arXiv:2304.07108v3 [q-fin.MF] 6 Jan 2025

# 指数效用下的平均场均衡价格形成 *

Masaaki Fujii†, MasashiSekine ‡

第 1 版：2023 年 10 月 10 日 本版本：
2025 年 1 月 6 日

摘要

本文运用平均场博弈理论，研究存在证券价格无法涵盖的负债时，众多采用指数效用的投资者之间的均衡价格形成问题。投资者的初始财富、风险厌恶参数以及终端时刻的随机负债各不相同。我们通过一个新型平均场后向随机微分方程（BSDE）的解来刻画风险股票的均衡风险溢价过程，该方程的驱动项在随机积分项及其条件期望方面均具有二次增长。我们证明，在若干条件下，该平均场倒向随机微分方程存在解，并表明由此得到的风险溢价过程确实能在大群体极限下实现市场出清。

关键词：平均场博弈理论、均衡价格形成、指数效用、最优鞅原理、McKean-Vlasov 型

## 1 引言

均衡价格形成理论的核心目标，是求出能够使金融市场达到均衡的资产价格。均衡价格是指这样一类价格：在给定这些资产价格的情况下，所有代理人的最优决策使每种资产的总需求等于其总供给。构建均衡价格并研究其性质，是金融经济学中的主要议题之一。有关这一主题的详细内容，参见 Back [1] 和 Munk [45] 。完备市场中的市场均衡存在性众所周知，详情可见 Karatzas & Shreve [35]。然而，除 Cuoco & He [8]所研究的有限维经济模型等情形外，不完备市场中的情况尚不明朗。尽管已有研究推导出代表性主体存在的一组充分条件，但要在具体模型中验证这些条件，涉及困难的数学问题，至今仍未解决。参见 Jarrow [32, 第 14.5] 节及其中的参考文献。尤其是，众所周知，当存在无法由证券价格对冲的特异性负债、劳动收入或禀赋时，要对均衡价格作出具体刻画非常困难。这种情况相当令人不满，因为我们可以设想，形形色色的

*即将在 *Stochastics and Dynamics*发表。本研究中表达的所有内容仅代表作者个人观点，并不代表任何机构的观点或意见。对于因使用本研究中的任何内容而造成的任何损失和／或损害，作者概不负责。

†mfujii@e.u-tokyo.ac.jp, https://orcid.org/0000-0002-3332-068X, 东京大学经济学研究生院，日本东京

‡sekinemasashi@g.ecc.u-tokyo.ac.jp, https://orcid.org/0009-0002-5042-9895, 东京大学经济学研究生院，日本东京

代理人之间由这些因素引发的特异冲击，正是我们在金融市场中观察到活跃交易的原因。本文借助均场博弈（MFG）理论的最新进展，提出一种简洁的新方法，以解决指数效用下不完备市场中的均衡价格形成问题。

自 Lasry & Lions [42, 43, 44] 和 Huang 等 [29, 30, 31], 的开创性研究以来，均场博弈理论取得了显著进展，使我们得以理解多代理人博弈中一些由来已久的问题。如果代理人之间的相互作用是对称的，那么在大群体极限下，平均场博弈技术能够将一个非常复杂的问题转化为两个彼此独立且更简单的问题：代表性主体的优化问题，以及寻找不动点的问题。原本需要求解一个大型耦合方程组来刻画纳什均衡的问题，由此变得可行。由此得到的均场均衡解已知能够为原本代理人数量庞大但有限的博弈提供一个 $\epsilon$-纳什均衡。均场博弈理论的详情及其诸多应用，可参见 Carmona & Delarue [6, 7]的两卷著作以及 Cardaliaguet [5]的讲义。

我们希望内生地构建风险股票的价格过程（更准确地说，是相应的风险溢价过程），使其能够平衡大量金融公司之间的需求与供给；这些公司既面临整个市场范围内的共同噪声，也面临各自的特质噪声。遗憾的是，这种市场出清条件与纳什均衡的概念并不十分契合。事实上，如果我们改变某个代理人的交易策略，使其偏离均衡解，同时保持其他代理人的策略不变，那么需求与供给的平衡不可避免地会被打破。由于均场博弈理论主要是围绕纳什博弈发展起来的，其大多数应用都没有处理市场出清均衡。事实上，许多现有案例的主要关注点并非价格形成，资产价格过程通常被假定为外生给定。例如，关于采用指数型和幂型效用的最优投资问题，可参见 [10, 13, 14, 15, 40] 。这些研究关注的是投资者在相对绩效准则下相互竞争时的纳什均衡，而相关价格过程则是外生给定的。

近年来，均场博弈理论在市场出清条件下的均衡价格形成问题方面也取得了进展。Gomes & Sa´ude [24] 提出了一个电价的确定性模型。Gomes 等 [22]给出了带有随机供给的扩展模型。同一作者还研究了 [23], 生产受到随机波动影响的商品价格形成问题。Evangelista 等 [11] 研究了在限价订单簿中交易的资产的价格形成，并利用多个交易所上市股票的实际高频数据，展示了颇具前景的数值结果。Shrivats 等 [47] 通过求解 McKean-Vlasov 型前向-后向随机微分方程（FBSDEs），研究了太阳能可再生能源证书（SREC）的价格形成问题；Firoozi 等 [12] 则研究了相关排放市场中的委托-代理问题。Fujii & Takahashi [18] 在存在随机订单流的情况下，求解了证券的随机均场价格模型；在 [19], 中，同一作者证明了从有限代理人数量的设定到均值场极限的强收敛。Fujii & Takahashi [20]将上述模型扩展到存在主要参与者的情形。最近，Fujii [21]构建了一个模型，允许合作型群体与非合作型群体共存，以研究当一组代理人采取协调行动时价格过程如何形成。

然而，上述所有论文仍存在两个重要限制：首先，每位代理人的相关控制被解释为相对于勒贝格测度 $dt$ 绝对连续的交易速率；其次，每位代理人的成本函数由若干项构成，分别表示对交易速度以及资产库存规模的惩罚。换言之，从金融应用的角度来看，现有研究结果既无法处理一般的自融资交易策略，也无法处理直接以……形式给出的效用函数（或成本函数）

投资组合的相关财富过程。[1] 因此，至少在金融经济学的标准传统设定下，均衡价格形成这一问题仍未得到解答。处理财富效用函数时，一个主要难题在于，难以保证与庞特里亚金最大值原理相关的哈密顿量具有凸性，也难以获得足够的正则性来证明相关前向后向随机微分方程组的适定性。

本文采用 Hu、Imkeller 与 M¨uller [26] 的方法和均值场博弈理论，研究风险股票的均衡价格形成，以解决上述两个问题。不同于采用 [26], 方法的现有研究（如 [14, 15], ），这类研究得到了具有相对绩效准则的均值场博弈均衡；本文则为价格形成问题建立市场出清均衡。我们的目标是内生地构造风险溢价过程，使大量金融公司（代理人）之间相关股票的需求与供给始终保持平衡，并允许这些公司采用一般的自融资交易策略。我们假设代理人具有相同类型的偏好，即对财富具有指数效用。代理人的初始财富、风险厌恶参数的大小以及终端时刻的随机负债各不相同。我们允许负债（不局限于正值）同时依赖共同噪声和特质噪声，从而能够描述每位代理人的特异冲击以及整个市场范围内的金融冲击。例如，由于代理人是金融公司，假设其拥有大量衍生品负债是符合实际的。尽管金融合约所规定的收益通常只取决于共同信息，但合约数量自然也可能取决于每位代理人的特异信息，例如其企业规模、企业文化和客户群。每位代理人的人员费用也可以纳入其负债。

为求解每位代理人的优化问题，我们采用 Hu、Imkeller 和 M¨uller [26], 提出的最优鞅原理，而非庞特里亚金最大值原理。他们的方法适用于许多常见的效用函数类别，例如指数型、幂型和对数型。近期，Xing [49] 运用同一方法求解了 Epstein-Zin 递归效用的优化问题。在每种情形下，刻画最优性的相关方程都由一个二次增长BSDE（qg-BSDE）给出 [39]。与现有文献不同，我们不能简单地假设风险溢价是一个有界过程，因为这一条件可能过于严格，难以实现市场出清均衡。事实上，我们将看到，一般而言，有必要放宽对风险溢价过程的有界性假设。由于关于 qg-BSDE 的标准结果无法处理其驱动项中存在这样的过程，我们需要特殊处理来证明其适定性。幸运的是，指数效用所蕴含的 BSDE 特殊结构使我们能够通过标准应用比较原理来解决这一问题。

在获得每位代理人的最优策略后，我们进一步通过一种新型平均场倒向随机微分方程来刻画均值场均衡，该方程的驱动项关于随机积分被积过程及其条件期望均具有二次增长。这种新型倒向随机微分方程本身也颇具研究价值，因为同类方程或许也适用于将均值场均衡应用于其他效用函数的类似问题。本文的主要贡献是：我们在若干条件下证明了该新型平均场倒向随机微分方程的解存在，并进一步证明，由其解表示的风险溢价过程确实能在大群体极限下实现市场出清。

本文的结构安排如下。第 2 节介绍一些符号之后，我们将在第3节求解每位采用指数效用的代理人的优化问题。特别地，我们着重考虑风险溢价过程无界的情形。在第4节，我们推导出一种

[1]另请参阅 Lavigne 和 Tankov 最近的一项研究 [41] ，该研究采用了截然不同的方法来考察企业间碳排放的均值场均衡。

新颖的平均场倒向随机微分方程，并证明在若干条件下其解的存在性。我们将在第5节证明，由该倒向随机微分方程的解刻画的风险溢价过程，实际上会在大群体极限下实现市场出清。最后，我们在第6节总结全文。

## 2 符号说明

全文中，$T > 0$ 表示给定的时间范围。对于定义在给定完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的随机变量和随机过程，该空间配备满足通常条件的滤过 $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$。我们采用以下约定来表示常用的函数空间：

- $\mathbb{H}^2(\mathbb{P}, \mathbb{F}; \mathbb{R}^{1\times d})$（或简记为 $\mathbb{H}^2$）表示满足下列条件的、取值于 $\mathbb{R}^{1\times d}$ 的 $\mathbb{F}$ 渐进可测过程 $Z$ 的集合

$$\|Z\|_{\mathbb{H}^2} := \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big[\int_0^T |Z_t|^2 dt\Big]^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

- $\mathbb{H}^2_{\text{有界平均振荡}}(\mathbb{P}, \mathbb{F}; \mathbb{R}^{1\times d})$（或简记为 $\mathbb{H}^2_{\text{有界平均振荡}}$）是 $\mathbb{H}^2(\mathbb{P}, \mathbb{F}; \mathbb{R}^{1\times d})$ 的子集，并满足

$$\|Z\|^2_{\mathbb{H}^2_{\text{BMO}}} := \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \Big\| \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big[\int_\tau^T |Z_t|^2 dt | \mathcal{F}_\tau\Big]\Big\|_\infty < \infty. \tag{2.1}$$

这里，$\mathcal{T}$ 是取值于 $[0,T]$ 的 $\mathbb{F}$-停时集合，$\|\cdot\|_\infty$ 表示 $\Omega$ 上的 $\mathbb{P}$-本质上确界。在这种情况下，得益于 Kazamaki 的结果 [37], ，Doléans-Dade 指数 $\mathcal{E}\Big(\int_0^\cdot Z_s dW_s\Big)_t$，$t \in [0,T]$ 已知是一致可积的（即属于 D 类），而 $\Big(\int_0^\cdot Z_s dW_s\Big)_{t\in[0,T]}$ 称为 BMO 鞅。这里，$W$ 是定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{F})$ 上的 $d$ 维标准布朗运动。作为 $Z \in \mathbb{H}^2_{\text{BMO}}$ 的一项重要性质，我们提及所谓的能量不等式：对每个 $n \in \mathbb{N}$，下列不等式成立；

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big[\Big(\int_0^T |Z_s|^2 ds\Big)^n\Big] \le n!\big(\|Z\|^2_{\mathbb{H}^2_{\text{BMO}}}\big)^n. \tag{2.2}$$

参见 [9][引理 9.6.5]。该空间用作风险溢价过程的一个类别。注释 3.5 对此选择作了一些说明。

- $\mathbb{S}^2(\mathbb{P}, \mathbb{F}; \mathbb{R}^d)$（或简称 $\mathbb{S}^2$）是取值于 $\mathbb{R}^d$、$\mathbb{F}$-适应的连续过程 $X$ satisfyin 的集合 g

$$\|X\|_{\mathbb{S}^2} := \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\big[\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^2\big]^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

- $\mathbb{S}^\infty(\mathbb{P}, \mathbb{F}; \mathbb{R}^d)$（或简称 $\mathbb{S}^\infty$）是 $\mathbb{S}^2(\mathbb{P}, \mathbb{F}; \mathbb{R}^d)$ 的一个子集，满足

$$\|X\|_{\mathbb{S}^\infty} := \big\|\sup_{t\in[0,T]} |X_t|\big\|_\infty < \infty.$$

对于一个 $m \times n$ 矩阵 $A$，我们分别用 $\text{Ker}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = 0\}$ 和 $\text{Range}(A) := \{y \in \mathbb{R}^m; y = Ax, x \in \mathbb{R}^n\}$ 表示其核和值域。当不会引起混淆时，为了记号简洁，通常省略诸如 $(\mathbb{P}, \mathbb{F}, \mathbb{R}^d)$ 这样的说明或其中一部分。

本研究第一部分所使用的相关概率空间如下所示。

• $(\Omega^0, \mathcal{F}^0, \mathbb{P}^0)$ 是一个完备概率空间，配备完备且右连续的滤过$\mathbb{F}^0 := (\mathcal{F}_t^0)_{t\in[0,T]}$，该滤过由 $d_0$ 维标准布朗运动 $W^0 := (W_t^0)_{t\in[0,T]}$ 生成。我们设 $\mathcal{F}^0 := \mathcal{F}_T^0$。此空间用于对市场整体噪声以及所有代理人共有的信息进行建模。

• $(\Omega^1, \mathcal{F}^1, \mathbb{P}^1)$ 是一个完备概率空间，配备完备且右连续的滤过$\mathbb{F}^1 := (\mathcal{F}_t^1)_{t\in[0,T]}$，该滤过由 $d$ 维标准布朗运动 $W^1 := (W_t^1)_{t\in[0,T]}$ 以及一个 $\sigma$-代数 $\sigma(\xi^1, \gamma^1)$ 生成；后者定义了 $\mathcal{F}_0^1$，并由一个有界的 $\mathbb{R}$-值随机变量$\xi^1$和一个严格为正的有界随机变量 $\gamma^1$ 生成。我们记 $\mathcal{F}^1 := \mathcal{F}_T^1$。该空间用于对代理人（代理人 1）的特质噪声和信息进行建模。在后续章节中，我们构造该空间的独立副本 $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \mathbb{P}^i)_{i\in\mathbb{N}}$，并赋予其 $\mathbb{F}^i := (\mathcal{F}_t^i)_{t\in[0,T]}$，以对大量代理人（代理人-$i$, $i \in \mathbb{N}$）的特异信息进行建模。

• $(\Omega^{0,\,1}, \mathcal{F}^{0,\,1}, \mathbb{P}^{0,\,1})$ 是定义在乘积集合 $\Omega^{0,1} := \Omega^0 \times \Omega^1$ 上的概率空间，其中 $(\mathcal{F}^{0,\,1}, \mathbb{P}^{0,\,1})$ 是 $(\mathcal{F}^0 \otimes \mathcal{F}^1, \mathbb{P}^0 \otimes \mathbb{P}^1)$ 的完备化。 $\mathbb{F}^{0,\,1} := (\mathcal{F}^{0,\,1}_{\ t})_{t\in[0,T]}$ 表示 $(\mathcal{F}_t^0 \otimes \mathcal{F}_t^1)_{t\in[0,T]}$ 的完备且右连续扩张。$\Omega^{0,1}$ 中的任意元素记作 $\omega := (\omega^0, \omega^1) \in \Omega^0 \times \Omega^1$。

• $\mathcal{T}^{0,\,1}$ 是所有取值于 $[0, T]$ 的 $\mathbb{F}^{0,\,1}$-停时的集合。

• $\mathcal{T}^0$ 是所有取值于 $[0, T]$ 的 $\mathbb{F}^0$-停时的集合。

为简化记号，在本文中，我们不区分定义在边缘概率空间上的随机变量及其到乘积空间的平凡扩张。例如，对于定义在空间 $(\Omega^0, \mathcal{F}^0, \mathbb{P}^0)$ 上的随机变量 $X(\omega^0)$，以及其到乘积空间 $(\Omega^{0,\,1}, \mathcal{F}^{0,\,1}, \mathbb{P}^{0,\,1})$ 上的平凡扩张 $X(\omega^0, \omega^1) := X(\omega^0)$，我们将使用相同的符号 $X$。

# 3 某一代理人的指数效用优化

本节研究一位偏好由指数效用表示的代理人（代理人 1）的优化问题。我们采用 Hu、Imkeller 和 M¨uller [26]提出的方法，通过二次增长BSDE刻画其最优交易策略。特别是，为了处理 [18], 中的均值场价格形成，我们需要将他们关于风险溢价过程 $\theta := (\theta_t)_{t\in[0,T]}$ 有界的假设放宽为 $\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$中的无界情形。

## 3.1 市场与效用函数

市场动态以及代理人 1 的特异性环境建立在前一节定义的滤过概率空间 $(\Omega^{0,\,1},\ \mathcal{F}^{0,\,1},\ \mathbb{P}^{0,\,1};\ \mathbb{F}^{0,\,1})$ 上。本节中，相对于 $\mathbb{P}^{0,\,1}$ 的期望简记为 $\mathbb{E}[\cdot]$。金融市场具体如下。

假设 3.1。（i）无风险利率为零。
（ii）该 存在 $n \in \mathbb{N}$ 只不支付股息的风险股票，其价格动态如下：

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mathrm{diag}(S_s)(\mu_s ds + \sigma_s dW_s^0),\ t \in [0, T] \tag{3.1}$$

其中， $S_0 := (S_0^i)_{i=1}^n$， $S_0^i > 0$ 表示初始股票价格的 $n$ 维向量； $\mu := (\mu_t)_{t\in[0,T]}$ 是一个取值于 $\mathbb{R}^n$ 的 $\mathbb{F}^0$-渐进可测过程，属于 $\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}(\mathbb{P}^0, \mathbb{F}^0)$ [2]。 $\sigma := (\sigma_t)_{t\in[0,T]}$ 是一个取值于 $\mathbb{R}^{n\times d_0}$ 的有界 $\mathbb{F}^0$-渐进可测过程，并且存在满足以下条件的正常数 $0 < \underline{\lambda} < \overline{\lambda}$

$$\underline{\lambda} I_n \le (\sigma_t \sigma_t^\top) \le \overline{\lambda} I_n, \quad dt \otimes \mathbb{P}^0\text{-}a.e.$$

这里， $I_n$ 表示 $n \times n$ 单位矩阵。

注 3.1。 $\mu \in \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$ 是一个非常强的假设。事实上，典型的高斯过程，例如奥恩斯坦-乌伦贝克过程，并不属于这一类。不过，这令人遗憾，但这一假设对于处理稍后将介绍的二次增长BSDE至关重要。

由于利率为零，风险溢价过程 $\theta := (\theta_t)_{t\in[0,T]}$ 定义为 $\theta_t := \sigma_t^\top (\sigma_t \sigma_t^\top)^{-1} \mu_t$。因此，对于任意 $t \ge 0$， $\theta_t \in \mathrm{Range}(\sigma_t^\top) = \mathrm{Ker}(\sigma_t)^\perp$。这里， $\top$ 表示转置，而$\mathrm{Ker}(\sigma_t)^\perp$ 表示 $\mathbb{R}^{d_0}$中$\mathrm{Ker}(\sigma_t)$的正交补。注意，由于过程 $\sigma$有界， $\theta$ 属于 $\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$。根据$(\sigma\sigma^\top)$的正则性，我们有$\mathrm{rank}(\sigma) = n$。一般而言，即使在共同信息 $\mathbb{F}^0$ 下，金融市场也是不完备的，因为我们有 $n \le d_0$。请回想一下，在下文给出的负债中，我们还有与 $\mathbb{F}^1$ 相关的额外噪声。

注 3.2。我们强调，尽管 $\mu$ 无界，股票价格的动态方程 (3.1) 仍定义良好。最简单的验证方法是将概率测度变换为风险中性测度；由于 $\theta \in \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$，这是可行的（参见 Kazamaki *[36]*）。在此等价概率测度下，股票价格过程被唯一确定为一个鞅。

定义 3.1。对于每个 $s \in [0,T]$，记

$$L_s := \{u^\top \sigma_s; u \in \mathbb{R}^n\}$$

为由 $\sigma_s$ 的 $n$ 个行向量张成的 $\mathbb{R}^{1\times d_0}$ 线性子空间。对于任意 $z \in \mathbb{R}^{1\times d_0}$， $\Pi_s(z)$ 表示将 $z$ 正交投影到线性子空间 $L_s$ 上。

注意，根据其构造，对于每个 $s \in [0,T]$，都有 $\theta_s^\top \in L_s$。

注 3.3。有限维矩阵到其值域以及核的正交投影都是博雷尔可测的。因此，如果过程 $(\sigma_s, z_s)_{s\in[0,T]}$ 是渐进可测的，那么过程 $(\Pi_s(z_s))_{s\in[0,T]}$ 也是渐进可测的。证明见 *[35,* 第 1 章；引理 4.4、推论 4.*5]*。

代理人 1 的特异性环境由三元组 $(\xi^1, \gamma^1, F^1)$ 建模。

假设 3.2. (i) $\xi^1$ 是一个取值于 $\mathbb{R}$、有界且 $\mathcal{F}_0^1$-可测的随机变量，表示代理人 1 的初始财富。

(ii) $\gamma^1$ 是一个取值于 $\mathbb{R}$、有界且 $\mathcal{F}_0^1$-可测的随机变量，并满足

$$\underline{\gamma} \le \gamma^1 \le \overline{\gamma},$$

对于某些正常数 $0 < \underline{\gamma} \le \overline{\gamma}$。 $\gamma^1$ 表示代理人 1 的风险厌恶程度。(iii) $F^1$ 是一个取值于 $\mathbb{R}$、有界且 $\mathcal{F}^{0,1}_T$-可测的随机变量，表示代理人 1 在时间 $T$ 的负债。

(iv) 代理人 1 的市场份额可忽略，因此她的交易活动不会影响股票价格，即她是价格接受者。

[2]显然， $\mu$ 也属于 $\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}(\mathbb{P}^{0,1}, \mathbb{F}^{0,1})$。事实上，来自 $\mathbb{F}^1$ 的额外信息不会增加 $\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$-范数（2.1），因为 $\mu$ 是 $\mathbb{F}^0$-适应的，与 $\mathbb{F}^1$相互独立。

注释 3.4。注意，负债 $F^1$ 既受到来自$\mathcal{F}_T^0$的共同冲击，也受到来自 $\mathcal{F}_T^1$的个体冲击。

财富　　代理人 1 在自融资交易策略 $\pi$ 下的财富过程为

$$\mathcal{W}_t^{1,\pi} = \xi^1 + \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \frac{\pi_{j,s}}{S_s^j} dS_s^j = \xi^1 + \int_0^t \pi_s^\top \sigma_s (dW_s^0 + \theta_s ds).$$

这里，$\pi := (\pi_t)_{t\in[0,T]}$ 是一个取值于 $\mathbb{R}^n$ 的、 $\mathbb{F}^0$, 1-渐进可测过程，表示投资于 $n$ 只股票的资金金额。代理人 1 要解决的问题是

$$\sup_{\pi\in\mathbb{A}^1} U^1(\pi),$$

其中，泛函 $U^1$ 称为（代理人 1 的）指数效用。其定义为

$$U^1(\pi) := \mathbb{E}\Big[-\exp\Big(-\gamma^1\Big(\xi^1 + \int_0^T \pi_s^\top \sigma_s (dW_s^0 + \theta_s ds) - F^1\Big)\Big)\Big]. \tag{3.2}$$

这意味着，$\mathcal{W}^{1,\pi}_T - F^1 < 0$ 意义下的低表现会受到严厉惩罚，而高表现 $\mathcal{W}^{1,\pi}_T - F^1 > 0$ 则只得到较低评价。

本文不深入探讨负债的具体建模；负债可能包含共同冲击以及特异冲击，例如与金融市场、禀赋、消费、商品本地价格和／或经理施加给代理人的预算目标相关的冲击。

定义 3.2. 可容许空间 $\mathbb{A}^1$ 是满足 $\mathbb{E}\Big[\int_0^T |\pi_s^\top \sigma_s|^2 ds\Big] < \infty$的所有 $\mathbb{R}^n$值、 $\mathbb{F}^0$,1渐进可测交易策略 $\pi$ 的集合，并且

$$\big\{\exp(-\gamma^1 \mathcal{W}_\tau^{1,\pi}); \tau \in \mathcal{T}^{0,1}\big\}$$

是一致可积的（即属于 D 类）。我们还定义 $\mathcal{A}^1 := \big\{p = \pi^\top \sigma; \pi \in \mathbb{A}^1\big\}$.

注意，对于任意 $s \in [0,T]$, $p$都是一个 $\mathbb{R}^{1\times d_0}$值过程，且满足 $p_s \in L_s$。代理人 1 的问题也可以等价地表述为求价值函数:

$$V^{1,*} := \sup_{p\in\mathcal{A}^1} \mathbb{E}\Big[-\exp\Big(-\gamma^1\Big(\xi^1 + \int_0^T p_s (dW_s^0 + \theta_s ds) - F^1\Big)\Big)\Big].$$

注释 3.5。在结束本节之前，我们先就为 $\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$ 这一类 $\theta$所作的选择作一些说明。在本文中，我们的目标是找到合适的 $\theta$ （因而也就是合适的 $\mu$），以实现均衡。正如我们所做的那样，若将一位代理人置于随机环境中，她对商品的需求/供给就不可避免地具有随机性。为了让众多代理人之间达到平衡，风险溢价过程 $\theta$ 通常也必须是随机的。这一点在有限代理人的完备市场经典结果中已然如此（参见 Karatzas & Shreve *[35]* 的第4章）。为了不遗漏任何有价值的均衡候选，当然希望尽可能放宽对$\theta$ 的假设，但同时也需要保证数学上的可处理性。我们选择 $\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$ 这一类，尤其是因为它能使 Dol´eans-Dade 指数在每个有限时间区间 $[0,T]$上一致可积，而这对于论证所需的测度变换是必要的。正如我们下面将看到的，它也恰好是 qg-BSDE 中随机积分被积过程 $Z$ 的类别，其

解属于 $\mathbb{S}^\infty$。这对于保持我们论证的一致性至关重要。参见第4节和第5节。

### 3.2 最优交易策略的刻画

得益于 [26]，的工作，我们可以通过某个倒向随机微分方程的解（而非前向后向随机微分方程），以相当直接的方式刻画最优交易策略。当效用函数（或等价地，成本函数）具有当前情形中的特殊齐次形式时，与应用庞特里亚金最大值原理相比，他们的方法通常能更简单地描述最优策略。

我们尝试构造一族随机过程 $\{R^p := (R^p_t)_{t\in[0,T]}, p \in \mathcal{A}^1\}$，使其满足以下性质：

定义 3.3。（条件-R）
(i) $R^p_T = -\exp\big(-\gamma^1(\mathcal{W}^{1,p}_T - F^1)\big)$，几乎处处成立，对所有 $p \in \mathcal{A}^1$ 均如此。(ii) $R^p_0 = R_0$，几乎处处成立，对所有 $p \in \mathcal{A}^1$ 均如此，且存在某个 $\mathcal{F}^1_0 (= \mathcal{F}^0)$-可测随机变量 $R_0$。(iii) 对所有 $p \in \mathcal{A}^1$，$R^p$ 是一个 $(\mathbb{F}^0, \mathbb{P}^0)$-上鞅，且存在某个 $p^* \in \mathcal{A}^1$，使得 $R^{p^*}$ 是一个 $(\mathbb{F}^0, \mathbb{P}^0)$-鞅。

事实上，如果我们能够找到这样一个族 $\{R^p\}$，那么对于任意 $p \in \mathcal{A}^1$，都有

$$\mathbb{E}\big[-\exp\big(-\gamma^1(\mathcal{W}^{1,p}_T - F^1)\big)\big] \le \mathbb{E}[R_0] = \mathbb{E}\big[-\exp\big(-\gamma^1(\mathcal{W}^{1,p^*}_T - F^1)\big)\big],$$

因此，$p^*$ 是代理人 1 的最优交易策略。

为了构造族 $\{R^p\}$，我们尝试寻找一个适当的过程 $Y := (Y_t)_{t\in[0,T]}$，使得过程 $R^p$ 可表示为

$$R^p_t = -\exp\big(-\gamma^1(\mathcal{W}^{1,p}_t - Y_t)\big), \quad t \in [0,T],\ p \in \mathcal{A}^1. \tag{3.3}$$

这里，三元组（$Y$，$Z^0$，$Z^1$）是一个取值于（$\mathbb{R}$，$\mathbb{R}^{1\times d_0}$，$\mathbb{R}^{1\times d}$）的过程，是一个 $\mathbb{F}^0,\ 1$-适应的倒向随机微分方程解

$$Y_t = F^1 + \int_t^T f(s, Z^0_s, Z^1_s)ds - \int_t^T Z^0_s dW^0_s - \int_t^T Z^1_s dW^1_s, \quad t \in [0,T].$$

驱动项 $f$ 的具体形式将在下文确定，从而使 $\{R^p\}$ 满足所需的性质。

在假设（3.3）下，由伊藤公式可得

$$\begin{aligned} dR^p_t &= R^p_t\Big(-\gamma^1 d(\mathcal{W}^{1,p}_t - Y_t) + \frac{(\gamma^1)^2}{2} d\langle \mathcal{W}^{1,p} - Y\rangle_t\Big) \\ &= R^p_t\Big(-\gamma^1(p_t\theta_t + f(t, Z^0_t, Z^1_t)) + \frac{(\gamma^1)^2}{2}(|p_t - Z^0_t|^2 + |Z^1_t|^2)\Big)dt \\ &\quad + R^p_t\big(-\gamma^1(p_t - Z^0_t)dW^0_t + \gamma^1 Z^1_t dW^1_t\big), \quad t \in [0,T]. \end{aligned}$$

为了猜测 $f$ 的适当形式，我们不妨将其形式化地求解为

$$\begin{aligned} R^p_t = &-\exp\big(-\gamma^1(\xi^1 - Y_0)\big)\exp\Big(\int_0^t \big[-\gamma^1(p_s\theta_s + f(s, Z^0_s, Z^1_s)) + \frac{(\gamma^1)^2}{2}(|p_s - Z^0_s|^2 + |Z^1_s|^2)\big]ds\Big) \\ &\times \mathcal{E}\Big(\int_0^\cdot \big[-\gamma^1(p_s - Z^0_s)dW^0_s + \gamma^1 Z^1_s dW^1_s\big]\Big)_t. \end{aligned}$$

我们希望将驱动项 $f(s, Z_s^0, Z_s^1)$ 设为使得对所有 $s \in [0,T]$,

- $-\gamma^1(p_s\theta_s + f(s, Z_s^0, Z_s^1)) + \frac{(\gamma^1)^2}{2}(|p_s - Z_s^0|^2 + |Z_s^1|^2) \geq 0$ for all $p \in \mathcal{A}^1$,
- $\exists p^* \in \mathcal{A}^1$ such that $-\gamma^1(p_s^*\theta_s + f(s, Z_s^0, Z_s^1)) + \frac{(\gamma^1)^2}{2}(|p_s^* - Z_s^0|^2 + |Z_s^1|^2) = 0$.

上述条件表明

$$\begin{aligned} f(s, Z_s^0, Z_s^1) &= \inf_{p_s \in L_s}\Big\{-p_s\theta_s + \frac{\gamma^1}{2}(|p_s - Z_s^0|^2 + |Z_s^1|^2)\Big\} \\ &= \inf_{p_s \in L_s}\Big\{\frac{\gamma^1}{2}\Big|p_s - \Big(Z_s^0 + \frac{\theta_s^\top}{\gamma^1}\Big)\Big|^2 - Z_s^0\theta_s - \frac{1}{2\gamma^1}|\theta_s|^2 + \frac{\gamma^1}{2}|Z_s^1|^2\Big\}. \end{aligned}$$

这是 [26][第 2] 节讨论的一种特殊情形，其中交易约束 $\pi_t \in C$ 由一般闭子集 $C \subset \mathbb{R}^n$ 给出，而现在该集合被整个空间 $\mathbb{R}^n$ 取代。因此，最优策略 $p^*$ 的一个候选形式为

$$p_t^* = Z_t^{0\|} + \frac{\theta_t^\top}{\gamma^1},\ t \in [0,T]. \tag{3.4}$$

这里，为了简化记号，我们记 $Z_s^{0\|} := \Pi_s(Z_s^0)$ 和 $Z_s^{0\perp} := Z_s^0 - \Pi_s(Z_s^0)$。它们彼此正交，且 $|Z_s^0|^2 = |Z_s^{0\|}|^2 + |Z_s^{0\perp}|^2$。回顾一下，对于每个 $s$，都有 $\Pi_s(\theta_s^\top) = \theta_s^\top$。按照这一约定，我们有

$$\begin{aligned} f(s, Z_s^0, Z_s^1) &= -Z_s^0\theta_s - \frac{1}{2\gamma^1}|\theta_s|^2 + \frac{\gamma^1}{2}(|Z_s^{0\perp}|^2 + |Z_s^1|^2) \\ &= -Z_s^{0\|}\theta_s - \frac{1}{2\gamma^1}|\theta_s|^2 + \frac{\gamma^1}{2}(|Z_s^{0\perp}|^2 + |Z_s^1|^2) \end{aligned} \tag{3.5}$$

其中，第二个等式中我们用到了这样一个事实：$\theta_s^\top \in L_s$，因此 $Z_s^{0\perp}\theta_s = 0$。

因此，相应的 qg-倒向随机微分方程为

$$Y_t = F^1 + \int_t^T \Big(-Z_s^{0\|}\theta_s - \frac{|\theta_s|^2}{2\gamma^1} + \frac{\gamma^1}{2}(|Z_s^{0\perp}|^2 + |Z_s^1|^2)\Big)ds - \int_t^T Z_s^0 dW_s^0 - \int_t^T Z_s^1 dW_s^1,\ t \in [0,T]. \tag{3.6}$$

为了使其形式更简洁，我们将方程改写为 $G^1 := \gamma^1 F^1$，以及 $(y, z^0, z^1) := (\gamma^1 Y, \gamma^1 Z^0, \gamma^1 Z^1)$。然后，我们可以等价地研究归一化的倒向随机微分方程，

$$y_t = G^1 + \int_t^T \Big(-z_s^{0\|}\theta_s - \frac{1}{2}|\theta_s|^2 + \frac{1}{2}(|z_s^{0\perp}|^2 + |z_s^1|^2)\Big)ds - \int_t^T z_s^0 dW_s^0 - \int_t^T z_s^1 dW_s^1,\ t \in [0,T]. \tag{3.7}$$

在这种情况下，$p^*$ 由 $\gamma^1 p_t^* = z_t^{0\|} + \theta_t^\top$ 给出。通过检查终端函数以及 $\gamma^1$ 是否出现，应该就能分辨所讨论的是哪个倒向随机微分方程。为了确认它们确实是我们所需要的，我们需要验证所得的族 $\{R^p\}$ (3.3) 和过程$p^*$ (3.4) 满足（条件-R）。

## 3.3 倒向随机微分方程的解及其验证

我们强调，与文献 [26], 不同，我们的风险溢价过程 $\theta \in \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$ 通常是无界的。正如后文将要看到的，这一推广对于处理均值场市场出清均衡是必要的。由于风险溢价过程无界，我们无法应用

Kobylanski [39]给出的关于二次增长倒向随机微分方程的标准结果。此外，由于($|\theta_t|^2, t \in [0,T]$)通常不具有指数可积性，我们也无法应用二次增长型倒向随机微分方程理论的扩展结果，例如 [3, 4, 28], 。特别地，结果 [28] 涵盖了($|\theta_t|^{1+\alpha}, \alpha < 1$)的情形，但不涵盖驱动项中包含 $|\theta_t|^2$项的情形。幸运的是，得益于指数效用所带来的驱动项的特殊形式，我们通过对标准方法 [39]作简单修改，可以证明 BSDE (3.7)（等价地，(3.6)）在空间$\mathbb{S}^\infty \times \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}} \times \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$ 中存在唯一解$(y, z^0, z^1)$。

引理3.1。假设3.1和3.2成立。若倒向随机微分方程（3.7）存在有界解（相对于 $y$分量），即（$y$, $z^0$, $z^1$） $\in \mathbb{S}^\infty \times \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$，则 $z :=$ （$z^0$, $z^1$）属于$\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$。

证明。利用伊藤公式即可轻松证明这一点。详情见附录A.1。

□

现在利用上述引理来保证解的唯一性，如果 $y \in \mathbb{S}^\infty$。

定理3.1。假设3.1和3.2成立。若（3.7）的解有界，即（$y$, $z^0$, $z^1$） $\in \mathbb{S}^\infty \times \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$，则该解是唯一的。

证明。假设存在两个有界解 $(y, z^0, z^1)$ 和 $(\acute{y}, \acute{z}^0, \acute{z}^1)$。根据引理3.1，我们知道 $(z^0, z^1)$ 和 $(\acute{z}^0, \acute{z}^1)$ 实际上属于 $\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$。令;

$$\Delta y_t := y_t - \acute{y}_t, \quad \Delta z^0_t := z^0_t - \acute{z}^0_t, \quad \Delta z^1_t := z^1_t - \acute{z}^1_t.$$

由 $z^{0\parallel}$ 与 $z^{0\perp}$ 的正交性可得

$$\begin{aligned}
\Delta y_t &= \int_t^T \Big(-\Delta z^{0\parallel}_s \theta_s + \frac{1}{2}\Delta(z^{0\perp}_s)(z^{0\perp}_s + \acute{z}^{0\perp}_s)^\top + \frac{1}{2}\Delta z^1_s (z^1_s + \acute{z}^1_s)^\top\Big) ds - \int_t^T \Delta z^0_s dW^0_s - \int_t^T \Delta z^1_s dW^1_s \\
&= \int_t^T \Big(-\Delta z^0_s \Big(\theta_s - \frac{1}{2}(z^{0\perp}_s + \acute{z}^{0\perp}_s)^\top\Big) + \frac{1}{2}\Delta z^1_s (z^1_s + \acute{z}^1_s)^\top\Big) ds - \int_t^T \Delta z^0_s dW^0_s - \int_t^T \Delta z^1_s dW^1_s \\
&= -\int_t^T \Delta z^0_s \Big(dW^0_s + \big(\theta_s - \frac{1}{2}(z^{0\perp}_s + \acute{z}^{0\perp}_s)^\top\big) ds\Big) - \int_t^T \Delta z^1_s \Big(dW^1_s - \frac{1}{2}(z^1_s + \acute{z}^1_s)^\top ds\Big) \\
&= -\int_t^T \Delta z^0_s d\widetilde{W}^0_s - \int_t^T \Delta z^1_s d\widetilde{W}^1_s,
\end{aligned}$$

其中，我们定义了一个与 $\mathbb{P}^0$ 等价的新测度 $\widetilde{\mathbb{P}}$ , $_1$ , 其定义为

$$\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}^{0,1}}\Big|_{\mathcal{F}^{0,1}_t} := M_t := \mathcal{E}\Big(-\int_0^\cdot \big(\theta_s^\top - \frac{1}{2}(z^{0\perp}_s + \acute{z}^{0\perp}_s)\big) dW^0_s + \int_0^\cdot \frac{1}{2}(z^1_s + \acute{z}^1_s) dW^1_s\Big)_t, \ t \in [0,T]$$

并且 $(\widetilde{W}^0_t, \widetilde{W}^1_t)_{t\in[0,T]}$ 表示在 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 下的标准布朗运动。由于 $(\theta^\top, z^{0\perp} + \acute{z}^{0\perp}, z^1 + \acute{z}^1)$ 属于 $\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$ , 因此 $M$ 是一致可积鞅，故该测度变换定义良好。根据 Kazamaki [36] 和 [37][注3.1], , 有如下所谓的反向 H¨older 不等式:

$$\mathbb{E}\big[M^r_T | \mathcal{F}^{0,1}_t\big] \le C M^r_t,$$

其中 $C > 0$ 和 $r > 1$ 是一些常数，仅取决于 $(\theta^\top, z^{0\perp} +$的 $\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$范数

$\acute{z}^{0\perp}, z^1 + \acute{z}^1$)。结合 $q = \frac{r}{r-1} > 1$ 和 $j = 0$、1、H¨older 不等式以及能量不等式 (2.2)，可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\widetilde{\mathbb{P}}}\Big[\int_0^T |\Delta z_s^j|^2 ds\Big] &= \mathbb{E}\Big[M_T\Big(\int_0^T |\Delta z_s^j|^2 ds\Big)\Big] \\ &\le \mathbb{E}[M_T^r]^{\frac{1}{r}}\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T |\Delta z_s^j|^2 ds\Big)^q\Big]^{\frac{1}{q}} < \infty.\end{aligned}$$

因此， $\Delta y$ 是一个（$\mathbb{F}^{0,\ 1}$，$\widetilde{\mathbb{P}}$）-鞅。因此，我们可以得出 $\Delta y = 0$，所以（$\Delta z^0$，$\Delta z^1$）也是如此。 □

由于 $\theta$ 属于 $\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$，自然可以进行测度变换，以吸收方程（3.7）的驱动项中的（$-z^{0\|}\theta$）（$= -z^0\theta$）。定义测度 $\mathbb{Q}$ （$\sim \mathbb{P}^{0,\ 1}$）如下:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}^{0,1}}\Big|_{\mathcal{F}_t^{0,1}} := \mathcal{E}\Big(-\int_0^{\cdot} \theta_s^\top dW_s^0\Big)_t,$$

在 $\mathbb{Q}$ 下的标准布朗运动为

$$\widetilde{W}_t^0 = W_t^0 + \int_0^t \theta_s ds, \quad \widetilde{W}_t^1 = W_t^1, \quad t \in [0,T].$$

因此，我们可以不处理方程（3.7），而等价地研究定义在（$\Omega^{0,\ 1}$，$\mathcal{F}^{0,\ 1}$，$\mathbb{Q}$；$\mathbb{F}^{0,\ 1}$）上的倒向随机微分方程，并以布朗运动（$\widetilde{W}^0$，$\widetilde{W}^1$）为基础;

$$y_t = G^1 + \int_t^T \Big(-\frac{1}{2}|\theta_s|^2 + \frac{1}{2}(|z_s^{0\perp}|^2 + |z_s^1|^2)\Big)ds - \int_t^T z_s^0 d\widetilde{W}_s^0 - \int_t^T z_s^1 d\widetilde{W}_s^1,\ t \in [0,T]. \tag{3.8}$$

尽管一般而言，滤过 $\mathbb{F}^{0,\ 1}$ 大于由（$\widetilde{W}^0$，$\widetilde{W}^1$）生成的滤过，我们仍然可以应用倒向随机微分方程的标准技巧。这是因为鞅表示在绝对连续测度变换下具有稳定性。一般情形见 [25][定理13.12]，布朗情形见 [34][第1.7节。7] 此外，根据Kazamaki [37][定理3.3]，$\theta$ 仍属于 $\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$（$\mathbb{Q}$，$\mathbb{F}^{0,\ 1}$）。显然，倒向随机微分方程（3.7）（等价地，（3.6））存在有界解，当且仅当倒向随机微分方程（3.8）存在有界解。

定理 3.2. 假设3.1和3.2成立。则 BSDE (3.8) 存在唯一的有界解 $(y, z^0, z^1) \in \mathbb{S}^\infty(\mathbb{Q}, \mathbb{F}^{0,1}) \times \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}(\mathbb{Q}, \mathbb{F}^{0,1}) \times \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}(\mathbb{Q}, \mathbb{F}^{0,1})$。

证明。由于本证明始终在测度 $\mathbb{Q}$ 下进行，为简洁起见，我们用 $\mathbb{E}[\cdot]$ 代替 $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\cdot]$。首先，对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们考虑截断倒向随机微分方程;

$$y_t^n = G^1 + \int_t^T \Big(-\frac{1}{2}(|\theta_s|^2 \wedge n) + \frac{1}{2}(|z_s^{n,0\perp}|^2 + |z_s^{n,1}|^2)\Big)ds - \int_t^T z_s^{n,0} d\widetilde{W}_s^0 - \int_t^T z_s^{n,1} d\widetilde{W}_s^1, \quad t \in [0,T]. \tag{3.9}$$

显然，根据 [39] 的标准结果，截断倒向随机微分方程 (3.9) 有唯一的有界解 $(y^n, z^{n,\ 0}, z^{n,\ 1}) \in \mathbb{S}^\infty \times \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}} \times \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$。此外，根据同一篇文献中得到的比较原理 [3]，对于所有 $n \in \mathbb{N}$ [4]，我们有 $y^{n+1} \le y^n$。特别地，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，解 $y^n$ 一致地

[3]比较原理表明，解 $y$ 的大小会随终端函数和驱动项的大小单调变化。例如，参见 [50][定理 7.3.1].[4]这里，我们使用 $|z^{n,\ 0\perp}_{s}|^2 - |z^{n+1,\ 0\perp}_{s}|^2 = \Delta(z^{n,\ 0\perp}_{s})(z^{n,\ 0\perp}_{s} + z^{n+1,\ 0\perp}_{s})^\top = \Delta z^{n,\ 0}_{s}(z^{n,\ 0\perp}_{s} + z^{n+1,\ 0\perp}_{s})^\top$ 将其吸收到随机积分中。

有上界 $y^n \le \overline{y}$，其中 $\overline{y}$ 是另一个二次增长 BSDE 的解；

$$\overline{y}_t = G^1 + \int_t^T \frac{1}{2}\big(|\overline{z}_s^0|^2 + |\overline{z}_s^1|^2\big)ds - \int_t^T \overline{z}_s^0 d\widetilde{W}_s^0 - \int_t^T \overline{z}_s^1 d\widetilde{W}_s^1, \quad t \in [0,T].$$

根据标准结果，它还有唯一的有界解 $(\overline{y}, \overline{z}^0, \overline{z}^1) \in \mathbb{S}^\infty \times \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}} \times \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$ with $\|\overline{y}\|_{\mathbb{S}^\infty} \le \|G^1\|_\infty$。

再次利用比较原理，$y^n$ 在 $n \in \mathbb{N}$ 中也一致有下界，当$\underline{y} \le y^n$时，其中 $\underline{y}$ 是下一个简单倒向随机微分方程的解；

$$\underline{y}_t = G^1 + \int_t^T \Big(-\frac{1}{2}|\theta_s|^2\Big)ds - \int_t^T \underline{z}_s^0 d\widetilde{W}_s^0 - \int_t^T \underline{z}_s^1 d\widetilde{W}_s^1, \quad t \in [0,T].$$

显然，它有唯一的解 $(\underline{y}, \underline{z}^0, \underline{z}^1) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$。此外，对于任意 $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}\underline{y}_t &= \mathbb{E}[G^1|\mathcal{F}_t^{0,1}] - \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\int_t^T |\theta_s|^2 ds|\mathcal{F}_t^{0,1}\Big] \\ &\ge -\Big(\|G^1\|_\infty + \frac{1}{2}\|\theta\|^2_{\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}}\Big) > -\infty.\end{aligned}$$

因此我们得出，关于 $n \in \mathbb{N}$，$y^n$ 满足以下一致有界性，

$$-\Big(\|G^1\|_\infty + \frac{1}{2}\|\theta\|^2_{\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}}\Big) \le y^n \le \|G^1\|_\infty. \tag{3.10}$$

由于 $\{y^n\}$ 有下界，且关于 $n \in \mathbb{N}$单调递减，我们可以定义过程 $y := (y_t)^{t\in[0,T]}$ 如下：

$$y = \lim_{n\to\infty} y^n.$$

此外，通过重复引理3.1的证明，我们由估计式 (3.10) 得到

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|(z^{n,0}, z^{n,1})\|^2_{\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}} \le \exp\big(4\|G^1\|_\infty + 2\|\theta\|^2_{\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}}\big).$$

特别地，$(z^{n,0}, z^{n,1})_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathbb{H}^2$ 中弱相对紧，因此在适当选取子列后（仍记为 $n$），我们有 $\exists (z^0, z^1) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$，使得

$$z^{n,0} \rightharpoonup z^0, \quad z^{n,1} \rightharpoonup z^1 \quad \text{ weakly in } \mathbb{H}^2 \text{ as } n \to \infty.$$

证明三元组$(y, z^0, z^1)$确实满足(3.8)所需的其余步骤与[39]中的相同。另见 [9][第9节6]。为方便读者，我们将在附录A.2中给出详细过程。 □

推论 3.1. 假设假设3.1和假设3.2成立。那么，倒向随机微分方程(3.6)（分别为(3.7)）在 $\mathbb{S}^\infty(\mathbb{P}^{0,1}, \mathbb{F}^{0,1}) \times \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}(\mathbb{P}^{0,1}, \mathbb{F}^{0,1}) \times \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}(\mathbb{P}^{0,1}, \mathbb{F}^{0,1})$中存在唯一的有界解$(Y, Z^0, Z^1)$（分别为$(y, z^0, z^1)$）。

现在，我们可以验证条件-R。

定理 3.3. 假设3.1和3.2成立。则由 (3.3) 定义的过程族 $\{R^p, p \in \mathcal{A}^1\}$，其中过程 $Y$ 是倒向随机微分方程 (3.6) 的唯一有界解，满足条件-R；而由 (3.4) 给出的过程 $p^*$ 是代理人 1 的唯一（在 $dt \otimes \mathbb{P}^{0,1}$-零测集意义下）最优交易策略。

证明. 由 (3.3)，我们有

$$R_t^p = -\exp\big(-\gamma^1(\mathcal{W}_t^{1,p} - Y_t)\big) = -\exp\big(-\gamma^1\mathcal{W}_t^{1,p} + y_t\big),\ t \in [0,T],$$

and

$$R_0^p = -\exp(-\gamma^1\xi^1 + y_0)$$

对所有 $p \in \mathcal{A}^1$均成立。这里， $y := (y_t)_{t\in[0,T]}$ 是（3.7）的重标度解。由于 $y \in \mathbb{S}^\infty$，根据可容许性 $\mathcal{A}^1$的定义，$(R_t^p, t \in [0,T])$ 对任意 $p \in \mathcal{A}^1$ 显然属于 D 类。

令 $p = p^*$ 如（3.4）所示。于是我们有

$$\begin{aligned} dR_t^{p^*} &= R_t^{p^*}\big(-\gamma^1(p_t^* - Z_t^0)dW_t^0 + \gamma^1 Z_t^1 dW_t^1\big) \\ &= R_t^{p^*}\big(-(\theta_t^\top - z_t^{0\perp})dW_t^0 + z_t^1 dW_t^1\big),\ t \in [0,T], \end{aligned}$$

因此，对于任意 $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} R_t^{p*} &= -\exp\big(-\gamma^1\mathcal{W}_t^{1,p^*} + y_t\big) \\ &= -\exp\big(-\gamma^1\xi^1 + y_0\big)\mathcal{E}\Big(-\int_0^\cdot (\theta_s^\top - z_s^{0\perp})dW_s^0 + \int_0^\cdot z_s^1 dW_s^1\Big)_t. \end{aligned}$$

由于 $(\theta^\top - z^{0\perp}, z^1)$ 属于 $\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$，且 $(\gamma^1, \xi^1, y_0)$ 均有界， $R^{p*}$ 是一 个一致可积鞅。 $R^{p*}$ 的一致可积性与 $y$ 的有界性进一步推出 $(\exp(-\gamma^1\mathcal{W}^{1,p^*}_{\cdot,t}))_{t\in[0,T]}$ 也是一致可积的。因此，我们得到可容许性 $p^* \in \mathcal{A}^1$。$p^*$ 的唯一性源于 $-\gamma^1(p\theta + f(s,z^0,z^1)) + (\gamma^1)_2^{\ 2}(|p - z^0|^2 + |z^1|^2)$ 关于 $p$的严格凸性；当 $p \neq p^*$时，这会使 $R^p$ 的漂移严格为负。由于我们知道 $R^p$ 属于 D 类，其上鞅性质现在显而易见。

□

注 3.6. 值得注意的是，最优交易策略 $\pi^*$ （或等价地说， $p^*$）与初始财富 $\xi^1$ 无关。这是指数型效用的一个众所周知的特征。结合（3.2）中对 $U^1(\pi)$ 的设定可知，代理人 1 的问题及其最优交易策略在以下变换下保持不变：

$$\begin{aligned} \xi^1 &\longrightarrow (\xi^1 - \mathbb{E}[F^1|\mathcal{F}_0^1]), \\ F^1 &\longrightarrow (F^1 - \mathbb{E}[F^1|\mathcal{F}_0^1]). \end{aligned} \tag{3.11}$$

注 3.7. 本节所用的 *[26]* 优化方法，即使在市场完备的情况下，也可以完全以相同的方式应用。然而，我们将基于平均场博弈技术寻找市场出清均衡，而这在很大程度上依赖于每个代理人的特质噪声，以便在大群体极限下简化系统。由于这必然会导致市场不完备，因此，后续各节中的策略在完备市场中行不通。关于完备市场中均衡的构造（该构造采用凸对偶和拉格朗日乘子），请参阅 Karatzas & Shreve *[35][*第 *4]* 章。

## 4 均值场均衡模型

现在，我们将研究一个由众多代理人参与的金融市场，他们通过风险股票的价格过程相互作用。回想一下，本文的最终目标是通过施加市场出清条件，内生地求得风险股票的风险溢价过程 $\theta = (\theta_t)_{t\geq 0}$ $n$ ，该条件要求风险股票的需求与供给在代理人之间

始终保持平衡。本节将提出一种具有二次增长驱动项的新型平均场倒向随机微分方程，至少从直观上看，它有望刻画大群体极限下所期望的均衡。

### 4.1 平均场倒向随机微分方程的启发式推导

假设有 $N \in \mathbb{N}$ 个代理人（代理人-$i$，$1 \le i \le N$）参与假设 3.1 中给出的同一个金融市场。对每个 $1 \le i \le N$，代理人-$i$ 的信息集由概率空间 $(\Omega^0, {}^i, \mathcal{F}^0, {}^i, \mathbb{P}^0, {}^i)$ 提供，该空间是乘积空间 $(\Omega^0, \mathcal{F}^0, \mathbb{P}^0) \otimes (\Omega^i, \mathcal{F}^i, \mathbb{P}^i)$ 的完备化。相应的滤过 $\mathbb{F}^0, {}^i := (\mathcal{F}^0, {}_t{}^i)_{t\in[0,T]}$ 是 $(\mathcal{F}_t^0 \otimes \mathcal{F}_t^i)_{t\in[0,T]}$ 的完备且右连续扩张。$\mathcal{T}^0, {}^i$ 是取值于 $[0,T]$ 的 $\mathbb{F}^0, {}^i$-可测停时集合。这里，对每个 $i$，滤过概率空间 $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \mathbb{P}^i; \mathbb{F}^i)$ 是 $(\Omega^1, \mathcal{F}^1, \mathbb{P}^1; \mathbb{F}^1)$ 的独立副本，其构造方式与第 2 节完全相同，只是用 $(\xi^i, \gamma^i, W^i)$ 替代 $(\xi^1, \gamma^1, W^1)$。我们定义一个带有滤过 $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ 的完备概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$，使其能够在一个公共空间中对所有代理人进行建模：

- $\Omega: = \Omega^0 \times \prod_{i=1}^N \Omega^i$ 且 $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是 $\big(\mathcal{F}^0 \otimes \mathcal{F}^1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}^N, \mathbb{P}^0 \otimes \mathbb{P}^1 \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}^N\big)$的完备化。$\mathbb{F}$ 表示 $(\mathcal{F}_t^0 \otimes \mathcal{F}_t^1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_t^N)_{t\in[0,T]}$的完备且右连续扩张。$\mathbb{E}[\cdot]$ 表示关于 $\mathbb{P}$的期望。

我们还引入代理人-$i$, $1 \le i \le N$的负债 $F^i$。假设每位代理人-$i$ 都面临以下优化问题

$$\sup_{\pi\in\mathbb{A}^i} U^i(\pi),$$

其中，效用泛函 $U^i$定义为 $U^i(\pi): = \mathbb{E}\Big[-\exp\big(-\gamma^i\big(\mathcal{W}_T^{i,\pi} - F^i\big)\big)\Big]$，其中 $\mathcal{W}^i, {}_t{}^\pi := \xi^i + \int_0^t \pi_s^\top \sigma_s($ $dW_s^0 + \theta_s ds)$。可容许空间 $\mathbb{A}^i$（以及 $\mathcal{A}^i$）的定义方式与定义 3.2 相同，只需将所有上标“1”替换为“$i$”。

定义 4.1。可容许空间 $\mathbb{A}^i$ 是所有取值于 $\mathbb{R}^n$、$\mathbb{F}^0, {}^i$-逐步可测的交易策略 $\pi$ 的集合，且这些策略满足 $\mathbb{E}\Big[\int_0^T |\pi_s^\top \sigma_s|^2 ds\Big] < \infty$，并且

$$\big\{\exp(-\gamma^i \mathcal{W}_\tau^{i,\pi}); \tau \in \mathcal{T}^{0,i}\big\}$$

是一致可积的（即属于 D 类）。我们还定义 $\mathcal{A}^i := \big\{p = \pi^\top \sigma; \pi \in \mathbb{A}^i\big\}$.

我们作如下假设。

假设 4.1。(i) 假设 3.2 中的陈述在将“1”替换为“$i$”后仍成立，$1 \le i \le N$。(ii) $\{(\xi^i, \gamma^i)\ 1 \le i \le N\}$ 具有相同的分布。换言之，它们在 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上独立同分布（i.i.d.）。(iii) $\{F^i, 1 \le i \le N\}$ 是 $\mathcal{F}^0$-条件独立同分布的。

我们希望找到能够使市场出清的风险溢价过程 $\theta$。首先，我们来启发式地推导相关的平均场倒向随机微分方程，随后将根据 Fujii & Takahashi [18] 提出的思路，证明该方程刻画了大群体极限下使市场出清的风险溢价过程。

假设给定了一个风险溢价过程 $\theta \in \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}(\mathbb{P}, \mathbb{F}^0; \mathbb{R}^{d_0})$。回顾一下，$\theta$的值属于 $\mathrm{Range}(\sigma^\top) = \mathrm{Ker}(\sigma)^\perp$，即对于每个 $s \in [0,T]$，都有 $\theta_s^\top \in L_s$。重复第3节中的分析可知，代理人-$i$, $1 \le i \le N$的唯一最优策略为

$$p_t^{i,*}\ (= (\pi_t^{i,*})^\top \sigma_t) = Z_t^{i,0\|} + \frac{\theta_t^\top}{\gamma^i}, \quad t \in [0,T], \tag{4.1}$$

其中 $Z^{i,0}$ 与下列倒向随机微分方程的解 $(Y^i, Z^{i,0}, Z^i)$ 相关:

$$Y_t^i = F^i + \int_t^T \Big(-Z_s^{i,0\|}\theta_s - \frac{|\theta_s|^2}{2\gamma^i} + \frac{\gamma^i}{2}(|Z_s^{i,0\perp}|^2 + |Z_s^i|^2)\Big)ds - \int_t^T Z_s^{i,0}dW_s^0 - \int_t^T Z_s^i dW_s^i,\ t \in [0,T]. \tag{4.2}$$

根据假设 3.1 和 4.1，由推论 3.1 可知，方程 (4.2) 存在唯一的有界解 $(Y^i, Z^{i,0}, Z^i) \in \mathbb{S}^\infty(\mathbb{P}, \mathbb{F}^{0,i}) \times \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}(\mathbb{P}, \mathbb{F}^{0,i}) \times \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}(\mathbb{P}, \mathbb{F}^{0,i})$, $1 \le i \le N$。

定义 4.2. 若满足以下条件，则称市场出清条件成立:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \pi_t^{i,*} = 0, \quad dt \otimes \mathbb{P} - a.e.$$

其中， $\pi^{i,*}$ 是代理人 $i$, $1 \le i \le N$的最优交易策略。

注 4.1. 定义 4.2 中的市场出清条件意味着，在所有代理人采取最优决策的情况下，证券在整个期间的净供给（需求）为零。对于有限的$N$，上述定义中的因子 $1/N$ 无关紧要。然而，为了处理大群体极限 $N \to \infty$，我们需要因子 $1/N$。我们将寻找一个风险溢价过程，使得人均超额需求（或供给）在大群体极限下收敛于零。

定义 4.2 给出的市场出清条件要求风险溢价过程 $\theta$ 满足

$$\theta_t = -\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \frac{1}{\gamma^j}\Big)^{-1}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N (Z_t^{j,0\|})^\top, \quad t \in [0,T]. \tag{4.3}$$

遗憾的是，式 (4.3) 给出的 $\theta$ 与我们的信息假设不一致；该假设要求 $\theta$ 是 $\mathbb{F}^0$ 适应的，即仅依赖于全市场信息。然而此时，让我们形式上考虑将式 (4.2) 中的 $\theta$ 替换为式 (4.3) 给出的形式后得到的 $N$ 耦合二次反向随机微分方程系统； $1 \le i \le N$,

$$\begin{aligned} Y_t^i = F^i + \int_t^T \Big\{ & Z_s^{i,0\|}\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \frac{1}{\gamma^j}\Big)^{-1}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N (Z_s^{j,0\|})^\top - \frac{1}{2\gamma^i}\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \frac{1}{\gamma^j}\Big)^{-2}\Big|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N Z_s^{j,0\|}\Big|^2 \\ & + \frac{\gamma^i}{2}(|Z_s^{i,0\perp}|^2 + |Z_s^i|^2)\Big\}ds - \int_t^T Z_s^{i,0}dW_s^0 - \int_t^T Z_s^i dW_s^i. \end{aligned} \tag{4.4}$$

为了使该系统定义良好，我们至少需要额外加入相对于所有 $(W^j)_{j\neq i}$ 的随机积分项。这源于鞅表示定理，因为 $\theta$ 仅为 $\mathbb{F}$-适应的。我们还必须改变每个代理人的容许控制空间，才能使相关优化问题具有意义。不过，无论如何，由于每个代理人都是价格接受者，他们之间的相互作用仅通过具有对称形式的风险溢价过程体现。因此，根据假设 4.1，如果系统 (4.4)（经过适当修改）存在解 $\{(Y^i, Z^{i,\ 0}, Z^i)\ 1 \le i \le N\}$，那么可以预期这些解是可交换的。具体而言，$(Z^{i,\ 0}_{\ t})_{i=1}^N$（因此 $(Z^{i,\ 0\|}_{\ t})_{i=1}^N$）将是可交换随机变量，即它们的联合分布在其次序的排列 $\sigma(i)$ 下保持不变。若情况如此，关于随机变量可交换序列的德菲内蒂理论将意味着

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N Z_t^{i,0\|} = \mathbb{E}\Big[Z_t^{1,0\|}\Big|\bigcap_{k\ge 1}\sigma\{Z_t^{j,0\|}, j \ge k\}\Big] \quad \text{a.s.} \tag{4.5}$$

例如，参见 [7][定理 2.1]。我们也可以自然地预期，(4.5) 中的尾部 $\sigma$-域收敛到 $\mathcal{F}_t^0$，因为按构造，$(\mathcal{F}_t^i)_{i\geq 1}$ 相互独立。这样，根据 (4.3)，至少从启发式角度来看，可以预期在大-$N$ 极限下，均衡风险溢价过程 $\theta$ 可表示为

$$\theta_t = -\widehat{\gamma}\mathbb{E}[Z_t^{1,0\|}|\mathcal{F}_t^0]^\top = -\widehat{\gamma}\mathbb{E}[Z_t^{1,0\|}|\mathcal{F}^0]^\top, \tag{4.6}$$

这是 $\mathbb{F}^0$-适应的，符合预期，而 $\widehat{\gamma}$ 定义为

$$\widehat{\gamma} := \frac{1}{\mathbb{E}[1/\gamma^1]}.$$

用条件期望（4.6）替代后，系统实现了解耦，因为与（4.3）不同，$(Z^{0,\,j\|})_{j\in\mathbb{N}}$ 之间不再存在相互作用。这种解耦现象通常称为混沌传播，也是均场博弈理论将复杂的耦合问题转化为简单的解耦问题的主要驱动力。

以上启发式讨论促使我们研究以下定义在滤过概率空间 $(\Omega^0,\,_1,\mathcal{F}^0,\,_1,\mathbb{P}^0,\,_1;\,\mathbb{F}^0,\,_1)$ 上的平均场倒向随机微分方程，并选取代理人 1 作为代表；

$$Y_t = F^1 + \int_t^T \Big(\widehat{\gamma}Z_s^{0\|}\overline{\mathbb{E}}[Z_s^{0\|}]^\top - \frac{\widehat{\gamma}^2}{2\gamma^1}|\overline{\mathbb{E}}[Z_s^{0\|}]|^2 + \frac{\gamma^1}{2}(|Z_s^{0\perp}|^2+|Z_s^1|^2)\Big)ds - \int_t^T Z_s^0 dW_s^0 - \int_t^T Z_s^1 dW_s^1,\ t\in[0,T]. \tag{4.7}$$

这里，对于任意 $X\in\mathbb{H}^2(\mathbb{P}^0,\,_1,\mathbb{F}^0,\,_1)$，我们定义

$$\overline{\mathbb{E}}[X_t](\omega^0) := \begin{cases} \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}^0](\omega^0) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^1}[X_t(\omega^0,\cdot)] & \text{if it exits} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

注意，对于任意 $\mathbb{F}^0,\,_1$-适应过程，我们有 $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_t^0] = \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}^0]$，几乎必然成立。这是因为 $X_t$ 与 $\sigma(\{W_s^0 - W_t^0, s\geq t\})$ 相互独立，因此额外的信息 $\mathcal{F}^0 = \mathcal{F}_T^0 \supset \mathcal{F}_t^0$不会影响期望值。与 [7][第 4.3 节1], 中的做法一样，我们总是选择 $\overline{\mathbb{E}}[X]$的 $\mathbb{F}^0$-渐进可测修正版本。本节余下部分将证明，在某些条件下，该平均场倒向随机微分方程存在解。在第 5 节中，我们将证明定义为如下的风险溢价过程

$$\theta_t^{\text{mfg}} := -\widehat{\gamma}\overline{\mathbb{E}}[Z_t^{0\|}]^\top, \quad t\in[0,T] \tag{4.8}$$

平均场倒向随机微分方程 (4.7) 的解实际上在大群体极限下使市场出清。

## 4.2 平均场倒向随机微分方程解的存在性

我们将在滤过概率空间 $(\Omega^0,\,_1,\ \mathcal{F}^0,\,_1,\ \mathbb{P}^0,\,_1;\ \mathbb{F}^0,\,_1)$ 上进行讨论。为简化记号，我们将 $(F,\gamma)$ 简写为 $(F^1,\gamma^1)$，并研究以下平均场倒向随机微分方程的适定性：

$$Y_t = F + \int_t^T \Big(\widehat{\gamma}Z_s^{0\|}\overline{\mathbb{E}}[Z_s^{0\|}]^\top - \frac{\widehat{\gamma}^2}{2\gamma}|\overline{\mathbb{E}}[Z_s^{0\|}]|^2 + \frac{\gamma}{2}(|Z_s^{0\perp}|^2+|Z_s^1|^2)\Big)ds - \int_t^T Z_s^0 dW_s^0 - \int_t^T Z_s^1 dW_s^1,\quad t\in[0,T]. \tag{4.9}$$

注意，根据假设 3.2 (ii)，$\widehat{\gamma}$ 是一个严格正的常数。

引理4.1. 若倒向随机微分方程 (4.9) 存在一个有界解 $(Y,Z^0,Z^1)\in\mathbb{S}^\infty\times\mathbb{H}^2\times\mathbb{H}^2$，则 $Z := (Z^0, Z^1)$ 属于 $\mathbb{H}^2_{\text{BMO}^\circ}$。

证明. 证明与引理3.1类似。详细证明见附录 A.3。 □

证明平均场倒向随机微分方程 (4.9) 的适定性相当困难。首先，由于存在条件期望，比较原理无法应用。这使得许多现有的二次增长倒向随机微分方程技术（例如 [39, 3, 4] 中的方法）无法使用。由于倒向随机微分方程 (4.9) 具有条件 McKean-Vlasov 性质，传统的均场博弈方法——使用 Shauder 不动点定理——也行不通。其次，我们未能获得关于 $\|Y\|_{\mathbb{S}^\infty}$ 的任何先验估计，也未能得到任何稳定性结果，例如 [16][ 引理 3.3]。因此，无法采用 [17][ 定理 4.1] 中那种在马尔可夫框架下，为正则化倒向随机微分方程的解耦函数构造紧集的策略。

因此，接下来我们将尝试 Tevzadze [48][ 命题 1] 提出的方法。在现有的二次增长倒向随机微分方程文献中，他的工作具有一个独特之处：无需依赖比较原理，即可通过压缩映射定理求解问题。Hu 等人 [27] 也采用了这一方法，用于处理含二次增长项的预期倒向随机微分方程；该方程与一个带时滞的优化问题相关。

为简化记号，对于任意 $(z^0, z^1) \in \mathbb{H}^2(\mathbb{P}^0,_1, \mathbb{F}^0,_1; \mathbb{R}^{1\times d_0} \times \mathbb{R}^{1\times d})$，定义平均场倒向随机微分方程的驱动项 $f$，

$$f(z_s^0, z_s^1) := \widehat{\gamma} z_s^{0\|} \overline{\mathbb{E}}[z_s^{0\|}]^\top - \frac{\widehat{\gamma}^2}{2\gamma} |\overline{\mathbb{E}}[z_s^{0\|}]|^2 + \frac{\gamma}{2}(|z_s^{0\perp}|^2 + |z_s^1|^2), \quad s \in [0, T].$$

通过配方可得，

$$\begin{aligned} f(z^0, z^1) &= -\Big| \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{2\gamma}} \overline{\mathbb{E}}[z^{0\|}] - \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{2}} z^{0\|} \Big|^2 + \frac{\gamma}{2}|z^{0\|}|^2 + \frac{\gamma}{2}(|z^{0\perp}|^2 + |z^1|^2) \\ &= -\Big| \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{2\gamma}} \overline{\mathbb{E}}[z^{0\|}] - \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{2}} z^{0\|} \Big|^2 + \frac{\gamma}{2}(|z^0|^2 + |z^1|^2). \end{aligned}$$

因此，对于任意 $(z^0, z^1)$，

$$\begin{aligned} &f^+(z^0, z^1) \le \frac{\overline{\gamma}}{2}(|z^0|^2 + |z^1|^2), \\ &f^-(z^0, z^1) \le 0 \vee \Big( \Big| \frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{2\gamma}} \overline{\mathbb{E}}[z^{0\|}] - \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{2}} z^{0\|} \Big|^2 - \frac{\gamma}{2}|z^0|^2 \Big) \le \frac{\widehat{\gamma}^2}{\underline{\gamma}} |\overline{\mathbb{E}}[z^{0\|}]|^2 + \frac{\overline{\gamma}}{2}|z^{0\|}|^2, \end{aligned}$$

其中，$f^+(z^0, z^1) := \max(f(z^0, z^1), 0)$，$f^-(z^0, z^1) := \max(-f(z^0, z^1), 0)$。因此，特别地，

$$|f(z^0, z^1)| \le \frac{\overline{\gamma}}{2}(|z^0|^2 + |z^1|^2) + \frac{\widehat{\gamma}^2}{\underline{\gamma}} |\overline{\mathbb{E}}[z^0]|^2. \tag{4.10}$$

此外，根据假设 3.2 (ii)，存在一个正常数 $C_\gamma$，它仅依赖于 $(\underline{\gamma}, \overline{\gamma}, \widehat{\gamma})$，使得对于任意 $(z^0, z^1)$、$(\acute{z}^0, \acute{z}^1) \in \mathbb{H}^2$，

$$\begin{aligned} &|f(z^0, z^1) - f(\acute{z}^0, \acute{z}^1)| \\ &\quad \le C_\gamma \big( |z^0| + |\acute{z}^0| + |z^1| + |\acute{z}^1| + |\overline{\mathbb{E}}[z^0]| + |\overline{\mathbb{E}}[\acute{z}^0]| \big) \big( |z^0 - \acute{z}^0| + |z^1 - \acute{z}^1| + |\overline{\mathbb{E}}[z^0 - \acute{z}^0]| \big). \end{aligned} \tag{4.11}$$

我们注意到以下简单事实。

引理 4.2. 对于任意输入 $(z^0,z^1)\in\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}(\mathbb{P}^{0,\ 1},\mathbb{F}^{0,\ 1})$，下列不等式成立；

$$\sup_{\tau\in\mathcal{T}^{0,1}}\Big\|\mathbb{E}\Big[\int_\tau^T|f(z_s^0,z_s^1)|ds|\mathcal{F}_\tau^{0,1}\Big]\Big\|_\infty\le c_\gamma\|(z^0,z^1)\|^2_{\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}},$$

其中，$c_\gamma$ 是由$c_\gamma:=\dfrac{\overline{\gamma}}{2}+\dfrac{\widehat{\gamma}^2}{\underline{\gamma}}$ 给出的正数常量。

证明。对于任意输入$z^0\in\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$，$(\overline{\mathbb{E}}[z_t^0],t\in[0,T]$是一个 $\mathbb{F}^0$-适应过程，因此与 $\mathcal{F}^1$独立。由此，利用詹森不等式，

$$\sup_{\tau\in\mathcal{T}^{0,1}}\Big\|\mathbb{E}\Big[\int_\tau^T|\overline{\mathbb{E}}[z_s^0]|^2ds|\mathcal{F}_\tau^{0,1}\Big]\Big\|_\infty=\sup_{\tau\in\mathcal{T}^0}\Big\|\mathbb{E}\Big[\int_\tau^T|\overline{\mathbb{E}}[z_s^0]|^2ds|\mathcal{F}_\tau^{0}\Big]\Big\|_\infty\le\sup_{\tau\in\mathcal{T}^0}\Big\|\mathbb{E}\Big[\int_\tau^T|z_s^0|^2ds|\mathcal{F}_\tau^{0}\Big]\Big\|_\infty.$$

此外，对于任意 $\tau\in\mathcal{T}^0(\subset\mathcal{T}^{0,\ 1})$，我们有 $\mathbb{E}\big[\int_\tau^T|z_s^0|^2ds|\mathcal{F}_\tau^0\big]=\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\big[\int_\tau^T|z_s^0|^2ds|\mathcal{F}_\tau^{0,1}\big]|\mathcal{F}_\tau^0\Big]$，因此

$$\Big\|\mathbb{E}\Big[\int_\tau^T|z_s^0|^2ds|\mathcal{F}_\tau^{0}\Big]\Big\|_\infty\le\Big\|\mathbb{E}\Big[\int_\tau^T|z_s^0|^2ds|\mathcal{F}_\tau^{0,1}\Big]\Big\|_\infty.$$

由此可得

$$\sup_{\tau\in\mathcal{T}^{0,1}}\Big\|\mathbb{E}\Big[\int_\tau^T|\overline{\mathbb{E}}[z_s^0]|^2ds|\mathcal{F}_\tau^{0,1}\Big]\Big\|_\infty\le\sup_{\tau\in\mathcal{T}^{0,1}}\Big\|\mathbb{E}\Big[\int_\tau^T|z_s^0|^2ds|\mathcal{F}_\tau^{0,1}\Big]\Big\|_\infty.\tag{4.12}$$

现在，结论立即由(4.10)得出。 □

现在我们定义映射 $\Gamma:\ \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}(\mathbb{P}^{0,\ 1},\ \mathbb{F}^{0,\ 1};\mathbb{R}^{1\times d_0}\times\mathbb{R}^{1\times d})\ \ni(z^0,z^1)\ \mapsto\Gamma(z^0,z^1)\ =(Z^0,Z^1)\ \in\ \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}(\mathbb{P}^{0,\ 1},\ \mathbb{F}^{0,\ 1};\mathbb{R}^{1\times d_0}\times\mathbb{R}^{1\times d})$，定义如下：

$$Y_t=F+\int_t^Tf(z_s^0,z_s^1)ds-\int_t^TZ_s^0dW_s^0-\int_t^TZ_s^1dW_s^1,\tag{4.13}$$

其中，$\Gamma(z^0,z^1)\ =(Z^0,Z^1)$ 是与倒向随机微分方程 (4.13) 的解相关联的随机积分被积过程。

引理 4.3. 在假设 3.2 下，映射 $\Gamma$ 定义良好。

证明. 对任意 $(z^0,z^1)\ \in\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$，方程 (4.13) 的唯一解 $(Y,Z^0,Z^1)$ 显然存在。取条件期望后，由引理 4.2 可得，

$$\|Y\|_{\mathbb{S}^\infty}\le\|F\|_\infty+c_\gamma\|(z^0,z^1)\|^2_{\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}}<\infty.$$

此外，对 $|Y_t|^2$ 应用伊藤公式，可得对任意 $t\in[0,T]$,

$$\mathbb{E}\Big[\int_t^T(|Z_s^0|^2+|Z_s^1|^2)ds|\mathcal{F}_t^{0,1}\Big]\le\|F\|^2_\infty+2\|Y\|_{\mathbb{S}^\infty}\mathbb{E}\Big[\int_t^T|f(z_s^0,z_s^1)|ds|\mathcal{F}_t^{0,1}\Big].$$

因此，$\|(Z^0,Z^1)\|^2_{\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}}\le\|F\|^2_\infty+2c_\gamma\|Y\|_{\mathbb{S}^\infty}\|(z^0,z^1)\|^2_{\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}}<\infty.$ □

对于每个正数常量 $R$，令 $\mathcal{B}_R$ 为 $\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$ 的子集，其定义如下：

$$\mathcal{B}_R:=\Big\{(z^0,z^1)\in\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}(\mathbb{P}^{0,1},\mathbb{F}^{0,1};\mathbb{R}^{1\times d_0}\times\mathbb{R}^{1\times d})\Big|\|(z^0,z^1)\|^2_{\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}}\le R^2\Big\}.$$

命题 4.1. 假设 3.2 成立。若 $\|F\|_\infty \le 1/(4\sqrt{2}c_\gamma)$，则对于 $R := 2\|F\|_\infty$，集合 $\mathcal{B}_R$ 在映射 $\Gamma$ 下保持稳定，即 $(z^0, z^1) \in \mathcal{B}_R$ 蕴含 $\Gamma(z^0, z^1) \in \mathcal{B}_R$。此外，在这种情况下，(4.13) 的解的 $y$ 分量满足 $\|Y\|_{\mathbb{S}^\infty} \le R$。

证明。根据 Itô 公式，对于任意 $t \in [0, T]$,

$$|Y_t|^2 + \int_t^T (|Z_s^0|^2 + |Z_s^1|^2)ds = |F|^2 + \int_t^T 2Y_s f(z_s^0, z_s^1)ds - \int_t^T 2Y_s(Z_s^0 dW_s^0 + Z_s^1 dW_s^1).$$

取条件期望可得

$$|Y_t|^2 + \mathbb{E}\Big[\int_t^T (|Z_s^0|^2 + |Z_s^1|^2)ds|\mathcal{F}_t^{0,1}\Big] \le \|F\|_\infty^2 + 2\|Y\|_{\mathbb{S}^\infty}\mathbb{E}\Big[\int_t^T |f(z_s^0, z_s^1)|ds|\mathcal{F}_t^{0,1}\Big]. \tag{4.14}$$

由引理 4.2，在等式两边取本质上确界，得到:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega}\Big(|Y_t|^2 + \mathbb{E}\Big[\int_t^T (|Z_s^0|^2 + |Z_s^1|^2)ds|\mathcal{F}_t^{0,1}\Big]\Big) \le \|F\|_\infty^2 + \frac{1}{2}\|Y\|_{\mathbb{S}^\infty}^2 + 2c_\gamma^2\|(z^0, z^1)\|_{\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}}^4.$$

利用上述结果以及一个显然的关系

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\big(\|Y\|_{\mathbb{S}^\infty}^2 + \|(Z^0, Z^1)\|_{\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}}^2\big) &\le \max\big(\|Y\|_{\mathbb{S}^\infty}^2, \|(Z^0, Z^1)\|_{\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}}^2\big)\\ &\le \operatorname*{ess\,sup}_{(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega}\Big(|Y_t|^2 + \mathbb{E}\Big[\int_t^T (|Z_s^0|^2 + |Z_s^1|^2)ds|\mathcal{F}_t^{0,1}\Big]\Big),\end{aligned}$$

我们得到

$$\|(Z^0, Z^1)\|_{\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}}^2 \le 2\|F\|_\infty^2 + 4c_\gamma^2\|(z^0, z^1)\|_{\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}}^4.$$

现在我们尝试寻找一个 $R > 0$，使得

$$2\|F\|_\infty^2 + 4c_\gamma^2 R^4 \le R^2$$

成立。通过配方可知，当且仅当 $\|F\|_\infty \le 1/(4\sqrt{2}c_\gamma)$ 时，该式有解；在这种情况下，我们可以取 $R = 2\|F\|_\infty$。这证明了第一个结论。此外，将不等式 (4.14) 的第一条重新排列，可得

$$|Y_t|^2 \le \|F\|_\infty^2 + \frac{1}{2}\|Y\|_{\mathbb{S}^\infty}^2 + 2c_\gamma^2\|(z^0, z^1)\|_{\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}}^4$$

因此

$$\|Y\|_{\mathbb{S}^\infty}^2 \le 2\|F\|_\infty^2 + 4c_\gamma^2\|(z^0, z^1)\|_{\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}}^4.$$

这表明，当 $(z^0, z^1) \in \mathcal{B}_R$ 时，$\|Y\|_{\mathbb{S}^\infty}^2 \le R^2$。 □

现在，我们给出本文的第一个主要结果。

定理 4.1. 假设 3.2 成立。若终端函数 $F$ 足够小，即

$$\|F\|_\infty < \frac{1}{48C_\gamma}, \tag{4.15}$$

其中 $C_\gamma$ 是式 (4.11) 中使用的常数，则均值场倒向随机微分方程 (4.9) 在区域中存在唯一的解 $(Y, Z^0, Z^1)$

$$(Z^0, Z^1) \in \mathcal{B}_R, \quad \|Y\|_{\mathbb{S}^\infty} \le R$$

其中 $R := 2\|F\|_\infty$。

证明。注意，条件 (4.15) 比命题 4.1 中使用的条件更严格。因此，只需证明映射 $\Gamma$ 是严格压缩映射。

为证明该压缩映射，考虑两个任意输入 $z := (z^0, z^1)$ $\acute{z} := (\acute{z}^0, \acute{z}^1) \in \mathcal{B}_R$。令

$$Z := (Z^0, Z^1) := \Gamma(z), \quad \acute{Z} := (\acute{Z}^0, \acute{Z}^1) := \Gamma(\acute{z}),$$

并令 $Y, \acute{Y}$分别为输入 $z$ 和 $\acute{z}$时方程 (4.13) 的解的 $y$-分量。为简化记号，记

$$\Delta z := z - \acute{z}, \quad \Delta Y := Y - \acute{Y}, \quad \Delta Z := Z - \acute{Z}.$$

由此得到

$$\Delta Y_t = \int_t^T \big(f(z_s^0, z_s^1) - f(\acute{z}_s^0, \acute{z}_s^1)\big)ds - \int_t^T \Delta Z_s^0 dW_s^0 - \int_t^T \Delta Z_s^1 dW_s^1,$$

因此，由伊藤公式，

$$|\Delta Y_t|^2 + \int_t^T (|\Delta Z_s^0|^2 + |\Delta Z_s^1|^2)ds = \int_t^T 2\Delta Y_s(f(z_s^0, z_s^1) - f(\acute{z}_s^0, \acute{z}_s^1))ds - \int_t^T 2\Delta Y_s(\Delta Z_s^0 dW_s^0 + \Delta Z_s^1 dW_s^1).$$

取条件期望后，由 H¨older 不等式可得，

$$\begin{aligned}
&|\Delta Y_t|^2 + \mathbb{E}\Big[\int_t^T (|\Delta Z_s^0|^2 + |\Delta Z_s^1|^2)ds|\mathcal{F}_t^{0,1}\Big] \le 2\|\Delta Y\|_{\mathbb{S}^\infty}\mathbb{E}\Big[\int_t^T |f(z_s^0, z_s^1) - f(\acute{z}_s^0, \acute{z}_s^1)|ds|\mathcal{F}_t^{0,1}\Big] \\
&\le \frac{1}{2}\|\Delta Y\|_{\mathbb{S}^\infty}^2 + 2\Big(\mathbb{E}\Big[\int_t^T |f(z_s^0, z_s^1) - f(\acute{z}_s^0, \acute{z}_s^1)|ds|\mathcal{F}_t^{0,1}\Big]\Big)^2 \\
&\le \frac{1}{2}\|\Delta Y\|_{\mathbb{S}^\infty}^2 + 2C_\gamma^2\Big(\mathbb{E}\Big[\int_t^T (|z_s^0| + |\acute{z}_s^0| + |z_s^1| + |\acute{z}_s^1| + |\overline{\mathbb{E}}[z_s^0]| + |\overline{\mathbb{E}}[\acute{z}_s^0]|)(|\Delta z_s^0| + |\Delta z_s^1| + |\overline{\mathbb{E}}[\Delta z_s^0]|)ds|\mathcal{F}_t^{0,1}\Big]\Big)^2 \\
&\le \frac{1}{2}\|\Delta Y\|_{\mathbb{S}^\infty}^2 + 2C_\gamma^2\Big(\mathbb{E}\Big[\int_t^T (|z_s^0| + |\acute{z}_s^0| + |z_s^1| + |\acute{z}_s^1| + |\overline{\mathbb{E}}[z_s^0]| + |\overline{\mathbb{E}}[\acute{z}_s^0]|)^2 ds|\mathcal{F}_t^{0,1}\Big]\Big) \\
&\qquad\qquad \times \Big(\mathbb{E}\Big[\int_t^T (|\Delta z_s^0| + |\Delta z_s^1| + |\overline{\mathbb{E}}[\Delta z_s^0]|)^2 ds|\mathcal{F}_t^{0,1}\Big]\Big) \\
&\le \frac{1}{2}\|\Delta Y\|_{\mathbb{S}^\infty}^2 + 2C_\gamma^2\Big(6\mathbb{E}\Big[\int_t^T (|z_s^0|^2 + |\acute{z}_s^0|^2 + |z_s^1|^2 + |\acute{z}_s^1|^2 + |\overline{\mathbb{E}}[z_s^0]|^2 + |\overline{\mathbb{E}}[\acute{z}_s^0]|^2)ds|\mathcal{F}_t^{0,1}\Big]\Big) \\
&\qquad\qquad \times \Big(3\mathbb{E}\Big[\int_t^T (|\Delta z_s^0|^2 + |\Delta z_s^1|^2 + |\overline{\mathbb{E}}[\Delta z_s^0]|^2)ds|\mathcal{F}_t^{0,1}\Big]\Big).
\end{aligned}$$

采用命题 4.1 的证明中使用的相同技巧，并结合式（4.12），可得

$$\|\Delta Z\|_{\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}}^2 \le 4C_\gamma^2\Big(12 \sup_{\tau\in\mathcal{T}^{0,1}}\Big\|\mathbb{E}\Big[\int_\tau^T (|z_s|^2 + |\acute{z}_s|^2)ds|\mathcal{F}_\tau^{0,1}\Big]\Big\|_\infty\Big)\Big(6 \sup_{\tau\in\mathcal{T}^{0,1}}\Big\|\mathbb{E}\Big[\int_\tau^T |\Delta z_s|^2 ds|\mathcal{F}_\tau^{0,1}\Big]\Big\|_\infty\Big).$$

由于 $z, \acute{z} \in \mathcal{B}_R$，我们得到

$$\|\Delta Z\|_{\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}}^2 \le 576C_\gamma^2 R^2\|\Delta z\|_{\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}}^2.$$

因此，当 $R < \frac{1}{24C_\gamma}$ 时， $\Gamma$ 在 $\mathcal{B}_R$ 上的映射成为压缩映射。取 $R = 2\|F\|_\infty$ 时，这等价于

$$\|F\|_\infty < \frac{1}{48C_\gamma}.$$

在这种情况下， $\Delta Z \to 0$ 在映射 $\Gamma$的反复作用下属于 $\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$ ，并且显然 $\Delta Y \to 0$ 也属于 $\mathbb{S}^\infty$。映射 $\Gamma$ 的不动点 $Z \in \mathcal{B}_R$ 是唯一的，且相应的 $Y$ 给出了定义域 $Z \in \mathcal{B}_R$内平均场倒向随机微分方程 (4.9) 的唯一解。 □

注释 4.2. 回顾一下，在变换 (3.11) 下，最优交易策略具有不变性。因此，为了获得具有指数效用的均衡模型，定理 4.1 中对终端函数 $F$ 的约束并非直接限制负债的绝对规模，而是限制其偏离均值的程度：

$$\left|F - \mathbb{E}[F|\mathcal{F}_0^{0,1}]\right| = \left|F - \mathbb{E}[F|\mathcal{F}_0^{1}]\right|.$$

## 4.3 具有特殊终端结构的平均场倒向随机微分方程的解的存在性

下面给出一个特殊例子：即使终端函数 $F$不满足约束 (4.15)，平均场倒向随机微分方程 (4.9) 至少仍有一个解 $(Y, Z^0, Z^1) \in \mathbb{S}^\infty \times \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}} \times \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$。由此可见，定理 4.1 仅仅给出了平均场倒向随机微分方程 (4.9) 适定性的一组充分条件。

将重新缩放后的变量代入平均场倒向随机微分方程 (4.9)，可将其改写为： [5]

$$(y, z^0, z^1) := (\gamma Y, \gamma Z^0, \gamma Z^1), \quad G = \gamma F,$$

由此得到

$$y_t = G + \int_t^T \Big(\widehat{\gamma} z_s^{0\|} \overline{\mathbb{E}}\Big[\frac{1}{\gamma} z_s^{0\|}\Big]^\top - \frac{\widehat{\gamma}^2}{2}\Big|\overline{\mathbb{E}}\Big[\frac{1}{\gamma} z_s^{0\|}\Big]\Big|^2 + \frac{1}{2}(|z_s^{0\perp}|^2 + |z_s^1|^2)\Big) ds - \int_t^T z_s^0 dW_s^0 - \int_t^T z_s^1 dW_s^1,\ t \in [0, T]. \tag{4.16}$$

我们作如下假设。

假设 4.2. 重新缩放的终端函数 $G$具有加性形式：

$$G = G^0 + G^1,$$

其中， $G^0$（分别为 $G^1$）是有界的、关于 $\mathcal{F}_T^0$（分别关于 $\mathcal{F}_T^1$）可测的随机变量。

注释 4.3. 就原始负债 $F$ （$= F^1$）而言，上述条件等价于假设 $F$ 具有如下结构：

$$F = \frac{1}{\gamma}\widetilde{F}^0 + \widetilde{F}^1,$$

其中 $\widetilde{F}^0$（分别为 $\widetilde{F}^1$）是有界的、可测的随机变量。在个体分布如假设 4.1 所规定的金融市场中，这意味着负债中依赖于共同噪声的部分与代理人的风险厌恶参数（$\gamma^i$、 $i \in \mathbb{N}$）成反比。

[5]请回忆，在本小节中，我们采用约定 $(F, \gamma) = (F^1, \gamma^1)$。

定理 4.2。在假设 3.2 和 4.2 下，方程 (4.16) 至少存在一个解 $(y, z^0, z^1) \in \mathbb{S}^\infty \times \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}} \times \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$，或者等价地，方程 (4.9) 存在一个解 $(Y, Z^0, Z^1) \in \mathbb{S}^\infty \times \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}} \times \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$。

证明。考虑以下两个倒向随机微分方程：

$$y_t^0 = G^0 + \int_t^T \frac{1}{2}|z_s^0|^2 ds - \int_t^T z_s^0 dW_s^0, \quad t \in [0,T],$$
$$y_t^1 = G^1 + \int_t^T \frac{1}{2}|z_s^1|^2 ds - \int_t^T z_s^1 dW_s^1, \quad t \in [0,T].$$

显然，根据文献 [39] 中关于二次增长倒向随机微分方程的标准结果，存在唯一的解 $(y^i, z^i) \in \mathbb{S}^\infty \times \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$，满足 $i = 0, 1$。由于 $(y^0, z^0)$ 是 $\mathbb{F}^0$-适应的，$z^{0\parallel}$ 也是如此，因此我们有

$$\overline{\mathbb{E}}\Big[\frac{1}{\gamma} z_s^{0\parallel}\Big] = \overline{\mathbb{E}}\Big[\frac{1}{\gamma}\Big] z_s^{0\parallel} = \frac{1}{\widehat{\gamma}} z_s^{0\parallel}.$$

因此，$(y^0, z^0)$ 也是以下倒向随机微分方程的解

$$y_t^0 = G^0 + \int_t^T \Big(\widehat{\gamma} z_s^{0\parallel} \overline{\mathbb{E}}\Big[\frac{1}{\gamma} z_s^{0\parallel}\Big]^\top - \frac{\widehat{\gamma}^2}{2}\Big|\overline{\mathbb{E}}\Big[\frac{1}{\gamma} z_s^{0\parallel}\Big]\Big|^2 + \frac{1}{2}|z_s^{0\perp}|^2\Big) ds - \int_t^T z_s^0 dW_s^0, \ t \in [0,T].$$

I现在显然，$(y, z^0, z^1) := (y^0 + y^1, z^0, z^1)$ 给出了方程 (4.16) 的一个解。 □

注 4.4。在定理 4.2 所用的假设下，我们实际上有一个闭式解，

$$y_t^j = \ln\big(\mathbb{E}\big[\exp(G^j)|\mathcal{F}_t^j\big]\big), \ j = 0, 1.$$

通过 Cole-Hopf 变换 $\exp(y_t^j)$，可以轻松验证这一结果。

## 5 大群体极限下的市场出清

最后，在本节中，我们将证明，根据平均场倒向随机微分方程的解由 (4.8) 定义的过程 $(\theta_t^{\mathrm{mfg}}, t \in [0,T]) \in \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$ 实际上是市场出清均衡中风险溢价过程的一个良好近似。

为了研究大群体极限，我们首先将带有滤过 $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ 的完备概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 扩张如下。

- $\Omega := \Omega^0 \times \prod_{i=1}^\infty \Omega^i$ 且 $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是 $\big(\mathcal{F}^0 \otimes \bigotimes_{i=1}^\infty \mathcal{F}^i, \mathbb{P}^0 \otimes \bigotimes_{i=1}^\infty \mathbb{P}^i\big)$ 的完备化。 $\mathbb{F}$ 表示 $(\mathcal{F}_t^0 \otimes \bigotimes_{i=1}^\infty \mathcal{F}_t^i)_{t\geq 0}$ 的完备且右连续扩张。 $\mathbb{E}[\cdot]$ 表示关于 $\mathbb{P}$ 的期望。 [6]

假设金融市场如假设 3.1 所定义，其中过程 $\mu$ 由（$\mu_t := \sigma_t \theta_t^{\mathrm{mfg}}$，$t \in [0,T]$）给出。注意，过程 $\theta^{\mathrm{mfg}}$（因此过程 $\mu$ 也）是 $\mathbb{F}^0$-适应的，并且与我们关于信息结构的假设一致。特别地，这意味着每个代理人（代理人-$i$）都可以仅根据公共信息和自身的特异信息来执行其策略

[6]关于如何构造（可数甚至不可数）乘积概率空间的一般结果，例如参见 Klenke [38][第 14 节3]。

$\mathbb{F}^0 \otimes \mathbb{F}^i$ 而无需考虑其他代理人的特质噪声。因此，对于每个 $i \in \mathbb{N}$，代理人-$i$ 的最优交易策略由（4.1）给出，

$$p_t^{i,*} \ (= (\pi_t^{i,*})^\top \sigma_t) = Z_t^{i,0\|} - \frac{\widehat{\gamma}}{\gamma^i} \overline{\mathbb{E}}[\mathcal{Z}_t^{0\|}], \quad t \in [0,T].$$

这里，$Z^{i,\ 0}$ 与倒向随机微分方程的解相关（见式 (4.2)）

$$\begin{aligned} Y_t^i = F^i + \int_t^T \Big( \widehat{\gamma} Z_s^{i,0\|} \overline{\mathbb{E}}[\mathcal{Z}_s^{0\|}]^\top - \frac{\widehat{\gamma}^2}{2\gamma^i} |\overline{\mathbb{E}}[\mathcal{Z}_s^{0\|}]|^2 + \frac{\gamma^i}{2} (|Z_s^{i,0\perp}|^2 + |Z_s^i|^2) \Big) ds \\ - \int_t^T Z_s^{i,0} dW_s^0 - \int_t^T Z_s^i dW_s^i, \ t \in [0,T], \end{aligned} \tag{5.1}$$

而 $\mathcal{Z}^0$ 与平均场倒向随机微分方程 (4.7) 的解相关 [7]

$$\mathcal{Y}_t^1 = F^1 + \int_t^T \Big( \widehat{\gamma} \mathcal{Z}_s^{0\|} \overline{\mathbb{E}}[\mathcal{Z}_s^{0\|}]^\top - \frac{\widehat{\gamma}^2}{2\gamma^1} |\overline{\mathbb{E}}[\mathcal{Z}_s^{0\|}]|^2 + \frac{\gamma^1}{2} (|\mathcal{Z}_s^{0\perp}|^2 + |\mathcal{Z}_s^1|^2) \Big) ds - \int_t^T \mathcal{Z}_s^0 dW_s^0 - \int_t^T \mathcal{Z}_s^1 dW_s^1, \ t \in [0,T].$$

根据定理 4.1 和定理 4.2，我们已经知道，在一定条件下，平均场倒向随机微分方程 (4.7) 存在一个有界解（可能不唯一）$(\mathcal{Y}^1, \mathcal{Z}^0, \mathcal{Z}^1) \in \mathbb{S}^\infty \times \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}} \times \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$。

以下是本文最后一个主要结果。

定理 5.1. 假设 3.1 和 4.1 成立。进一步假设平均场倒向随机微分方程 (4.7) 存在一个有界解 $(\mathcal{Y}^1, \mathcal{Z}^0, \mathcal{Z}^1) \in \mathbb{S}^\infty \times \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}} \times \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$，并从中选取一个任意但固定的解来定义风险溢价过程 $(\theta_t^{\mathrm{mfg}} := -\widehat{\gamma} \overline{\mathbb{E}}[\mathcal{Z}_t^{0\|}]^\top, \ t \in [0,T])$。那么，$\theta^{\mathrm{mfg}}$ 在大群体极限下实现市场出清，其含义是，代理人的最优交易策略 $(\pi^{i,\ *})_{i \in \mathbb{N}}$ 满足以下估计

$$\mathbb{E} \int_0^T \Big| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \pi_t^{i,*} \Big|^2 dt \le \frac{C}{N}$$

其中某个常数 $C > 0$ 在 $N \in \mathbb{N}$ 中一致有界。

证明。给定 $\theta^{\mathrm{mfg}} \ (= -\widehat{\gamma} \overline{\mathbb{E}}[\mathcal{Z}^{0\|}]^\top)$，由 (4.12) 可知它属于 $\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$，根据推论 3.1，倒向随机微分方程 (5.1) 存在唯一的有界解 $(Y^i, Z^{i,\ 0}, Z^i)$，对每个$i \in \mathbb{N}$，$\in \mathbb{S}^\infty \times \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}} \times \mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$ 均成立。特别地，解的唯一性意味着 $(Y^1, Z^{1,\ 0}, Z^1) = (\mathcal{Y}^1, \mathcal{Z}^0, \mathcal{Z}^1)$，后者正是用于定义过程 $\theta^{\mathrm{mfg}}$ 的那个解。因此我们有 $\overline{\mathbb{E}}[\mathcal{Z}^{0\|}] = \overline{\mathbb{E}}[Z^{1,0\|}]$。

(5.1) 的解的唯一性还通过 Yamada-Watanabe 定理（例如参见 [7][定理 1.33]）意味着，存在一个可测函数 $\Phi$，使得

$$(Y^i, Z^{i,0}, Z^i) = \Phi\Big( W^0, \xi^i, \gamma^i, W^i, (\theta^{\mathrm{mfg}}, F^i) \Big), \ \forall i \in \mathbb{N}$$

其中 $\Phi$ 仅取决于联合分布 $\mathcal{L}\big(W^0, \xi^i, \gamma^i, W^i, (\theta^{\mathrm{mfg}}, F^i)\big)$。由于 $\theta^{\mathrm{mfg}}$ 是 $\mathbb{F}^0$-适应的，且 $F^i$ 是 $\mathcal{F}^0$-条件独立同分布的，该表达式表明，解 $\{(Y^i, Z^{i,\ 0}, Z^i) \ i \in \mathbb{N}\}$ 是 $\mathcal{F}^0$-条件独立同分布的。

[7]为便于区分，我们更改了符号。

由于 $\pi^{i,*}_t=(\sigma_t\sigma_t^\top)^{-1}\sigma_t(p^{i,*}_t)^\top$，根据假设 3.1 (ii)，我们有：

$$\mathbb{E}\int_0^T\Big|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\pi_t^{i,*}\Big|^2dt\le C\mathbb{E}\int_0^T\Big|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N p_t^{i,*}\Big|^2dt$$

其中某个常数为 $C$。由于 $\mathcal{Z}^0=Z^{1,0}$，我们有

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N p_t^{i,*}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N(Z_t^{i,0\|}-\overline{\mathbb{E}}[Z_t^{1,0\|}])+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\Big(1-\frac{\widehat{\gamma}}{\gamma^i}\Big)\overline{\mathbb{E}}[Z_t^{1,0\|}],$$

由此可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_0^T\Big|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N p_t^{i,*}\Big|^2dt&\le 2\mathbb{E}\int_0^T\Big|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N(Z_t^{i,0\|}-\overline{\mathbb{E}}[Z_t^{1,0\|}])\Big|^2dt+2\widehat{\gamma}^2\mathbb{E}\int_0^T\Big|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\Big(\frac{1}{\widehat{\gamma}}-\frac{1}{\gamma^i}\Big)\overline{\mathbb{E}}[Z_t^{1,0\|}]\Big|^2dt\\&=2\mathbb{E}\int_0^T\Big|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N(Z_t^{i,0\|}-\overline{\mathbb{E}}[Z_t^{1,0\|}])\Big|^2dt+2\widehat{\gamma}^2\mathbb{E}\Big[\Big|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\Big(\frac{1}{\widehat{\gamma}}-\frac{1}{\gamma^i}\Big)\Big|^2\Big]\mathbb{E}\int_0^T|\overline{\mathbb{E}}[Z_t^{1,0\|}]|^2dt,\end{aligned}$$

其中第二行用到了 $(\gamma^i)_{i\in\mathbb{N}}$ 与 $\mathcal{F}^0$ 的独立性。由于 $(1/\gamma^i)_{i=1}^N$ 独立同分布，且 $(Z^{i,0\|}_t)_{i=1}^N$ 是 $\mathcal{F}^0$-条件独立同分布的，两个期望中的交叉项均为零。因此，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_0^T\Big|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N p_t^{i,*}\Big|^2dt&\le\frac{2}{N^2}\sum_{i=1}^N\mathbb{E}\int_0^T|Z_t^{0,i}-\overline{\mathbb{E}}[Z_t^{0,1}]|^2dt+\frac{2\widehat{\gamma}^2}{N^2}\sum_{i=1}^N\mathbb{E}\Big[\Big|\frac{1}{\widehat{\gamma}}-\frac{1}{\gamma^i}\Big|^2\Big]\mathbb{E}\int_0^T|Z_t^{1,0}|^2dt\\&\le\frac{4}{N}\Big(1+\frac{\widehat{\gamma}^2}{\underline{\gamma}^2}\Big)\|Z^{0,1}\|^2_{\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}},\end{aligned}$$

这里用到了詹森不等式和带有 $n=1$ 的 (2.2)。这就得到了所需结果。 □

结合定理 4.1 和定理 4.2，定理 5.1 的结果表明，由 (4.8) 给出的 $\theta^{\mathrm{mfg}}$ 在大群体极限下满足市场出清条件，即

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\pi_t^{i,*}=0,\ \mathbb{P}\otimes dt\text{-a.e.}$$

至少在对每个 $i$，$|F^i-\mathbb{E}[F^i|\mathcal{F}_0^i]|$ 足够小或 $F^i$ 具有加性形式的情况下如此。这在经济学上意味着，在大群体极限下，人均超额需求/供给几乎处处收敛于零（$\mathbb{P}\otimes dt$-a.e.）。为了全面理解均值场均衡存在的一般条件，我们还需要进一步研究平均场倒向随机微分方程 (4.9)。

注 5.1. Tevzadze 的压缩映射方法 *[48]*[命题 *1]* 在我们证明定理 4.1 时所采用的方法适用于多维情形，因此也可用于证明有限个（例如 $N$ 个）代理人之间均衡的存在性，方法是直接求解二次增长倒向随机微分方程 (4.4) 的耦合系统（并对方程及可容许空间作适当修改）。然而，这种方法要求完全信息假设，同时还要求代理人之间负债总额足够小；$\|\sqrt{\sum_{i=1}^N|F^i|^2}\|_\infty$。这意味着，随着人口增长，对负债的限制会越来越严格。

注 5.2. 遗憾的是，目前尚不清楚市场均衡是否唯一。我们预期，当满足定理 4.1 的条件时，即 $\|F\|_\infty$ 足够小、使得平均场倒向随机微分方程 (4.9) 在指定区域内有唯一解时，均衡可能是唯一的。然而，本文仅尝试采用“猜测并验证”策略来寻找均衡候选解。因此，尽管这种情况似乎不太可能，我们仍无法排除存在一个无法由我们的倒向随机微分方程 (4.9) 刻画的市场出清均衡。

# 6 结论与讨论

本文研究了许多投资者在指数效用下的均衡价格形成问题。我们允许代理人在初始财富、风险厌恶参数以及终端时刻的随机负债方面存在异质性。我们证明，风险股票的均衡风险溢价过程由一个新型平均场倒向随机微分方程的解刻画，其驱动项在随机积分被积过程及其条件期望方面均具有二次增长。我们证明，在若干条件下，该平均场倒向随机微分方程存在解，并表明由此得到的风险溢价过程确实能在大群体极限下使市场出清。

我们指出若干值得进一步研究的方向。将本文提出的技术推广至涉及消费或代理人之间存在不同相互作用的价格形成问题，是一个重要的研究课题。在存在生产的情况下，将其应用于宏观经济模型也有可能。最后，新型平均场倒向随机微分方程（4.7）值得进一步研究，以放宽其适定性条件。我们预计，同类反向随机微分方程将在均场博弈的各种应用以及鞅方法中出现 [26]。

致谢

M.S. 受到日本学术振兴会科学研究费助成事业资助，项目编号为 23KJ0648。

# A 附录

## A.1 引理3.1的证明

由 Itô 公式可得，

$$\begin{aligned} de^{2y_t} &= e^{2y_t}\big(2z_t^{0\|}\theta_t + |\theta_t|^2 - \big(|z_t^{0\perp}|^2 + |z_t^1|^2\big) + 2\big(|z_t^0|^2 + |z_t^1|^2\big)\big)dt \\ &\quad + 2e^{2y_t}(z_t^0 dW_t^0 + z_t^1 dW_t^1) \\ &\geq e^{2y_t}\big(-|z_t^{0\|}|^2 - \big(|z_t^{0\perp}|^2 + |z_t^1|^2\big) + 2\big(|z_t^0|^2 + |z_t^1|^2\big)\big)dt \\ &\quad + 2e^{2y_t}(z_t^0 dW_t^0 + z_t^1 dW_t^1) \\ &\geq e^{2y_t}(|z_t^0|^2 + |z_t^1|^2)dt + 2e^{2y_t}(z_t^0 dW_t^0 + z_t^1 dW_t^1) \end{aligned}$$

因此，对任意 $t \in [0,T]$,

$$e^{2y_T} - e^{2y_t} \geq \int_t^T e^{2y_s}(|z_s^0|^2 + |z_s^1|^2)ds + \int_t^T 2e^{2y_s}(z_s^0 dW_s^0 + z_s^1 dW_s^1).$$

因此，很容易得到 $\|z\|^2_{\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}} := \sup_{\tau\in\mathcal{T}^{0,1}} \left\| \mathbb{E}\left[\int_\tau^T (|z_s^0|^2 + |z_s^1|^2)ds \middle| \mathcal{F}^0_{,\tau}{}^1\right]\right\|_\infty \leq e^{4\|y\|_{\mathbb{S}^\infty}}$. □

## A.2 定理 3.2 的证明（续）

定义一个光滑凸函数 $\phi$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$，使其满足

$$\phi(0) = 0, \quad \phi'(0) = 0,$$

其具体形式将在后文确定。我们考虑满足 $m \geq n$ 的 $m$、$n \in \mathbb{N}$，并令

$$\Delta y^{n,m} := y^n - y^m, \quad \Delta z^{n,m;0} := z^{n,0} - z^{m,0}, \quad \Delta z^{n,m;1} := z^{n,1} - z^{m,1}.$$

注意到 $\Delta y^{n,\ m} \geq 0$，因为 $m \geq n$。由 Itô 公式，对于任意 $t \in [0,T]$，我们得到:

$$\begin{aligned}
&\phi(\Delta y_t^{n,m}) + \int_t^T \frac{1}{2}\phi''(\Delta y_s^{n,m})(|\Delta z_s^{n,m;0}|^2 + |\Delta z_s^{n,m;1}|^2)ds \\
&= \int_t^T \phi'(\Delta y_s^{n,m})\big[-\frac{1}{2}(|\theta_s|^2 \wedge n) + \frac{1}{2}(|z_s^{n,0\perp}|^2 + |z_s^{n,1}|^2) + \frac{1}{2}(|\theta_s|^2 \wedge m) - \frac{1}{2}(|z_s^{m,0\perp}|^2 + |z_s^{m,1}|^2)\big]ds \\
&\quad - \int_t^T \phi'(\Delta y_s^{n,m})(\Delta z_s^{n,m;0} d\widetilde{W}_s^0 + \Delta z_s^{n,m;1} d\widetilde{W}_s^1).
\end{aligned}$$

由于 $\phi(y)\ \phi'(y) \geq 0, \forall y \geq 0$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T \frac{1}{2}\phi''(\Delta y_s^{n,m})(|\Delta z_s^{n,m;0}|^2 + |\Delta z_s^{n,m;1}|^2)ds \\
&\leq \mathbb{E}\int_0^T \frac{1}{2}\phi'(\Delta y_s^{n,m})\big(|\theta_s|^2 + |z_s^{n,0}|^2 + |z_s^{n,1}|^2\big)ds \\
&\leq \mathbb{E}\int_0^T \phi'(\Delta y_s^{n,m})\big(|\theta_s|^2 + |z_s^{n,0} - z_s^0|^2 + |z_s^{n,1} - z_s^1|^2 + |z_s^0|^2 + |z_s^1|^2\big)ds.
\end{aligned} \tag{A.1}$$

现在我们将函数 $\phi$ 选为

$$\phi(y) := \frac{1}{8}[e^{4y} - 4y - 1],$$

由此得到 $\phi'(y) = \frac{1}{2}[e^{4y} - 1]$ 且 $\phi''(y) = 2e^{4y}$。特别地，我们有 $\phi''(y) = 4\phi'(y) + 2$。根据 $(A.1)$，可得:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T [2\phi'(\Delta y_s^{n,m}) + 1](|\Delta z_s^{n,m;0}|^2 + |\Delta z_s^{n,m;1}|^2)ds \\
&\leq \mathbb{E}\int_0^T \phi'(\Delta y_s^{n,m})(|\theta_s|^2 + |z_s^{n,0} - z_s^0|^2 + |z_s^{n,1} - z_s^1|^2 + |z_s^0|^2 + |z_s^1|^2)ds.
\end{aligned} \tag{A.2}$$

注意，由于 $(\Delta y^{n,m})_{m \geq n}$ 有界且强收敛 $\Delta y^{n,m} \to y^n - y$ 当 $m \to \infty$时，在适当的子序列下（仍记为 $m$），我们还得到在 $\mathbb{H}^2$中的以下弱收敛;

$$\sqrt{2\phi'(\Delta y^{n,m}) + 1}\Delta z^{n,m;j} \rightharpoonup \sqrt{2\phi'(y^n - y) + 1}(z^{n,j} - z^j), \quad \text{as } m \to \infty,$$

其中 $j=0,1$。因此，根据 [2][命题 3.5] 和单调收敛性，由 $(A.2)$ 可得，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T [2\phi'(y_s^n - y_s)+1](|z_s^{n,0}-z_s^0|^2+|z_s^{n,1}-z_s^1|^2)ds \\
&\le \liminf_{m\to\infty}\mathbb{E}\int_0^T [2\phi'(\Delta y_s^{n,m})+1](|\Delta z_s^{n,m;0}|^2+|\Delta z_s^{n,m;1}|^2)ds \\
&\le \mathbb{E}\int_0^T \phi'(y_s^n-y_s)(|\theta_s|^2+|z_s^{n,0}-z_s^0|^2+|z_s^{n,1}-z_s^1|^2+|z_s^0|^2+|z_s^1|^2)ds.
\end{aligned}$$

重新整理 $|z^{n,j}-z^j|^2$-项（$j=0,1$），可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T [\phi'(y_s^n - y_s)+1](|z_s^{n,0}-z_s^0|^2+|z_s^{n,1}-z_s^1|^2)ds \\
&\le \mathbb{E}\int_0^T \phi'(y_s^n-y_s)(|\theta_s|^2+|z_s^0|^2+|z_s^1|^2)ds.
\end{aligned}$$

由于根据单调收敛定理，当 $n\to\infty$ 时右端趋于零，我们得到

$$z^{n,0}\to z^0,\quad z^{n,1}\to z^1,\quad \text{strongly in } \mathbb{H}^2.$$

然后，根据 Burkholder-Davis-Gundy（BDG）不等式 [8]，可知在适当的子列下，$(j=0,1)$ 满足如下收敛关系，

$$\sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_t^T (z_s^{n,j}-z_s^j)d\widetilde{W}_s^j\Big|\to 0,\quad \mathbb{Q}\text{-a.s. as } n\to\infty$$

$\sup_{t\in[0,T]}|y_t^n-y_t|$ 也同样如此。现在很容易看出，$(y,z^0,z^1)\in\mathbb{S}^\infty\times\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}\times\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}$ 确实是倒向随机微分方程 $(3.8)$ 的解。解的唯一性证明与定理3.1完全相同。□

## A.3 引理 4.1 的证明

对 $e^{2\gamma Y_t}$ 应用 Itˆo 公式并使用 $|Z_t^0|^2=|Z_t^{0\|}|^2+|Z_t^{0\perp}|^2$，可得

$$\begin{aligned}
d(e^{2\gamma Y_t}) &= e^{2\gamma Y_t}\big(2\gamma dY_t+2\gamma^2(|Z_t^0|^2+|Z_t^1|^2)dt\big) \\
&= e^{2\gamma Y_t}\big(-2\gamma\widehat{\gamma}Z_t^{0\|}\overline{\mathbb{E}}[Z_t^{0\|}]^\top+\widehat{\gamma}^2|\overline{\mathbb{E}}[Z_t^{0\|}]|^2-\gamma^2(|Z_t^{0\perp}|^2+|Z_t^1|^2)+2\gamma^2(|Z_t^0|^2+|Z_t^1|^2)\big)dt \\
&\quad + e^{2\gamma Y_t}2\gamma(Z_t^0dW_t^0+Z_t^1dW_t^1) \\
&\ge e^{2\gamma Y_t}\gamma^2(|Z_t^0|^2+|Z_t^1|^2)dt+e^{2\gamma Y_t}2\gamma(Z_t^0dW_t^0+Z_t^1dW_t^1).
\end{aligned}$$

因此，对于任意 $\tau\in\mathcal{T}^{1,\,0}$，

$$\mathbb{E}\big[e^{2\gamma Y_T}|\mathcal{F}_\tau^{1,0}\big]\ge\mathbb{E}\big[e^{2\gamma Y_T}-e^{2\gamma Y_\tau}|\mathcal{F}_\tau^{1,0}\big]\ge\mathbb{E}\Big[\int_\tau^T e^{2\gamma Y_s}\gamma^2(|Z_s^0|^2+|Z_s^1|^2)ds|\mathcal{F}_\tau^{1,0}\Big],$$

由此得到 $\|(Z^0,Z^1)\|^2_{\mathbb{H}^2_{\mathrm{BMO}}}\le\dfrac{1}{\underline{\gamma}^2}\exp\big(4\overline{\gamma}\|Y\|_{\mathbb{S}^\infty}\big)$。 □

[8]例如，参见 [46][IV 中的定理 48]。

# 参考文献

[1] Back, K.，《资产定价与投资组合选择理论》，第二版，牛津大学出版社，2017年，纽约。[2] Brezis, H.，《泛函分析、Sobolev空间与偏微分方程》，施普林格，纽约，2011年。[3] Briand, P. 和 Hu, Y.，《具有二次增长和无界终端值的倒向随机微分方程》，Probab. Theory Relat. Fields，2006年，136卷，604-618页。[4] Briand, P. 和 Hu, Y.，《具有凸生成元和无界终端条件的二次倒向随机微分方程》，Probab. Theory Relat. Fields，2008年，141卷，543-567页。[5] Cardaliaguet, P.，2013年，《均值场博弈笔记》，可访问：https://www.ceremade.dauphine.fr/ cardaliaguet。[6] Carmona, R. 和 Delarue, F.，《均值场博弈的概率理论及其应用 I》，2018年，施普林格国际出版公司，瑞士。[7] Carmona, R. 和 Delarue, F.，《均值场博弈的概率理论及其应用 II》，2018年，施普林格国际出版公司，瑞士。[8]Cuoco, D. 和 He, H.，《不完备金融市场下有限维经济体中的动态聚合与均衡计算》，《经济与金融年鉴》，2001年，第2卷（2），265-296页。[9] Cvitani´c, J. 和 Zhang, J.，《连续时间方法中的契约理论》，2013年，施普林格，柏林。[10] Espinosa, G.-E. 和 Touzi, N.，《相对业绩考量下的最优投资》，《数理金融》，2015年，第25卷，第2期，221-257页。[11] Evangelista, D.、Saporito, Y. 和 Thamsten, Y.，《金融市场中的价格形成：博弈论视角》，2022年，arXiv:2202.11416。l[12] Firoozi, D.、Shrivats, A. 和 Jaimungal, S.，《可再生能源证书市场中的委托代理均值场博弈》，2022年，arXiv:2112.11963。[13] Frei, C. 和 dos Reis, G.，《一个存在相互作用投资者的金融市场：均衡是否存在？》，Math Finan Econ，2011年，第4卷，161-182页。[14] Fu, G.、Su, X. 和 Zhou, C.，《均值场指数效用博弈：一种概率方法》，2020年，arXiv:2006.07684。[15] Fu, G. 和 Zhou, C.，《均值场投资组合博弈》，《金融与随机过程》，2022年，第27卷，189-231页。[16] Fujii, M. 和 Takahashi, A.，《具有跳跃和二次指数增长的后向随机微分方程及其Malliavin可微性》，随机过程及其应用，2017年，第128卷，2083-2130页。[17] Fujii, M. 和 Takahashi, A.，《具有跳跃和二次指数增长驱动项的预期型后向随机微分方程》，Stochastics and Dynamics，2019年，第19卷，第3期，1950020。[18] Fujii, M. 和 Takahashi, A.，《具有市场出清条件的均衡定价的均值场博弈方法》，SIAM J. Control. Optim.，2022年，第1卷，259-279页。[19] Fujii, M. 和 Takahashi, A.，《有限参与者均衡向均值场极限的强收敛》，SIAM金融数学期刊，2022年，第13卷，第2期，459-490页。[20]Fujii, M. 和 Takahashi, A.，《具有主要参与者的均衡价格形成及其均值场极限》，ESAIM：控制、优化与变分法，2022年，第28卷，21，https://doi.org/10.1051/cocv/2022015。

[21]Fujii, M., 合作型群体与非合作型群体并存时的证券均衡定价，ESAIM：控制、优化与变分法，2023年，第29卷，56，https://doi.org/10.1051/cocv/2023049。[22] Gomes, D.A., Gutierrez, J., and Ribeiro, R., 随机供给平均场博弈价格模型，SIAM金融数学期刊，2023年，第14卷，第1期，第1888-222页。[23] Gomes, D.A., Gutierrez, J., and Ribeiro, R., 含噪声的平均场博弈价格模型，工程数学，2021年，第3卷，第4期，1-14。[24] Gomes, D.A. and Sa´ude, J., 一种用于价格形成的平均场博弈方法，动态博弈与应用，2020年，https://doi.org/10.1007/s13235-020-00348-x。[25] He, S., Wang, J., Yan, J., 半鞅理论与随机微积分，1992年，CRC出版社，北京。[26] Hu, Y., Imkeller, P. and M¨uller, M., 不完备市场中的效用最大化，应用概率年刊，2005年，第15卷，第3期，1691-1712。[27] Hu, Y., Li, X. and Wen, J., 具有二次增长的预期倒向随机微分方程，微分方程杂志，2021年，第270卷，1298-1331。[28]Hu, Y. and Tang, S., 对角二次生成元的多维倒向随机微分方程，随机过程及其应用，2016年，第126卷，1066-1086。[29] Huang, M., Malhame and R., Caines, P.E., 大规模随机动态博弈：闭环麦基恩–弗拉索夫系统与纳什确定性等价原理，通信与信息系统，2006年，第6卷，第3期，第221-252页。[30] Huang, M., Malhame and R., Caines, P.E., 大规模随机动态博弈中的不变性原理，系统科学与复杂性杂志，2007年，第20卷，第162-172页。[31] Huang, M., Malhame and R., Caines, P.E., 非均匀代理人的大规模群体成本耦合线性二次高斯问题：个体质量行为与分散式 $\epsilon$-纳什均衡，IEEE自动控制汇刊，2007年，第52卷，第9期，第1560-1571页。[32] Jarrow, R., 连续时间资产定价理论，2018年，施普林格金融，瑞士。[33] Jarrow, R. and Larsson, M., 关于聚合与代表性主体均衡，数学经济学杂志，2018年，第74卷，第119-127页。[34] Jeanblanc, M., Yor, M. and Chesney, M., 金融市场数学方法，2009年，施普林格，纽约。[35] Karatzas, I. and Shreve, S., 数理金融方法，施普林格，纽约，1998年。[36] Kazamaki, N., 指数鞅一致可积的一个充分条件，富山大学数学报告，1979年，第2期，1-11，MR-0542374。[37] Kazamaki, N., 连续指数鞅与有界平均振荡，数学讲义，第1579卷，施普林格，1994年。[38] Klenke, A., 概率论：综合教程（第3版），施普林格，2020年。[39]Kobylanski, M., 具有二次增长的倒向随机微分方程与偏微分方程，概率年刊，2000年，第28卷，558-602。[40] Lacker, D. and Zariphopoulou, T., 相对绩效准则下最优投资的均场与 $n$代理人博弈，《数理金融》，2019年，第29卷，1003-1038。

[41]Lavigne, P. and Tankov, P., 金融市场脱碳：一种平均场博弈方法，arXiv:2301.09163。[42] Lasry, J. M. and Lions, P.L., 平均场博弈 I：平稳情形，C. R. Sci. Math. Acad. Paris，2006年，第343卷，第619-625页。[43] Lasry, J. M. and Lions, P.L., 平均场博弈 II：有限时域与最优控制，C. R. Sci. Math. Acad. Paris，2006年，第343卷，第679-684页。[44] Lasry, J.M. and Lions, P.L., 平均场博弈，Jpn. J. Math.，2007年，第2卷，第229-260页。[45] Munk, C., 金融资产定价理论，牛津大学出版社，2013年，纽约。[46] Protter, P., 随机积分与微分方程，第2版，2005年，施普林格，纽约。[47] Shrivats, A., Firoozi, D. and Jaimungal, S., 一种用于太阳能可再生能源证书市场均衡定价、最优发电与交易的平均场博弈方法，《数理金融》，2020年，第32卷，第3期，第779-824页。[48] Tevzadze, R., 具有二次增长的倒向随机微分方程的可解性，随机过程及其应用，2008年，第118卷，503-515。[49] Xing, H., 不完备市场中采用Epstein-Zin效用的消费—投资优化，Finance Stoch.，2017年，21：227-262。[50] Zhang,J., 倒向随机微分方程，2017年，施普林格，纽约。