arXiv:2304.07044v1 [math.CV] 14 Apr 2023

一族 Lempert 域

ARMEN EDIGARIAN

Abstract. G. Ghosh 和 W. Zwonek 引入了一类新的域 $\mathbb{L}_n$, $n \geq 1$，它们是第四类 Cartan 域的 2-适当全纯像。这一族包含对称双圆盘和四叶域的双全纯像。众所周知，对称双圆盘和四叶域都是 Lempert 型域。在本文中，我们证明了这族域 $\mathbb{L}_n$ 都是 Lempert 域。

1. Introduction

设 X 为一个复流形。在许多应用中，自然的做法是在 X 上考虑一个与复结构 d_X 相关的距离，并将 (X, d_X) 视为一个度量空间。事实证明，引入这些距离有许多自然的方式。关于这一主题的良好参考资料，参见例如 [13]。其中最大的一个是 Lempert 函数，它与 Kobayashi 伪距离相关。我们用 $\mathbb{D}$ 表示复平面 $\mathbb{C}$中的单位圆盘，用 $\mathbb{T}$ 表示单位圆。为简单起见，我们将自身限制在空间 $\mathbb{C}^n$中的域。设 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为一个域，且 $z, w \in D$ 为任意点。Lempert 函数定义为

$$\ell_D(z,w) = \inf\{\rho(0,\sigma) : f : \mathbb{D} \to D \text{ holomorphic}, f(0) = z, f(\sigma) = w\},$$

其中， ρ 是圆盘中的庞加莱 ́距离（见 [13],第三章）。

另一方面，最小的是 Carath ́eodory 伪距离（见 [13], 第二章）。我们置

$$c_D(z,w) = \sup\{\rho(f(z), f(w)) : f : D \to \mathbb{D} \text{ holomorphic}\}, \quad z, w \in D.$$

众所周知，对于单位球、单位球的乘积及其某些变体，这两个函数相同，也就是说，在这些域上引入距离只有一种自然方式。更一般地，这一结论对经典 Cartan 域也成立，即 $\mathbb{C}^n$ 中的有界对称齐性域（见 [12]）。证明利用了这些域的

2020 年数学主题分类：主要分类：32F45；次要分类：32M15、32Q02。关键词和短语：四型经典 Cartan 域、Cartan 域的自同构、Lempert 定理。

齐性，以及原点处的 Schwarz 引理型结果。具有这一性质的域有时称为 Lempert 域。

1981年，L. Lempert [14] 证明了一个基本结果：对于一个凸域 $D \subset \mathbb{C}^n$，存在一个等式

$$c_D = \ell_D. \tag{1}$$

后来，L. Lempert 将其推广到有界强线性凸伪凸域（见 [15]）。

20 多年来，除了凸双全纯像及其一些简单变形之外，是否还存在其他类型的 Lempert 域，一直是一个悬而未决的问题。在一系列论文中，[2, 3, 4]J. Agler 和 N.J. Young 引入并分析了对称双圆盘。它是已知的第一个有界双曲凸域，在该域上 Carath´eodory 距离与 Lempert 函数相等，但它无法通过与凸域双全纯等价的域构成穷竭。对称双圆盘 $\mathbb{G}_2$ 是双圆盘$\mathbb{D}^2$ 在对称化映射下的像。

$$\mathbb{D}^2 \ni (\lambda_1, \lambda_2) \to (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1\lambda_2) \in \mathbb{C}^2.$$

在 [5] 作者引入了另一个域，即 $\mathbb{C}^3$ 中的四叶域，它具有相同的性质（四叶域的定义和性质见下文）。

最近，G. Ghosh 和 W. Zwonek（见 [11]）提出了一类新的域，其中包括对称双圆盘和四叶域。我们的主要目标是证明，这类域满足等式 (1)，因此它们是 Lempert 域。

令 $\langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^n z_j\bar{w}_j$ for $z, w \in \mathbb{C}^n$ be $\mathbb{C}^n$ 中的 Hermitian 内积，并令 $\|z\|^2 = \langle z, z\rangle$ 为相应的范数。我们在 $\mathbb{C}^n C$ 中定义另一种范数如下

$$p(z)^2 = \|z\|^2 + \sqrt{\|z\|^4 - |\langle z, \bar{z}\rangle|^2}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

我们将该范数下的单位球记为 $L_n = \{z \in \mathbb{C}^n : p(z) < 1\}$，并称其为第四类 Cartan 域（有时也称为维数为 $n \geq 1$ 的 Lie 球）。它是一个有界对称齐性域（见 [6], [7]）。

按照 [11]，我们定义一个 2-真全纯映射

$$\Lambda_n : \mathbb{C}^n \ni (z_1, z_2, \ldots, z_n) \mapsto (z_1^2, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$$

并令 $\mathbb{L}_n = \Lambda_n(L_n)$。

本文的主要结果如下。

定理 1. 对于任意 $z, w \in \mathbb{L}_n$，我们有

$$c_{\mathbb{L}_n}(z,w) = \ell_{\mathbb{L}_n}(z,w).$$

正如我们上文所提到的，定理 1 已经针对 $n = 2$ （对称化双圆盘）以及 $n = 3$ （四叶域，另见 E-K-Z）得到证明。因此，对于任意$n \geq 4$，它都为我们提供了非平凡的（即不与凸域的乘积双全纯等价的）非凸域的实例，并且这些域满足等式 (1)。此外，我们的证明表明，这些域作为齐性对称域的一种修正，从某种意义上说，与不变距离和度量之间具有相当自然的联系。

2. The group of automorphisms

在本节中，我们将介绍 $\mathbb{C}^n$ 中第四类 Cartan 域的自同构，并给出一些有用的性质。更多信息请参见 [10], [12], [16]。

对于 $z \in \mathbb{C}^n$，我们设定

$$a(z) = \sqrt{\frac{\|z\|^2 + |\langle z, \bar{z}\rangle|}{2}} \quad \text{and} \quad b(z) = \sqrt{\frac{\|z\|^2 - |\langle z, \bar{z}\rangle|}{2}}.$$

在第 [1], 页第 278 页，数值 $a(z)$ 和 $b(z)$ 被称为与第四类 Cartan 域相关的模。注意，对于任意 $z \in \mathbb{C}^n$，均有 $p(z) = a(z)+b(z)$。对于一点 $z \in \mathbb{C}^n$，我们有 $p(z) < 1$，当且仅当

$$\|z\| < 1 \quad \text{and} \quad 2\|z\|^2 < 1 + |\langle z, \bar{z}\rangle|^2. \tag{2}$$

由此不等式可得。

引理 2. 设 $z = (z_1, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$。那么 $z \in \mathbb{L}_n$ 当且仅当

$$|z_1| + \|z'\|^2 < 1 \quad \textit{and} \quad 2|z_1| + 2\|z'\|^2 < 1 + |z_1 + \langle z', \bar{z}'\rangle|^2. \tag{3}$$

注意，如果 $(z_1, \ldots, z_{n-1}) \in L_{n-1}$，那么 $(z_1, \ldots, z_{n-1}, 0) \in L_n$。下面我们证明一个简单的不等式。

引理 3. 设 $z = (z_1, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$。假设 $\|z\| < 1$。那么

$$2\|z'\|^2 - |\langle z', \bar{z}'\rangle|^2 \leq 2\|z\|^2 - |\langle z, \bar{z}\rangle|^2.$$

此外，当且仅当 $z_1 = 0$ 时，等号成立。

证明。我们必须证明 $|\langle z, \bar{z}\rangle|^2 - |\langle z', \bar{z}'\rangle|^2 \leq 2|z_1|^2$。这等价于 $|z_1|^4 + 2\Re\big(\bar{z}_1^2\langle z', \bar{z}'\rangle\big) \leq 2|z_1|^2$。只需证明 $|z_1|^4 + 2|z_1|^2|\langle z', \bar{z}'\rangle| \leq 2|z_1|^2$。但我们有 $|z_1|^2 + 2|\langle z', \bar{z}'\rangle| \leq |z_1|^2 + 2\|z'\|^2 < 2$。□

假设 $z=(z_1,\dots,z_n)\in L_n$。那么根据上述引理，我们有 $(z_1,\dots,z_{n-1})\in L_{n-1}$。

在我们所有的讨论中，实特殊正交矩阵群 $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$（即满足 $A^TA=AA^T=\mathrm{I}_n$ 且 $\det A=1$ 的实矩阵 A）至关重要。这是由以下性质得出的：$\langle Az, Aw\rangle=\langle z,w\rangle$ 且 $\langle Az,\overline{Aw}\rangle=\langle z,\bar w\rangle$，对任意 $z,w\in\mathbb{C}^n$ 以及任意 $A\in\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ 均成立。特别地，对任意 $z\in\mathbb{C}^n$ 以及任意 $A\in\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$，有 $p(Az)=p(z)$。

设 $z\in\mathbb{C}^n$。那么存在一个 $\eta\in\mathbb{T}$，使得 $\eta^2\langle z,\bar z\rangle=|\langle z,\bar z\rangle|$。注意，$\eta^2\langle z,\bar z\rangle=\langle \eta z,\overline{\eta z}\rangle$。如果 $\eta z=u+iv$，其中 $u,v\in\mathbb{R}^n$，那么向量 u 和 v 在 $\mathbb{R}^n$ 和 $\|u\|\geq\|v\|$ 中正交。简单计算可得，$\|u\|=a(z)$ 和 $\|v\|=b(z)$。因此，存在一个矩阵 $A\in\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$（$\mathbb{R}^n$ 的一个“旋转”），使得 $Au=(a(z),0,\dots 0)$ 和 $Av=(0,b(z)\dots,0)$。我们得到 $\eta Az=A(\eta z)=(a(z),\ b(z)i,\dots,0)$。我们将上述讨论表述为一个独立的结果。

引理4. 对于任意 $z\in\mathbb{C}^n$、$n\geq 2$，存在一个矩阵 $A\in\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ 和一个数 $\eta\in\mathbb{T}$，使得

$$\eta Az=A(\eta z)=(a(z),b(z)i,0,\dots,0).$$

首先固定 k 个坐标，并“旋转”最后 $n-k$ 个坐标，我们有

引理5. 对于任意的 $z\in\mathbb{C}^n$、$n\geq 3$，以及满足 $k\leq n$ 的任意 $k\in\mathbb{N}$，存在一个矩阵 $A\in\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ 和一个数 $\eta\in\mathbb{T}$，使得$Aw\in\{(w_1,\dots,w_k)\}\times\mathbb{C}^{n-k}$对于任意 $w=(w_1,\dots,w_n)\in\mathbb{C}^n$和

$$Az=(z_1,\dots,z_k,\eta a(z'),\eta b(z')i,0,\dots,0),$$

其中 $z'=(z_{k+1},\dots,z_n)\in\mathbb{C}^{n-k}$。

注意，对于任意的 $a,b\in\mathbb{R}$，我们有 $(a,bi,0,\dots,0)\in L_n$ 当且仅当 $|a|+|b|<1$。

回顾以下众所周知的结果。

定理6。设 $\Phi: L_n\to L_n$ 是一个双全纯映射，满足$\Phi(0)=0$。那么存在一个矩阵 $A\in\mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$ 和一个数 $\eta\in\mathbb{T}$，使得对任意 $z\in L_n$，都有 $\Phi(z)=\eta Az$。

上述定理中描述的 L_n 自同构称为线性自同构。现在我们将描述四型不可约经典嘉当域的所有自同构（参见 [12], [10],

[16]）。我们首先定义一个矩阵群。

$$G(n)=\Big\{g=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}: A\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}), B\in M(n;2;\mathbb{R}), \tag{4}$$
$$C\in M(2,n;\mathbb{R}), D\in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}), \det D>0,$$
$$g^t\begin{bmatrix}\mathrm{I} & 0\\ 0 & -\mathrm{I}_2\end{bmatrix}g=\begin{bmatrix}\mathrm{I} & 0\\ 0 & -\mathrm{I}_2\end{bmatrix}\Big\}.$$

对于任意 $g\in G$，我们定义如下的 $\mathbb{C}^n$ 值全纯函数 n

$$\Psi_g(z)=\frac{Az+BW(z)}{(1\ i)(Cz+DW(z))},$$

其中 $W(z)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(\langle z,\bar{z}\rangle+1)\\ \frac{i}{2}(\langle z,z\rangle-1)\end{bmatrix}$。可以证明（见 [10]），对于任意$g\in G$，我们有

$$(1\ i)(Cz+DW(z))\neq 0 \quad \text{for all } z\in\overline{L_d}.$$

因此，Ψ_g 在 $\overline{L_n}$ 上定义良好。注意，我们有一个群同态 $\kappa\colon G(n)\to G(n+1)$，其定义为

$$\kappa(g)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & A & B\\ 0 & C & D\end{bmatrix},$$

其中 $g=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$。由此可得一个简单的推论。

˜推论 7. 对于任意 $\Psi\in \mathrm{Aut}(L_n)$，存在一个 $\Psi\in \mathrm{Aut}(L_{n+1})$，使得˜对于任意 $z\in L_n$，都有 $\Psi(0,z)=(0,\Psi(z))$。

˜证明。假设对于某个 $g\in G(n)$，有 $\Psi=\Psi_g$。令 $\Psi=\Psi_{\kappa(g)}$。 □

˜注 8. 通过改变坐标，我们可以取 $\Psi(z,0)=(\Psi(z),0)$。

在 [11] 中，作者给出了域 $\mathbb{L}_n$的自同构的描述。利用这一描述和上述结果，我们得到。

定理 9. 设 $\Phi\in \mathrm{Aut}(\mathbb{L}_n)$。则存在一个 $g\in G(n-1)$，使得

$$\Lambda_n\circ\Psi_{\kappa(g)}=\Phi\circ\Lambda_n.$$

此外，对于任意 $z\in L_{n-1}$，我们有 $\Phi(0,z)=(0,\Psi_g(z))$。

由推论 7 可得（参见 [11], 定理 5.3）。

˜定理 10. 设 $\Phi\in \mathrm{Aut}(\mathbb{L}_n)$。则存在一个 $\Phi\in \mathrm{Aut}(\mathbb{L}_{n+1})$˜，使得对于任意 $z\in\mathbb{L}_n$，$\Phi(z,0)=(\Phi(z),0)$。

由定义以及 L_n 的类似性质可得。

引理 11. $\Pi\colon\ \mathbb{L}_n\ \ni(z_1,\dots,z_n)\ \to(z_1,\dots,z_{n-1})\ \in\ \mathbb{L}_{n-1}$ 和 $Q\colon\ \mathbb{L}_{n-1}\ \ni(z_1,\dots,z_{n-1})\ \to(z_1,\dots,z_{n-1},0)\ \in\ \mathbb{L}_n$ 是定义良好的全纯映射，使得 $\Pi\circ Q=\mathrm{id}_{\mathbb{L}_{n-1}}$。

推论 12. 设 $n\geq 3$。我们有全纯映射 $Q:\mathbb{L}_3\to\mathbb{L}_n$ 和 $\Pi\colon\ \mathbb{L}_n\ \to\ \mathbb{L}_3$，使得 $\Pi\circ Q=\mathrm{id}_{\mathbb{L}_3}$。特别地，对于任意 $z,\ w\in Q(\mathbb{L}_3)$，我们有

$$c_{\mathbb{L}_n}(z;w)=\ell_{\mathbb{L}_n}(z;w)\quad \textit{for any } z,w\in\mathbb{L}_n.$$

3. The properties of the tetrablock and of the domain $\mathbb{L}_3$

在我们的论文中，四叶域和域 $\mathbb{L}_3$ 至关重要。首先回顾以下定义（见 [5], 定义 1.1）。

定义 13。四叶域是域

$$\mathbb{E}=\{z\in\mathbb{C}^3:1-\lambda_1z_1-\lambda_2z_2+\lambda_1\lambda_2z_3\neq 0\ \text{whenever}\ \lambda_1,\lambda_2\in\overline{\mathbb{D}}\}.$$

在 [5] 中，作者给出了四叶域的若干等价刻画。其中之一如下（见 [5], 定理 2.2 ）。

命题 14。对于 $z\in\mathbb{C}^3$，有：$z\in\mathbb{E}$ 当且仅当

$$|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1z_2-z_3|<1+|z_3|^2\ \textit{and}\ |z_3|<1.$$

由此命题、Cartan 域的定义以及域 $\mathbb{L}_n$，我们得到如下双全纯映射（见 [11], 推论 3.5）。

引理 15。令

$$\Psi(z_1,z_2,z_3)=(z_2+iz_3,z_2-iz_3,z_1+z_2^2+z_3^2).$$

则 $\Psi\colon\ \mathbb{L}_3\to\mathbb{E}$ 是一个双全纯映射，使得对于任意 $r\in[0,1)$，$\Psi(r,\ 0,\ 0)=(0,\ 0,\ r)$。

回顾以下结果（参见 [17], 定理 5.2）。

定理 16. 设 $z\in\mathbb{E}$ 为任意一点。则存在 $\mathbb{E}$ 的一个自同构 Φ 以及一个数 $r\in[0,1)$，使得 $\Phi(z)=(r,0,0)$。

由定理 16 和引理 15 可得。

推论 17. 对任意 $z\in\mathbb{L}_3$，存在 $\mathbb{L}_3$ 的一个自同构，使得 $\Phi(z)=(r,0,0)$，其中 $r\in[0,1)$。

由此可得以下重要结果。

推论 18. 对于任意 $z\in\mathbb{L}_n$，存在一个 $\mathbb{L}_n$ 的自同构 Φ，使得 $\Phi(z)=(\rho,0,\dots,0)$，其中 $\rho\in[0;\ 1)$。

所有这些分析和评述都意味着以下这一关键结果。

定理 19. 对于任意 z、$w \in \mathbb{L}_n$，存在一个自同构 Φ，使得 $\Phi(z) = (\rho, 0, \ldots, 0)$，且 $\Phi(w) \in \mathbb{L}_3 \times \{0\}_{n-3}$。

定理 1 的证明。证明由定理 19 和推论 12 得出。□

4. Invariant distences and metrics in $\mathbb{L}_n$

设 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为一个域。对于点 $z \in D$ 和向量 $X \in \mathbb{C}^n$，我们回顾一下，在 z 处沿方向 X 的无穷小 Kobayashi 度量定义为

$$\kappa_D(z; X) = \sup\{\alpha > 0 : f : \mathbb{D} \to D \text{ holomorphic}, \\ f(0) = z, f'(0) = \frac{1}{\alpha} X\}.$$

我们证明如下结论。

定理 20. 设 $n \geq 3$。

$$\kappa_{\mathbb{L}_n}(0; X) = |X_1| + p_{d-1}(X'),$$

其中 $X = (X_1, X') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$。

证明。我们知道（见 [17], 定理 2.1）

$$\kappa_{\mathbb{E}}(0; X) = \max\{|X_1|, |X_2|\} + |X_3| \quad \text{for any } X \in \mathbb{C}^3.$$

由 $\mathbb{E}$ 与 $\mathbb{L}_3$ 之间的双全纯性可推知

$$\kappa_{\mathbb{L}_3}(0; (X_1, X_2, X_3)) = |X_1| + \max\{|X_2 + iX_3|, |X_2 - iX_3|\}.$$

对于一般情形，存在一个 $\eta \in \mathbb{T}$ 和一个矩阵 $A \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$，使得

$$AX = (X_1, \eta a(X'), \eta i b(X'), 0, \ldots, 0).$$

取一个由 A生成的 $\mathbb{L}_n$ 的自同构 Φ。则 $\Phi(0) = 0$ 且

$$\Phi'(0)X = (X_1, \eta a(X'), i\eta b(X'), 0, \ldots, 0).$$

Then

$$\kappa_{\mathbb{L}_n}(0; X) = \kappa_{\mathbb{L}_n}(0; \Phi'(0)X) = \kappa_{\mathbb{L}_3}(0; (X_1, \eta a(X'), \eta i b(X')),$$

因此,

$$\kappa_{\mathbb{L}_n}(0; X) = |X_1| + a(X') + b(X') = |X_1| + p(X').$$

□

另请回顾以下结果（参见 [5],推论 3.7）。

定理 21. 对任意满足 $|z_1| \le |z_2|$ 的 $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{E}$，我们有

$$c_{\mathbb{E}}(0; z) = \tanh^{-1} \frac{|z_2 - \bar{z}_1 z_3| + |z_1 z_2 - z_3|}{1 - |z_1|^2}.$$

由此我们得到一个推论。

推论 22. 设 $z = (z_1, z') \in \mathbb{L}_n$，其中 $z_1 \in \mathbb{C}$ 和 $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$。如果$z' = 0$，则 $c_{\mathbb{L}_n}(0; z) = \tanh^{-1}(|z_1|)$。如果 $z' \ne 0$，那么我们有

$$c_{\mathbb{L}_n}(0; z) = \tanh^{-1}\Big(p(z')\Big|1 - \frac{z_1\langle \bar{z}', z'\rangle}{p^2(z') - |\langle z', \bar{z}'\rangle|^2}\Big| + \frac{|z_1| p(z')^2}{p^2(z') - |\langle z', \bar{z}'\rangle|^2}\Big).$$

证明。与上面类似，如果 $|z_2 + iz_3| \le |z_2 - iz_3|$ 那么

$$c_{\mathbb{L}_3}(0, (z_1, z_2, z_3)) = \tanh^{-1}\Big(\Big|z_2 - iz_3 - \frac{z_1\overline{(z_2 + iz_3)}}{1 - |z_2 + iz_3|^2}\Big| + \frac{|z_1|}{1 - |z_2 + iz_3|^2}\Big).$$

若 $z \in \mathbb{L}_n$，则利用适当的自同构映射，我们可以假设 $z = (z_1, \bar{\eta} a(z') \ \bar{\eta} b(z')i, \dots, 0)$，因此，

$$c_{\mathbb{L}_n}(0; z) = \tanh^{-1}\Big(\Big|\bar{\eta} p(z') - \frac{\eta z_1 (a(z') - b(z'))}{1 - |a(z') - b(z')|^2}\Big| + \frac{|z_1|}{1 - |a(z') - b(z')|^2}\Big),$$

其中 $\eta \in \mathbb{T}$ 满足 $\eta^2\langle z', \bar{z}'\rangle = |\langle z', \bar{z}'\rangle|$。由此我们得到公式。□

注 23. 在一篇即将发表的论文中，我们将运用类似的技巧研究 $\mathbb{L}_n$ 中的复测地线（见 [8]）。

References

[1] M.Abate, 《非紧致厄米对称空间的轨道结构》, 《巴勒莫数学学会会刊》, 第36卷（1987）, 241–280。[2] J. Agler 和 N.J. Young, 《对称双圆盘的施瓦茨引理》, 《伦敦数学学会通报》, 33（2001）, 175–186。[3] J. Agler 和 N.J. Young, 《对称双圆盘的双曲几何》, 《几何分析杂志》, 14（2004）, 375–403。[4] J. Agler 和 N.J. Young, 《对称双圆盘的复测地线》, 《国际数学杂志》, 17（2006）, 375–391。[5] A.A. Abouhajar、M.C. White 和 N.J. Young, 《一个与 μ合成有关的区域上的施瓦茨引理》, 《几何分析杂志》, 17（2007）, 717–749。[6] E. Cartan, 《关于具有简单基本群的几何中的某些特殊黎曼形式》, 《高等师范学校科学年刊》, 44（1927）, 345–467。

[7] E. Cartan, 《关于具有 n 个复变量的空间中的有界齐性域》, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 11 (1935), 116–162.[8] A. Edigarian, 《一类域中的复测地线》, 准备中。[9] A. Edigarian、L. Kosinski 和 W. Zwonek, 《Lempert 定理与四叶域》, J. Geom. Analysis 23 (4), (2013), 1818–1831. doi: 10.1007/s12220- 012-9308-2[10] Ch. de Fabritiis, 《IV 型 Cartan 域中自同构的不动点》, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 85 (1991), 161–184.[11]G. Ghosh & W. Zwonek, 《经典 Cartan 域的 2-适当全纯像》, arXiv:2303.11940v1 [math.CV], https://doi.org/10.48550/arXiv.2303.11940, (2023).[12] L.K. Hua, 《经典域中多变量函数的调和分析》, Trans. Am. Math. Soc., R.I., 1963.[13] M. Jarnicki, P. Pflug, 《复分析中的不变距离与度量》, 数学论述丛书 9, 第 2 版（扩充版）, De Gruyter, 2013.[14] L. Lempert, 《Kobayashi 度量与域到球的表示》, Bull. Soc. Math. France 109 (1981), 427–474.[15] L. Lempert, 《内蕴距离与全纯收缩映射》, 载于《复分析及其应用 '81》（Varna, 1981）, 341—364, 保加利亚科学院出版社, Sofia, 1984.[16] K. Morita, 《关于对称域的核函数》, Science Rep. of the Tokyo Kyoiku Daigaku, Section A, Vol. 5, No. 128/136 (1956),190–212[17] N.J. Young, 《四叶域的自同构群》, J. London Math. Soc. (2) 77 (2008), 757–770, doi:10.1112/jlms/jdn010

Faculty of Mathematics and Computer Science, Jagiellonian Uni-versity, Prof. St. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków, Poland, orcid:0000-0003-1789-1287