arXiv:2304.07093v2 [math.CO] 7 Apr 2024

基于若干拓扑指数的 k-叶连通图的充分条件*

Tingyan Ma[a, b], Ligong Wang[a, b, †], Yang Hu[a, b][a]西北工业大学数学与统计学院，中国陕西西安 710129。[b] 西北工业大学西安-布达佩斯组合学联合研究中心，中国陕西西安 710129。电子邮箱：matingylw@163.com，lgwangmath@163.com，yhumath@163.com。

摘要

令 $G=(V(G)\ E(G))$ 为一个图，其顶点集为 $V(G)$，边集为 $E(G)$。对于 $k\geq 2$，给定任意满足 $|S|=k$ 的子集 $S\subseteq|V(G)|$，如果一个阶为 $|V(G)|\geq k+1$ 的图 G 总有一棵生成树 T，使得 S 恰为 T 的叶集，那么图 G 就是一个 k-叶连通图。若图 G 中任意两个顶点都由一条 Hamilton 路径相连，则称图 G 为哈密顿连通图。根据 k-叶连通和哈密顿连通的定义，我们知道，一个图是 2-叶连通的，当且仅当它是哈密顿连通的。过去几十年来，关于拓扑指数的哈密顿连通充分条件已有许多研究结果。本文给出了基于 Zagreb 指数、倒数度距离或超 Zagreb 指数的图 G 为 k-叶连通图的充分条件。此外，我们利用补图 $\overline{G}$ 的第一 Zagreb 指数和超 Zagreb 指数，给出了图 G 为 k-叶连通图的充分条件。

关键词： k-叶连通图；Zagreb 指数；倒数度距离；超 Zagreb 指数。

AMS 主题分类（2020）：05C09,05C35。

1 引言

本文中，我们仅考虑简单无向图。设 $G=(V(G)\ E(G))$ 是一个顶点集为 $V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$、边集为 $E(G)=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ 的简单图。我们用 $e(G)$ 表示 G 的边数。用 $d_G(v_i)$ 表示 $v_i\in V(G)$ 的度。为方便起见，我们用 $\delta=\delta(G)$ 表示 G 的最小度。不失一般性，假设 $d_G(v_1)\leq d_G(v_2)\leq\cdots\leq d_G(v_n)$ 是 G 的度序列。若对于每个 $v_i\in V(G)$，图G 都是 d-正则的，则称图G 为 d-正则图。 v_i 与 v_j 之间的距离，记为 $d_G(v_i,v_j)$，是从 v_i 到 v_j 的最短路径的长度。对于两个顶点不相交的图

*受国家自然科学基金项目（编号：12271439）资助。

†通讯作者。电子邮箱：lgwangmath@163.com

G 和 H， G 和 H的不交并，记作 $G+H$，是一个图，其顶点集为$V(G)\cup V(H)$，边集为 $E(G)\cup E(H)$。特别地，令 tG为图 G的 t个副本的不交并。连接图 $G\vee H$ 由 $G+H$ 通过添加 $V(G)$与 $V(H)$之间所有可能的边得到。我们用 K_n 表示一个阶为 n的完全图。未定义的术语和概念可参见 [6, 7, 9]。

拓扑指数作为分子描述符，受到许多学者的广泛研究，并被广泛应用于许多领域。它们可用于测量分子的能量。接下来，我们介绍本文将用到的几个拓扑指数。

图 G 的第一 Zagreb 指数 $M_1(G)$ 和第二 Zagreb 指数 $M_2(G)$ 是两个著名的拓扑指数，最初由 Gutman 和 Trinajsti´c [11] 于 1972 年提出。它们定义为

$$M_1(G)=\sum_{v_i\in V(G)} d_G^2(v_i) \text{ and } M_2(G)=\sum_{v_iv_j\in E(G)} d_G(v_i)d_G(v_j).$$

Hua 和 Zhang [12] 引入了一种名为倒数度距离RDD（G）或加性加权 Harary 指数 [1], 的新图不变量，它是 Harary 指数的度加权版本。连通图 G的倒数度距离 RDD（G）定义为按顶点度加权的倒数距离之和，即

$$RDD(G)=\sum_{v_i\neq v_j}\frac{d_G(v_i)+d_G(v_j)}{d_G(v_i,v_j)}.$$

设 $\widehat{D}_G(v_i)=\sum_{v_j\in V(G)\setminus\{v_i\}} d_G \underline{\ ^1_{v_i(,v_j)}}$。则

$$RDD(G)=\sum_{v_i\in V(G)} d_G(v_i)\widehat{D}_G(v_i).$$

^根据 $D_G(v_i)$ 的定义，很容易验证

$$\widehat{D}_G(v_i)\leq d_G(v_i)+\frac{1}{2}\left(n-1-d_G(v_i)\right).$$

2009 年，Khalifeh、Yousefi-Azari 和 Ashrafi [14] 首次提出了 G 的超 Zagreb 指数，其定义为

$$HM(G)=\sum_{v_iv_j\in E(G)}\Big(d_G(v_i)+d_G(v_j)\Big)^2$$

k-叶连通图的定义最早由 Gurgel 和 Wak- abayashi 于 1986 年提出，他们还给出了关于度的一些性质，以及关于 k-叶连通图边数的一个充分条件。对于 $k\geq 2$ 和任意给定的子集 $S\subseteq|V(G)|$，若满足 $|S|=k$，则如果一个阶为 $|V(G)|\geq k+1$ 的图 G 总是存在一棵生成树 T，使得 S 恰好是 T 的叶子集合，那么称图 G 为 k-叶连通图。如果图 G 中任意两个顶点都由一条 Hamilton 路径连接，则称该图为哈密顿连通图，其中 Hamilton 路径是指经过图中所有顶点的一条路径。根据 k-叶连通图和哈密顿连通图的定义，一个图是 2-叶连通图，当且仅当它是哈密顿连通图。

对连通图 G 成为哈密顿连通图的充分条件的研究可以扩展到 k-叶连通图。Zhou、Wang 和 Lu [21, 22, 23] 利用边数和（无符号拉普拉斯矩阵）谱半径，得到了图成为哈密顿连通图的一些充分条件。Jia、Liu 和 Du [13] 从维纳指数的角度刻画了图成为哈密顿连通图的一些充分条件。随后，Zhou、Wang 和 Lu [24] 研究了涉及 Wiener 型不变量的连通图成为哈密顿连通图的充分条件。An [2] 利用第一 Zagreb 指数和倒数度距离，给出了图成为哈密顿连通图的充分条件。

定理 1.1. ([2]) 设 G 是一个阶为 $n \geq 6$ 的连通图。如果

$$M_1(G) > n^3 - 5n^2 + 12n - 6,$$

那么 G 是哈密顿连通的。此外，$M_1(G) = n^3 - 5n^2 + 12n - 6$ 当且仅当 $G \cong K_2 \vee (K_1 + K_{n-3})$。

定理 1.2. ([2]) 设 G 是一个阶为 $n \geq 6$ 的连通图。如果

$$RDD(G) > \frac{1}{2}n(n+1)(2n-1) - (n-1)(5n-6),$$

那么 G 是哈密顿连通的。此外，$RDD(G) = \frac{1}{2}n(n+1)(2n-1) - (n-1)(5n-6)$当且仅当 $G \cong K_2 \vee (K_1 + K_{n-3})$。

Lu和Zhou [15] 证明了图 G 及其补图$\overline{G}$ 成为哈密顿连通图的充分条件，这些条件用 G或其补图的第一 Zagreb 指数和超 Zagreb 指数表示，见定理 1.3 和 1.4。

定理 1.3. ([15]) 设 G 是一个阶为 $n \geq 13$ 且最小度为 $\delta \geq 3$的连通图。若

$$HM(G) \geq 2n^4 - 22n^3 + 126n^2 - 306n + 372,$$

则 G是哈密顿连通的。

定理 1.4. ([15]) 设 G 是一个阶为 $n \geq 6$ 且最小度为 $\delta \geq 3$的连通图。若

$$HM(\overline{G}) \leq (n-2)^2(2n-9),$$

则 G 是哈密顿连通的，除非 $G \in \{K_3 \vee 3K_1, K_6 \vee 6K_1, K_5 \vee 5K_1, K_4 \vee 4K_1\}$。

关于哈密顿连通图充分条件的更多研究，可参见[8, 19, 20]。在上述研究的基础上，图的 k-叶连通性的充分条件得到了进一步研究。Ao、Liu、Yuan 和 Li [3] 从边数和（无符号拉普拉斯矩阵）谱半径的角度改进了图为 k-叶连通图的充分条件。此外，Ma、Ao、Liu、Wang 和 Hu [16] 进一步改进了图为 k-叶连通图的边数条件和（无符号拉普拉斯矩阵）谱半径条件。最近，Ao、Liu、Yuan 和 Yu [4] 研究了一些 Wiener 型不变量条件，以保证图具有 k-叶连通性。受上述结果的启发，本文给出了涉及 M_1（G）、 M_2（G）、 RDD（G）和HM（G）的图为 k-叶连通图的充分条件。此外，我们还从 M_1（$\overline{G}$）和 HM（$\overline{G}$）的角度，给出了图 G 为 k-叶连通图的充分条件。

2 预备知识

接下来，我们将给出一些引理，这些引理将在后续论证中使用。

引理 2.1. ([10]) 设 G 是一个阶为 n 的 k-叶连通图，其中 $2 \leq k \leq n-2$。则 G 是 $(k+1)$-连通的。

根据引理 2.1，对于任意 k-叶连通图，我们有 $\delta \geq k+1$ 。

引理 2.2. ([10]) 假设 $2 \leq k \leq n-1$。若 G 是一个图，且对于每个顶点 v_i 都有 $d_G(v_i) \geq \frac{n+k-1}{2}$，则 G 是 k-叶连通的。

k-叶连通图的度序列具有如下刻画。

引理 2.3. ([10]) 设 k 和 n 为满足 $2 \leq k \leq n-3$ 的正整数。设 G 是一个度序列为 $d_G(v_1) \leq d_G(v_2) \leq \cdots \leq d_G(v_n)$ 的图。假设不存在满足 $k \leq i \leq \frac{n+k-2}{2}$ 的整数 i，使得 $d_G(v_{i-k+1}) \leq i$ 且 $d_G(v_{n-i}) \leq n-i+k-2$。则 G 是 k- 叶连通的。

图的闭包这一概念由 Ore [17], 隐式使用，并由 Bondy 和 Chvatal [5]正式引入。固定整数 $l \geq 0$，图 G 的 l-闭包是通过不断连接 G 中度和至少为 l的非邻接顶点对得到的图，直到不存在这样的顶点对为止。用 $C_l(G)$ 表示 G. 的 l-闭包。于是我们有

$$d_{C_l(G)}(v_i) + d_{C_l(G)}(v_j) \leq l-1$$

对于 $C_l(G)$的任意一对非邻接顶点 v_i 和v_j 。

引理 2.4. ([10]) 设 G 是一个图， k 是一个整数，且 $2 \leq k \leq n-1$. 。那么 G 是 k-叶连通的，当且仅当 G 的 $(n+k-1)$-闭包 $C_{n+k-1}(G)$ 是 k-叶连通的。

引理 2.5. ([16]) 设 G 是一个阶为 $n \geq k+17$ 且最小度为 $\delta \geq k+1$ 的连通图，其中 $k \geq 2$。若

$$e(G) \geq \binom{n-3}{2} + 3k + 5,$$

则除非 $C_{n+k-1}(G) \in \{K_k \vee (K_{n-k-2}+K_2)\ K_3 \vee (K_{n-5}+2K_1)\ K_4 \vee (K_{n-7}+3K_1)\}$，否则 G 是 k-叶-连通的。

3 图 G 成为 k-叶连通的若干 Zagreb 指数条件

定理 3.1. 设 G 是一个阶为 $n \geq k+4$、最小度为 $\delta \geq k+1$ 的连通图，其中 $2 \leq k \leq n-4$。如果

$$M_1(G) \geq n^3 - 8n^2 + (4k+25)n + 2k^2 - 4k - 24,$$

那么，除非 $G \in \{K_3 \vee (K_{n-5}+2K_1)\ K_4 \vee 4K_1, K_3 \vee (K_{1,3}+K_1)\ K_4 \vee (K_2+3K_1)\ K_5 \vee 5K_1\}$，否则 G 是一个 k-叶连通图。

证明。反证，假设 G不是 k-叶连通的，其中 $2 \leq k \leq n-4$和$\delta \geq k+1$。设 $d_G(v_1) \leq d_G(v_2) \leq \cdots \leq d_G(v_n)$ 为 G的度序列。根据引理 2.3，存在一个正整数 i，满足$k \leq i \leq \frac{n+k-2}{2}$，使得 $d_G(v_{i-k+1}) \leq i$ 且 $d_G(v_{n-i}) \leq n-i+k-2$。因此，在下文中，我们考虑 $k+1 \leq \delta \leq d_G(v_{i-k+1}) \leq i \leq \frac{n+k-2}{2}$。然后

$$\begin{aligned}
M_1(G) =& \sum_{j=1}^{n} d_G^2(v_j) \\
=& \sum_{j=1}^{i-k+1} d_G^2(v_j) + \sum_{j=i-k+2}^{n-i} d_G^2(v_j) + \sum_{j=n-i+1}^{n} d_G^2(v_j) \\
\leq& (i-k+1)i^2 + (n-2i+k-1)(n-i+k-2)^2 + i(n-1)^2 \\
=& -i^3 + (5n+4k-8)i^2 - (3n^2-12n+8kn+4k^2-14k+11)i + n^3 + 3kn^2 - 5n^2 + \\
& 3k^2n - 10kn + 8n + k^3 - 5k^2 + 8k - 4.
\end{aligned}$$

Let

$$f(x) = -x^3 + (5n+4k-8)x^2 - (3n^2-12n+8kn+4k^2-14k+11)x,$$

其中$k+1 \leq x \leq \frac{n+k-2}{2}$。对 $f(x)$ 求一阶和二阶导数，得到

$$f'(x) = -3x^2 + 2(5n+4k-8)x - 3n^2 + 12n - 8kn - 4k^2 + 14k - 11$$

and

$$f''(x) = -6x + 2(5n+4k-8).$$

注意到 $k+1 \leq x \leq \frac{n+k-2}{2}$，即 $n \geq k+4$，我们有

$$f''(x) = -6x + 2(5n+4k-8) \geq 7n + 5k - 10 > 0.$$

因此， $f(x)$ 是 $x \in [k+1, \frac{n+k-2}{2}]$ 上的凹函数。由于 x 是正整数，我们有 $f(x) \leq max\{f(k+1)\ f(\lfloor \frac{n+k-2}{2} \rfloor)\}$。经直接计算，我们得到

$$f(k+1) = -k^3 - (3n-7)k^2 - (3n^2-14n+12)k - 3n^2 + 17n - 20.$$

如果 $n+k-2$ 为奇数，那么

$$\begin{aligned}
f\left(\lfloor \frac{n+k-2}{2} \rfloor\right) =& f\left(\frac{n+k-3}{2}\right) \\
=& -\frac{1}{8}\left(3n^3 + (19k-17)n^2 + (25k^2-78k+29)n + 9k^3 - 49k^2 + 71k - 15\right).
\end{aligned}$$

从 $f(\lfloor \frac{n+k-2}{2} \rfloor)$ 中减去 $f(k+1)$，得到

$$f(k+1) - f(\lfloor \frac{n+k-2}{2} \rfloor) = \frac{1}{8}(n-k-5)(n-k-7)(3n+k-5) > 0 \text{ for } n \geq k+8.$$

如果 $n+k-2$ 是偶数，那么

$$f\left(\lfloor \frac{n+k-2}{2} \rfloor\right) = f\left(\frac{n+k-2}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{8}\left(3n^3 + (19k-22)n^2 + (25k^2 - 76k + 48)n + 9k^3 - 46k^2 + 72k - 32\right).$$

从 $f(\lfloor\frac{n+k-2}{2}\rfloor)$ 中减去 $f(k+1)$，得到

$$f(k+1) - f(\lfloor\frac{n+k-2}{2}\rfloor) = \frac{1}{8}(n-k-4)[3n^2 - (2k+34)n - k^2 - 6k + 48] > 0 \text{ for } n \geq k+10,$$

因此 $f(x) \leq f(k+1)$，于是

$$M_1(G) \leq n^3 - 8n^2 + (4k+25)n + 2k^2 - 4k - 24.$$

接下来，我们考虑 $i = k+1$ 是否成立的子情况。
情况 1：如果 $i = k+1$。
根据上述讨论，我们有

$$M_1(G) = n^3 - 8n^2 + (4k+25)n + 2k^2 - 4k - 24.$$

那么，定理 3.1 的证明中的所有不等式都应为等式。我们有

$$d_G(v_1) = d_G(v_2) = k+1,\ d_G(v_3) = d_G(v_4) = \cdots = d_G(v_{n-k-1}) = n-3,$$

$$d_G(v_{n-k}) = d_G(v_{n-k+1}) = \cdots = d_G(v_n) = n-1.$$

因此，$G \cong K_{k+1} \vee (K_{n-k-3} + 2K_1)$ 对于 $k \geq 3$ 是 k-叶连通的。对于 $k = 2$，可以验证 $G \cong K_3 \vee (K_{n-5} + 2K_1)$ 不是哈密顿连通的，因此，$G \cong K_3 \vee (K_{n-5} + 2K_1)$ 不是 2-叶连通的。

情况 2：若 $i \neq k+1$，则有 $k+2 \leq i \leq \frac{n+k-2}{2}$。
根据上述讨论，我们只需考虑其他子情况 $n = k+6$、$n = k+7$和 $n = k+8$。

子情况 2.1：$n = k+6$。
由引理 2.3，我们有 $d_G(v_3) \leq k+2$, $d_G(v_4) \leq k+2$。于是

$$d_G(v_1) \leq d_G(v_2) \leq d_G(v_3) \leq d_G(v_4) \leq k+2,\ d_G(v_5) \leq d_G(v_6) \leq \cdots \leq d_G(v_{k+6}) \leq k+5. \quad (1)$$

结合定理 3.1 的条件和不等式 (1)，可得

$$k^3+16k^2+57k+54 \leq M_1(G) = \sum_{j=1}^{k+6} d_G^2(v_j) \leq 4(k+2)^2 + (k+2)(k+5)^2 = k^3+16k^2+61k+66.$$

Thus

$$\begin{aligned} d_G^2(v_5) + d_G^2(v_6) + \cdots + d_G^2(v_{k+6}) = M_1(G) - \sum_{j=1}^{4} d_G^2(v_j) \geq & k^3 + 16k^2 + 57k + 54 - 4(k+2)^2 \\ = & k^3 + 12k^2 + 41k + 38. \end{aligned}$$

由于 $k(k+5)^2 + 2(k+4)^2 = k^3 + 12k^2 + 41k + 32 < k^3 + 12k^2 + 41k + 38$，因此在 $d_G(v_5)$ $d_G(v_6) \ldots, d_G(v_{k+6})$ 中，至少有 $k+1$ 个度为 $k+5$ 的顶点。根据 $d_G^2(v_5)$ $\geq k^3 + 12k^2 + 41k + 38 - (k+1)(k+5)^2 = k^2 + 6k + 13$ 和 $k^3 + 16k^2 + 57k + 54 \leq$

$M_1(G) \leq k^3+16k^2+61k+66$，我们可以得到 $d_G(v_5) = k+5$ 或 $d_G(v_5) = k+4$。如果 $d_G(v_5) = k+5$，那么

$$d_G(v_1) = d_G(v_2) = d_G(v_3) = d_G(v_4) = k+2,\ d_G(v_5) = d_G(v_6) = \cdots = d_G(v_{k+6}) = k+5.$$

因此，$G \cong K_{k+2} \vee 4K_1$ 对于 $k \geq 3$ 是 k-叶连通的。对于 $k = 2$，可以验证 $G \cong K_4 \vee 4K_1$ 不是哈密顿连通的，因此 $G \cong K_4 \vee 4K_1$ 不是 2-叶连通的。如果 $d_G(v_5) = k+4$，那么

$$d_G(v_1) = k+1,\ d_G(v_2) = d_G(v_3) = d_G(v_4) = k+2,\ d_G(v_5) = k+4,$$

$$d_G(v_6) = \cdots = d_G(v_{k+6}) = k+5.$$

因此，$G \cong K_{k+1} \vee (K_{1,3}+K_1)$ 对于 $k \geq 3$ 是 k-叶连通的。对于 $k = 2$，可以验证 $G \cong K_3 \vee (K_{1,3}+K_1)$ 不是哈密顿连通的，因此，$G \cong K_3 \vee (K_{1,3}+K_1)$ 不是 2-叶连通的。

子情况 2.2： $n = k+7$。
通过直接计算，我们可以得到 $M_1(G) = k^3+19k^2+84k+102$。因此，定理 3.1 证明中的所有不等式都应为等式。我们有

$$d_G(v_1) = d_G(v_2) = d_G(v_3) = k+2,\ d_G(v_4) = d_G(v_5) = k+3,$$

$$d_G(v_6) = d_G(v_7) = \cdots = d_G(v_{k+7}) = k+6.$$

因此，$G \cong K_{k+2} \vee (K_2+3K_1)$ 对于 $k \geq 3$ 是 k-叶连通的。对于 $k = 2$，可以验证 $G \cong K_{k+2} \vee (K_2+3K_1)$ 不是哈密顿连通的，因此 $G \cong K_4 \vee (K_2+3K_1)$ 不是 2-叶连通的。

子情形 2.3： $n = k+8$。
注意 $k+2 \leq i \leq \frac{n+k-2}{2} = k+3$。对于 $i = k+2$，我们有

$$d_G(v_1) \leq d_G(v_2) \leq d_G(v_3) \leq k+2,\ d_G(v_4) \leq d_G(v_5) \leq d_G(v_6) \leq k+4,$$

$$d_G(v_7) \leq d_G(v_8) \leq \cdots \leq d_G(v_{k+8}) \leq k+7,$$

而 $3(k+2)^2+3(k+4)^2+(k+2)(k+7)^2 = k^3+22k^2+113k+158 < k^3+22k^2+117k+176$，矛盾。

则 $i = k+3$。由引理 2.3 可得 $d_G(v_4) \leq k+3$, $d_G(v_5) \leq k+3$。然后

$$d_G(v_1) \leq d_G(v_2) \leq \cdots \leq d_G(v_5) \leq k+3,\ d_G(v_6) \leq d_G(v_7) \leq \cdots \leq d_G(v_{k+8}) \leq k+7. \quad (2)$$

结合定理 3.1 的条件和不等式 (2)，我们得到

$$k^3+22k^2+117k+176 \leq M_1(G) = \sum_{j=1}^{k+8} d_G^2(v_j) \leq 5(k+3)^2+(k+3)(k+7)^2 = k^3+22k^2+121k+192.$$

Thus

$$\begin{aligned} d_G^2(v_6)+d_G^2(v_7)+\cdots+d_G^2(v_{k+8}) = M_1(G) - \sum_{j=1}^{5} d_G^2(v_j) \geq & k^3+22k^2+117k+176-5(k+3)^2 \\ = & k^3+17k^2+87k+131. \end{aligned}$$

由于 $(k+1)(k+7)^2+2(k+6)^2=k^3+17k^2+87k+121<k^3+17k^2+87k+131$，因此在 $d_G(v_6)$ $d_G(v_7)$ $\cdots, d_G(v_{k+8})$ 中至少有 $k+2$ 个顶点的度为 $k+7$。根据$d_G^2(v_6)$ $\geq k^3+17k^2+87k+131-(k+2)(k+7)^2=k^2+10k+33$和 $k^3+22k^2+117k+176 \leq M_1(G)$ $\leq k^3+22k^2+121k+192$，我们可以 $d_G(v_6)$ $=k+7$ 并

$$d_G(v_1)=d_G(v_2)=\cdots=d_G(v_5)=k+3,\ d_G(v_6)=d_G(v_7)=\cdots=d_G(v_{k+8})=k+7.$$

因此，$G\cong K_{k+3}\vee 5K_1$对于 $k\geq 3$而言是 k-叶连通的。对于 $k=2$，可以验证$G\cong K_5\vee 5K_1$不是哈密顿连通的，因此$G\cong K_5\vee 5K_1$ 不是2-叶连通的。□

定理 3.2. 设 G是一个阶为 $n\geq k+4$、最小度为 $\delta\geq k+1$的连通图，其中 $2\leq k\leq n-4$。若

$$RDD(G)\geq n^3-7n^2+(20+4k)n+k^2-4k-17,$$

则 G 是一个 k-叶连通图，除非 $G\in\{K_3\vee(K_{n-5}+2K_1)$ $K_4\vee 4K_1$， $K_3\vee(K_{1,\ 3}+K_1)$ $K_4\vee($ $K_2+3K_1)$ $K_5\vee 5K_1\}$。

证明。反证，假设 G 不是 k-叶连通的，其中 $2\leq k\leq n-4$ 且$\delta\geq k+1$。设 G的度序列为 $d_G(v_1)$ $\leq d_G$ (v_2) $\leq\cdots\leq d_G(v_n)$。根据引理 2.3，存在一个正整数 i ，满足 $k\leq i\leq\frac{n+k-2}{2}$ ，使得 $d_G(v_{i-k+1})\leq i$ 且 $d_G(v_{n-i})$ $\leq n-i+k-2$。因此，下面我们考虑 $k+1\leq\delta\leq d_G(v_{i-k+1})\leq i\leq\frac{n+k-2}{2}$。于是

$$\begin{aligned}
RDD(G)=&\sum_{v_i\in V(G)}d_G(v_i)\widehat{D}_G(v_i)\\
\leq&\sum_{v_i\in V(G)}d_G(v_i)\left(\frac{1}{2}\left(n-1-d_G(v_i)\right)\right)\\
=&\frac{1}{2}\left((n-1)\sum_{v_i\in V(G)}d_G(v_i)+\sum_{v_i\in V(G)}d_G^2(v_i)\right)\\
\leq&\frac{1}{2}(n-1)[(i-k+1)i+(n-2i+k-1)(n-i+k-2)+i(n-1)]+\\
&\frac{1}{2}[(i-k+1)i^2+(n-2i+k-1)(n-i+k-2)^2+i(n-1)^2]\\
=&\frac{1}{2}[-i^3+(8n+4k-11)i^2-(5n^2-19n+12kn+4k^2-18k+16)i+\\
&2n^3+(5k-9)n^2+(4k^2-15k+13)n+k^3-6k^2+11k-6].
\end{aligned}$$

Let

$$g(x)=-x^3+(8n+4k-11)x^2-(5n^2-19n+12kn+4k^2-18k+16)x,$$

其中 $k+1\leq x\leq\frac{n+k-2}{2}$。对 $g(x)$ 求一阶和二阶导数，得到

$$g'(x)=-3x^2+2(8n+4k-11)x-(5n^2-19n+12kn+4k^2-18k+16)$$

and

$$g''(x) = -6x + 2(8n + 4k - 11).$$

注意到 $x \leq \frac{n+k-2}{2}$，我们有

$$g''(x) = -6x + 2(8n + 4k - 11) \geq 13n + 5k - 16 > 0 \ \ (n \geq k + 4).$$

因此，$g(x)$ 是 $x \in [k+1, \frac{n+k-2}{2}]$ 上的凹函数。由于 x 是正整数，我们有 $g(x) \leq max\{g(k+1)\ g(\lfloor\frac{n+k-2}{2}\rfloor)\}$。直接计算可得

$$g(k+1) = -k^3 - (4n-8)k^2 - (5n^2 - 23n + 19)k - 5n^2 + 27n - 28.$$

若 $n + k - 2$ 为奇数，则

$$\begin{aligned} g\left(\lfloor\frac{n+k-2}{2}\rfloor\right) =& g\left(\frac{n+k-3}{2}\right) \\ =& -\frac{1}{8}\left(5n^3 + (31k-27)n^2 + (35k^2 - 122k + 43)n + 9k^3 - 59k^2 + 103k - 21\right). \end{aligned}$$

从 $f(\lfloor\frac{n+k-2}{2}\rfloor)$ 中减去 $f(k+1)$，得到

$$f(k+1) - f(\lfloor\frac{n+k-2}{2}\rfloor) = \frac{1}{8}(n-k-5)(n-k-7)(5n+k-7) > 0 \text{ for } n \geq k+8.$$

若 $n + k - 2$ 为偶数，则

$$\begin{aligned} g\left(\lfloor\frac{n+k-2}{2}\rfloor\right) =& g\left(\frac{n+k-2}{2}\right) \\ =& -\frac{1}{8}\left(5n^3 + (31k-36)n^2 + (35k^2 - 116k + 76)n + 9k^3 - 56k^2 + 100k - 48\right). \end{aligned}$$

从 $g(\lfloor\frac{n+k-2}{2}\rfloor)$ 中减去 $g(k+1)$，得

$$f(k+1) - f(\lfloor\frac{n+k-2}{2}\rfloor) = \frac{1}{8}(n-k-4)[5n^2 - (4k+56)n - k^2 - 4k + 68] > 0 \text{ for } n \geq k+10,$$

这意味着 $g(x) \leq g(k+1)$。因此

$$RDD(G) \leq n^3 - 7n^2 + (20 + 4k)n + k^2 - 4k - 17.$$

下面我们将考虑是否 $i = k + 1$ 的各个子情况。
情况 1：若 $i = k + 1$。
根据上述讨论，我们得到

$$RDD(G) = n^3 - 7n^2 + (20 + 4k)n + k^2 - 4k - 17.$$

Then

$$d_G(v_1) = d_G(v_2) = k + 1,\ d_G(v_3) = d_G(v_4) = \cdots = d_G(v_{n-k-1}) = n - 3,$$

$$d_G(v_{n-k}) = d_G(v_{n-k+1}) = \cdots = d_G(v_n) = n - 1.$$

因此，$G \cong K_{k+1} \vee (K_{n-k-3} + 2K_1)$ 在 $k \geq 3$ 时是 k-叶连通的。对于 $k = 2$，可以验证 $G \cong K_3 \vee (K_{n-5} + 2K_1)$ 不是哈密顿连通的，因此，$G \cong$

$K_3 \vee (K_{n-5} + 2K_1)$ 不是 2-叶连通的。
情况 2：如果 $i \neq k+1$，我们有 $k+2 \leq i \leq \frac{n+k-2}{2}$。
根据上述讨论，我们只需考虑其他子情况 $n = k+6$、$n = k+7$和 $n = k+8$。

子情况 2.1：$n = k+6$。
根据引理 2.4，我们有 $d_G(v_3) \leq k+2$，$d_G(v_4) \leq k+2$。于是

$$d_G(v_1) \leq d_G(v_2) \leq d_G(v_3) \leq d_G(v_4) \leq k+2,\ d_G(v_5) \leq d_G(v_6) \leq \cdots \leq d_G(v_{k+6}) \leq k+5. \quad (3)$$

结合定理 3.2 的条件和不等式（3），我们有

$$\begin{aligned} k^3+16k^2+64k+67 \leq RDD(G) &\leq \frac{1}{2}\left((n-1)\sum_{v_i\in V(G)} d_G(v_i) + \sum_{v_i\in V(G)} d_G^2(v_i)\right) \\ &\leq \frac{1}{2}[(n-1)(4(k+2)+(k+2)(k+5)) + 4(k+2)^2 + (k+2)(k+5)^2] \\ &= k^3+16k^2+67k+78. \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} & RDD(G) - \frac{1}{2}\left((n-1)\sum_{j=1}^{4} d_G(v_j) + \sum_{j=1}^{4} d_G^2(v_j)\right) \\ \geq & k^3+16k^2+64k+67 - \frac{1}{2}[4(n-1)(k+2)+4(k+2)^2] \\ = & k^3+12k^2+42k+39. \end{aligned}$$

由于 $\frac{1}{2}[(k+5)(k(k+5)+2(k+4))+k(k+5)^2+2(k+4)^2] = k^3+12k^2+42k+36 < k^3+12k^2+42k+39$，因此在 $d_G(v_5)$ $d_G(v_6)\ldots, d_G(v_{k+6})$中，至少有 $k+1$ 个度为 $k+5$ 的顶点。根据 $\frac{1}{2}[(n-1)d_G(v_5) + d_G^2(v_5)$ $] \geq k^3+12k^2+42k+39-\frac{1}{2}[(n-1)(k+1)(k+5) + (k+1)(k+5)^2] = k^2+7k+14$ 以及 $k^3+16k^2+64k+67 \leq RDD(G) \leq k^3+16k^2+67k+78$，我们可以得到 $d_G(v_5) = k+5$ 或 $d_G(v_5) = k+4$。

如果 $d_G(v_5) = k+5$，则

$$d_G(v_1) = d_G(v_2) = d_G(v_3) = d_G(v_4) = k+2,\ d_G(v_5) = d_G(v_6) = \cdots = d_G(v_{k+6}) = k+5.$$

因此，$G \cong K_{k+2} \vee 4K_1$ 对于 $k \geq 3$ 是 k-叶连通的。对于 $k = 2$，可以验证 $G \cong K_4 \vee 4K_1$ 不哈密顿连通，因此 $G \cong K_4 \vee 4K_1$ 不 2-叶连通。如果 $d_G(v_5) = k+4$，那么

$$d_G(v_1) = k+1,\ d_G(v_2) = d_G(v_3) = d_G(v_4) = k+2,\ d_G(v_5) = k+4,$$

$$d_G(v_6) = \cdots = d_G(v_{k+6}) = k+5.$$

因此，$G \cong K_{k+1} \vee (K_{1,3}+K_1)$ 对于 $k \geq 3$ 是 k-叶连通的。对于 $k = 2$，可以验证 $G \cong K_3 \vee (K_{1,3}+K_1)$ 不是哈密顿连通的，因此 $G \cong K_3 \vee (K_{1,3}+K_1)$ 不是 2-叶连通的。

子情况 2.2：$n = k+7$。
由 dir 通过直接计算，我们可以得到 $RDD(G) = k^3+19k^2+93k+123$。我们有

$$d_G(v_1) = d_G(v_2) = d_G(v_3) = k+2,\ d_G(v_4) = d_G(v_5) = k+3,$$

$$d_G(v_6) = d_G(v_7) = \cdots = d_G(v_{k+7}) = k + 6.$$

因此， $G \cong K_{k+2} \vee (K_2 + 3K_1)$ 对于 $k \geq 3$ 是 k-叶连通的。对于 $k = 2$，可以验证 $G \cong K_{k+2} \vee (K_2 + 3K_1)$ 不是哈密顿连通的，因此，$G \cong K_4 \vee (K_2 + 3K_1)$ 不是 2-叶连通的。

子情形 2.3： $n = k + 8$。
注意到 $k + 2 \leq i \leq \frac{n+k-2}{2} = k + 3$。对于 $i = k + 2$，我们有

$$d_G(v_1) \leq d_G(v_2) \leq d_G(v_3) \leq k + 2,\ d_G(v_4) \leq d_G(v_5) \leq d_G(v_6) \leq k + 4,$$

$$d_G(v_7) \leq d_G(v_8) \leq \cdots \leq d_G(v_{k+8}) \leq k + 7,$$

而 $\frac{1}{2}[(n-1)(3(k+2) + 3(k+4) + (k+2)(k+7)) + 3(k+2)^2 + 3(k+4)^2 + (k+2)(k+7)^2] = k^3 + 22k^2 + 125k + 191 < k^3 + 22k^2 + 128k + 207$，矛盾。
T于是 $i = k + 3$。由引理 2.4，我们有 $d_G(v_4) \leq k + 3$, $d_G(v_5) \leq k + 3$。那么

$$d_G(v_1) \leq d_G(v_2) \leq \cdots \leq d_G(v_5) \leq k + 3,\ d_G(v_6) \leq d_G(v_7) \leq \cdots \leq d_G(v_{k+8}) \leq k + 7. \quad (4)$$

结合定理 3.2 的条件和不等式（4），我们有

$$\begin{aligned} k^3 + 22k^2 + 128k + 207 &\leq RDD(G) \\ &\leq \frac{1}{2}\left((n-1)\sum_{v_i \in V(G)} d_G(v_i) + \sum_{v_i \in V(G)} d_G^2(v_i)\right) \\ &\leq \frac{1}{2}[(n-1)(5(k+3) + (k+3)(k+7)) + 5(k+3)^2 + (k+3)(k+7)^2] \\ &= k^3 + 22k^2 + 131k + 222. \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} & RDD(G) - \frac{1}{2}\left((n-1)\sum_{j=1}^{5} d_G(v_j) + \sum_{j=1}^{5} d_G^2(v_j)\right) \\ \geq & k^3 + 22k^2 + 128k + 207 - \frac{1}{2}[5(n-1)(k+3) + 5(k+3)^2] \\ = & k^3 + 17k^2 + 88k + 132. \end{aligned}$$

由于 $\frac{1}{2}[(n-1)((k+1)(k+7)+2(k+6)) + (k+1)(k+7)^2 + 2(k+6)^2] = k^3 + 17k^2 + 88k + 127 < k^3 + 17k^2 + 88k + 132$，因此至少有 $k + 2$ 个度为 $k + 7$ 的顶点，位于 $d_G\ v_6\ \ d_G\ v_7\ \ \cdots\ \ d_G\ v_{k+8}$ $\frac{1}{2}[\ n-1\ d_G\ v_6\ + d_G^2\ v_6\ ] \geq k^3 + 17k^2 + 88k + 132 - \frac{1}{2}[\ n-1\ \ k+2\ \ k+7\ +\ k+2\ \ k+7\ ^2] = k^2 + 11k + 34$ ( ) ( ) , ( ) 中。根据 ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) 以及 $k^3 + 22k^2 + 128k + 207 \leq RDD\ G\ \leq k^3 + 22k^2 + 131k + 222$ $d_G\ v_6\ = k + 7$ ( )，我们可以得到 ( ) 和

$$d_G(v_1) = d_G(v_2) = \cdots = d_G(v_5) = k + 3,\ d_G(v_6) = d_G(v_7) = \cdots = d_G(v_{k+8}) = k + 7.$$

因此，$G \cong K_{k+3} \vee 5K_1$ 对于 $k \geq 3$ 是 k-叶连通的。对于 $k = 2$，可以验证 $G \cong K_5 \vee 5K_1$ 不具备哈密顿连通性，因此 $G \cong K_5 \vee 5K_1$ 不是 2-叶连通的。□

定理 3.3. 设 G 是一个阶为 $n \geq k+5$、最小度为 $\delta \geq k+1$ 的连通图，其中 $2 \leq k \leq n-5$。如果

$$HM(G) \geq 2n^4 - 22n^3 + (12k+102)n^2 - (48k+210)n + 4k^3 + 12k^2 + 64k + 164,$$

那么，除非 $G \in \{K_5 \vee 5K_1, K_4 \vee 4K_1\}$， G 是一个 k-叶连通图。

证明。反证，假设 G 不是 k-叶连通的，其中 $2 \leq k \leq n-5$ 和 $\delta \geq k+1$。设 G 的度序列为 $d_G(v_1) \leq d_G(v_2) \leq \cdots \leq d_G(v_n)$。由引理 2.3，存在正整数 i，满足 $k \leq i \leq \frac{n+k-2}{2}$，使得 $d_G(v_{i-k+1}) \leq i$ 且 $d_G(v_{n-i}) \leq n-i+k-2$。因此，接下来我们考虑 $k+1 \leq \delta \leq d_G(v_{i-k+1}) \leq i \leq \frac{n+k-2}{2}$。然后

$$\begin{aligned}
HM(G) =& \sum_{v_iv_j \in E(G)} \Big(d_G(v_i) + d_G(v_j)\Big)^2 \\
\leq& 2\sum_{j=1}^{n} d_G^3(v_j) \\
\leq& 2\left(\sum_{j=1}^{i-k+1} d_G^3(v_j) + \sum_{j=i-k+2}^{n-i} d_G^3(v_j) + \sum_{j=n-i+1}^{n} d_G^3(v_j)\right) \\
\leq& 2[(i-k+1)i^3 + (n-2i+k-1)(n-i+k-2)^3 + i(n-1)^3] \\
=& 6i^4 - (14n+16k-28)i^3 + (18n^2+36kn-66n+18k^2-66k+60)i^2 - \\
& (8n^3+30kn^2-48n^2+30k^2n-108kn+90n+10k^3-54k^2+96k-54)i + \\
& 2n^4+8kn^3-14n^3+12k^2n^2-42kn^2+36n^2+8k^3n-42k^2n+72kn-40n + \\
& 2k^4-14k^3+36k^2-40k+16.
\end{aligned}$$

Let

$$\begin{aligned}
l(x) =& 6x^4 - (14n+16k-28)x^3 + (18n^2+36kn-66n+18k^2-66k+60)x^2 - \\
& (8n^3+30kn^2-48n^2+30k^2n-108kn+90n+10k^3-54k^2+96k-54)x,
\end{aligned}$$

其中 $k+1 \leq x \leq \frac{n+k-2}{2}$。对 $l(x)$ 求一阶和二阶导数，得到

$$\begin{aligned}
l'(x) =& 24x^3 - 3(14n+16k-28)x^2 + 2(18n^2+36kn-66n+18k^2-66k+60)x - \\
& (8n^3+30kn^2-48n^2+30k^2n-108kn+90n+10k^3-54k^2+96k-54)
\end{aligned}$$

and

$$l''(x) = 72x^2 - 6(14n+16k-28)x + 2(18n^2+36kn-66n+18k^2-66k+60).$$

由于 $\frac{n+k-2}{2} < -\frac{-6(14n+16k-28)}{2\times 72} = \frac{7n+8k-14}{12}$，且

$$l''\left(\frac{n+k-2}{2}\right) = 12n^2 + (18k-36)n + 6k^2 - 24k + 24 > 0.$$

因此， $l(x)$在$x \in [k+1, \frac{n+k-2}{2}]$上是一个凹函数。由于 x 是整数，我们有$l(x) \leq max\{l(k+1)\ l(\lfloor\frac{n+k-2}{2}\rfloor)\}$。直接计算可得

$$l(k+1) = -(8k+8)n^3 - (12k^2-54k-66)n^2 - (8k^3-42k^2+120k+170)n -$$

$$2k^4+18k^3-24k^2+104k+148.$$

如果 $n+k-2$ 是奇数，那么

$$\begin{aligned} l\left(\lfloor\frac{n+k-2}{2}\rfloor\right) =&l\left(\frac{n+k-3}{2}\right)\\ =&-\frac{7}{8}n^4-(\frac{27}{4}k-\frac{29}{4})n^3-(12k^2-39k+21)n^2-(\frac{33}{4}k^3-\frac{177}{4}k^2+\frac{279}{4}k-\\ &\frac{99}{4})n-\frac{17}{8}k^4+\frac{31}{2}k^3-\frac{159}{4}k^2+\frac{81}{2}k-\frac{81}{8}\end{aligned}$$

且对于 $n\geq k+9$

$$\begin{aligned} &l(k+1)-l\left(\frac{n+k-3}{2}\right)\\ =&\frac{1}{8}(n-k-5)(7n^3-(3k+87)n^2-(3k^2-18k-216)n-k^3-15k^2-51k-253)>0.\end{aligned}$$

如果 $n+k-2$ 为偶数，那么

$$\begin{aligned} l\left(\lfloor\frac{n+k-2}{2}\rfloor\right) =&l\left(\frac{n+k-2}{2}\right)\\ =&-\frac{7}{8}n^4-(\frac{27}{4}k-\frac{17}{2})n^3-(12k^2-21k+27)n^2-(\frac{33}{4}k^3-\frac{87}{2}k^2+72k-\\ &35)n-\frac{17}{8}k^4+15k^3-39k^2+43k-16\end{aligned}$$

以及对于 $n\geq k+11$

$$\begin{aligned} &l(k+1)-l\left(\frac{n+k-2}{2}\right)\\ =&\frac{1}{8}(n-k-4)(7n^3-(3k+104)n^2-(3k^2-4k-328)n-k^3-20k^2-40k-328)>0,\end{aligned}$$

这意味着 $l(x)\leq l(k+1)$。因此

$$HM(G)\leq 2n^4-22n^3+(12k+102)n^2-(48k+210)n+4k^3+12k^2+64k+164.$$

接下来，我们考虑是否包含 $i=k+1$ 的各个子情形。

情况 1：如果 $i=k+1$。

根据上述讨论，我们有

$$HM(G)=2n^4-22n^3+(12k+102)n^2-(48k+210)n+4k^3+12k^2+64k+164.$$

那么，定理 3.3 证明中的所有不等式都应取等号。我们有

$$d_G(v_1)=d_G(v_2)=k+1,\ d_G(v_3)=d_G(v_4)=\cdots=d_G(v_{n-k-1})=n-3,$$

$$d_G(v_{n-k})=d_G(v_{n-k+1})=\cdots=d_G(v_n)=n-1.$$

因此，对于 $k\geq 3$，$G\cong K_{k+1}\vee(K_{n-k-3}+2K_1)$ 是 k-叶连通的。对于 $k=2$，可以验证 $G\cong K_3\vee(K_{n-5}+2K_1)$ 并非哈密顿连通，但这与$2\sum_{v_iv_j\in E(G)}d_G(v_i)d_G(v_j)=\sum_{v_iv_j\in E(G)}(d_G^2(v_i)+d_G^2(v_j))$ 相矛盾。

情况 2：如果 $i \neq k+1$，我们有 $k+2 \leq i \leq \frac{n+k-2}{2}$。
根据上述讨论，我们只需考虑其他子情况 $n = k+6$、$n = k+7$、$n = k+8$ 和 $n = k+10$。

子情况 2.1：$n = k+6$。
由引理 2.4 可得 $d_G(v_3) \leq k+2$，$d_G(v_4) \leq k+2$。于是

$$d_G(v_1) \leq d_G(v_2) \leq d_G(v_3) \leq d_G(v_4) \leq k+2,\ d_G(v_5) \leq d_G(v_6) \leq \cdots \leq d_G(v_{k+6}) \leq k+5. \quad (5)$$

结合定理 3.3 的条件和不等式 (5)，可得

$$\begin{aligned} 2k^4+42k^3+246k^2+574k+416 \leq HM(G) &\leq 2\sum_{j=1}^{k+6} d_G^3(v_j) \\ &\leq 2(4(k+2)^3+(k+2)(k+5)^3) \\ &= 2k^4+42k^3+258k^2+646k+564. \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} 2(d_G^3(v_5)+d_G^3(v_6)+\cdots+d_G^3(v_{k+6})) &= HM(G) - 2\sum_{j=1}^{4} d_G^3(v_j) \\ &\geq 2k^4+42k^3+246k^2+574k+416-8(k+2)^3 \\ &= 2k^4+34k^3+198k^2+478k+352. \end{aligned}$$

由于 $2(k(k+5)^3+2(k+4)^3) = 2k^4+34k^3+198k^2+442k+256 < 2k^4+34k^3+198k^2+478k+352$，因此在 $d_G(v_5)$ $d_G(v_6)\ldots, d_G(v_{k+6})$ 中，至少有 $k+1$ 个度为 $k+5$ 的顶点。根据 $2d_G^3(v_5)$ $\geq 2k^4+34k^3+198k^2+478k+352-2(k+1)(k+5)^3 = 2k^3+18k^2+78k+102$ 和 $2k^4+42k^3+246k^2+574k+416 \leq HM(G) \leq 2k^4+42k^3+258k^2+646k+564$，可得 $d_G(v_5) = k+5$，并且

$$d_G(v_1) = d_G(v_2) = d_G(v_3) = d_G(v_4) = k+2,\ d_G(v_5) = d_G(v_6) = \cdots = d_G(v_{k+6}) = k+5.$$

因此，$G \cong K_{k+2} \vee 4K_1$ 对于 $k \geq 3$ 是 k-叶连通的。对于 $k = 2$，可以验证 $G \cong K_4 \vee 4K_1$ 不是哈密顿连通的，因此 $G \cong K_4 \vee 4K_1$ 不是 2-叶连通的。子情况 2.2：$n = k+7$。

注意到 $i = k+2$，我们有 $d_G(v_3) \leq k+2$, $d_G(v_5) \leq k+3$ 以及度序列。 ce

$$d_G(v_1) \leq d_G(v_2) \leq d_G(v_3) \leq k+2,\ d_G(v_4) \leq d_G(v_5) \leq k+3,$$

$$d_G(v_6) \leq d_G(v_7) \leq \cdots \leq d_G(v_{k+7}) \leq k+6.$$

如果 G 的度序列是

$$d_G(v_1) = d_G(v_2) = d_G(v_3) = k+2,\ d_G(v_4) = d_G(v_5) = k+3,$$

$$d_G(v_6) = d_G(v_7) = \cdots = d_G(v_{k+7}) = k+6.$$

我们有 $G \cong K_{k+2} \vee (K_2 + 3K_1)$ 和

$$HM(G) \leq HM(K_{k+4} \vee 6K_1) = \sum_{v_iv_j \in E(G)} \Big(d_G(v_i)+d_G(v_j)\Big)^2 = 2k^4+50k^3+360k^2+912k+756,$$

这与 $HM(G) \geq 2k^4+50k^3+360k^2+1044k+948$ 矛盾。
子情形 2.3： $n=k+8$。
注意 $k+2 \leq i \leq \frac{n+k-2}{2} = k+3$。对于 $i=k+2$，我们有

$$d_G(v_1) \leq d_G(v_2) \leq d_G(v_3) \leq k+2,\ d_G(v_5) \leq d_G(v_5) \leq d_G(v_6) \leq k+4,$$

$$d_G(v_7) \leq d_G(v_8) \leq \cdots \leq d_G(v_{k+8}) \leq k+7,$$

而 $2(3(k+2)^3+3(k+4)^3+(k+2)(k+7)^3) = 2k^4+58k^3+486k^2+1634k+1804 < 2k^4+58k^3+498k^2+1742k+1940$，矛盾。
则 $i=k+3$。根据引理 2.4，我们有 $d_G(v_4) \leq k+3, d_G(v_5) \leq k+3$。则

$$d_G(v_1) \leq d_G(v_2) \leq \cdots \leq d_G(v_5) \leq k+3,\ d_G(v_6) \leq d_G(v_7) \leq \cdots \leq d_G(v_{k+8}) \leq k+7. \quad (6)$$

结合定理 3.3 的条件和不等式 (6)，我们得到

$$\begin{aligned} 2k^4+58k^3+498k^2+1742k+1940 \leq HM(G) &\leq 2\sum_{j=1}^{k+8} d_G^3(v_j) \\ &\leq 2(5(k+3)^3+(k+3)(k+7)^3) \\ &= 2k^4+58k^3+510k^2+1838k+2328. \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} 2(d_G^3(v_6)+d_G^3(v_7)+\cdots+d_G^3(v_{k+8})) =& HM(G) - \sum_{j=1}^{5} d_G^3(v_j) \\ \geq& 2k^4+58k^3+498k^2+1742k+1940-10(k+3)^3 \\ =& 2k^4+48k^3+408k^2+1472k+1670. \end{aligned}$$

由于 $2((k+1)(k+7)^3+2(k+6)^3) = 2k^4+48k^3+408k^2+1412k+1550 < 2k^4+48k^3+408k^2+1472k+1670$，因此在$d_G(v_6)\ d_G(v_7)\ldots, d_G(v_{k+8})$中至少有 $k+2$ 个度为 $k+7$ 的顶点。
根据 $2d_G^3(v_6) \geq 2k^4+48k^3+408k^2+1472k+1670-2(k+2)(k+7)^3 = 2k^3+30k^2+198k+98$ 和 $2k^4+58k^3+498k^2+1742k+1940 \leq HM(G) \leq 2k^4+58k^3+510k^2+1838k+2328$，我们可以得到 $d_G(v_6) = k+7$ 以及

$$d_G(v_1) = d_G(v_2) = \cdots = d_G(v_5) = k+3,\ d_G(v_6) = d_G(v_7) = \cdots = d_G(v_{k+8}) = k+7.$$

因此， $G \cong K_{k+3} \vee 5K_1$ 对于 $k \geq 3$ 是 k-叶连通的。对于 $k=2$，可以验证$G \cong K_5 \vee 5K_1$ 不是哈密顿连通的，因此， $G \cong K_5 \vee 5K_1$ 不是 2-叶连通的。子情形 2.3： $n=k+10$。

注意，$k+2 \leq i \leq \frac{n+k-2}{2} = k+4$。对于 $i=k+2$，我们有

$$d_G(v_1) \leq d_G(v_2) \leq d_G(v_3) \leq k+2,\ d_G(v_4) \leq d_G(v_5) \leq \cdots \leq d_G(v_8) \leq k+6,$$

$$d_G(v_9) \leq d_G(v_{10}) \leq \cdots \leq d_G(v_{k+10}) \leq k+9,$$

然而，$2(3(k+2)^3+5(k+6)^3+(k+2)(k+9)^3) = 2k^4+74k^3+810k^2+3582k+5124 < 2k^4+74k^3+846k^2+4014k+6264$，矛盾。
对于 $i=k+3$。根据引理 2.4，我们有 $d_G(v_4) \leq k+3, d_G(v_7) \leq k+5$。然后

$$d_G(v_1) \leq d_G(v_2) \leq d_G(v_3) \leq d_G(v_4) \leq k+3,\ d_G(v_5) \leq d_G(v_6) \leq d_G(7) \leq k+5,$$

$$d_G(v_8) \le d_G(v_9) \cdots \le d_G(v_{k+10}) \le k+9,$$

而 $2(4(k+3)^3 + 3(k+5)^3 + (k+3)(k+9)^3) = 2k^4 + 74k^3 + 810k^2 + 3582k + 5340 < 2k^4 + 74k^3 + 846k^2 + 4014k + 6264$，这就产生了矛盾。

对于 $i = k+4$。根据引理 2.4，我们有 $d_G(v_5) \le k+4$, $d_G(v_6) \le k+4$。该 n

$$d_G(v_1) \le d_G(v_2) \le \cdots \le d_G(v_6) \le k+4,\ d_G(v_7) \le d_G(v_8) \le \cdots \le d_G(v_{k+10}) \le k+9,$$

如果 G 的度序列为

$$d_G(v_1) = d_G(v_2) = \cdots = d_G(v_6) = k+4,\ d_G(v_7) = d_G(v_8) = \cdots = d_G(v_{k+10}) = k+9.$$

我们有 $G \cong K_{k+4} \vee 6K_1$ 和

$$HM(G) \le HM(K_{k+4} \vee 6K_1) = \sum_{v_iv_j \in E(G)} \Big(d_G(v_i) + d_G(v_j)\Big)^2 = 2k^4 + 74k^3 + 846k^2 + 3678k + 5400,$$

这与 $HM(G) \ge 2k^4 + 74k^3 + 846k^2 + 4014k + 6264$ 矛盾。 □

定理 3.4。设 G 是一个阶为 $n \ge k+5$、最小度为 $\delta \ge k+1$ 的连通图，其中 $2 \le k \le n-5$。如果

$$M_2(G) \ge \frac{1}{2}n^4 - \frac{11}{2}n^3 + \frac{6k+51}{2}n^2 - \frac{24k+105}{2}n + k^3 + 3k^2 + 16k + 41,$$

那么 G 是一个 k-叶连通图，除非 $G \in \{K_5 \vee 5K_1, K_4 \vee 4K_1\}$。

证明。我们假设 G 不是 k-叶-连通的，结合定理 3.3 的证明与第二 Zagreb 指数的定义 $M_2(G)$，可得

$$\begin{aligned} M_2(G) =& \sum_{v_iv_j \in E(G)} d_G(v_i) d_G(v_j) \\ \le& \frac{1}{4} \sum_{v_iv_j \in E(G)} (d_G(v_i) + d_G(v_j))^2 \\ \le& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} d_G^3(v_i) \\ \le& \frac{1}{2}n^4 - \frac{11}{2}n^3 + \frac{6k+51}{2}n^2 - \frac{24k+105}{2}n + k^3 + 3k^2 + 16k + 41, \end{aligned}$$

除非 $G \in \{K_5 \vee 5K_1, K_4 \vee 4K_1\}$。 □

4 关于 $\overline{G}$ 的第一 Zagreb 指数和超 Zagreb 指数条件，以使 G 成为 k-叶连通图

定理 4.1. 设 G 是一个阶为 $n \geq k+17$、最小度为 $\delta \geq k+1$ 的连通图，其中 $2 \leq k \leq n-17$。如果

$$M_1(\overline{G}) \leq (n-k)[3(n-k)-11],$$

那么，除非 $cl_{n+k-1}(G) \in \{K_k \vee (K_{n-k-2}+K_2)\ K_3 \vee (K_{n-5}+2K_1)\}$，否则 G 是 k-叶连通的。

证明。反证，假设 G 不是 k-叶连通的，其中 $2 \leq k \leq n-17$和 $\delta \geq k+1$。令 $H = cl_{n+k-1}(G)$，则由引理 2.4，H 不是 k-叶连通的。对于 H中的任意两个非邻接顶点 v_i和 v_j，有 $d_H(v_i) + d_H(v_j) \leq n+k-2$。因此，对于 $\overline{H}$中的任意两个邻接顶点 v_i 和v_j，有

$$d_{\overline{H}}(v_i) + d_{\overline{H}}(v_j) = n-1-d_H(v_i) + n-1-d_H(v_j) \geq n-k.$$

根据第一 Zagreb 指数的定义，得到

$$M_1(\overline{H}) = \sum_{v_i \in V(\overline{H})} d^2_{\overline{H}}(v_i) = \sum_{v_i v_j \in E(\overline{H})} (d_{\overline{H}}(v_i) + d_{\overline{H}}(v_j)) \geq (n-k)e(\overline{H}).$$

由于 H 不是 k-叶连通图，由引理 2.5，得到 $e(H) \leq \binom{n-3}{2} + 3k + 4$ 或$e(H) \geq \binom{n-3}{2} + 3k + 5$且 $H \in \{K_k \vee (K_{n-k-2}+K_2)\ K_3 \vee (K_{n-5}+2K_1)\ K_4 \vee (K_{n-7}+3K_1)\}$。若 $e(H) \leq \binom{n-3}{2} + 3k + 4$，注意到 $\overline{H} \subseteq \overline{G}$，则

$$\begin{aligned} M_1(\overline{G}) \geq & M_1(\overline{H}) \geq (n-k)e(\overline{H}) \geq (n-k)\left[\binom{n}{2} - \binom{n-3}{2} - 3k - 4\right] \\ = & (n-k)[3(n-k)-10]. \end{aligned}$$

容易检查，对于 $n \neq k$，$(n-k)[3(n-k)-11] < (n-k)[3(n-k)-10]$，这与定理 4.1 的条件相矛盾。

如果 $e(H) \geq \binom{n-3}{2} + 3k + 5$，则 $H \in \{K_k \vee (K_{n-k-2}+K_2)\ K_3 \vee (K_{n-5}+2K_1)\ K_4 \vee (K_{n-7}+3K_1)\}$。直接计算可得。

$$M_1(\overline{K_k \vee (K_{n-k-2}+K_2)}) = 2(n-k)(n-k-2),$$

$$M_1(\overline{K_3 \vee (K_{n-5}+2K_1)}) = 2(n^2-6n+6)$$

and

$$M_1(\overline{G}) \geq M_1(\overline{K_4 \vee (K_{n-7}+3K_1)}) = 3(n^2-7n+4).$$

我们无法比较完整的 $M_1(\overline{G})$ 与 $(n-k)[3(n-k)-11]$ for $H \in \{K_k \vee (K_{n-k-2}+K_2)\ K_3 \vee (K_{n-5}+2K_1)\}$。因此，$cl_{n+k-1}(G) = H \in \{K_k \vee (K_{n-k-2}+K_2)\ K_3 \vee (K_{n-5}+2K_1)\}$。□

定理 4.2. 设 G 是一个阶为 $n \geq k+17$、最小度为 $\delta \geq k+1$ 的连通图，其中 $2 \leq k \leq n-17$。若

$$HM(\overline{G}) \leq (n-k)^2[3(n-k)-11],$$

那么，除非 $cl_{n+k-1}(G) \in \{K_k \vee (K_{n-k-2}+K_2)\ K_3 \vee (K_{n-5}+2K_1)\}$，否则 G 是 k-叶连通的。

证明。反证，假设 G 不是 k-叶连通的，其中 $2 \leq k \leq n-17$和 $\delta \geq k+1$。令 $H = cl_{n+k-1}(G)$，则由引理 2.4，H 不是 k-叶连通的。对于 H中的任意两个非邻接顶点 v_i和 v_j，有 $d_H(v_i) + d_H(v_j) \leq n+k-2$。因此，对于 $\overline{H}$中的任意两个邻接顶点 v_i 和v_j，有

$$d_{\overline{H}}(v_i) + d_{\overline{H}}(v_j) = n-1-d_H(v_i) + n-1-d_H(v_j) \geq n-k.$$

根据超 Zagreb 指数的定义，我们得到

$$HM(\overline{H}) = \sum_{v_iv_j \in E(\overline{H})} (d_{\overline{H}}(v_i) + d_{\overline{H}}(v_j))^2 \geq (n-k)^2 e(\overline{H}).$$

由于 H 不是 k-叶连通图，根据引理 2.5，我们有 $e(H) \leq \binom{n-3}{2} + 3k + 4$ 或$e(H) \geq \binom{n-3}{2} + 3k + 5$且 $H \in \{K_k \vee (K_{n-k-2} + K_2)\ K_3 \vee (K_{n-5} + 2K_1)\ K_4 \vee (K_{n-7} + 3K_1)\}$。若 $e(H) \leq \binom{n-3}{2} + 3k + 4$，注意到 $\overline{H} \subseteq \overline{G}$，则

$$\begin{aligned} HM(\overline{G}) \geq & HM(\overline{H}) \geq (n-k)^2 e(\overline{H}) \geq (n-k)^2 \left[\binom{n}{2} - \binom{n-3}{2} - 3k - 4 \right] \\ = & (n-k)^2[3(n-k) - 10]. \end{aligned}$$

容易验证，当 $n \neq k$ 时，$(n-k)^2[3(n-k) - 10] > (n-k)^2[3(n-k) - 11]$，这与定理 4.2 的条件矛盾。
若 $e(H) \geq \binom{n-3}{2} + 3k + 5$，则 $H \in \{K_k \vee (K_{n-k-2} + K_2)\ K_3 \vee (K_{n-5} + 2K_1)\ K_4 \vee (K_{n-7} + 3K_1)\}$。注意到 $H \subseteq G$，通过直接计算可得。

$$HM(\overline{K_k \vee (K_{n-k-2} + K_2)}) = 2(n-k)(n-k-2),$$

$$HM(\overline{K_3 \vee (K_{n-5} + 2K_1)}) = 2n^3 - 14n^2 + 16n + 24$$

and

$$HM(\overline{G}) \geq M_1(\overline{K_4 \vee (K_{n-7} + 3K_1)}) = 3n^3 - 21n^2 - 24n + 216.$$

因此，它们都与定理 4.2 的条件矛盾。假设 $H \in \{K_k \vee (K_{n-k-2} + K_2)\ K_3 \vee (K_{n-5} + 2K_1)\}$，我们无法比较完全的 $HM(\overline{G})$ 与 $(n-k)^2[3(n-k) - 11]$。因此，$cl_{n+k-1}(G) = H \in \{K_k \vee (K_{n-k-2} + K_2)\ K_3 \vee (K_{n-5} + 2K_1)\}$。□

参考文献

[1] Y. Alizadeh、A. Iranmanesh、T. Doˇsli´c，若干复合图的加性加权 Harary 指数，Discrete Math. 313 (2013) 26–34。[2]M.Q. An，图的第一 Zagreb 指数、倒数度距离与 Hamilton 连通性，Inform. Process. Lett. 176 (2022) 106247。[3] G.Y. Ao、R.F. Liu、J.J. Yuan、R. Li，关于 k叶连通图的改进充分条件，Discrete Appl. Math. 314 (2022) 17–30。[4] G.Y. Ao、R.F. Liu、J.J. Yuan、G.L. Yu，Wiener 型不变量与 k叶连通图，Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 46 (2023) 10。

[5] J.A. Bondy、V. Chvatal，图论中的一种方法，Discrete Math. 15 (1976) 111–135。[6] J.A. Bondy、U.S.R. Murty，《图论》，数学研究生教材，第244卷，施普林格，纽约，2008。[7] A.E. Brouwer、W.H. Haemers，《图的谱》，施普林格，柏林，2011。[8] M.Z. Chen、X.D. Zhang，图的边数、谱半径与哈密顿连通性，组合优化杂志 35 (2018) 1104–1127。[9] C.D. Godsil、G. Royle，《代数图论》，数学研究生教材，第207卷，施普林格，纽约，2001。[10] M.A. Gurgel、Y. Wakabayashi，关于 k叶连通图，组合理论杂志 B辑 41 (1986) 1–16。[11] I. Gutman、N. Trinajsti´c，图论与分子轨道：交替烃的总 φ电子能，化学物理快报 17 (1972) 535–538。[12] H.B. Hua、S.G. Zhang，关于图的倒数度距离，Discrete Appl. Math. 160 (2012) 1152–1163。[13] H.C. Jia、R.F. Liu、X. Du，哈密顿连通图和可迹图上的维纳指数与Harary 指数，组合艺术 141 (2018) 53–62。[14] M.H. Khalifeh、H. Yousefi-Azari、A.R. Ashrafi，若干图运算的第一和第二萨格勒布指数，Discrete Appl. Math. 157 (2009) 804–811。[15]Y. Lu、Q.N. Zhou，关于图哈密顿性的超萨格勒布指数条件，捷克斯洛伐克数学杂志 72 (2022) 653–662。[16] T.Y. Ma、G.Y. Ao、R.F. Liu、L.G. Wang、Y. Hu， k叶连通图充分条件的改进，Discrete Appl. Math. 331 (2023) 1–10。[17] O. Ore，哈密顿连通图，纯粹与应用数学杂志 42 (1963) 21–27。[18] G.V. Rajasekharaiah、U.P. Murthy，图的超 Zagreb 指数及其应用，代数、组合与离散结构应用杂志 8 (2021) 9–22。[19] J. Wei、Z.F. You、H.J. Lai，Erd˝os 关于哈密顿连通图的定理的谱类比，应用数学与计算 340 (2019) 242–250。[20] G.D. Yu、Y.Z. Fan，图为哈密顿连通图的谱条件，应用力学与材料 336-338 (2013) 2329–2334。[21] Q.N. Zhou、L.G. Wang，关于哈密顿连通图和可迹图的一些充分谱条件，线性与多重线性代数 65 (2017) 224–234。[22] Q.N. Zhou、L.G. Wang、Y. Lu，根据（无符号拉普拉斯矩阵）谱半径给出的哈密顿连通图充分条件，线性代数及其应用 594 (2020) 205–225。[23] Q.N. Zhou、L. G. Wang、Y. Lu，最小度较大的哈密顿连通图的无符号拉普拉斯矩阵谱条件，线性代数及其应用 592 (2020) 48–64。[24] Q.N. Zhou、L.G. Wang、Y. Lu，图的Wiener 型不变量与哈密顿性质，Filomat 33 (2019) 4045–4058。