}\} \subset \sharp\Big) \quad , \quad 0 < i < 3,$$

其中，U_i 是除去第 i 个面之外的所有三角形组成的集合，是**MS**-无角的。

证明。 参见 [26, 注 3.1。4]。 □

类似地，如**MB** 情形所做的那样，我们可以证明以下定理：

定理 2.16（[6] **定理 2.45**）。在 $\mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{ms}}$ 上存在一种左真组合单纯模型范畴结构，并由以下性质唯一刻画：

C) 当且仅当态射 $f: X \to Y$ 在 $\mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{ms}}$ 中是单态射时，它才是余纤维化。*F)* 当且仅当唯一映射 $X \to \Delta^0$ 具有相对于 **MS** 中态射的右提升性质时，对象 $X \in \mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{ms}}$ 才是纤维化的。

我们进一步在 [6, 引理 2.49] 中证明，该模型结构等价于缩放单纯集合上的模型结构。这个模型结构在我们的主定理 [6]中发挥着根本性作用。

定理 2.17（[6] **定理 3.85**）。设 S 为一个标度单纯集。那么，双范畴直化—反直化伴随定义了一个奎伦等价

$$\mathbb{St}_S : (\mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{mb}})_{/S} \rightleftarrows (\mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{ms}})^{\mathfrak{C}[S]^{\mathrm{op}}} : \mathbb{Un}_S$$

S 上的（外）*2*-笛卡尔纤维化模型结构与取值于标记标度单纯集合的 $\mathfrak{C}[S]^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{ms}}$ 上的投射模型结构之间。

我们进一步证明，这两个模型范畴实际上都是 Set_Δ^+-富集范畴。在完成初等且明确的验证后，我们证明函子 $\mathbb{Un}_S$ 与（余）张量相容，从而将前述定理提升为内在的双范畴结果。

定理 2.18（[6] **推论 3.90**）。对于任意标度单纯集 S，双范畴直化是一个左 *Quillen* 等价。 此外，函子 $\mathbb{Un}_S$ 给出了（∞,2）-范畴之间的等价

$$2\mathbf{Cart}(S) \simeq \mathrm{Fun}(S^{\mathrm{op}}, \mathbb{Bicat}_\infty).$$

3 主定理

在先前的工作中，[2], [3] 我们研究了 ∞-双范畴中的（余）极限这一 2-范畴概念。本节将证明 [3] 中所述的共终性猜想。值得指出的是，在先前的工作中，我们只考虑了余极限的特定实例：

- 在 [3] 中，我们考虑了图表 $F:\mathbb{D}^\dagger \to \mathbb{A}$，其中 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{A}$ 都是严格 2-范畴，而 $\mathbb{D}^\dagger$配备了一组标记边。
- 在[2] 中，我们考虑了如下图表 $F:\ \mathcal{D}^\dagger \to \mathbb{A}$，其中 $\mathcal{D}^\dagger$ 是一个配备了一组标记边的 ∞-范畴，而 $\mathbb{A}$ 是一个 ∞-双范畴。

Gagna、Harpaz 和 Lanari 在 [14]中对部分 lax（余）极限的一般概念进行了深入研究。作者指出，他们的概念在我们研究的情形中与我们的概念一致，见 [14, 注 5.2.12。]此外， [2] 中研究的余终性概念也与 [14]中给出的共尾函子定义一致。然而，在先前的文献中，并未给出计算判据来判断带标记的 ∞-双范畴之间的函子 $f:\mathbb{f}^\dagger \to \mathbb{„}^\dagger$ 是否共尾。本节将把 Quillen 著名的定理 A 条件加以推广，并将其作为主要结果给出这样的判据。

回顾一下，在 [14] 中，作者于第 4.1 节定义了 Gray 积的带标记标度版本。给定一个带标记的标度单纯集 K 和一个 ∞-双范畴 $\mathbb{„}$，可知我们有一个 ∞-双范畴 $\mathrm{Fun}^{\mathrm{gr}}(K,\mathbb{„})$，其对象为函子，态射为部分 lax 自然变换，其中 lax 程度由 K 的标记指定（见 [14]中的注 4.1.13）。沿用他们的记号，我们将 $\mathrm{Fun}^{\mathrm{gr}}(K,\mathbb{„})$ 的映射 ∞-范畴记为 $\mathrm{Nat}^{\mathrm{gr}}_K(-,-)$。

注 3.1. 部分松弛余极限理论有两种变体：内余极限和外余极限。本文只研究外余极限，并简称为（部分松弛）余极限，其标记会在记号中明确体现。

定义 3.2. 设 $K^\dagger$ 是一个带标记的标度单纯集，并设 $F:\ K \to \mathbb{A}$ 是标度单纯集的一个函子，其中 K 表示 $K^\dagger$ 的底层标度单纯集。 F 的外部部分松弛余极限记为 $\mathrm{colim}^\dagger{}_K F$，它是 $\mathbb{A}$ 中由下列函子余表示的一个对象

$$\mathrm{Nat}^{\mathrm{gr}}_K(F, c_K(-))\colon \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{at}_\infty,\ a \longmapsto \mathrm{Nat}^{\mathrm{gr}}_K(F, \underline{a})$$

其中， $\underline{a}:\ K \to \mathbb{A}$ 是取值为 $a \in \mathbb{A}$ 的常值函子。

3.1 自由 2-笛卡尔纤维化

在本节中，我们固定一个 ∞-双范畴 $\mathbb{„}$，并旨在为每个 ∞-双范畴函子 $p:\ \mathbb{X} \to \mathbb{„}$ 构造一个 2-笛卡尔纤维化$\mathrm{F}(p):\mathrm{F}(\mathbb{X}) \to \mathbb{„}$。我们将把这个纤维化刻画为 上的自由 *2*-笛卡尔纤维化。

为了构造这一 2-笛卡尔纤维化，我们将利用在 [12, §2.1] 和 [14, §4.1]中构造的 Gray 张量积。为此，我们简要回顾一下所需的定义，这些定义来自 [12]。

定义 3.3. 令 $X, Y \in \mathrm{Set}^{\mathbf{sc}}_\Delta$。我们将 ***Gray*** 积 $X \otimes Y$定义为一个标度单纯集，其底层单纯集合为 $X \times Y$，其中我们规定，一个 2-单形 (σ_X, σ_Y) 是标度的，当且仅当以下两个条件同时满足。

- $(\sigma_X,\ \sigma_Y) \in T_X \times T_Y$。
- 要么 σ_X 沿着 $\Delta^{\{1,2\}}$ 退化，要么 沿着 $\{0,1\}$退化。

给定标度单纯集 X 和 Y，我们通过伴随定义 ***Gray*** 函子范畴 $\mathrm{Fun}^{\mathrm{gr}}(X,Y)$】【。

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}^{\mathbf{sc}}_\Delta}(S, \mathrm{Fun}^{\mathrm{gr}}(X,Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}^{\mathbf{sc}}_\Delta}(X \otimes S, Y).$$

存在一个对偶版本，将 $X \otimes S$ 替换为 $S \otimes X$ 即可定义，记作 $\mathrm{Fun}^{\mathrm{opgr}}(X,\ Y)$。

命题 3.4. 设$\mathbb{D}$ 为一个 ∞-双范畴。那么映射$\mathrm{ev}_0:\mathrm{Fun}^{\mathrm{gr}}(\Delta^1,\mathbb{D})\ \mathbb{D}$ 是一个 *2-* 笛卡尔纤维化。笛卡尔边、薄三角形和精瘦（余笛卡尔）三角形的集合可描述如下：

- 由映射 $e\colon \Delta^1 \otimes \Delta^1 \to \mathbb{D}$ 表示的边是笛卡尔边，当且仅当它经由$\Delta^1 \times \Delta^1$ 分解，且对 $\Delta_{\{1\}} \times \Delta^1$ 的限制是$\mathbb{D}$中的一个等价。
- 由映射 $\sigma\colon \Delta^1 \otimes \Delta^2 \to \mathbb{D}$ 表示的三角形是精瘦的，当且仅当其到$\Delta_{\{1\}} \times \Delta^2$ 的限制在 $\mathbb{D}$ 中是薄的。
- 由映射 $\sigma\colon \Delta^1 \otimes \Delta^2 \to \mathbb{D}$ 表示的三角形是薄的，当且仅当它是精瘦的，且其对 $\Delta_{\{0\}} \times \Delta^2$ 的限制是薄的。

证明。 由于在 ∞-双范畴上，我们在 [5] 中给出的 2-笛卡尔的定义与 外*2*-笛卡尔纤维化 的概念 [15], 相一致，因此可由 [15, 定理 2.2.6]立即得出。

□

我们可以利用这个定义对 Gray 积进行扩张，从而更充分地体现此处的装饰。

定义 3.5. 令 $X \in \mathsf{Set}_\Delta^{\mathbf{mb}}$，并用 $\widetilde{X}$ 表示其底层标度单纯集。我们通过规定来定义扩展 $\Delta^1 \otimes \widetilde{X}$ 的 $\Delta^1 \widehat{\otimes} X \in \mathsf{Set}_\Delta^{\mathbf{ms}}$。

- 若一个 1-单形（σ_1， σ_X）是退化的，或者 σ_1 在 {1} 上退化且 σ_X 在 X中带标记，则它带标记。
- 若满足以下任一 条件，则 2-单形（σ_1， σ_X）是薄的。
  – 单形（σ_1， σ_X）在 $\Delta^1 \otimes \widetilde{X}$中是薄的。– 单形 σ_X 在 X 中是精瘦的，且 $\sigma_1(1 \to 2)$ 在 1 上退化。– 单形 σ_X 在 X中是精瘦的， $\sigma_X(0 \to 1)$ 在 X 中带标记，且单形 σ_1 具有 $0 \to 0 \to 1$的形式。

对于 X， $Y \in \mathsf{Set}_\Delta^{\mathbf{ms}}$，我们可以通过伴随函子定义 $\mathsf{Fun}^\wedge_{\mathrm{gr}}(\Delta^1, Y) \in \mathsf{Set}_\Delta^{\mathbf{mb}}$

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{mb}}}(S, \mathrm{Fun}^{\widehat{\mathrm{gr}}}(\Delta^1, Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{ms}}}(\Delta^1 \otimes S, Y).$$

注 3.6. 对于 $X = (X, M_X, T_X \subset C_X)$，我们用 $\{0\} \widehat{\otimes} X$表示与 $\{0\} \times X$对应的 $\Delta^1 \widehat{\otimes} X$ 的满 MS 单纯子集。它同构于 MS 单纯集合（X， $\flat$， T_X）。类似地，我们用 $\{1\} \widehat{\otimes} X$表示 MS 单纯集合（$X$， M_X， C_X）。

于是我们可以定义自由 2-笛卡尔纤维化。

定义 3.7. 设 $p\colon \mathbb{X} \to \mathbb{D}$ 是一个 ∞-双范畴之间的函子。记 $\mathbb{X}^\natural = (\mathbb{X}, M_X, T_X \subset T_X)$ 为相应的 **MB** 单纯集合，其中等价被标记。我们将一个 **MB** 单纯集合 $\mathbf{F}(\mathbb{X})^\natural$ 定义为如下拉回

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}(\mathbb{X})^\natural & \longrightarrow & \mathrm{Fun}^{\widehat{\mathrm{gr}}}(\Delta^1, \mathbb{D}) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_1} \\ \mathbb{X}^\natural & \xrightarrow[p]{} & \mathbb{D} \end{array}$$

我们将由在 0 处取值所诱导的自然映射记为 $\mathbb{F}(p)\colon \mathbb{F}(\mathbb{X})^\natural \mathbb{D}.$ $\longrightarrow$

命题 3.8. 设 $p\colon \mathbb{X} \to \mathbb{D}$ 是一个 ∞-双范畴之间的函子。那么

$$\mathbb{F}(p)\colon \mathbb{F}(\mathbb{X})^\natural \longrightarrow \mathbb{D}$$

是一个 *2*-笛卡尔纤维化

这个命题将由一个稍显技术性的引理推出。

引理 3.9. 设 $f\colon A \rightarrowtail B$ 是一个 ***MB*-无穷范畴拟同态**。则

$$\Delta^1 \widehat{\otimes} A \coprod_{\{0\}\widehat{\otimes}A} \{0\}\widehat{\otimes}B \longrightarrow \Delta^1 \widehat{\otimes} B$$

是 **MS**-无害的。

证明。 和往常一样，我们可以在生成的 **MB**-无穷可逆态射上进行检验。在开始证明之前，我们先给出一个预备定义。我们称 **MS** 单纯集合之间的态射具有（♡）型，如果它属于 引理 2.15 中所描述类型的态射的弱饱和包。现在可以逐案分析了。

(A2) 我们可以通过一个类型为 $\{1\}\widehat{\otimes}\Delta^4$ 的推出来缩放，类型为 (MS2)。剩余的 2-单形可以通过类型为 (♡) 的态射来缩放。

(A5) I 是一个类型为 (MS1) 的推出，是一个类型为 (MS5) 的推出，也是一个类型为 (MS4)。

(S1) 是类型为(MS6) 且态射类型为（♡）。

(S2) 是一个同构。

(S3) 是沿着一个 (❤) 型态射的推出。

(S4) 是沿着以下类型态射的推出：(MS7) 和 (♡)。

(S5) 是沿着以下类型态射的推出：(MS8) 和 (♡)。

剩下的三种情形是角包含。

(A1) 由于两侧都没有带标记的态射，且精瘦缩放与薄缩放相同，因此这可由 [14, 命题 4.1。9] 得出。

（A4）我们记作 $(\Delta^n)^\dagger = (\Delta^n,\ \Delta^{\{n-1,n\}},\ \flat \subset \Delta^{\{0,n-1,n\}})$，并类似地定义 $(\Lambda^n_n)^\dagger$ 。首先，我们将为 $\Delta^1\widehat{\otimes}(\Delta^n)^\dagger$ 中最大维数的单形定义一个次序。令 $\theta_\varepsilon\colon \Delta^{n+1} \to \Delta^1\widetilde{\otimes}(\Delta^n)^\dagger$ for $\varepsilon \in \{0,\ 1\}$，并令 ν_{θ_ε} 为 Δ^{n+1} 中满足 θ_ε 在 ν_{θ_ε} 处的值的第一个坐标等于 1 的第一个元素。当且仅当 $\nu_{\theta_1} < \nu_{\theta_2}$ 时，我们称 $\theta_1 < \theta_2$ 。进一步注意到，每个最大维数的单形都由值 ν_θ 唯一确定。因此，对于 $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n+1\}$，我们将具有 $\nu_{\theta_i} = i$ 的唯一最大维数单形记为 θ_i。现在我们可以构造一个滤过

$$\Delta^1\widehat{\otimes}(\Lambda^n_n)^\dagger \to Y_{n+1} \to Y_n \to \cdots \to Y_2 \to Y_1 = \Delta^1\widetilde{\otimes}(\Delta^n)^\dagger$$

其中， Y_j 是 $\Delta^1\widetilde{\otimes}(\Delta^n)^\dagger$ 的满 MS 子单纯集，除单形 θ_j外还包含 Y_{j+1} 的单形。显然，第一个映射是沿内角包含 $\Lambda^{n+1}_n \to \Delta^{n+1}$的推出。由于边 $n-1 \to n$ 在$(\Delta^n)^\dagger$ 中带有标记，因此三角形$\{n-1, n, n+1\}$在 θ_{n+1}中是薄的。其余态射都属于由 **(MS4)** 型态射生成的弱饱和闭包。每个映射 $Y_{j+1} \to Y_j$ 恰好通过两次 **(MS4)** 型推出得到。首先，我们取 θ_j 中缺少 $j-1$ 的面，然后补上整个缺失的单形。

（A3）这里的论证与前一种情形完全对偶，只需将“标记边”替换为“退化边”，并将“(MS4)”替换为“(MS3)”。注意，我们还需要反转添加缺失的最大维数单形的顺序。

□

证明（关于 *3.8*）。给定一个提升问题

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbf{F}(\mathbb{X})^\natural \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & \mathbb{D} \end{array}$$

其中 f 是 **MB**-无内角填充的，我们需要找出一个图表

$$\begin{array}{ccc} \{1\}\widehat{\otimes}B & \longrightarrow & \mathbb{X} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \Delta^1\widehat{\otimes}B & \longrightarrow & \mathbb{D} \end{array}$$

对该图表进行扩张

$$\begin{array}{ccc} \{1\}\widehat{\otimes}A & \longrightarrow & \mathbb{X} \\ \downarrow & & {\scriptstyle p}\downarrow \\ \Delta^1\widehat{\otimes}A \underset{\{0\}\widehat{\otimes}A}{\coprod} \{0\}\widehat{\otimes}B & \longrightarrow & \mathbb{D} \end{array}$$

由提升问题定义。我们首先注意到，由于 $\{1\}\widehat{\otimes}A \to \{1\}\widehat{\otimes}B$ 尤其是 **MS**-无内角填充的，因此我们可以解决底部的提升问题。因此，我们接下来只需解决延拓问题

$$\begin{array}{ccc} \{1\}\widehat{\otimes}B \underset{\{1\}\widehat{\otimes}B}{\coprod} \Delta^1\widehat{\otimes}A \underset{\{0\}\widehat{\otimes}A}{\coprod} \{0\}\widehat{\otimes}B & \longrightarrow & \mathbb{D}^\natural \\ \downarrow & & \\ \Delta^1\widehat{\otimes}B & & \end{array}$$

然而，左侧的态射可以写成一个复合。

$$\Delta^1\widehat{\otimes}A \underset{\{0\}\widehat{\otimes}A}{\coprod} \{0\}\widehat{\otimes}B \longrightarrow \{1\}\widehat{\otimes}B \underset{\{1\}\widehat{\otimes}B}{\coprod} \Delta^1\widehat{\otimes}A \underset{\{0\}\widehat{\otimes}A}{\coprod} \{0\}\widehat{\otimes}B \longrightarrow \Delta^1\widehat{\otimes}B$$

其中第一个态射是一个 *MS*-anodyne 态射的推出，而复合态射是 引理 3.9中的某个态射。因此，由三取二性质，左侧的态射是一个 **MS** 平凡余纤维化，故该提升问题有解。

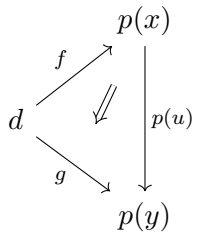
□

定义 3.10。设 $p : \mathbb{X} \to \mathbb{D}$ 是一个 ∞-双范畴之间的函子。记 $\mathbb{X}_d$ 为$\mathbb{F}(p)$: $\mathbb{F}(\mathbb{X})^\natural$ $\mathbb{D}$ 在 $d \in \mathbb{D}$上的纤维。注意，~~命题 3.8~~ 蕴含 $\mathbb{X}_d$ 是一个 ∞-双范畴。

注 3.11。展开 $\mathbb{X}_d$ 的定义可知，从 $f : d \to p(x)$ 到$g : d \to p(y)$ 的一个态射由如下图表给出

$$\begin{array}{ccc} d & \xrightarrow{f} & p(x) \\ \| & \swarrow^{=} & \downarrow{\scriptstyle p(u)} \\ d & \xrightarrow[g]{} & p(y) \end{array}$$

在严格 2-范畴中，我们可以将其视为一个图表



这也说明了我们采用这种记号的合理性。稍后我们将看到，对于严格 2-范畴之间的函子 $F\colon \mathrm{C} \to \mathrm{D}$，存在一个 ∞-双范畴的等价

$$\mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathbb{C}_d\ ) \simeq \mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathbb{C})_d\ .$$

将我们的自由纤维化与更熟悉的概念联系起来。

注 3.12. 设 $p : \mathbb{X} \to \mathbb{„}$ 是一个 ∞-双范畴的函子。存在一个余纤维化

$$\gamma_{\mathbb{X}} \colon \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{F}(\mathbb{X})^{\natural}$$

位于 $\mathbb{„}$ 上，它将单形 $\Delta^n \to \mathbb{X}$ 送到映射 $\Delta^1 \widehat{\otimes} \Delta^n \to \Delta^0 \otimes \Delta^n \to \mathbb{X} \to \mathbb{„}$。

为了简化对该映射的考察，我们给出一种构造 $\mathrm{F}(\mathbb{X})^{\natural}$ 中“几乎退化”的 $(n+1)$-单形的方法，这些单形由 $\mathrm{F}(\mathbb{X})^{\natural}$ 中的 n-单形构造而来。

构造 3.13. 对于每个 $0 \leqslant j \leqslant n$，我们定义一个映射

$$\begin{aligned} E_j \colon \Delta^1 \times \Delta^{n+1} &\longrightarrow \Delta^1 \times \Delta^n \\ (m, r) &\longmapsto \begin{cases} (m, r) & r \leqslant j \\ (1, r-1) & r > j \end{cases} \end{aligned}$$

容易验证该映射保持标度，因此得到 $E_j \colon \Delta^1 \otimes \Delta^{n+1} \to \Delta^1 \otimes \Delta^n$。此外，所诱导的映射 $\{1\} \times \Delta^{n+1} \to \{1\} \times \Delta^n$ 正是退化映射 s_j。

给定一个 n-单形 $\sigma : \Delta^n \to \mathrm{F}(\mathbb{X})$（可能带有一些非平凡的装饰），由 $\phi^{\sigma} \colon \Delta^1 \widehat{\otimes} \Delta^n \to \mathbb{„}$ 和 $\rho^{\sigma} \colon \{1\} \times \Delta^n \to \mathbb{X}$ 定义，我们定义一个 $(n+1)$-单形 $E_j^*(\sigma)$：

$$\begin{array}{ccccc} \Delta^1 \otimes \Delta^{n+1} & \xrightarrow{E_j} & \Delta^1 \widehat{\otimes} \Delta^n & \xrightarrow{\phi^{\sigma}} & \mathbb{D} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow p \\ \Delta^{n+1} \times \{1\} & \xrightarrow[s_j]{} & \{1\} \times \Delta^n & \xrightarrow[\rho^{\sigma}]{} & \mathbb{X} \end{array}$$

我们将 $E_j^*(\sigma)$ 称为 j^{th} 的扩张。

给定如上所述的单形 $\sigma \colon \Delta^n \to \mathrm{F}(\mathbb{X})$，我们用 ℓ_0^{σ} 表示相应的映射 $\{1\} \times \Delta^n \to \mathbb{X}$。

以下引理由定义立即得出。

引理 3.14。 令 $\sigma \colon \Delta^n \to \mathbb{F}(\mathbb{X})$。那么 $E_j^*(\sigma)$ 的面可写为如下形式。

- *If $j = n$, and $s = n+1$, then $d_s(E_j^*(\sigma)) = \sigma$.*
- *If $j + 1 < s \leqslant n+1$, then $d_s(E_j^*(\sigma) = E_j^*(d_{s-1}(\sigma))$.*
- *If $0 \leqslant s < j$, then $d_s(E_j^*(\sigma)) = E_{j-1}(d_s(\sigma))$.*
- *If $s = j+1$, then $d_{j+1}(E_j^*(\sigma)) = d_{j+1}(E_{j+1}^*(\sigma))$.*

- 若 $s=j$ 且 $s\neq 0$，则 $d_j(E_j^*(\{v10'>))=d_j(E_{j-1}^*(\sigma))$
- 如果 $s=j=0$，那么 $d_0(E_0^*(\sigma))=\gamma_{\mathbf{X}}(d_0(\ell_0^\sigma))$.

引理 3.15。若 $\sigma\colon\ \Delta^n\to\mathbb{F}(\mathbf{X})$ 是退化的，则对于每个 $0\leqslant j\leqslant n$，j^{th} 扩张 $E_j^*(\sigma)$都是退化的。

引理 3.16。令 $\sigma\colon\Delta^{n-1}\to\mathbb{F}(\mathbf{X})$。那么，对于每个 $0\leqslant j\leqslant n-1$ 和每个 $0\leqslant i\leqslant n$，单形 $E_i^*(E_j^*(\sigma))$ 都是退化的。

定理 3.17。设 $p\colon\ \mathbf{X}\ \mathbb{D}$ 是一个从 ∞-双范畴出发的函子。那么态射

$$\gamma_{\mathbf{X}}\colon\mathbf{X}^\natural\longrightarrow\mathbb{F}(\mathbf{X})^\natural$$

在 MB 上是对 $\mathbb{D}$ 的无害映射。

证明。我们首先将 Z_0 定义为 F(X) 的子单纯集，它由属于 X的所有单形、F(X) 的所有 0-单形以及所有可能的 0-单形的 j-扩张组成。我们通过归纳定义扩展这一概念，将 Z_n 定义为包含 Z_{n-1} 的所有单形、F(X) 的所有 n-单形，以及作为 n-单形扩张出现的（$n+1$）-单形的集合。我们约定 $Z_{-1}=X$，并固定记号

$$\gamma_{n-1}\colon Z_{n-1}\longrightarrow Z_n.$$

注意到，由于MB-无痕映射在超限复合下稳定，因此只需证明每个 γ_{n-1} 都是MB-无痕的。

我们先分析 γ_{-1}。注意，给定一个对象 $\sigma\colon\ \Delta^0\to$F(X)，我们可以考虑笛卡尔边 $E_0^*(\sigma)\colon\ \Delta^1\to$ F(X)。由于 $E_0^*(\sigma)$ 的目标已经包含在 $\mathbf{X}$ 中，因此可以通过沿MB-无痕映射取推出的方式加入 σ。对 F(X) 中的每个对象重复这一过程，便可得出 γ_{-1} 是MB-无痕的。

现在我们来处理 γ_{n-1} 且满足 $n\geqslant 1$ 的一般情形。我们在 F(X) 中尚未包含于 Z_{n-1} 的非退化 n- 单形集合上选定一个顺序。对于每个 $\sigma\in$F(X)$_n$，我们将 $Z_{n-1}(\sigma)$ 定义为 Z_n 的子单纯子集，其中包含 Z_{n-1} 的所有单形，以及 n-单形 $\theta\leqslant\sigma$ 和与之对应的扩张。令 suc(σ) 为我们选定顺序中 σ 的后继。我们约定 $Z_{n-1}(\varnothing)=Z_{n-1}$，且 suc($\varnothing$) $=\sigma_0$ 是顺序中的首个元素。要证明 γ_{n-1} 是 MB- 无痕的，只需证明

$$Z_{n-1}(\sigma)\longrightarrow Z_{n-1}(\rho)$$

是 MB-无害的，其中 $\rho=$suc(σ)。

证明分为三种情形。首先，假设对于每个 $1\leqslant j\leqslant n$，$E_j^*(\rho$ 的所有面都包含于 $Z_{n-1}(\sigma$，除了缺少 $j+1$ 的面，j。应用 引理 3.14 于$j=0$ 可得

$$d_sE_0^*(\rho)=\begin{cases}E_0^*\left(d_s(\rho)\right), & \text{if } 1<s\leqslant n+1\\ d_1\left(E_1^*(\rho)\right), & \text{if } s=1\\ \gamma_X(d_0(\ell_0)), & \text{if } s=0.\end{cases}$$

这表明，除了 1-面外，$E_0^*(\rho)$ 的所有面都已包含在 $Z_{n-1}(\sigma)$ 中。根据构造，三角形 $\Delta^{\{0,1,2\}}$ 在 $E_0^*(\rho)$ 中是薄的，这表明我们可以沿着一个 MB-无角映射，通过推出添加单形 $E_0^*(\rho)$。我们将由此得到的单纯集合 $Z_{n-1}(\sigma)\ \to\ V_0\ \to Z_{n-1}(\rho)$ 记为 V_0。再次应用引理 3.14，我们看到，除了 2-面外，$E_1^*(\rho)$ 的所有面都在 V_0 中。与上面类似的论证表明，我们可以通过 MB-无角的方式添加 $E_1^*(\rho)$，从而得到一个新的子单纯集，记为 V_1。我们可以重复这一过程，直到到达

V_{n-1}。最后一步中，我们注意到有一个拉回图

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{n+1}_{n+1} & \longrightarrow & \Delta^{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle E^*_n(\rho)} \\ V_{n-1} & \longrightarrow & Z_{n-1}(\rho) \end{array}$$

其中， Λ^{n+1}_{n+1} 的最后一条边在 $\mathbf{F}(\mathbb{X})$ 中是 2-笛卡尔的，而三角形 $\Delta^{\{0,n,n+1\}}$ 是余笛卡尔的。因此，我们可以沿着一个 **MB**-无穷小胞腔映射，通过推出添加 $E^*_n(\rho)$，并由此得出，在这种情况下， $Z_{n-1}(\sigma) \to Z_{n-1}(\rho)$ 是 **MB**-无穷小胞腔的。

对于第二种情况，假设存在某个 $1 \leqslant \alpha \leqslant n$ ，使得 $d_\alpha(E^*_\alpha(\rho))$ 已经属于 $Z_{n-1}(\sigma)$，并且对于每个 $j > \alpha$， $E^*_j(\rho)$ 中缺少 $j+1$、 j 的面都不包含在 $Z_{n-1}(\sigma)$ 中。我们声称，对于每个 $0 \leqslant k < \alpha$ ，单形 $E^*_k(\rho) \in Z_{n-1}(\rho)$。这一点很容易验证。

$$E^*_k(\rho) = E^*_k(d_\alpha(E^*_\alpha(\rho))),\ 0 \leqslant k < \alpha.$$

特别是，这表明只需证明 $d_\alpha(E^*_\alpha(\rho))$ 的所有扩张都包含在 $Z_{n-1}(\sigma)$ 中即可。为了证明这一结论，我们注意到， $d_\alpha(E^*_\alpha(\rho)) \in Z_{n-1}(\sigma)$ 当且仅当以下条件中至少有一个成立：

*) 面 $d_\alpha(E^*_\alpha(\rho))$ 包含于 $\mathbb{X}$ 中。

i) 面 $d_\alpha(E^*_\alpha(\rho))$ 是退化的。

ii）面 $d_\alpha(E^*_\alpha(\rho))$ 是一个 $(n-1)$-单形的扩张。

iii) 存在 $\theta \leqslant \sigma$，使得 $d_\alpha(E^*_\alpha(\rho))$ 是 θ 的某个扩张的面。

如果条件 *) 成立，那么很容易看出，所有可能的扩张都已包含在 $Z_{n-1}(\sigma)$ 中。利用 引理 3.15 和 引理 3.16 ，我们可以看出，如果满足条件 i) 或 ii)，则该断言成立。现在假设条件 iii) 成立。不失一般性，我们可以假设$d_\alpha(E^*_\alpha(\rho)) = d_\beta(E^*_\beta(\theta))$。直接计算可得

$$E^*_j(d_\beta(E^*_\beta(\theta))) = \begin{cases} s_j(d_\beta(E^*_\beta(\theta))), & \text{if } j \geqslant \beta \\ E^*_j(\theta), & \text{if } j < \beta \end{cases}$$

因此，该断言仍然成立。我们已经证明了 $Z_{n-1}(\sigma) = V_{\alpha-1}$ ，所以前面的论证完全可以照样进行。

最后一种需要分析的情况是退化情形，即 ρ 已经属于 $Z_{n-1}(\sigma)$。在这种情况下，我们需要证明 $Z_{n-1}(\sigma) = Z_{n-1}(\rho)$，也就是说，我们需要证明已经拥有 ρ 的所有扩张。由于 $\rho \notin Z_{n-1}$ 且它并非退化，因此可知对于某个 $\theta \leqslant \sigma$，有 $\rho = d_\beta(E_\beta(\theta))$。沿用之前的推理可知，对于所有 $0 \leqslant k \leqslant n$ ，都有 $E_k(\rho) \in Z_{n-1}(\sigma)$，结论随即得证。

为了完成证明，我们还需要处理滤过中的最后一件事，即装饰。我们需要证明，每当在滤过中加入一条标记边（分别为精瘦边、薄三角形）时，都可以用一种**MB**-无穷小方式将相应的装饰加入滤过。对于标记边而言，这实际上是推论 3.20中所给证明的一个特例。其余装饰留作读者练习。 □

注 3.18。 态射 $\gamma_{\mathbb{X}} : \mathbb{X}^\natural \to \mathbf{F}(\mathbb{X})^\natural$ 可以被视为一个双范畴自由-遗忘伴随的单位，该伴随介于 „ 上的 ∞-双范畴与 „ 上的 2-笛卡尔纤维化的 ∞-双范畴之间。本文不再进一步探讨这一方向。对双范畴伴随的详细研究是作者研究计划的一部分，将在后续工作中发表。

定义 3.19。 设 $p\colon \mathbb{X} \to \mathbb{D}$ 是一个 ∞-双范畴之间的函子。假设 $\mathbb{X}$ 带有一个包含所有等价的标记，并将所得的带标记 ∞-双范畴记为$\mathbb{X}^\dagger$。我们在 $\mathbb{F}(\mathbb{X})$ 上定义新的标记如下。我们规定，由 $\Delta^1 \otimes \Delta^1 \to \mathbb{D}$表示的边是标记的，当且仅当它经过 $\Delta^1 \times \Delta^1$ 进行分解，并且其在 $\Delta^{\{1\}} \times \Delta^1$ 上的限制经过 $\mathbb{X}$中的一个标记边进行分解。我们定义带标记-缩放的单纯形 $\mathbb{F}(\mathbb{X})^\dagger$ ，使其具有与 $\mathbb{F}(\mathbb{X})^\natural$ 相同的精瘦三角形和薄三角形，但配备这组新的标记边。

推论 3.20. 设 $p\colon \mathbb{X} \to \mathbb{D}$ 是一个 ∞-双范畴之间的函子。假设 X 配备了一个标记（包含等价），并将相应的带标记 ∞-双范畴记为$\mathbb{X}^\dagger$。那么态射

$$\mathbb{X}^\dagger \longrightarrow \mathbb{F}(\mathbb{X})^\dagger$$

是 ***MB*-无角的**。

证明。 考虑推出图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \longrightarrow & \mathbb{X}^\dagger \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{F}(\mathbb{X})^\natural & \longrightarrow & \mathbf{F}(\mathbb{X})^\diamond \end{array}$$

由定理 3.17 可知，最左侧的竖直映射是 MB-无角的。为了完成证明，只需证明态射 $\mathbf{F}(\mathbb{X})^\diamond \to \mathbf{F}(\mathbb{X})^\dagger$仍然是无角的。设 $e\colon \Delta^1 \otimes \Delta^1 \to$„ 是 $\mathbf{F}(\mathbb{X})^\dagger$ 的一条带标记边。首先注意到， $E_0^*(e)$ 是一个薄 2-单形，其中 $d_0(E_0^*(e))$ 和 $d_2(E_0^*(e))$ 在 $\mathbf{F}(\mathbb{X})^\diamond$ 中均带有标记。特别地，由此可知，我们可以通过沿着 (S1) 型态射作推出，为边 $d_1(E_0^*(e))$ 添加标记。再沿着 [5, 引理 3.7] 中所述类型的态射作推出，即可为 $E_1^*(e)$ 中的所有边添加标记。最后注意到$d_2(E_1^*(e)) = e$，即可完成证明。

□

3.2 部分松弛余极限与余终性

现在我们转向本节的主要结果：一个关于高阶共终性的判据。这里我们不再重述 [14], 中阐述的高阶（余）极限理论，但详见备注 3.22 ，其中介绍了与（∞，2）-范畴余极限的联系。

定义 3.21。 设 $X^\dagger, Y_\dagger$ 是一对带标记标度单纯集合，并考虑一个保持标记的函子， $f\colon X^\dagger \to Y^\dagger$。若其关联的带标记双标度单纯集合函子是共尾的，我们称 f 为带标记余终函子（或简称共尾函子）

$$f\colon (X, E_X, T_X \subset \sharp) \longrightarrow (Y, E_Y, T_Y \subset \sharp)$$

是 **MB** 单纯集合在模型结构中的弱等价，且定义在 Y 上。

注 3.22. 关于部分松弛余极限的理论 ∞-双范畴是由 Berman 在 [8], 本文作者在 [4] 以及 [2], Gagna、Harpaz 和 Lanari 在 [14]中独立发展起来的。后者完整刻画了 ∞-双范畴中的带标记（余）极限，其中包括通过改变相应锥的定义中 2-态射的方向而产生的四种变体。本文 [2] 中所描述的部分松弛余极限理论对应于 外余极限这一情形，采用的是[14]中的术语。

根据 [14, 定理 5.4， 4], 带标记 ∞-双范畴 f 的函子$\mathbb{C}^\dagger \to \mathbb{D}^\dagger$ 是外共尾的——也就是说，沿 f 的拉回保余外极限——当且仅当 f 按照上文定义 3.21 的意义是带标记余终的（比较定义 3.21与 [14, 定义 4.33] 、 [5, 定义 325] 以及 [5, 命题 328] ，可知这些条件确实等价）。

注 3。 **23.** 设 $f\colon$ (ƒ $E_\mathbb{C}, T_\mathbb{C}$) →(„ $E_\mathbb{D}, T_\mathbb{D}$) 是带标记的 ∞-双范畴之间的一个函子。注意 ve

要判断 f 是否共尾，我们可以假设两个 ∞-双范畴的标记都包含所有等价。这一点在沿着类型为 (E) 的态射取推出后很容易得出。因此，本节余下部分都假设标记满足这一性质。

引理 3.24。 设 $f:\mathbb{C}^\dagger \to \mathbb{D}^\dagger$ 是一个带标记的 ∞-双范畴之间的函子，并回顾 定义 3.19 中在 $\mathbb{F}(\mathbb{C})^\dagger = (\mathbb{F}(\mathbb{C})\ E_{\mathbb{F}(\mathbb{C})^\dagger}, T_{\mathbb{F}(\mathbb{C})^\dagger})$ 上定义的相应标记。那么诱导的态射

$$(\mathbb{C}, E_{\mathbb{C}^\dagger}, T_{\mathbb{C}^\dagger} \subset \sharp) \longrightarrow (\mathbb{F}(\mathbb{C}), E_{\mathbb{F}(\mathbb{C})^\dagger}, T_{\mathbb{F}(\mathbb{C})^\dagger} \subset \sharp)$$

是 *MB*-无穷胞的。

证明。 我们将其记为 $f^\dagger_\sharp = (f\, E_{\mathbb{C}^\dagger}, T_{\mathbb{C}^\dagger} \subseteq \sharp)$，类似地记为 $\mathrm{F}(f)^\dagger_\sharp$。我们考虑 $\mathbb{N}$ 上的一个推出图表。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\dagger & \longrightarrow & \mathbb{C}^\dagger_\sharp \\ \downarrow{\scriptstyle \simeq} & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} \\ \mathbb{F}(\mathbb{C})^\dagger & \longrightarrow & \mathbb{F}(\mathbb{C})^\dagger_\diamond \end{array}$$

其垂直态射都是弱等价。我们将证明诱导映射 $s:\mathrm{F}(f)^\dagger_\diamond \to \mathrm{F}(f)^\dagger_\sharp$ 是无害的。设 $\sigma:\ \Delta^2 \to \mathrm{F}(f)^\dagger_\diamond$ 是一个三角形。注意，根据构造， $E^*_0(\sigma)$ 是完全瘦缩放的。这意味着 $E^*_0(\sigma)$ 的所有面都是精瘦的，除了可能缺少顶点 1 的那个面。由于三角形 {0,1,2} 是薄的，我们可以沿着一个 **MB**-无害态射取推出，使缺少顶点 1 的面变为精瘦缩放。

现在我们考虑 $E^*_1(\sigma)$，并注意到缺少 0 和 3 的面是精瘦的。此外，我们看到 $d_1(E^*_1(\sigma)) = d_1(E^*_0(\sigma))$，因此，除了缺少顶点 2 的面之外，所有面都已经是精瘦的。注意到 {1,2,3} 是一个薄三角形后，我们对上述面进行缩放。类似的论证表明， $E^*_2(\sigma)$ 的所有面都经过缩放，唯一可能的例外是 $d_3(E^*_2(\sigma)) = \sigma$。然而，由于最后一个顶点带有标记，且三角形 {0,2,3} 已经过缩放，结论成立。□

定义 3.25。 设 $f:\mathfrak{f}^\dagger \to \mathbb{N}^\dagger$ 是一个带标记的 ∞-双范畴之间的函子。给定 $d \in \mathbb{N}$，我们用 $\mathfrak{f}^\dagger_d$ 表示态射 $\mathrm{F}(\mathfrak{f})^\dagger \to \mathbb{N}$ 在对象 d 处的纤维。

定义 3.26. 设 $f:\mathfrak{f}^\dagger \to \mathbb{N}^\dagger$ 是带标记 ∞-双范畴之间的一个函子。我们将 2-笛卡尔纤维化 $\mathfrak{f}^\dagger{}_{\mathbb{D}} \to \mathbb{N}$ 定义为对象 $(\mathrm{F}(\mathfrak{f})\ E_{\mathbb{F}(\mathbb{C})^\dagger}, T_{\mathbb{F}(\mathbb{C})^\dagger} \subset \sharp)$ 在 $(\mathrm{Set}^{\mathbf{mb}}_\Delta)_{/\mathbb{D}}$ 中的一个纤维化替换。

命题 3.27. 设 $f:\mathbb{C}^\dagger \to \mathbb{D}^\dagger$ 是带标记 ∞-双范畴之间的一个函子。则以下陈述等价：

i) 映射 f 是带标记余终的。

ii) 态 射 $(\mathbb{F}(\mathbb{C})\ E_{\mathbb{F}(\mathbb{C})^\dagger}, T_{\mathbb{F}(\mathbb{C})^\dagger} \subset \sharp) \to (\mathbb{F}(\mathbb{D})\ E_{\mathbb{F}(\mathbb{D})^\dagger}, T_{\mathbb{F}(\mathbb{D})^\dagger} \subset \sharp)$ 是一个弱等价 .

iii) 对每个 *ery* $d \in \mathbb{D}$ 我们有一个 ∞-范畴局部化的等价 $L_W(\mathbb{C}^\dagger_d) \to L_W(\mathbb{D}^\dagger_d$).

证明。 等价 $i) \iff ii)$ 可由 引理 3.24 以及自由纤维化的函子性得出。为完成证明，我们将证明 $ii) \Leftarrow \Rightarrow iii)$.

考虑投射纤维函子 $\mathrm{F}_{\mathbb{C}}$，$\mathrm{F}_{\mathbb{D}}:\ \mathfrak{C}^{\mathrm{sc}}[\mathbb{N}]^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}^{\mathbf{ms}}_\Delta$，它们配备了等价 $\mathrm{Un}_{\mathbb{D}}(\mathrm{F}_{\mathbb{C}}) \simeq \mathrm{F}(\mathfrak{f})$ 和 $\mathrm{Un}_{\mathbb{D}}(\mathrm{F}_{\mathbb{D}}) \simeq \mathrm{F}(\mathbb{N})$。我们可以通过推出定义新的函子 $\mathrm{F}^\dagger{}_{\mathbb{C}}$ 和 $\mathrm{F}^\dagger{}_{\mathbb{D}}$，以及一个态射 $\mathrm{F}^\dagger{}_{\mathbb{C}} \to \mathrm{F}^\dagger{}_{\mathbb{D}}$，例如：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{St}_{\mathbb{D}}(\mathbb{F}(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\sim} & \mathcal{F}_{\mathbb{C}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{St}_{\mathbb{D}}(\mathbb{F}(\mathbb{C})^\dagger) & \xhookrightarrow{\sim} & \mathcal{F}^\dagger_{\mathbb{C}} \end{array}$$

因此我们看到，纤维替换 $\mathsf{R}(\mathrm{Un}_{\mathbb{D}}(\mathrm{F}^{\dagger}\,\mathbb{C})) \to \mathsf{R}(\mathrm{Un}_{\mathbb{D}}(\mathrm{F}^{\dagger}\,\mathbb{C}))$ 上诱导的映射是 $\mathfrak{f}^{\dagger}\,\mathbb{D} \to \mathfrak{„}^{\dagger}\,\mathbb{D}$ 的一个模型。此外，推出是逐点计算的。展开定义可知，对于每个 $d \in \mathfrak{„}$，方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{St}_*(\mathbb{C}_d\ ) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{St}_{\mathbb{D}}(\mathbb{F}(\mathbb{C}))(d) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{St}_*(\mathbb{C}_d^{\dagger}\ ) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{St}_{\mathbb{D}}(\mathbb{F}(\mathbb{C})^{\dagger})(d) \end{array}$$

是一个同伦推出。因此我们有自然等价

$$\mathbb{C}_d^{\dagger} \simeq \mathbb{St}_*(\mathbb{C}_d^{\dagger}\ ) \simeq \mathbb{St}_{\mathbb{D}}(\mathbb{F}(\mathbb{C})^{\dagger})(d) \simeq \mathcal{F}_{\mathbb{C}}^{\dagger}(d).$$

最后，我们注意到存在典范的自然识别

$$\mathbb{C}_{\mathbb{D}}^{\dagger}\ \times_{\mathbb{D}} \{d\} \simeq \mathsf{R}(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}^{\dagger})(d) \simeq L_W(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}^{\dagger}(d))$$

从而得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{\mathbb{D}}^{\dagger}\ \times_{\mathbb{D}} \{d\} & \xrightarrow{\simeq} & L_W(\mathbb{C}_d^{\dagger}\ ) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{D}_{\mathbb{D}}^{\dagger}\ \times_{\mathbb{D}} \{d\} & \xrightarrow{\simeq} & L_W(\mathbb{D}_d^{\dagger}\ ) \end{array}$$

该命题于是由 [5, 命题 4.25] 得出。 □

命题 3.28。 设 $p\colon\ \mathbb{X} \to \mathbb{D}$ 是一个 2-笛卡尔纤维化，使得 $\mathbb{X}$ 中的每个三角形都是精瘦的。假设对于每个 $d \in \mathbb{D}$，纤维 d上都存在一个始对象 $i_d \in \mathbb{X}_d$。那么，将 p 的限制到由始对象张成的带标记双标度单纯集 $\hat{}p\colon\ \mathbb{X} \to \mathbb{D}$ 上，是标度单纯集合的一个平凡纤维化。

证明。 我们首先证明，$\hat{}p$ 是 $\mathrm{Set}_{\Delta}^{\mathrm{sc}}$上的模型结构中的一个纤维化。由于 p 是一个 2-笛卡尔纤维化，容易看出，$\hat{}p$ 对所有标度无骨架态射都具有右提升性质。由 [13, 推论 6.4] 可知，只需验证 $\hat{}p$ 是一个等纤维化。令 $d_0 \to d_1 = p(x_1)$ 是 $\mathfrak{„}$ 中的一个等价，并选取一个提升 $x_0 \to x_1$，使得 x_1 在 d_1 上的纤维中是始对象。取一个始对象 $\hat{}x_0$，并考虑复合态射 $u\colon\ \hat{}x_0 \to x_1$。我们断言， u 是一个等价。令 $\mathcal{D} \subset \mathfrak{„}$ 表示 $\mathfrak{„}$ 的底层 ∞-范畴，并考虑一个拉回图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X}_{\mathcal{D}} & \longrightarrow & \mathbb{X} \\ \downarrow & & \downarrow p \\ \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{D} \end{array}$$

$\hat{}$，其中最左侧的垂直态射是一个 ∞-范畴的笛卡尔纤维化。令 $\mathbb{X}_{\mathcal{D}}$ 表示对逐纤维始对象所构成的满子范畴的限制。由 [24, 命题 2.4.4。9] 可知，限制 $\hat{}\,\mathbb{X}_{\mathcal{D}} \to \mathcal{D}$ 是一个平凡 Kan 纤维化。特别地，它能检测等价，故结论成立。

因此，我们已将问题归结为证明 $\hat{}p$ 是双范畴等价。根据我们的假设可知，$\hat{}p$ 在对象上是满射的。为完成证明，我们将验证对于每一对对象 x， $y \in \mathbb{X}$，由此诱导的映射 ∞-范畴态射

$$\hat{p}_{x,y}\colon \mathrm{Map}_{\hat{\mathbb{X}}}(x,y) \longrightarrow \mathrm{Map}_{\mathbb{D}}(\hat{p}(x),\hat{p}(y))$$

是一个等价。注意，由于 $\mathbf{X}$ 中的每个 2-单形都是精瘦的，因此不仅 $p_{x,\,y}$ 是一个余笛卡尔纤维化，它还是一个左纤维化。因此，我们将问题归结为证明 $\hat{}p_{x,\,y}$ 的纤维都是可缩的。根据我们的假设，结合 [5, 命题 4。21] □

引理 3.29. 设 $\mathbb{D}^\dagger$ 是一个带标记的 ∞-双范畴。那么，*2*-笛卡尔纤维化 $\mathbb{D}^\dagger \,\mathrm{D} \to \mathbb{D}$ 满足命题 *3.28*的假设。

证明。回顾命题 3.27 的证明中给出的 $„^\dagger$ D 的模型。由此可直接观察到，$„^\dagger$ D 中的每个三角形都是精瘦的。我们断言，对于每个 $d \in \mathrm{D}$，恒等态射 id_don d 在其对应的纤维中都是始对象。注意，我们可以将 d 上的纤维识别为 $L_W(\mathrm{D}^\dagger_d)$。由于对于每个对象 $f\colon d \to d'$，根据引理 3.30，映射 ∞-范畴 $\mathrm{Map}^{\mathbb{D}_d}(\mathrm{id}_d, f)$ 是可缩的，因此 id_d 在局部化中是始对象。

□

引理 3.30. 设 $\mathbb{D}$ 为一个 ∞-双范畴。设 $\mathrm{id}_d\colon d \to d$ 和 $e\colon d \to d'$ 是 $\mathbb{D}$中的一对边，满足 id_d 是退化的。设 $r\colon \Delta^1 \times \Delta^1 \to \Delta^1$ 为将除 $(1,1)$ 之外的每个顶点都映射到 0，并将 $(1,1)$ 映射到 1的态射。那么复合态射

$$\eta_e\colon \Delta^1 \times \Delta^1 \xrightarrow{\;r\;} \Delta^1 \xrightarrow{\;e\;} \mathbb{D}$$

在映射 ∞-范畴 $\mathrm{Map}^{\mathbb{D}_d}(\mathrm{id}_d, f)$ 中定义一个终对象。

证明。 我们将证明，每个边界 $\partial\alpha\colon \partial\Delta^n \to \mathrm{Map}^{\mathbb{D}_d}(\mathrm{id}_d,\ f)$，使得 $\partial\alpha(n) = \eta_e$均可延拓为一个 n-单形 $\alpha\colon \Delta^n \to \mathrm{Map}^{\mathbb{D}_d}(\mathrm{id}_d,\ f)$。

我们定义一个子单形集（带有继承的缩放）$\mathrm{S}^{n+1} \subset \Delta^1 \otimes \Delta^{n+1}$，它恰好由满足以下至少一个条件的单形 σ 组成：

- 单形 σ 包含于 $\Delta_{\{0\}} \times \Delta^{n+1}$。
- 给定 $j \in [n+1]$ 单形 σ，它会跳过形如 (ε, j) 的顶点，其中 $\varepsilon \in \{0,1\}$。

Un展开定义后，我们看到需要解决相应的提升问题。 m

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}^{n+1} & \xrightarrow{\;\partial\alpha\;} & \mathbb{D} \\ \downarrow{\scriptstyle \iota} & \nearrow & \\ \Delta^1 \otimes \Delta^{n+1} & & \end{array}$$

我们滥用记号，用 $\Delta^1 \otimes \Delta^{n+1}$ 表示 Gray 积，其中我们还会对三角形 $(0,\ j) \to (0,\ j+1) \to (1,\ j+1)$ 进行缩放（只要 $j < n$），以及对三角形 $(n,\ 0) \to (n+1,\ 0) \to (1,\ n+1,\ 1)$ 进行缩放。我们会将这一额外缩放延续到 S^{n+1}。注意，按构造，$\partial\alpha$ 会将这些三角形映射为 „ 中的薄单形。我们构造一个分解

$$\mathcal{S}^{n+1} \xrightarrow{\;u\;} \mathcal{R}^{n+1} \xrightarrow{\;v\;} \Delta^1 \otimes \Delta^{n+1}$$

其中，R^{n+1} 由 $\Delta^1 \otimes \Delta^{n+1}$ 中跳过顶点 $(1,\ 1)$ 的那些单形组成。显然，u 是标度无骨架，且 v 适合构成一个推出方形

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{n+1}_0 \coprod_{\Delta^{\{0,1\}}} \Delta^0 & \longrightarrow & \Delta^{n+1} \coprod_{\Delta^{\{0,1\}}} \Delta^0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{R}^{n+1} & \xrightarrow{\;v\;} & \Delta^1 \otimes \Delta^{n+1} \end{array}$$

由于三角形 $\{0,\ 1,\ n\}$ 按照构造是薄的，因此 v 也是标度无骨架。结论由此得出。

□

现在我们来到了本截面的主定理，它给出了一个判定余终性的计算准则。

定理 3.31。设 $f:\ \mathbb{C}^\dagger \to \mathbb{D}^\dagger$ 是带标记的 ∞-双范畴之间的函子。那么以下陈述等价。

1. 函子 f 是带标记余终的。 *2.* 对于每个 $d \in \mathbb{D}$，函子 f 诱导出 ∞-范畴局部化 $L_W(\mathbb{C}^\dagger_d) \to L_W(\mathbb{D}^\dagger_d)$ 之间的一个等价。 *3.* 以下条件成立：*i)* 对于每个 $d \in \mathbb{D}$，存在一个态射 $g_d\colon d \to f(c)$，它在 $L_W(\mathbb{C}^\dagger_d)$ 和 $L_W(\mathbb{D}^\dagger_d)$ 中是始的。

ii) 每个标记态射 $d \to f(c)$ 都在 $L_W(\mathbb{C}^\dagger_d)$ 中定义一个始对象。

iii) 对于 $\mathbb{D}$ 中的任意带标记态射 $d \to b$，诱导函子 $L_W(\mathbb{C}^\dagger_b) \to L_W(\mathbb{C}^\dagger_d)$ 保留始对象。

证明。 根据 命题 3.27 只需证明条件 2 成立当且仅当条件 3 成立。假设条件 2 成立。由假设可知，态射 $L_W(\mathbb{C}^\dagger_d) \to L_W(\mathbb{D}^\dagger_d)$ 是 ∞-范畴之间的等价，因此我们可以选取一个对象 $d \to f(c)$，其在 $L_W(\mathbb{D}^\dagger_d)$ 中的像与 id_d 等价。由于等价保留并反映始对象，我们可知条件 *i)* 得到满足。为证明条件 *ii)* 成立，只需注意到 $L_W(\mathbb{D}^\dagger_d)$ 中每个带标记态射都与 id_d等价。再次利用等价能反映始对象，即得所需结论。对于最后一个条件，我们考虑如下交换图

$$\begin{array}{ccc} L_W(\mathbb{C}^\dagger_b) & \xrightarrow{\simeq} & L_W(\mathbb{D}^\dagger_b) \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_W(\mathbb{C}^\dagger_d) & \xrightarrow{\simeq} & L_W(\mathbb{D}^\dagger_d) \end{array}$$

现在显然，只要最右侧的垂直态射保留始对象，条件 *iii)* 就成立。我们注意到，该映射将 b 上的恒等态射映到一个由带标记态射表示的对象，因此它保留始对象。

现在假设条件 3 成立。由 命题 3.27 可知，只需证明纤维化替换所诱导的态射 $\mathcal{A}f:\ \mathbb{C}^\dagger{}_{\mathbb{D}} \to \mathbb{D}^\dagger{}_{\mathbb{D}}$ 是 2-笛卡尔纤维化之间的等价。注意，根据假设，$\mathbb{C}^\dagger{}_{\mathbb{D}}$ 满足 命题 3.28的假设。记 $\hat{}\mathbb{C}^\dagger{}_{\mathbb{D}}$ 为由逐纤维始对象张成的满标记双标度单纯集合；类似地，记 $\hat{}\mathbb{D}^\dagger{}_{\mathbb{D}}$。注意，由于 命题 3.28，我们有一个截面

$$s_f\colon \mathbb{D}_\sharp \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}^\dagger_{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbb{C}^\dagger_{\mathbb{D}} \quad \text{where } \mathbb{D}_\sharp = (\mathbb{D}, E_{\mathbb{D}}, T_{\mathbb{D}} \subset \sharp).$$

我们可以选取截面，使得每个 d 都映射到 $g_d:\ d \to f(c)$，如条件 *i)* 所示。我们声称，s_f 将 $\mathbb{D}^\dagger_\sharp = (\mathbb{D}, E_{\mathbb{D}^\dagger}, T_{\mathbb{D}^\dagger} \subset \sharp)$ 中的标记边映射为 $f^\dagger{}_{\mathbb{D}}$ 中的笛卡尔边。令 $e\colon d \to b$ 为一个

$„_\sharp^\dagger$ 中的标记边，并选取 e 的一个笛卡尔提升 $\hat{}e\colon \Delta^1 \to \int^\dagger \mathbb{D}$，使得 $\hat{}e(1) = g_b$。根据条件iii)，$\hat{}e(0)$ 是 d 上方纤维中的始对象。我们考虑交换图

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^2_2 & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{C}^\dagger_{\mathbb{D}} \\ \downarrow & \overset{\theta}{\nearrow} & \downarrow \\ \Delta^2 & \xrightarrow{s_0(e)} & \mathbb{D} \end{array}$$

与 $\sigma(1 \to 2) = \hat{}e$ 以及 $\sigma(0 \to 2) = s_f(e)$。三角形 θ 按构造是薄的，而边 $0 \to 1$是一个等价，因为它是始对象之间的态射。因此 $s_f(e)$ 是笛卡尔的。现在我们可以使用 引理 3.24 来为提升问题

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}^\dagger_\sharp & \xrightarrow{s_f} & \mathbb{C}^\dagger_{\mathbb{D}} \\ \downarrow{\scriptstyle i_{\mathbb{D}}} & \overset{\mathcal{I}_f}{\nearrow} & \\ \mathbb{D}^\dagger_{\mathbb{D}} & & \end{array}$$

我们声称 $\mathbf{A}f$ 和 $\mathbf{I}f$ 互为逆。首先注意到 $\mathbf{A}f \circ s_f$ 是 $„^\dagger \mathbb{D}$ 的一个截面，它将每个对象 $d \in „$ 映射到纤维中的一个始对象。利用 $\hat{}„^\dagger \mathbb{D} \to „$ 是平凡纤维化这一事实，我们可以在 $„$ 上构造一个同伦，

$$H_{\mathbb{D}}\colon \Delta^1 \times \mathbb{D}_\sharp \longrightarrow \mathbb{D}^\dagger_{\mathbb{D}}$$

在 $i_{\mathbb{D}}$ 与 $\mathbf{A}f \circ s_f$之间。注意到 $i_{\mathbb{D}}(d) = \mathrm{id}_d$，因此它将每个对象映射到纤维中的一个始对象。按构造，$H_{\mathbb{D}}$ 的各分量都是始对象之间的态射，因而是等价。设 $e\colon d \to b$ 是 $„^\dagger_\sharp$ 中的一个带标记态射，则可得 $H_{\mathbb{D}}(0 \to 1,\ e)$ 在 $„^\dagger \mathbb{D}$ 中带有标记。因此，我们可以将同伦 $H_{\mathbb{D}}$ 提升为一个标记同伦 $H_{\mathbb{D}}\colon (\Delta^1)^\sharp \times „^\dagger_\sharp \to „^\dagger \mathbb{D}$。要证明 $\mathbf{A}f \circ \mathbf{I}f \simeq \mathrm{id}$，只需验证 $\mathbf{A}f \circ \mathbf{I}f \circ i_{\mathbb{D}} \simeq i_{\mathbb{D}}$，然而我们有

$$\mathcal{A}_f \circ \mathcal{I}_f \circ i_{\mathbb{D}} = \mathcal{A}_f \circ s_f \simeq i_{\mathbb{D}}.$$

固定一些记号 $i_f\colon \int^\dagger_\sharp \to \int^\dagger \mathbb{D}$ 和 $i_{\mathbb{C}}\colon \int^\dagger_\sharp \to \int^\dagger \mathbb{C}$。为了证明 $\mathbf{I}f \circ \mathbf{A}f \simeq \mathrm{id}$，我们将证明 $\mathbf{I}f \circ \mathbf{A}f \circ i_f \simeq i_f$。考虑以下拉回方块。

$$\begin{array}{ccc} f^*\left(\mathbb{C}^\dagger_{\mathbb{D}}\right) & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{C}^\dagger_{\mathbb{D}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{f} & \mathbb{D} \end{array}$$

并注意，$i_f = \phi \circ \mathbf{B}f \circ i_{\mathbb{C}}$，其中 $\mathbf{B}f\colon \int^\dagger \mathbb{C} \to f^*\left(\int^\dagger \mathbb{D}\right)$ 是由泛性质诱导的态射。现在我们注意到 $\mathbf{I}f \circ \mathbf{A}f \circ \phi = \phi \circ f^*(\mathbf{I}f) \circ f^*(\mathbf{A}f)$。与之前类似的论证表明，

$$f^*(\mathcal{I}_f) \circ f^*(\mathcal{A}_f) \circ \mathcal{B}_f \circ i_{\mathbb{C}} \simeq \mathcal{B}_f \circ i_{\mathbb{C}}.$$

这是因为等式两边描述的都是 $f^*\left(\int^\dagger \mathbb{D}\right)$ 的截面，其取值为始对象。注意，$\mathbf{B}f \circ i_{\mathbb{C}}(c)$ 是始对象，这是条件 ii) 的结果。最后指出这一点，即可完成证明

$$\mathcal{I}_f \circ \mathcal{A}_f \circ i_f = \mathcal{I}_f \circ \mathcal{A}_f \circ \phi \circ \mathcal{B}_f \circ i_{\mathbb{C}} = \phi \circ f^*(\mathcal{I}_f) \circ f^*(\mathcal{A}_f) \circ \mathcal{B}_f \circ i_{\mathbb{C}} \simeq \phi \circ \mathcal{B}_f \circ i_{\mathbb{C}} = i_f$$

我们已经证明 $\mathbf{I}f \circ \mathbf{A}f \simeq \mathrm{id}$，定理由此得证。 □

We 推论可立即得到 Quillen 定理 A 的一个 ∞-双范畴升级版本 .

推论 3.32。令 $f\colon \mathbb{C}^\dagger \to \mathbb{D}^\dagger$ 为带标记 ∞-双范畴的函子，并假设对于每个$d \in \mathbb{D}$ 所诱导的函子

$$L_W(\mathbb{C}^\dagger_d) \xrightarrow{\simeq} L_W(\mathbb{D}^\dagger_d)$$

是 ∞-范畴之间的等价。然后，函子 f 在取 ∞-范畴局部化后诱导出一个等价

$$L_W(\mathbb{C}^\dagger) \xrightarrow{\simeq} L_W(\mathbb{D}^\dagger).$$

证明。由 定理 3.31 可得 f 是带标记余终的。由于推前函子

$$t_*\colon \left(\mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{mb}}\right)_{/\mathbb{D}} \longrightarrow \mathrm{Set}_\Delta^{\mathbf{mb}}$$

是左 Quillen 函子，且每个对象都是余纤维对象，t_* 保留弱等价。映射$f\colon (\mathbb{C}, E_{\mathbb{C}}, T_{\mathbb{C}} \subset \sharp) \to (\mathbb{D}, E_{\mathbb{C}}, T_{\mathbb{D}} \subset \sharp)$ 在 t_* 下的像等价于态射 $t_*(f)\colon (\mathbb{C}, E_{\mathbb{C}}, \sharp) \to (\mathbb{D}, E_{\mathbb{D}}, \sharp)$。对映射 $t_*(f)$ 进行纤维化替换后，即可得到所需结论。 □

我们通过研究以下情形来结束本节：$f\colon \mathbb{C}^\dagger \to \mathbb{D}^\dagger$ 是一个配备了标记的严格 2-范畴之间的函子。在本节余下部分中，我们将记 $\mathbb{C}^\dagger = \mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathbb{C})^\dagger$（分别记作$\mathbb{D}^\dagger := \mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathbb{D})^\dagger$），其中标记来自 $\mathbb{C}^\dagger$（分别来自 $\mathbb{D}^\dagger$）中的标记。我们的目标是将 定义 1.1 中的逗号 2-范畴（的神经）与自由 2-笛卡尔纤维化的纤维联系起来，从而简化定理 3.31的条件。

定义 3.33。设 $f : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ 是一个严格 2-范畴之间的函子。我们定义一个新的 2-范畴 $\mathbf{Fr}(\mathbf{C})$，如下：

- 对象由态射 $u\colon d_0 \to f(c_0)$ 给出，其中 $d_0 \in \mathbf{D}$ 和 $c_0 \in \mathbf{C}$。
- 一个态射 $\varphi_0\colon u \to v$ 从 $u\colon d_0 \to f(c_0)$ 到 $v\colon d_1 \to f(c_1)$ 由一对态射$a_0\colon d_0 \to d_1$ 和 $\alpha_0\colon c_0 \to c_1$ 以及一个 2-态射 $\theta_{\varphi_0}\colon f(\alpha) \circ u \Rightarrow v \circ a$ 给出。
- 一个 2-态射 $\varepsilon\colon \varphi_0 \to \varphi_1$ 由一对 2-态射 $\psi : a_0 \Rightarrow a_1$ 和 $\zeta : \alpha_0 \Rightarrow \alpha_1$给出，使得下图可交换

$$\begin{array}{ccc} f(\alpha_0)\circ u & \xRightarrow{f(\zeta)*u} & f(\alpha_1)\circ u \\ \Downarrow{\scriptstyle \theta_{\varphi_0}} & & \Downarrow{\scriptstyle \theta_{\varphi_1}} \\ v\circ a_0 & \xRightarrow{v*\psi} & v\circ a_1 \end{array}$$

存在一个显然的 2-函子 $\mathbf{Fr}(\mathbf{C}) \to \mathbf{D}$，容易验证它是一个 2-笛卡尔纤维化。特别地，可以观察到以下事实：

- $\mathbf{Fr}(\mathbf{C})$ 中的态射是笛卡尔的，当且仅当相应的态射 $\alpha\colon c_0 \to c_1$ 在 $\mathbf{C}$ 中是一个等价，且 2-态射 φ_0 是可逆的。
- $\mathbf{Fr}(\mathbf{C})$ 中的 2-态射是余笛卡尔的，当且仅当相应的 2-态射 $\zeta : \alpha_0 \Rightarrow \alpha_1$ 是可逆的。

我们立即可以看出，$\mathbf{Fr}(\mathbb{C})$ 的纤维恰好是范畴 $\mathbb{C}_d$，见定义 1.1。

注 3.34。由 [5, 定理 4。29] 可直接推出，诱导态射 $\mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{Fr}(\mathbb{C})) \to \mathbb{D}$ 是一个 2-笛卡尔纤维化。我们进一步注意到，存在一个严格 2-函子$\mathbb{C} \to \mathrm{Fr}(\mathbb{C})$。我们将在本节末尾看到，$\mathbf{Fr}(\mathbb{C})$ 是函子 f的自由 2-笛卡尔纤维化的另一种模型。

注 3.35。设给定一个带标记严格 2-范畴之间的态射 $f : \mathrm{C}^\dagger \to \mathrm{D}^\dagger$。那么，我们可以构造一个带标记的 2-范畴 $\mathrm{Fr}(\mathrm{C})^\dagger$，规定 Fr(C) 中的边带标记，当且仅当它是笛卡尔的，或者相应的态射 $\alpha : c_0 \to c_1$ 在 $\mathrm{C}^\dagger$ 中带标记，并且 2-态射 φ_0 可逆。我们将 $\mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{Fr}(\mathrm{C}))^\dagger$ 所对应的**MB** 单纯集合记为。

在继续之前，我们必须给出 $\mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{Fr}(\mathrm{C}))$ 的单形的良好刻画。事实证明，我们可以将 $\mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{Fr}(\mathrm{C}))$ 视为 F(ʃ) 的一个单纯子集，并将据此给出前者的单形的另一种刻画。为此，我们先固定一些术语。若 $\Delta^1 \widehat{\otimes} \Delta^n$ 相反地 的一个 2-单形是缩放的，我们就称它为相反的。

F(f) 的一个 n-单形 σ 由一个交换图组成

$$\begin{array}{ccc} \Delta^1 \widehat{\otimes} \Delta^n & \xrightarrow{\phi^\sigma} & \mathbb{D} \\ \uparrow & & \uparrow f \\ \{1\} \times \Delta^n & \xrightarrow{\rho^\sigma} & \mathbb{C} \end{array}$$

如果某个单形满足以下条件，我们称之为 温和的：它将相反的 2-单形映射为 恒等态射。[2] 根据构造，温和单形构成 $\mathbb{F}(\mathbb{C})$ 的一个单纯子集，我们将其记作 Tame(ℂ,𝔻)。当它配备由 $\mathbb{F}(\mathbb{C})$ 诱导的标记和双重标度时，我们将其记作 $\mathrm{Tame}(\mathbb{C},\mathbb{D})^\dagger$。

引理 3.36。 存在一个同构

$$\mathrm{Tame}(\mathbb{C},\mathbb{D})^\dagger \cong \mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{Fr}(\mathbb{C}))^\dagger$$

带标记双标度单纯集合的。

证明。 我们将证明其底层单纯集合 Tame(ʃ,„) 是 3-余骨架的，从而将证明归结为对 3-截断的直接检验。

考虑一个态射 $\partial\Delta^n \to \mathrm{Tame}(\mathfrak{f},„)$，其中 $n > 3$。这对应于一个图表

$$\begin{array}{ccc} \Delta^1 \times \partial\Delta^n & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{D} \\ \uparrow & & \uparrow f \\ \{1\} \times \partial\Delta^n & \xrightarrow[\rho]{} & \mathbb{C} \end{array}$$

现在注意到 ℂ 和 𝔻本身都是 3-余骨架的，因此尤其对所有 5 维或更高维的角都有唯一的填充。利用例如 [24, 命题 2.1.2。6], 中的滤过，我们看到 ϕ 可唯一扩张为映射 $\Delta^1 \times \Delta^n \to \mathbb{D}$。由于 ρ 显然可唯一扩张为映射 $\Delta^n \to \mathbb{C}$，我们便可得到一个扩张

$$\begin{array}{ccc} \Delta^1 \times \Delta^n & \xrightarrow{\widetilde{\phi}} & \mathbb{D} \\ \uparrow & & \uparrow f \\ \{1\} \times \Delta^n & \xrightarrow[\widetilde{\rho}]{} & \mathbb{C} \end{array} \qquad (*)$$

上述图表的。

此外，由于 $n > 3$， $\Delta^1 \times \Delta^n$ 的每个 2-单形都包含在 $\Delta^1 \times \partial\Delta^n$中。因此， ϕ 源自一个映射 $\partial\Delta^n \to \mathrm{Tame}(\mathbb{C},\mathbb{D})$ 这一事实意味着图表（$*$）定义了 Tame(n-单形。ℂ,𝔻)。

其余低维验证留给读者完成。 □

[2]注意到 这个定义只有在 „ :=N^{sc}(D) 时才有意义。否则，就没有良好的概念来定义..... ity
2-单形 它们既不是左退化，也不是右退化。

注 3.37。请注意，在我们当前的设定下，上述论证实际上可以重新用于证明 F(ʃ) 本身是 3-余骨架的。然而，尽管二者等价，F(ʃ) 并不与 $\mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{Fr}(\mathbb{C}))$ 同构，因为前者的 1-单形和 2-单形要多得多。

注 3.38. 根据构造，典范态射 $\mathfrak{f} \to \mathrm{F}(\mathfrak{f})$ 经由 Tame(ʃ,„) 分解 .

引理 3.39。设 $\sigma\colon \Delta^n \to \mathrm{Tame}(\mathbb{C},\mathbb{D})$ 是一个 n-单形。那么每个扩张 $E_j^*(\sigma)\colon \Delta^{n+1} \to \mathbb{F}(\mathbb{C})$ 都经由 $\mathrm{Tame}(\mathbb{C},\mathbb{D})$分解。

证明。这可直接由展开定义得出。 □

定义 3.40. 我们用 Tame(ʃ,„)$^\natural$ 表示由 F(ʃ)$^\natural$诱导的标记和双重标度。类似地，我们用 Tame(ʃ,„)† 表示由 F(ʃ)†诱导的标记和双重标度。

命题 3.41. 态射 $\mathbb{C}^\natural \to \mathrm{Tame}(\mathbb{C},\mathbb{D})^\natural$ 在 ***MB*** 上是 $\mathbb{D}$-无解的。

证明。 这与 定理 3.17 的证明完全相同，只需重新定义 Z_n 使其由 n-单形（位于 Tame(ℂ,𝔻) 中）组成，并包括这些单形的 j-扩张。 □

定理 3.42. 设 $f\colon \mathbb{C}^\dagger \to \mathbb{D}^\dagger$ 是带标记严格 *2*-范畴之间的函子，并设 $f\colon \mathbb{C}^\dagger \to \mathbb{D}^\dagger$ 表示诱导的 ***MS*** 单纯集合态射。那么以下结论成立：

- 存在一个关于$\mathbb{D}$的交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\dagger & \longrightarrow & \mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{Fr}(\mathbb{C})) \\ \downarrow & \nearrow_{\Xi} & \\ \mathbb{F}(\mathbb{C})^\dagger & & \end{array}$$

  使得图表中的每个态射都是 *2*-笛卡尔等价。
- 对于 *ev* 每个 $d \in \mathbb{D}$ 映射 Ξ 都会诱导出***MS*** 单纯集合$\mathbb{C}_d^\dagger \xrightarrow{\simeq} \mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathbb{C}_d^\dagger)$的一个等价。 .

证明。 首先，假设 $\mathbb{C}^\dagger = \mathbb{C}^\natural$ 和 $\mathbb{D}^\dagger = \mathbb{D}^\dagger$ 上的标记都仅由等价组成，因此 $\mathbb{F}(\mathbb{C})$ 和 $\mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{Fr}(\mathbb{C})^\natural)$ 上的标记恰好由笛卡尔边给出。回顾 定理 3.17中定义的滤过。首先，我们将定义一个态射

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\natural & \longrightarrow & \mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{Fr}(\mathbb{C})^\natural) \\ \downarrow & \nearrow_{\Xi_1} & \\ Z_1 & & \end{array}$$

由于 $Z_1 \to \mathrm{F}(\mathfrak{f})$ 是 MB-无害的，且 $\mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{Fr}(\mathbb{C}))$ 是一个 2-笛卡尔纤维化，我们可以选取 Ξ_1 到所需 Ξ的一个扩张。注意，我们可以将 Z_1 的对象同构地映射到 $\mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{Fr}(\mathbb{C}))$ 的对象。给定 $e\colon \Delta^1 \to Z_1$，我们看到这些数据恰好对应于态射 $u_i\colon d_i \to f(c_i)$，其中 $i = 0,\ 1$, $a\colon d_0 \to d_1$, $\alpha\colon c_0 \to c_1$ 和 $g\colon d_0 \to f(c_1)$，以及一对 2-态射$\varepsilon\colon g \xRightarrow{\simeq} f(\alpha) \circ u_0$和 $\theta\colon g \Rightarrow u_1 \circ a$，其中 ε 可逆。接着，我们可以将 e 映射到边 $\Xi_1(e)$，其由相同的 1-态射定义，但关联的 2-态射为 $\theta \circ \varepsilon^{-1}$。对于映射 Z_1 中包含的非退化 2-单形，可以进行类似构造，从而定义 Ξ_1。

我们现在可以 我们注意到，在 $\mathbb{C}^\dagger$ 配备了一般标记（包含 g

等价）的情况下，我们有一个同伦推出 $(\mathrm{Set}_{\Delta}^{\mathrm{mb}})_{/\mathbb{D}}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}(\mathbb{C})^{\natural} & \longrightarrow & \mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{Fr}(\mathbb{C})^{\natural}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{F}(\mathbb{C})^{\dagger} & \longrightarrow & \mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{Fr}(\mathbb{C})^{\dagger}) \end{array}$$

这表明，只需证明仅等价被标记的情形即可。注意到 $\mathbb{C}^{\natural} \to \mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{Fr}(\mathbb{C})^{\natural})$ 是一个等价，这可由三取二性质得出。由命题 3.41立即可得。

□

注 3.43。这一结果具有双重意义。最重要的是，它表明，在考虑以严格 2-范畴为索引的图表时，带标记余终的判据可以用严格切片 2-范畴来表述。因此，在这种情况下，余终的判据会更容易明确检验。

第二个推论虽然重要性较低，但仍值得关注。由于我们可以将 $\mathrm{N}^{\mathrm{sc}}(\mathbb{C}_{d})$ 与 $\mathbb{C}_{d}$ 等同起来，因此 定理 3.31 的判据与 [3, 定理 4.0.1]的判据完全一致。定理 3.31 因此如预期所示，是对 [3, 定理 4.0.1], 的推广。

参考文献

[1] F. Abellán。 关于$(\infty,2)$-范畴的局部纤维化 准备中。

[2] F. Abellán García. 带标记余极限与高阶共终性。J. Homotopy Relat. Struct. (2021) DOI: s40062-021-00296-2[3] F. Abellán García & W.H. Stern. 标记 2-范畴的定理 A。J. Pure Appl. Algebra. 226-9, (2022).[4] F. Abellán García T. Dyckerhoff, & W.H. Stern. 相对 2-神经。Algebr. Geom. Topol. 20-6 (2020), 3147-3182[5] F. Abellán García & W.H. Stern. 2-笛卡尔纤维化 I：一种用于 ∞-双范畴在∞-双范畴中纤维化的模型。Appl Categor Struct 30, 1341–1392 (2022).[6]F. Abellán & W.H. Stern. 2-笛卡尔纤维化 II： ∞-双范畴的一种格罗滕迪克构造。arXiv: 2201.09589[7] F. Abellán García & W.H. Stern. 增强扭箭范畴。Theory Appl. Categ. 39-4 98–149 (2023).[8] J. D. Berman. 关于无穷范畴中的弱极限。arXiv: 2006.10851[9] A. Bondal and M. Kapranov. 可表函子、Serre 函子与突变。Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya,[10] M. Buckley. 纤维化 2-范畴与双范畴。J. Pure & Applied Algebra. Vol 218, Issue 6. pp. 1034–1074 (2014)[11] M. E. Descotte,E. J. Dubuc, M. and Szyld. “2-范畴中的 Sigma 极限与平坦伪函子” Adv. Math. 7.18 (2018年7月), pp. 266–313. doi: 10.1016/j.aim.2018.05.021[12] A. Gagna, Y. Harpaz, E. Lanari. Gray 张量积与 $(\infty,2)$-范畴的弱函子。arXiv: 2006.14495v1

[13] A. Gagna、Y. Harpaz、E. Lanari。《关于 (∞, 2)-范畴的所有模型之间的等价性》。arXiv: 1911.01905v2[14] A. Gagna、Y. Harpaz、E. Lanari。《(∞, 2)-范畴的纤维化与弱极限》。arXiv: 2012.04537[15] A. Gagna、Y. Harpaz、E. Lanari。《(∞, 2)-范畴的笛卡尔纤维化》。arXiv: 2107.12356[16] D. Gaitsgory 和 N. Rozenblyum。《导出代数几何研究，第一卷和第二卷》。数学调查与专著，第 221 卷。2017 年。969 页。AMS[17] D. Gepner、R. Haugseng 和 T. Nikolaus。《 ∞-范畴中的弱余极限与自由纤维化》。Documenta Mathematica 1.15（2015 年 1 月），第 22 卷，第 1225–1266 页[18] P. Goerss 和 R. Jardine。《单纯形同伦论》。Birkhäuser，2012 年。[19] A. Grothendieck。《代数几何中的下降技术与存在性定理。I. 一般理论。通过忠实平坦态射进行下降》。N. Bourbaki 研讨会，1960 年，第 190 号报告，第 299–327 页。[20] A. Grothendieck。《étale 覆盖与基本群（SGA 1）》。1971 年。Springer 数学讲义第 224 卷。Springer-Verlag。[21] A. Joyal。《拟范畴笔记》。在线可获取：Notes[22] G. M. Kelly。《富范畴论基本概念》。范畴论与应用重印本，第 10 期，2005 年。[23] J. Lurie。《导出代数几何 X：形式模问题》。2011 年。可在作者的个人网页获取：DAG X[24]J. Lurie。《高阶拓扑斯理论》。Princeton University Press，2009 年。可在作者的个人网页获取。[25] J. Lurie。《高阶代数》。2017 年。可在作者的个人网页获取。[26] J. Lurie。《(∞, 2)-范畴与 Goodwillie 微积分》。arXiv: 0905.0462[27] A. W. Macpherson。《双变 Yoneda 引理与对应的 (∞, 2)-范畴》。arXiv:2005.10496v2[28] I. Moerdijk 和 S. MacLane。《几何与逻辑中的层》。Springer，2000 年。[29] Quillen, Daniel。《高阶代数 K 理论：I》。高阶 K 理论，数学讲义第 341 卷。Springer，柏林、海德堡。doi: 10.1007/BFb0067053[30] N. Rasekh。《D-单纯形空间的 Yoneda 引理》。arXiv: 2108.06168[31] E. Riehl 和 D.R.B. Verity。《相容性构造》。Higher Structures，第 2 卷第 1 期。在线出版。[32] M. Land 和 G. Tamme。《拉回的 K 理论》。Annals of Mathematics。[33] D.R.B. Verity。《弱复形集合 I：基本同伦理论》。Advances in Mathematics，第 219 卷（2008 年），第 1081–1149 页。[34] F. Waldhausen。《空间的代数 K 理论》。代数与几何拓扑：1983 年 7 月 6 日至 13 日在美国新泽西州新不伦瑞克市 Rutgers 大学举行的会议论文集。