arXiv:2304.07035v1 [physics.atom-ph] 14 Apr 2023

μ子氢中的兰姆位移与质子的电均方根半径。*

托马斯·瓦尔赫*Institut für Kernphysik, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 55128 Mainz, Germany.*（日期：2023年4月12日）

“质子半径之谜”指的是：一方面，根据电子氢中的兰姆位移以及电子与质子的弹性散射确定的质子电荷半径，与另一方面，根据μ子氢中的兰姆位移高精度测得的质子电荷半径，两者相差 7 个标准差。迄今为止，人们主要从非μ子实验的局限性中寻找这一差异的解释，例如电子散射中向 $Q^2 \to 0$ GeV^2 的外推。由于造成μ子氢兰姆位移主要贡献的真空极化 e^+e^--对，其时间尺度远短于造成库仑相互作用的光子交换的时间尺度，因此有人认为，绕质子轨道运动的μ子应被视为由 e^+e^- 对修饰的准粒子，而不应被当作处于外部乌林势中的裸粒子。正确地落实这一观点，便可消除质子半径之谜。考虑到这一区别，从μ子兰姆位移确定的质子均方根电荷半径为 $r_p = 0.87455(48)$ fm，与 CODATA-2010 的数值一致。

PACS 编号：14.20.Dh、31.30.jr、36.10.Ee、25.30.Bf

I. 引言

大约十年前，利用电子实验和μ子氢的兰姆位移分别得到的质子电荷均方根（rms）半径 $r_p = \langle r_p^2 \rangle^{1/2}$ 相差 7 个标准差，这一发现引起了物理学界乃至更广泛领域的极大关注。由于兰姆位移是检验量子电动力学（QED）的基石，这种差异确实需要令人信服的解释。人们曾希望，进一步的实验及其分析最终能够确定正确的数值，正如 Gao 和 Vanderhaeghen 的近期综述论文 [2] 及图 1 所总结的那样。然而，图中显示，这些数值并未随着时间推移而趋于一致，而是仍然散布在 CODATA-2010 和 CODATA-2018 的数值附近。由μ子氢兰姆位移得到的均方根半径精确值为 $r_p = 0.84087(39)$ fm[3, 4]，应将其与旧的 CODATA-2010 数值 0.8775(51) fm [5], 进行比较，两者相差 7 个标准差。CODATA-2010 的数值基于一项测量——

电子氢的兰姆位移测量 [6] 和电子散射实验 [7–11]。由于μ子实验的精度极高，人们主要在精度较低的电子实验中寻找偏差原因，无论是电子散射实验，还是电子氢的光学实验 [2]。因此，新的 CODATA-2018 数值 0.8414(19) fm [12] 基于对不同实验的不同加权；然而，没有充分理由怀疑甚至排除较早的实验，争议仍在继续。

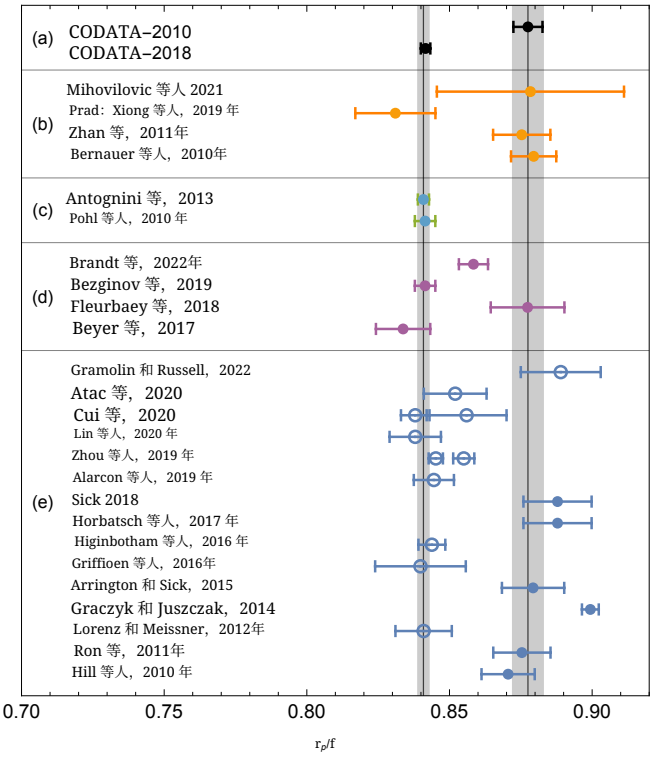


图 1. r_p 值汇总，参考文献见 [2] 。(a) 7-标准差跃迁，(b) 电子散射，(c) μ子氢（误差棒 ×5），(d) 电子氢，(e) 重新分析：数据主要来自(b)，空心圆：外推变化。

通过电子散射实验，均方根半径由形状因子关于 Q^2 在 $Q^2 \to 0$GeV^{2}处的斜率确定。在许多试图解释这种偏差的研究中，人们质疑这一外推的有效性 [13]，，但这早已与 Sick 的详细分析不相符 [11, 14]。质疑形状因子的低 Q^2 展开及其

* 本文阐述的构想此前已在一篇较简略的论文中概述过 [1]。

定义明确且受到约束的参数 $\langle r^2\rangle$, $\langle r^4\rangle$, ……，实质上就等于质疑量子电动力学对这种散射的有效性 [15]。

然而，μ子兰姆位移的计算并不像人们通常认为的那样无懈可击。温伯格（[16],第 11.2 章）在计算了导致电子原子兰姆位移的辐射效应和真空极化效应后指出，对于μ子原子，必须谨慎看待这一问题：“然而，在这种情况下，μ子原子半径并不比电子康普顿波长大多少，因此 [公式]（11.2.39）中的近似结果只能给出真空极化导致的能量位移的数量级。”尽管他的粗略公式与用于分析μ子测量的精密计算 [17–22], 相去甚远，但这一评论提示了一个被忽视的问题。

考虑氢玻尔模型中的数量级参数，可以进一步推演温伯格的猜想。真空极化中 e^+e^-对粒子的康普顿波长为 $\lambda_C = (\hbar c)\,/\,(2m_e c^2) \approx$193 fm；对于$n = 1$ $r_{\mu,B} = (1/\alpha)(\hbar c)/(m_\mu c^2) = (2/\alpha)(m_e/m_\mu)\lambda_C \approx 256\,\text{fm}$, μ子玻尔半径为。这意味着，在μ子绕质子运动的过程中，由 e^+e^- 对粒子涨落介导的空间相互作用区域最多有 $(2\pi r_{\mu,B})\,/\lambda_C \approx 10$ 个，彼此独立。由此可知，根据量子力学散射理论，μ子会通过 e^+e^- 对粒子经历连续的独立相互作用。这些相互作用发生的时间尺度为 $\tau_C \approx 10^{-21}s$ ，与μ子绕 $t_{\text{round}} \approx 10^{-18}s$运行一周所需的时间相比，接近于零。必须设想，由 e^+e^- 对粒子介导的散射中的“渐近”入射—出射态，并非平面波，而是外部库仑场中束缚μ子的波函数。这些相互作用彼此独立，并在上述尺度上使相互作用呈现时间依赖性。

另一方面，μ子的轨道由库仑相互作用产生。出于一致性考虑，在量子电动力学框架中实际上也必须考虑这种相互作用。这种相互作用等效于交换许多具有无限作用距离的光子。由于没有人知道如何将光子交换图的总和纳入用于描述原子的波动方程，因此人们只使用外部库仑势；正如温伯格所示，可以通过对多光子交换的所有梯形图求和来证明这一做法是合理的（[16], 第 13.6 节）。显然，这个库仑势是定常的，这与必须为多 e^+e^- 对交换指定的势不同；温伯格的证明并不适用于后者。库仑势可以看作定常外势，而 e^+e^-对势则是随时间变化的。迄今为止在计算 μ子兰姆位移时所采用的近似是乌伦贝克势，它源于 e^+e^- 对的交换，并假定其作用时间尺度与光子相互作用相同，因此将其视为定常势 [17–22]。这意味着， e^+e^- 对势也被视为一种】【。

在波动方程中，外势就像库仑势一样，而忽略了它因一系列独立散射而产生的时间依赖性。正如文献 [19] 在其公式（200）之前所述，乌伦贝克效应并非对库仑势的势能修正。

如果要对 μ子原子中与外部库仑势及含时 e^+e^- 对势的相互作用作出正确近似，就会遇到这样的问题：必须采用含时波动方程的框架，因为通常假设能量为常数的指数形式，无法将时间依赖性分离出来（[23], 第26章）。这也适用于更复杂的散射理论表述，例如采用 Lippmann-Schwinger 方程时（[24], 第6、7章）。幸运的是，有一个类似问题的解决方案，即电子穿过晶体的问题：必须将由费曼图描述的含时修正，应用于晶体原子产生的时不变势所对应的解。

Mattuck 在《多体问题中的费曼图指南》 [25] 中提到，量子力学的“弹球”思想不仅可用于解决多体问题，也可用于原子问题（[25],第4.7节，第91页）。这种类比体现在许多相互独立的相互作用上，而不在于晶体中的许多粒子或单个质子分别产生外部势，将电子或单个 μ子束缚其中。下文将展示这一方法如何奏效，以及如何通过修改兰姆位移的计算，以含时 e^+e^- 对交换取代时不变的外部乌林势，从而解决质子电荷半径问题。

II. 基本理论

关于引言中所提出论点的更详细讨论，我们总结一些基本理论。兰姆位移源于“自能”图，即辐射修正和真空极化。对于电子氢，辐射修正占主导地位，真空极化很小；而对于μ子氢，情况则相反（参见例如温伯格 [16], 第14.3节）。自能相互作用的两种图示于图2中。粗线表示质子，双线是简写，表示外部库仑场通过光子交换对传播子的影响。现在，在量子电动力学框架内正确描述μ子氢的任务，是按照适当的时间排序，将所有阶数中允许的全部费曼图求和，如图II所示。必须通过G矩阵迭代的求和来计算这些图的总和，其极点给出了束缚态的能量，其中包括所有自能修正。当然，这种方法并不可行，而一个

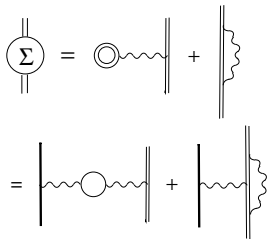


图 2. μ子自能 Σ 由辐射修正和真空极化回路组成。双线是外部库仑场对传播子的影响的简写，粗线表示质子。

必须找到一种能够反映上述情形的近似方法。首先需要指出，质子和 μ 子均处于非相对论状态，因此只有按照 $L(\alpha^1)$、 $L(\alpha^2)$、 $L(\alpha^3)$、... 排列的梯形图才是重要的。如前所述，温伯格证明（[16], 第 13.6 章），所有未交叉光子梯形图之和给出了熟知的外部库仑势。所谓“外部”，是指一种不通过费曼图表示的相互作用，这与例如斯塔克效应中的外部电场类似。它不依赖于相互作用粒子的传播子或波函数。

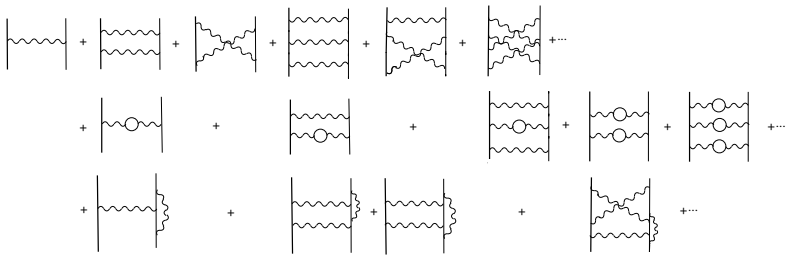


图 3 。一些对 μ子与质子之间相互作用有贡献的费曼图 .

自旋—轨道耦合是狄拉克理论在时间无关库仑势下的必然结果，因此也属于外部相互作用。超精细相互作用也是如此。

接下来需要考虑辐射修正；然而，与真空极化 [16] 相比，辐射修正在μ子氢中的影响很小。辐射修正的作用范围与产生库仑势的光子交换相同，因此可近似视为与时间无关。这种近似或许可以解释为什么电子兰姆位移的一些结果存在分歧。本文不再进一步讨论辐射修正。

包含 e^+e^- 对、回路或“气泡” [25] 以及额外光子的图，至少比含有相同数量e^+e^- 气泡的图小一个α 数量级，因此可以忽略。

真空极化梯形图之和产生了 μ子兰姆位移的主要效应，出于引言中概述的原因，必须区别于光子交换之和来处理。图 4 给出了更详细的图示。 e^+e^- 环的寿命为 $\tau_C \approx 10^{-21}s$，且彼此独立。因此，必须将它们作为概率振幅的乘积求和，即 $(k_{\rm in},\ E) = (k_{\rm out},\ E)$。这些相互作用代表“前向散射”（参见 [25], 第 4.5 章，式（4.53）之后及第 82 页），只是将未受扰动的波函数改变为受扰动的波函数，从而得到.....的动量分布。

束缚态波函数。

由于散射态是一个束缚壳层态，入态波函数必须在其闭合轨道上等于出态波函数，因此可以设定 $G^-(k_{\rm in},\ E) = G^+(k_{\rm out},\ E) = G(k,\ E)$。我们将在下一节中看到如何获得这种特殊状态。

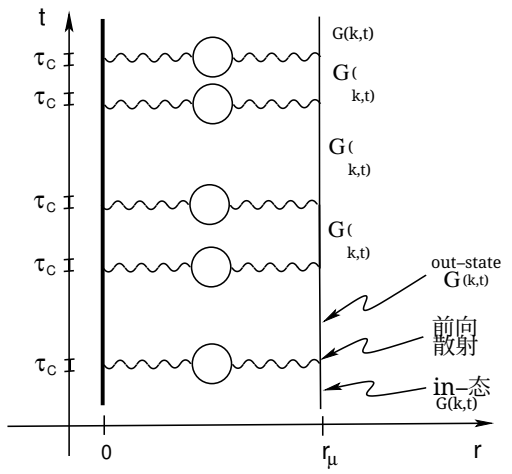


图 4. μ子氢束缚态中的弹珠散射示意图。正向散射通过 $G^-(k_{\rm in}, t) = G^+(k_{\rm out}, t) = G(k, t)$ 中的入态和出态发生。$\tau_C \approx 10^{-21}$s 是真空极化 e^+e^- 对的寿命， ≈ 0 与通过气泡介导的相互作用所要求的特征时间尺度相比。

图5所示的次领头阶 α^4 图必须与图4中的图区分开来，因为它们在 τ_C内是相干的。图5(a)和图5(b)表示内部处于非质壳状态的环路，其动量必须进行积分并求和。但正如第四节将要说明的，受微扰波

函数的影响非常小，因此与未受微扰波函数相比，其变化可以忽略不计。

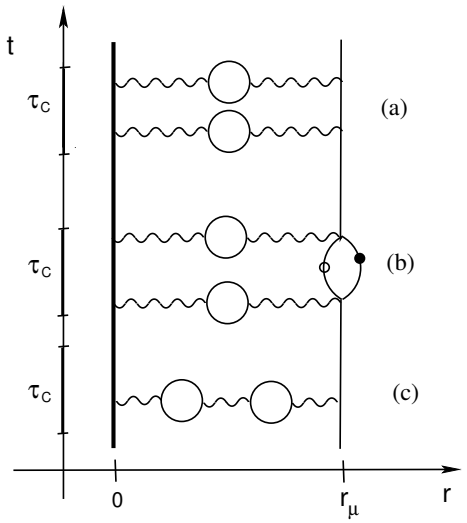
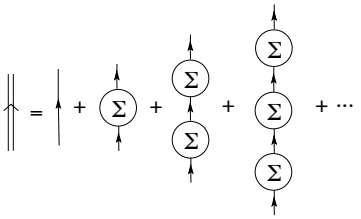


图5. α^4 阶图：（a）“双真空极化修正” [18], 亦称“两条库仑线中的极化插入” [21], （b）壳层的缪子-空穴激发，（c）“双圈真空极化” [18]。

III. 理论细节与近似

概述基本思想之后，还需说明如何对所有图求和，从而有效地构成如图6(a)所示的广义戴森级数。我们将忽略质子尺寸的影响，因为这是一个独立的问题；我们所要研究的差异涉及点电荷的兰姆位移。文献中讨论了这一问题（例如参见 [17, 18, 20–22]）。由于前向散射振幅具有乘法性质，因此会出现一个几何级数，可以如图6(b)所示以符号形式求和。图6(b)中的图可以被转-



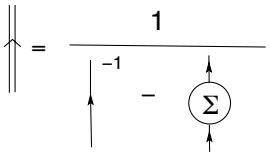
（a）展开形式

写成 G 矩阵的解析形式：

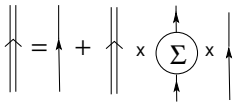
$$G(\vec{k},E) = \frac{1}{E - E_n^{(0)} - \langle\widetilde{\psi}_n|\Sigma(\vec{k},E)|\widetilde{\psi}_n\rangle} \qquad (1)$$

~ ~与 $\langle\psi_n|\psi_n\rangle = 1$。极点位于

$$\Delta E_{LS} = \widetilde{E}_n - E_n^{(0)} = \langle\widetilde{\psi}_n|\Sigma(\vec{k},\widetilde{E}_n)|\widetilde{\psi}_n\rangle \qquad (2)$$



（a）几何级数



（a）重复形式

图 6. 存在外部库仑势时广义戴森级数的三种不同形式。（图示约定参见 Mattuck [25], 第 10.2 章。）

表示了由 $\widetilde{\Sigma}$给出的兰姆位移的最低阶项，其中波函数的精确形式此前尚未知 ψ_n。为了得到这个公式，我们对质子波函数的坐标进行了积分；在很好的近似下，该波函数仅为一个 δ-函数（见 [25], 式（4.73））。

图 6(c) 中的图可写成 G 矩阵的形式：

$$G(\vec{k},E) = G_0(\vec{k},E) + G_0(\vec{k},E)\,\Sigma(\vec{k},E)\,G(\vec{k},E) \qquad (3)$$

作为前向散射振幅的 Lippmann-Schwinger 方程。该方程必须通过迭代求解：首先将未受扰动的 $G_0(\vec{k},\ E)$ 代入右侧的 $G(\vec{k},\ E)$，计算出 $G_1(\vec{k},\ E)$，再将其代回右侧，计算出 $G_2(\vec{k},\ E)$，如此继续，直至结果不再变化。由于式（3）是一个算符方程，利用它与 Hartree-Fock 方程（[25]第 11 章.1, [26]）完全等价这一点会更为简便。由于这里只有一个 μ子在轨道上运行，无需进行反对称化，因此适用 Hartree 方程。

根据上述讨论，我们知道兰姆位移就是自能方程（2）。借鉴 Mattuck 关于 Hartree 准粒子的讨论（[25], 第 4.7 节，第 90–91 页），我们得到定态薛定谔方程：

$$(T + V_{\text{Coulomb}})\,\widetilde{\psi}_n + \langle\widetilde{\psi}_n|\Sigma|\widetilde{\psi}_n\rangle\widetilde{\psi}_n = \widetilde{E}_n\,\widetilde{\psi}_n \qquad (4)$$

~这些 ψ_n 是 Hartree 方程~ ~在条件 $\langle\psi_n|\psi_n\rangle = 1$ 下的精确解。该方程通过~迭代求解，直至 ψ_n 达到自洽解。这一过程称为“外场中的自洽重整化”（[25] 第 11.1 章）。式（4）所隐含的自洽过程可以通过以下方式轻松实现。我们从未受扰动的波函数 $\psi_n^{(0)}$出发，并采用通常的设定：

$$\psi_n = \psi_n^{(0)} + \delta\psi_n,\ \delta\psi_n \perp \psi_n^{(0)} \text{ and } \langle\psi_n^{(0)}|\psi_n^{(0)}\rangle = 1. \qquad (5)$$

这意味着没有选择用于展开 ψ_n,的正交归一基底，如定态微扰理论中所用的基底。

由于 ψ_n 未归一化，我们令 $\widetilde{\psi}_n = \psi_n/\langle\psi_n|\,\psi_n\rangle^{1/2}$，则式 (4) 可写为

$$(T + V_{\mathrm{Coulomb}})\,\psi_n + \frac{\langle\psi_n|\Sigma|\psi_n\rangle}{\langle\psi_n|\,\psi_n\rangle}\,\psi_n = \widetilde{E}_n\,\psi_n. \quad (6)$$

在左侧乘以 $\langle\psi_n^{(0)}|$ 后，可得到一个适合迭代求解的积分方程：

$$\frac{\langle\psi_n^{(0)}|T + V_{\mathrm{Coulomb}}|\,\psi_n\rangle}{\langle\psi_n^{(0)}|\psi_n\rangle} + \frac{\langle\psi_n|\Sigma|\psi_n\rangle}{\langle\psi_n|\psi_n\rangle} = \widetilde{E}_n \quad (7)$$

根据为归一化波函数推导出的式（2），可从该方程得到：

$$\Delta E_{n\,LS} = \widetilde{E}_n - E_n^{(0)} = \frac{\langle\psi_n|\Sigma|\,\psi_n\rangle}{\langle\psi_n|\,\psi_n\rangle}. \quad (8)$$

如果不再要求兰姆位移就是自能，并将算符 Σ视为外部势，我们便得到一个具有外部“乌林势”V_{Uehling} [17, 18, 20–22]的波动方程。这正是从“自能”观点转向“外部势”观点的步骤。该波动方程的解给出略有不同的 ψ_n 和 E_n，分别记为ψ'_n 和 E'_n：

$$(T + V_{\mathrm{Coulomb}})\,\psi'_n + V_{\mathrm{Uehling}}\,\psi'_n = E'_n\,\psi'_n. \quad (9)$$

如果分别在有和没有 V_{Uehling} 的情况下数值求解该波动方程，所得本征值与 ψ'_n的归一化无关，而 $\Delta E'_{n\,LS}$ 可以直接计算 [21]。

然而，若从左侧用 $\langle\psi_n^{(0)}|$ 乘以该方程，可以获得更多的认识。在此近似下，兰姆位移为：

$$\Delta E'_{n\,LS} = E'_n - E_n^{(0)} = \frac{\langle\psi_n^{(0)}|V_{\mathrm{Uehling}}\,|\psi'_n\rangle}{\langle\psi_n^{(0)}|\psi'_n\rangle}. \quad (10)$$

式（10）与式（8）的不同之处在于，矩阵元左侧出现的是未微扰波函数 $\langle\psi_n^{(0)}|$，而不是微扰波函数$\langle\psi'_n|$。正是这一差异导致由μ子氢确定的质子半径与由电子散射确定的质子半径不同。

现在可以询问，式 (10) 与 [17, 18, 20, 22] 关键计算中采用的经典微扰理论有何不同。对于展开参数 λ [27] 的递增阶数，有：

$$\begin{aligned}
&\mathcal{O}(\lambda^1) : \Delta_n^{(1)} = \langle\psi_n^{(0)}|V|\psi_n^{(0)}\rangle \\
&\mathcal{O}(\lambda^2) : \Delta_n^{(2)} = \langle\psi_n^{(0)}|V|\psi_n^{(1)}\rangle \\
&\mathcal{O}(\lambda^3) : \Delta_n^{(3)} = \langle\psi_n^{(0)}|V|\psi_n^{(2)}\rangle \\
&\cdots
\end{aligned} \quad (11)$$

其中 $V = \Sigma$ 是微扰势，$|\psi_n^{(0)}\rangle$ 是未微扰态的右矢，而后续的右矢为所指示的曾道人阶数。显然，对于 $m \to \infty$，$\sum_{i=0}^{m} |\psi_n^{(i)}\rangle \to |\psi'_n\rangle$，通过这种方式可以得出 $\sum_{i=1}^{m} \Delta_n^{(i)} \to \Delta E'_{n\,LS}$。因此，时间无关微扰理论的高阶能量位移收敛于方程（9）的数值解。

在将乌林势视为外部势的定态微扰理论中，人们在未微扰本征态构成的基底上展开，得到：

$$\Delta E_{n\,LS} = \langle\psi_n^{(0)}|\Sigma|\psi_n^{(0)}\rangle + \sum_{k\neq n}\int_{E_k\geqslant 0} \frac{\langle\psi_n^{(0)}|\Sigma|\psi_k^{(0)}\rangle\langle\psi_k^{(0)}|\Sigma|\psi_n^{(0)}\rangle}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}. \quad (12)$$

这个方程说明，受扰态 $|\psi_n^{(1)}\rangle$可解释为时间相关微扰理论中对图5(b)所示中间激发态求和。因此，这些中间激发态也会出现在 Σ的外势近似中，而方程（9）的数值解则通过$|\psi'_n\rangle$包含了它们。可以通过对方程（12）中的中间态求和，或数值求解方程（9），来计入这些高阶贡献。

[17, 18, 20, 22]计算的参考点是方程（12）中的一阶项，即一阶兰姆位移，所有修正均在此基础上添加。由第二项 $\Delta_n^{(2)}$导致的最重要修正是“双真空极化修正” [18]。我们也将采用这一参考点，并在此基础上加上由方程（8）的解确定的修正。需要注意的是，正如图5所示，这些解不包含任何高阶贡献。弹珠机制不允许出现这些高阶相干图。因此，数值求解方程（7）不会产生与方程（11）展开等效的高阶贡献。这意味着方程（8）中的 $\Delta E_{n\,LS}$不包含“双真空极化修正”。

高阶贡献和进一步的修正已在[17, 18, 20, 22, 28] 中详细讨论并计算。问题是，是否需要在此处采用的自洽框架中重新计算这些修正。然而，正如下一节 IV 将会看到的，与未微扰波函数相比，自洽波函数只发生了极小的变化，恰好足以解释产生半径差异的微小兰姆位移差异。因此，对于高阶修正，可以使用未微扰波函数，并沿用文献中已有的修正。原则上，应将图5所示的相干高阶贡献作为 Σ 的一部分，纳入戴森级数的几何级数中，然后自洽地求解式（7）。这在多体问题 [25], 中确实会这样做，但在这里并无必要。

另一方面，Carroll 等人 [21] 通过数值求解，将式 (9) 的修正形式作为一个具有外部乌林势的定态狄拉克方程，从而有效地纳入了高阶贡献。

根据$\sum_{i=1}^{m}\Delta_n^{(i)} \to \Delta E'_{n\,LS}$所述的定态微扰理论。通过这种方式，“双真空极化修正”已经包含在他们对波动方程的数值求解中。因此，他们没有将这一修正（“在两条库仑线中的极化插入” [21]）额外加入参考点，这一做法是正确的。我们将在第四节末尾进一步讨论这一问题。

含时与定态的观点截然不同，反映了不同的物理思想。然而，显然并未进行重复计数。

如式（2）的推导所示，计算 $\Delta E_{n\,LS}$ 时必须使用式（8）进行自洽重整化，而这只能通过迭代完成。迭代的第一步是求解式（9）；根据式（10），这已经是一个很好的估计。我们将所得的 ψ'_n 作为式（8）中ψ_n的第一近似 $\psi_n^{(1)}$，从而得到 $\Delta E_{n\,LS}^{(1)}$。结果表明，这已经足够准确。为说明这一点，我们再次采用微扰假设，计算了迭代的第二步：

$$\psi_n^{(2)} = \psi_n^{(1)} + \kappa\,\delta\psi_n^{(1)},\ \delta\psi_n^{(1)} \perp \psi_n^{(1)} \tag{13}$$

其中，参数 κ 会不断变化，直到式（7）满足 $\widetilde{E}_n = E_n^{(1)}$。我们不假设 $\psi_n^{(1)}$ 已归一化。垂直变化 $\delta\psi_n^{(1)}$ 可由下式求得：

$$\delta\psi_n^{(1)} = \psi_n^{(0)} - \frac{\langle\psi_n^{(0)}|\psi_n^{(1)}\rangle}{\langle\psi_n^{(1)}|\psi_n^{(1)}\rangle}\psi_n^{(1)} \tag{14}$$

其中，$\psi_n^{(0)}$的选择有些任意。原则上可以采用任意希尔伯特空间矢量，但为了快速收敛，选择 $\psi_n^{(0)}$更为有利。由此得到的 $\psi_n^{(2)}$代入式（8），得到 $\Delta E_{n\,LS}^{(2)}$，并将其与 $\Delta E_{n\,LS}^{(1)}$进行比较。结果表明，考虑到由μ子氢半径测定带来的误差，第二次迭代已经完全足够。

IV. 结果

与参考文献 [21] 中研究相对论狄拉克方程的 Carroll 等人不同，我们仅考虑具有点电荷外部库仑势的非相对论薛定谔方程。薛定谔方程足以说明兰姆位移的修正，而无需考虑精细结构分裂、有限尺寸效应等。相对论效应对兰姆位移的影响很小 [20]，不会改变本文讨论的任何结论。首先，我们根据公式（9）计算具有外部点电荷库仑势和外部“乌林势”的薛定谔方程的精确解，然后利用公式（8）计算兰姆位移。

“乌林势”V_{Uehling}的一种紧凑表达形式非常适合我们的计算，该表达形式由 Pachucki [18]提供。（我们必须谨慎区分“乌林相互作用”的两种含义：一种是 e^+e^- 气泡对作为“准粒子”的μ子的影响，即其“自能”；另一种是将“乌林相互作用”视为外部势。由于两种情况下的解析形式相同，我们将统一使用“乌林势”这一术语来指代这两种情况。其具体含义可根据上下文明确判断。）在薛定谔方程的数值计算中，我们使用了 Mathematica。与 Carroll 等人 [21] 一样，我们进行了大量测试，以保证求解结果的质量。所有计算均采用 64 位内部精度，精度目标为 20 位。对于 S 态，最佳方法是采用“显式 Runge-Kutta”积分；对于 P 态，在各种方法之间进行切换则由“Automatic”功能完成。我们将未受微扰的 $2S$ 态和 $2P$ 态（即不考虑“乌林势”时）的数值本征值，与非相对论精确解（玻尔能量）进行了比较，发现对于小半径（$\approx 0.1\,\mathrm{fm}$）和大半径（$\approx 10000\,\mathrm{fm}$）处采用不同边界条件的情况，结果均在数 n eV 的误差范围内。当然，由于我们并不像 Carroll 等人 [21] 那样通过求取较大能量本征值之差来计算，而是利用公式（8）计算兰姆位移，因此实际上并不需要如此高的精度。

使用通过对式（9）进行数值积分得到的数值波函数 $\psi^{(0)}$（未包含微扰 $V_{Uehling}$，即未微扰态的波动方程），并将其代入式（8），得到 ΔE_{Lamb} =205.00463502 meV，这与使用精确解析波函数 [18]的计算结果完全一致。此外，作为进一步检验，我们使用了数值 E_n 和 $E_n^{(0)}$；二者均通过对式（9）进行数值积分得到，分别对应包含和不包含 $V_{Uehling}$的情形，结果为 $\Delta E_{Lamb} = E_n - E_n^{(0)} = 205.00463506\mathrm{meV}$。这个点电荷质子的数值就是前述的参考点，迄今为止，μ子兰姆位移的分析都以此为依据。

图 7 和图 8 分别显示了未微扰态 $|n\,l;\,0\rangle^2 r^2$ =($\psi_{n\,l}^{(0)}$)$^2 r^2$与归一化微扰态$|n\,l\rangle_N^2 r^2$ =$(\psi_{n\,l})^2 r^2/\langle\psi_{n\,l}|\psi_{n\,l}\rangle$ 的密度之差，对应于 $n = 2$和 $l = 0$，1。可以清楚地看到由 μ子在真空中诱导产生的极化电荷。图 7 中小半径处的波动并非数值伪影，而是由 2S 态的双峰结构引起的。为了了解各尺度的大小，我们指出，μ子的玻尔半径为 $r_{\mu,\,B} = 268\,\mathrm{fm}$，真空极化中正负电子对的康普顿波长尺度为 $\lambda_C = 193\mathrm{fm}$，2S 态的均方根半径为 $\langle 2\,S|r^2|2\,S\rangle^{1/2} = 1854\,\mathrm{fm}$，2P 态的均方根半径为 $\langle 2\,P|r^2|2\,P\rangle^{1/2} = 1560\,\mathrm{fm}$。正如预期的那样，部分正电荷被推向较大的半径处，并由小半径处的负电荷加以补偿，这表明真空中极化云的诱导形成。引言中关于考虑相互作用尺度重要性的论据】【。

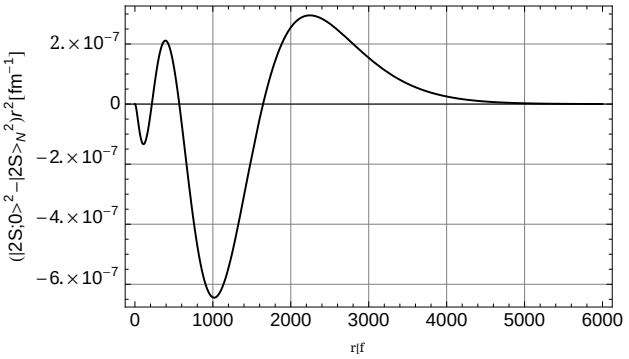


图 7. 差值 $(|2\,S;0\rangle^2 - |2\,S\rangle_N^2)r^2$ 显示了由“乌厄林效应”引起的 $2\,S$ 态极化电荷密度，除以μ子的负元电荷。

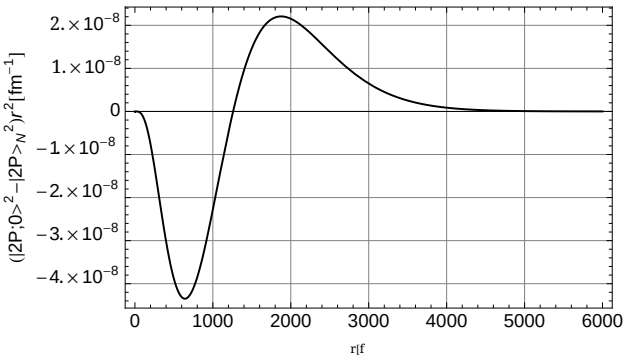


图 8. 差值 $(|2\,P;\,0\rangle^2 - |2\,P\rangle_N^2)r^2$ 显示了$2\,P$ 态因“尤林效应”产生的极化电荷密度，并除以μ子的负元电荷。

通过仅与玻尔半径进行比较，可以发现这种减小效应更加显著，因为 $n = 2$ 轨道的半径实际上大约大 5 倍。

根据式 (8) 计算受扰动的 $\psi_{2S}^{(2)}$ 和 $\psi_{2P}^{(2)}$ 态的兰姆位移之差，可得出本文的重要结果：

$$\Delta E_{2P\to 2S}^{(2)\,\text{point charge}} = E_{2P}^{(2)} - E_{2S}^{(2)} = 205.30658(100)\text{meV} \tag{15}$$

其中误差表示积分边界不同时数值的变化。如上一节所述，第一次迭代得到：

$$\Delta E_{2P\to 2S}^{(1)\,\text{point charge}} = E_{2P}^{(1)} - E_{2S}^{(1)} = 205.30664(100)\,\text{meV} \tag{16}$$

该结果与未微扰波函数的参考点 $\Delta E^{(0)\,\text{point}}$ 电荷兰姆=205.005(1)meV 相差在线观看中文字幕

$$\delta(\Delta E_{2P\to 2S}) = 0.302(1)\,\text{meV}. \tag{17}$$

μ子氢的半径是通过结合测量单重态跃迁得出的 $2\,S_{1/2}^{F=0} \to 2\,P_{3/2}^{F=1}$和三重态跃迁 $2\,S_{1/2}^{F=1} \to 2\,P_{3/2}^{F=2}$。通过这两项测量，可以分别推导出兰姆位移和 2S 超精细分裂 [3, 4]。根据兰姆位移的测定结果，将其与理论位移相等，即可得到均方根半径：

$$\Delta E_{2P\to 2S}^{\text{theory}} = (206.0336(15) - 5.2275(10)\,r_p^2/\text{fm}^2 + 0.0332(20))\,\text{meV} \tag{18}$$

第一项包含兰姆位移及其众多修正项，而后续各项则表示由 μ子在质子 [3, 18, 29]处的位置概率所引起的有限尺寸效应。兰姆位移 [21] 对有限尺寸的依赖性中的某些细节在 [3]中被忽略。为便于比较，我们遵循 [3]。利用引言中给出的两种不同半径及其误差，以及上述理论公式中各常数的误差，可以得到兰姆位移的偏差：

$$\delta(\Delta E_{2P\to 2S}) = 0.329(50)\,\text{meV} \tag{19}$$

其中，误差主要由电子实验决定。该结果与式（17）的结果高度吻合，并解释了“半径之谜”。

根据波动方程（9）的数值解，按照公式（10）计算本征值之差，得到 $\Delta E_{\text{点质子}\,2P\to 2S}$ = 205.156(1) meV。如果直接计算本征值之差，则得到 $\Delta E_{\text{点质子}\,2P\to 2S}$ = 205.159(3) meV。由于我们并未使用本征值之差，因此没有特别致力于减小这一误差。Carroll 等人 [21]通过狄拉克方程的数值解，得到该差值为 205.1706(5) meV。根据 [28, 30]，我们需要在非相对论结果上加上 0.0169 meV 的相对论修正，从而得到 $\Delta E_{\text{点质子}\,2P\to 2S}$ =205.172(1) meV，与 [21]的相对论结果符合良好。

V. 结论

如果将点电荷的兰姆位移视为 μ子通过真空极化与自身相互作用所产生的动力学量子电动力学效应，即其自能，而不是由作为时间无关外部势的“乌林势”引起的位移，那么，由 μ 子氢兰姆位移确定的半径与电子实验的综合结果便能一致。

式（18）中给出的有限尺寸效应实际上并未因我们的考虑而发生改变。式（18）中采用的其他修正，尤其是数值为 0.151 meV 的“双真空极化”修正，在足够高的近似精度下，也不会因本文提出的修正后的 μ 子波函数而发生变化。我们假定这些修正与 Antognini 等人 [3] 在其分析中采用的修正相同。如果我们用以下方式修正式（18）中点电荷的兰姆位移：

将式 (17) 相减后，我们得到了 Antognini 等人的 μ子实验所推导出的质子的均方根半径新值 [3]:

$$r_p = 0.87455(48)\,\mathrm{fm} \tag{20}$$

其中包括公式 (17) 中修正项的误差。该数值与电子散射测得的最佳均方根半径 0.879(8)fm [7, 10, 11] 以及 CODATA-2010 的 0.8775(51) fm [5]符合良好。要得到由 μ子氢导出的半径的最终结果，还必须重新进行相对论计算，并将有限尺寸效应纳入其中

例如 Carroll 等人 [21] 认识到了本文的相关考量。

致谢

作者谨向 Joerg Friedrich 和 Volker Metag 致谢，感谢他们认真审阅稿件并给予鼓励；也感谢 Michael Distler 在图1及后续内容方面提供的帮助。

[1] Th. Walcher, （2012）, arXiv:1207.4901 [physics.atom-ph]。[2] H. Gao 和 M. Vanderhaeghen, Rev. Mod. Phys. 94, 015002（2022）, arXiv:2105（）。00571 [hep-ph]。[3] A. Antognini、F. Nez、K. Schuhmann、F. D. Amaro、Francois Biraben, *et al.*, Science 339, 417（2013）。[4] A. Antognini、F. Kottmann、F. Biraben、P. Indelicato、F. Nez, *et al.*, Annals Phys. 331, 127（2013）, arXiv:1208.2637 [physics.atom-ph]。[5] P. J. Mohr、B. N. Taylor 和 D. B. Newell, Rev. Mod. Phys. **84**, 1527 2012 1203 5425（）, arXiv: 。[ ] physics.atom-ph。[6] Th. Udem *et al.*, Phys. Rev. Lett. 79, 2646（1997）。[7] J. Bernauer *et al.*（A1 合作组）, Phys. Rev. Lett. 105, 242001（2010）, arXiv:1007.5076 [nucl-ex]。[8] X. Zhan、K. Allada、D. Armstrong、J. Arrington、W. Bertozzi, *et al.*, Phys. Lett. B705, 59（2011）, arXiv:1102.0318 [nucl-ex]。[9] G. Ron *et al.*（杰斐逊实验室 A 厅合作组）, Phys. Rev. C84, 055204（2011）, arXiv:1103.5784 [nucl-ex]。[10] J. Bernauer *et al.*（A1 合作组, 2014）, Phys. Rev. C 90, 015206（2014）, arXiv:1307.6227 [nucl-ex]。[11] I. Sick, 原子 6, 2（2018）, arXiv:1801.01746 [nucl-ex]。[12] E. Tiesinga、P. J. Mohr、D. B. Newell 和 B. N. Taylor, Rev. Mod. Phys. 93, 025010（2021）。[13] U.-G. Meißner, 载于 *28th International Nuclear Physics Conference* 2022 2211 05419 [ ]（）, arXiv: 。hep-ph。[14] I. Sick 和 D. Trautmann, Phys. Rev. C 95, 012501（2017）, arXiv:1701.01809 [nucl-ex]。

[15] M. O. Distler、Th. Walcher 和 J. C. Bernauer, （2015）, arXiv:1511.00479 [nucl-ex]。[16] S. 温伯格, *The Quantum Theory of Fields. Vol. 1: Foundations*（剑桥大学出版社, 1995）。[17] E. Borie 和 G. Rinker, 《现代物理评论》**54**, 67（1982）。[18] K. Pachucki, 《物理评论》**A53**, 2092（1996）。[19] M. I. Eides、H. Grotch 和 V. A. Shelyuto, 《物理报告》**342**, 63（2001）, arXiv:hep-ph/0002158 [hep-ph]。[20] E. Borie, 《物理评论》**A71**, 032508（2005）, arXiv:physics/0410051 [physics.atom-ph]。[21] J. Carroll、A. Thomas、J. Rafelski 和 G. Miller, 《物理评论》**A** **84**, 012506 2011 1104 2971（）, [ ] arXiv: . physics.atom-ph 。[22] E. Borie, 《物理年鉴》**327**, 733（2012）。[23] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*（麦格劳-希尔公司出版公司, 1968）。[24] R. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles*（麦格劳-希尔图书公司, 纽约, 1982）。[25] R. Mattuck, *A Guide to Feynman Diagrams in the Many Body Problem (Second Edition)*（多佛出版社, 纽约, 1976）。[26] S. Hedin, 《物理评论》**139**, A796（1965）, 1101.4073。[27] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*（艾迪生-韦斯利出版公司, 1994）。[28] K. Pachucki, 《物理评论》A **60**, 3593（1999）, arXiv:physics/9906002。[29] J. L. Friar, 《物理年鉴》**122**, 151（1979）。[30] A. Veitia 和 K. Pachucki, 《物理评论》A **69**, 042501（2004）。