利用 Webster 号角方程的一维有限元近似，根据输入阻抗估算个体耳道的声学传递

Nick Wulbusch[1],Reinhild Roden[2],Alexey Chernov[1],和 Matthias Blau[2,3]

[1] *Institut für Mathematik, Carl-von-Ossietzky Universität, Oldenburg, Germany*
[2] *Institut für Audiologie und Hörtechnik, Jade-Hochschule, Oldenburg, Germany*
[3] *Cluster of Excellence "Hearing4All"*[1] *nick.wulbusch@uni-oldenburg.de*

arXiv:2304.07131v1 [math.OC] 14 Apr 2023

摘要

在许多应用中，了解声音压力向鼓膜的传递至关重要。耳道的形状及其声学特性（例如鼓膜处的声阻抗）会显著影响这种传递。测量鼓膜处声压的侵入性操作通常复杂或成本高昂。本文提出一种数值方法，仅利用耳道入口处的输入阻抗测量值，通过一维一阶有限元和 Nelder-Mead 优化算法，估算鼓膜处的传递阻抗。该方法可估算耳道的面积函数以及鼓膜处的声阻抗。我们使用通过三维有限元仿真生成的合成数据，对十种不同的耳道几何结构以及三种不同的鼓膜处声阻抗进行数值仿真，以验证结果。

1 引言

每个人的耳道形状各不相同，因此声音从耳道入口传至鼓膜的过程也会因人而异。在助听器或插入式耳机等许多应用中，人们关心鼓膜处的声压，但通常不便直接测量。因此，最好能够根据耳道入口处的测量结果，针对个人预测鼓膜声压。一种方法是在耳道入口处测量声阻抗，即声压与体积速度之比。接下来要估算传递阻抗，即鼓膜声压与耳道入口处体积速度之比；这样，便可将输入阻抗和传递阻抗与声源模型结合起来，针对个人预测鼓膜处的声压，参见例如 [1]。

研究这一现象的一种实用的一维方程是 Webster号角方程 [2], ，它描述号角（即直径变化的管道）中的声压。为了求解 Webster方程，得到耳道沿线不同位置处的声压，需要一个描述耳道沿线截面积的面积函数。如果已知三维耳道几何形状，则可计算出弯曲的中心轴及其对应的面积函数，例如采用 [3] 提出的方法。然而，在大多数情况下，这类数据并不可得。另一种方法是根据在个体耳道入口处测得的声阻抗或反射率来估算面积函数。

在若干篇文献中，研究者利用反射率的相位来估算传递阻抗和面积函数 [4, 1, 5, 6, 7, 8]。例如，在 [4] 中，研究者通过电声模型和梯度法进行优化，以近似拟合测得（或模拟得到）的输入反射率所对应的半径函数。已知鼓膜处的参考压力值后，可将压力反向变换至各个耳道的入口处。利用反射率数据优化的链矩阵，随后得出了准确的半径函数和鼓膜处的压力结果，适用于最高 16 kHz 的频率。

另一种基于反射率的方法见 [5]，其目标是重现耳道横截面积。具体而言，研究者计算了时域反射率，并以向前和向后传播的压力波为基础，建立时域号角方程的逆向解，再通过有限差分近似求得面积函数。 [9]分析了无限声学号角的逆问题解。 [5] 将逆向解得到的面积函数应用于耳道模拟器中的测量。估算出的耳道面积函数与模拟器的

面积函数接近。此外，作者还假设鼓膜是刚性的，根据对真实受试者进行的反射率测量估算耳道面积函数，尽管真实的耳道面积函数未知。所得耳道面积函数看起来合理，与文献中其他耳道面积函数相似。不过，研究并未考察传递阻抗。

本文提出了一种不同的方法，该方法基于频域中的输入阻抗数据。就实际测量数据（即声阻抗或反射率）而言，采用频域处理似乎更为方便，因为这些数据的有效性通常仅限于一定的频率范围。我们的目标是估算个体残余耳道的传递阻抗。为此，我们对耳道面积函数和鼓膜声阻抗进行参数化。我们使用线性有限元在频域中求解号角方程，并采用 Nelder-Mead 方法 [10] 根据给定的输入阻抗数据优化参数。这样做的同时，我们还可以估算耳道面积函数以及鼓膜处的声阻抗。

第2节介绍该方法的总体思路。第3节说明数据的生成方式，以及如何将数据用于验证。第4节将在第2节所述流程的基础上进行若干调整，以避免参数拟合过程中出现不切实际的结果。第5节将使用多种具有不同鼓膜阻抗模型的耳道几何形状，对方法的最终版本进行验证。最后，第6节给出结论。

完整方法的 MATLAB 实现见补充材料 [11]。[1]

2 方法

我们方法的主要目标是基于个体耳道输入阻抗的数据$Z_{\mathrm{in,\ data}}$，估算传递阻抗 Z_{tr}。为此，我们在频域中使用 Webster号角方程 [2] ，将其作为耳道内压力分布简化表示的替代模型，

$$\frac{d}{dx}\left[S(x)\frac{d}{dx}p(x)\right] + k^2 S(x)p(x) = 0 \text{ in } [0,\ell], \tag{1a}$$

$$S(0)\frac{dp}{dx}(0) = q\mathrm{i}\omega\rho, \tag{1b}$$

$$S(\ell)\frac{dp}{dx}(\ell) + \frac{\mathrm{i}\omega\rho}{Z_d}p(\ell) = 0. \tag{1c}$$

该问题的解 $p(x)$表示声压， $S(x)$表示面积函数，$k = \frac{2\pi f}{\lambda}$ 表示频率为 f 、波长为 λ时的波数， q 表示体积速度， $\omega = 2\pi f$ 表示角频率， ρ表示耳道内空气的密度， Z_d 表示鼓膜的声阻抗。在此设定下，目标是根据给定的输入阻抗数据$Z_{\mathrm{in,\ data}}$ 估算传递阻抗 $Z_{\mathrm{tr}} = \frac{p(\ell)}{q}$ ；而在一维替代模型（1a）-（1c）中，输入阻抗由 $Z_{\mathrm{in}} = \frac{p(0)}{q}$ 建模。面积函数 $S(x)$和鼓膜处的声阻抗 Z_d 未知。下文将对这些量进行参数化，并通过最小化代价函数，使其拟合给定的输入阻抗数据

$$J_0(Z_{\mathrm{in}}) = \sum_{f\in\mathcal{F}} A\left|\log_{10}\left|\frac{Z_{\mathrm{in}}(f)}{Z_{\mathrm{in,data}}(f)}\right|\right|^2 + B\arg\left(\frac{Z_{\mathrm{in}}(f)}{Z_{\mathrm{in,data}}(f)}\right)^2, \tag{2}$$

加权参数为 A 和 B。这些参数选择为 $A = 10$ 和 $B = 1$。因此，代价函数是模型与数据的对数振幅及相位（以弧度表示）之间平方差的加权和。$Z_{\mathrm{in,\ data}}(f)$表示给定的数据，即特定频率 f下在耳道入口处测得的输入阻抗，而 $Z_{\mathrm{in}}(f)$表示问题 (1a)-(1c) 的解在入口处得到的输入阻抗。 $\mathcal{F}$ 表示一个频率集合。不同的 $\mathcal{F}$ 选择将在第 4.3 节讨论。未知参数涉及面积函数 $S(x)$、鼓膜处声阻抗的模型 Z_d 以及耳道长度 ℓ。面积函数建模为

$$S(x) := S(x, S_0, \mathbf{c}, \mathbf{s}, \ell) = S_0 + \sum_{m=1}^{M} c_m \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) + s_m \sin\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right). \tag{3}$$

声 阻抗 Z_{ED} 在鼓膜处采用双谐振器模型建模，与该模型类似
中所述 2],

$$Z_{\mathrm{ED}} = \left(\frac{1}{10^{L_{0,1}/20\,\mathrm{dB}}(\mathrm{i}v_1Q_1 + 1)} + \frac{1}{10^{L_{0,2}/20\,\mathrm{dB}}(\mathrm{i}v_2Q_2 + 1)}\right)^{-1} \mathrm{Pa{\cdot}s/m^3}, \tag{4}$$

[1]完整方法的 MATLAB 代码请参见 https://github.com/nickwulbusch/耳道参数拟合-1d 的补充材料。

其中

$$v_i = \frac{\omega}{2\pi f_{0,i}} - \frac{2\pi f_{0,i}}{\omega} \tag{5}$$

参数 Q_i, $f_{0,i}$ 和 $L_{0,i}$ 分别为品质因数、共振频率和共振处的阻抗级（单位为 dB re 1 Pa·s/m^3）。与更复杂的模型（如 [13] 提出的模型）相比，该模型在参数数量和近似效果之间取得了良好的折衷。值得一提的是，该模型能够以可接受的精度拟合 [14] 的尸体测量数据。

根据 [15], 的建议，将耳道最内侧部分建模为集总顺性（对应于一个长 4 mm、半径为 2.5 mm 的直圆锥），并使其与鼓膜阻抗并联,

$$Z_d = \frac{Z_{\mathrm{ED}} Z_{\mathrm{vol}}}{Z_{\mathrm{ED}} + Z_{\mathrm{vol}}}, \tag{6}$$

其中

$$Z_{\mathrm{vol}} = \frac{\rho c^2}{\mathrm{i}\omega V}, \tag{7}$$

Z_{ED} 对应于鼓膜处的声阻抗， c 为声速， V 为圆锥的体积。这样便有效地从耳道几何形状中移除了最内侧部分。

面积函数定义中使用的参数，即式 (3) 中的 $S(x)$，以及式 (6) 中鼓膜的声阻抗 Z_d ，均采用 Nelder-Mead 约束优化方法 [10, 16]进行拟合。为此，使用 MATLAB 中自行实现的有限元代码，采用线性基函数和 Simpson 求积法计算积分，对方程 (1a)-(1c) 进行数值求解。具体而言，将方程 (1a) 乘以测试函数 $u(x)$，并在区间 $[0, \ell]$ 上积分。改变符号并进行分部积分后，得到所谓的弱形式

$$\int_0^\ell S(x) p'(x) u'(x)\, dx + \frac{i\omega\rho}{Z_d} p(\ell) u(\ell) - k^2 \int_0^\ell S(x) p(x) u(x)\, dx = -qi\omega\rho u(0). \tag{8}$$

为了离散化这个问题，我们将区间划分为更小的区间 $[x_{n-1}, x_n]$，其中 $x_n = \frac{n\ell}{N}, n = 1, \ldots, N$，这里 $N \in \mathbb{N}$ 为某个值。这些子区间称为单元。接下来，我们考虑由连续分段线性函数构成的基 $\{\varphi_n\}_n$ ，其中 φ_n 是对应子区间 $[x_n, x_{n+1}]$ 上的帽函数，在其他位置为 0:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, & \text{if } x \in [x_{n-1}, x_n) \text{ , } n = 1, \ldots, N, \\ \frac{x_{n+1} - x}{x_{n+1} - x_n}, & \text{if } x \in [x_n, x_{n+1}], n = 0, \ldots, N-1, \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \tag{9}$$

方程 (8) 的离散解 p_N 可用该基表示为:

$$p_N(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n \varphi_n(x), \tag{10}$$

其中，系数 c_n 通过求解以下线性方程组得到:

$$(A - M + R)c = F, \tag{11}$$

其中

$$A_{ij} = \int_0^\ell S(x) \varphi_j'(x) \varphi_i'(x)\, dx, \tag{12a}$$

$$M_{ij} = k^2 \int_0^\ell S(x) \varphi_j(x) \varphi_i(x)\, dx, \tag{12b}$$

$$R_{NN} = \frac{\mathrm{i}\omega\rho}{Z_d}, \quad R_{ij} = 0, \text{ for } i \neq N \neq j, \tag{12c}$$

$$F_1 = -qi\omega\rho, \quad F_i = 0, \text{ for } i \neq 0. \tag{12d}$$

在实验中，单元数根据频率进行选择，为 $N = 4 \max\left(1\,\mathrm{m} \cdot \ell/\lambda^2,\ 1\right)$，即每个频率对应不同的离散化。在这种情况下，可以确保满足每个波长 10 个单元这一典型的“经验法则”。此外，对于号角方程，幅值和相位方面的离散化误差似乎有统一上界，见图 1。离散化误差是相对于具有 $N_{\mathrm{ref}} = 5000$ 个单元的参考解计算的。

图2展示了频率为 $f = 6\mathrm{kHz}$、 $Z_d = (6.08 + 7.34\mathrm{i}) \times 10^7\,\mathrm{Pa{\cdot}s/m^3}$ 时，号角方程 (1a)-(1c) 的弱形式 (8) 的一个解，其中面积函数如图2所示，即典型的耳道面积函数。作为对比，图中也展示了纯亥姆霍兹问题的解（即采用恒定面积函数），以观察面积函数的影响。

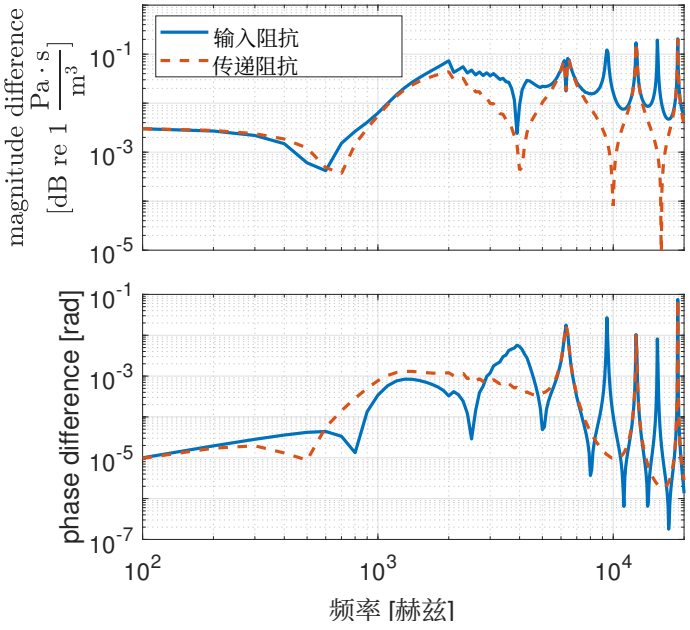


图 1： $Z_{\text{in}} = {}^{p}{}_{(0)}\ q$ 与 $Z_{\text{in,ref}} = {}^{p_{\text{ref}}}{}_{(0)}\ q$ 以及 $Z_{\text{tr}} = {}^{p}{}_{(L)}\ q$ 和$Z_{\text{tr,ref}} = {}^{p_{\text{ref}}}{}_{(L)}\ q$的电平差和相位差。采用 $N = 4\max\left(1\,\text{m}\cdot\ell/\lambda^2, 1\right)$ 个单元，对典型面积函数 $S(x)$ 和鼓膜阻抗 Z_d计算方程（8）的离散解 p。参考解 p_{ref} 采用$N_{\text{ref}} = 5000$ 个单元计算。在 100 赫兹至 20kHz 的频率范围内，误差均匀有界。

3 数据

合成生成的输入阻抗和验证数据，是通过对 IHA 数据库 [17, 18] 中的几何结构进行三维有限元仿真得到的。仿真时，在耳道的第一个弯曲处截断 STL 几何结构。通过使用 VMTK工具箱 [19] 计算耳道的中心轴，确定第一个弯曲处。然后，使用 [20] 中的 MATLAB 函数，计算视觉上可估计的第一个弯曲区域内中心轴曲率最大的坐标。采用 [21] 的实现方法，根据第一个弯曲处的坐标及相应的切向量来调整入口表面形状。随后在 [22]，中使用这一修改后的几何形状，将几何结构离散为四面体网格，其自由度约为 70,000-100,000，对应的单元最大边长为 1 mm。鼓膜处的网格进一步细化，最大边长为 0.2 mm。作为示例，图3展示了受试者5的耳道网格。

随后假设入口表面以活塞式振动，为剩余耳道提供激励。在此设置下，通过求解亥姆霍兹方程，计算了鼓膜处三种不同类型阻抗对应的声学输入阻抗（在入口处测得）。

$$\Delta p_{3\text{D}}(\mathbf{x}) + k^2 p_{3\text{D}}(\mathbf{x}) = 0 \qquad \text{在 } D, \tag{13a}$$

$$\frac{\partial p_{3\text{D}}}{\partial n} = -v_n \mathrm{i}\omega\rho \qquad \text{on } \Gamma_{\text{entrance}}, \tag{13b}$$

$$\frac{\partial p_{3\text{D}}}{\partial n} + \frac{\mathrm{i}\omega\rho}{\widetilde{Z}_{\text{ED}}|\Gamma_{\text{drum}}|} p_{3\text{D}} = 0 \qquad \text{on } \Gamma_{\text{drum}}, \tag{13c}$$

$$\frac{\partial p_{3\text{D}}}{\partial n} = 0 \qquad \text{on } \Gamma_{\text{wall}}, \tag{13d}$$

其中， D 为几何形状的内部， $\Gamma_{\text{entrance}} \subset \partial D$ 为入口处的表面， $\Gamma_{\text{drum}} \subset \partial D$ 为对应鼓膜的表面， Γ_{wall} 为耳道壁。 $\frac{\partial}{\partial n}$ 表示外法向导数。请注意，比较方程（1b）和（13b）可知，两者的符号不同，因为在（1b）中，一维模型里的导数方向指向区间内部。 v_n 为粒子速度。参数拟合过程中用作输入数据的输入阻抗，是对入口表面 Γ_{entrance}取平均后得到的。

$$Z_{\text{in,data}} = \frac{\frac{1}{|\Gamma_{\text{entrance}}|}\int_{\Gamma_{\text{entrance}}} p_{3\text{D}}(\mathbf{x}) d\Gamma_{\text{entrance}}}{|\Gamma_{\text{entrance}}|\ v_n}.$$

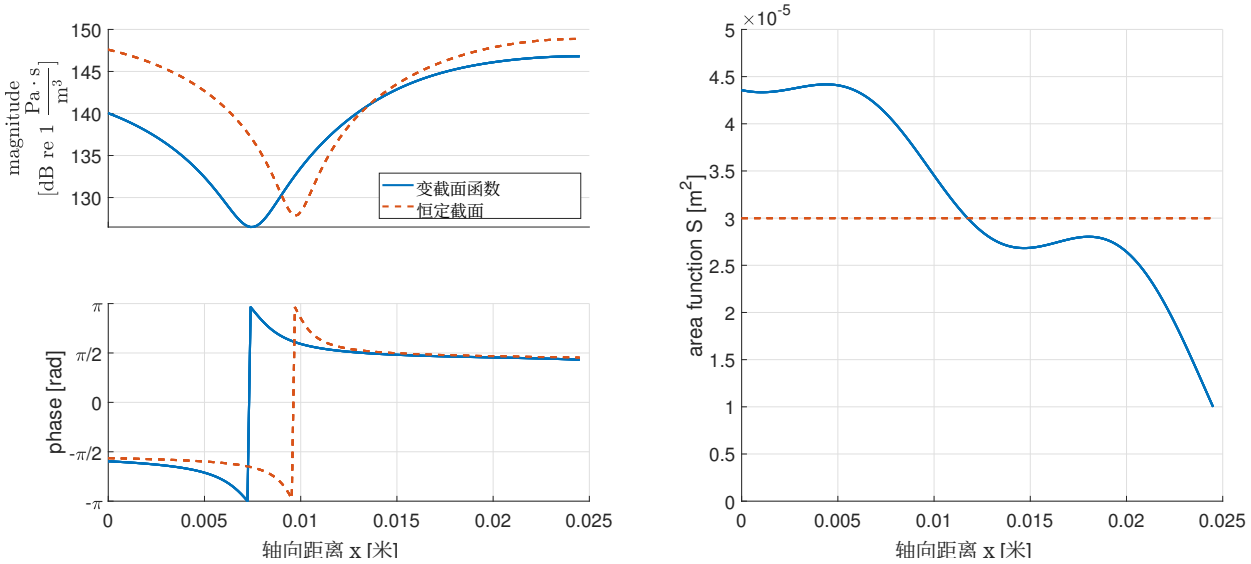


图2：使用线性有限元求解频率为 $f = 6000$赫兹时的号角方程，分别采用变截面函数和恒定截面函数（上图），以及对应的截面函数（下图）。

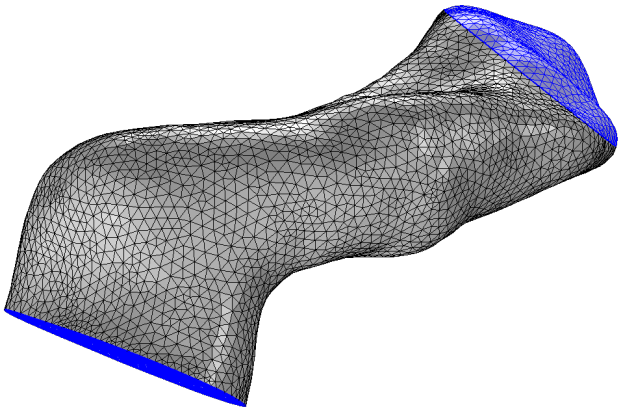


图3：在第一个弯曲处切开的受试者5耳道网格。旋转耳道后，可同时看到入口和鼓膜（标记的面）。

~所考虑的鼓膜阻抗 Z_{ED} 类型如下

(i) Hudde 和 Engel 的阻抗模型 [13],

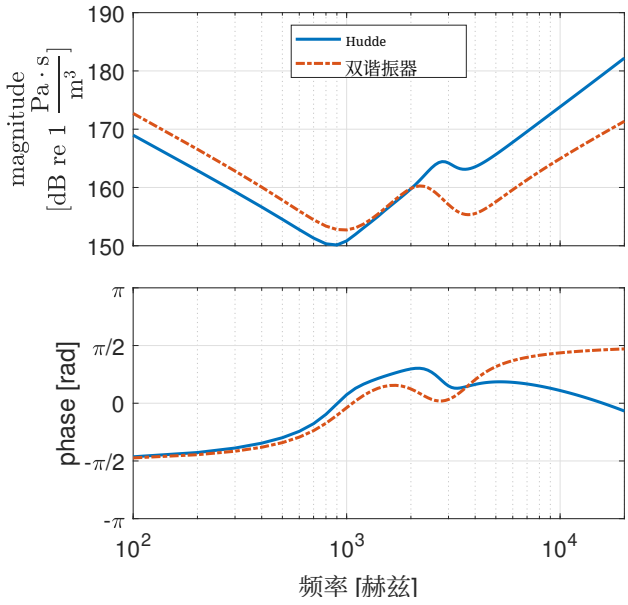
(ii) 式 (4) 所述的双谐振器模型，参数见表 1,

(iii)（近似）刚性，即 $\widetilde{Z}_{\mathrm{ED}} \approx 8.4 \times 10^{22} - 8.8 \times 10^{15}\mathrm{i}$ Pa·s/m^3,

这些模型如图 4 所示。为进行第5节中的验证，计算了相对于壳顶的传递阻抗 $Z_{\mathrm{tr,data}}$，即,

$$Z_{\mathrm{tr,data}} = \frac{p_{\mathrm{3D}}(\mathbf{x}_{\mathrm{umbo}})}{|\Gamma_{\mathrm{entrance}}| v_n}.$$

在 100 赫兹至 20 千赫兹范围内线性分布的 200 个不同频率上，计算了入口阻抗$Z_{\mathrm{in、data}}$ 和传递阻抗 $Z_{\mathrm{tr、data}}$。共有 30 组数据可用于测试和验证，即 10 名受试者各自对应 3 种不同的阻抗模型。



~图 4：用于计算参考数据的 Z_{ED} 鼓膜阻抗类型 (i) 和 (ii)。由于类型 (iii) 的幅值较大且恒定在约 458 分贝、相位为零，因此未予显示。

	谐振器 1	谐振器 2
f_0	1000 赫兹	3500 赫兹
Q	1.1	1.5
L_0	153 分贝（参考 1 Pa）· s/m³	157 分贝（参考 1 Pa）· s/m³

表 1：使用双谐振器模型生成数据时所用的参数。

4 原始参数拟合与方法改进

	S_0[米²]	ℓ[米]	c_m	s_m
上界	2×10^{-4}	15×10^{-3}	$2^{-m+2}\times10^{-5}$	$2^{-m+2}\times10^{-5}$
下界	10^{-5}	45×10^{-3}	$-2^{-m+2}\times10^{-5}$	$-2^{-m+2}\times10^{-5}$
基本	6×10^{-5}	30×10^{-3}	$(2\times10^{-6},\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0)$	$(0,\ 0,\ 0)$

	$L_{0,1}$[分贝]	$L_{0,2}$[分贝]	Q_1	Q_2	$f_{0,1}$[赫兹]	$f_{0,2}$[赫兹]	V[米³]
上界	200	$L_{0,1}$+40	10	10	2500	6000	5.23×10^{-8}
下界	50	$L_{0,1}$+0	0.3	0.3	500	2500	1.3×10^{-8}
基本	161	$L_{0,1}$+20	1.2	1.2	900	4000	2.62×10^{-8}

表2：一维替代模型中使用的耳道面积函数和双谐振器阻抗模型参数的基本估计值及其下界和上界。阻抗级别 $L_{0,1}$ 和 $L_{0,2}$ 的分贝值以 1 Pa · s/m³ 为参考。

我们从基本算法和 $M = 4$ 开始，即在式（3）中面积函数 $S(x)$ 的定义中使用四个正弦和余弦项。参数拟合采用了所有可用频率中的一个子集，具体而言，是在 100 赫兹至 20 千赫兹范围内对数分布的 25 个频率。参数约束根据表2设定，以确保面积函数 $S(x)$ 不会取过大的值，面积函数的振荡不会过于剧烈，并且鼓膜处的阻抗幅值大致符合图4中常用模型 (i) 和 (ii) 的预期。为提高准确度，我们使用 Nelder-Mead 方法，并进行三次重启，将前一次优化的结果用作初始化。由于 Nelder-Mead 优化过程无法保证收敛至全局最小值，因此使用不同的初始参数多次执行参数拟合过程。这些参数是在.....的基础上随机扰动至多 25% 得到的

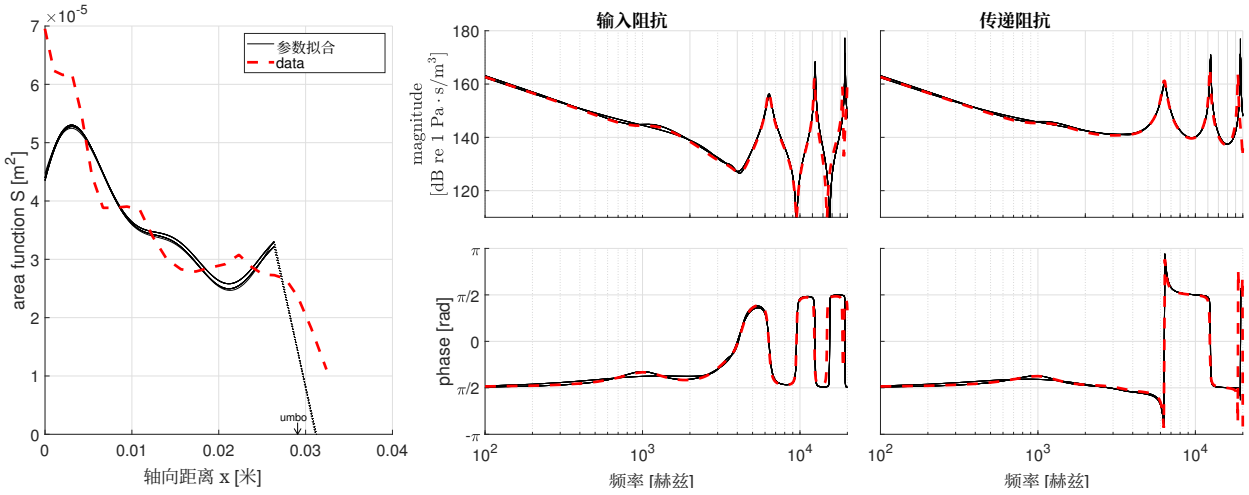


图5：受试者5和阻抗模型(ii)采用原始参数拟合方法的结果。分别用黑线表示十二组不同初始参数集各自得到的解。左：面积函数。后部表示作为阻抗模型一部分的圆锥，参见第2节的讨论。中：输入阻抗 Z_{in}。右：传递阻抗 Z_{tr}。

基本参数集（亦见表2），即对于给定参数 α，其基本值为 α_0，

$$\alpha_{\text{init}} = \alpha_0 \left(1 + 0.25\mathcal{U}(-1,1)\right),$$

其中 $\mathcal{U}(-1,1)$ 是区间 $(-1,1)$ 上的均匀分布。总共考察了十二组不同的初始参数集。图5展示了使用全部十二组初始参数集得到的结果，所用数据是根据受试者5的几何形状和鼓膜阻抗模型(ii)生成的。所有十二组初始参数集都收敛到相似的结果，因此每种模型类型对应的曲线彼此非常接近。面积函数 $S(x)$ 与采用 [3] 方法计算的面积函数趋势相似，后者在图 5 中以数据曲线表示。输入阻抗在整个频率范围内都拟合良好，即使对于传递阻抗，数据与模型之间也仅有细微差异。

然而，这种初始参数拟合并未能对所有受试者和所有不同类型的鼓膜阻抗都取得同样好的结果。为提高该方法的稳健性，下面将考察导致个别受试者或鼓膜阻抗模型出现问题或不切实际结果的若干因素，并讨论、实施和展示可能的解决策略。

4.1 避免负面积

对于某些初始参数集，原始参数拟合过程会返回一个参数集，使得相应的面积函数 $S(x)$ 在区间 $[0,\ell]$ 的某些部分取负值。尽管参考数据（即输入阻抗）得到了较好的拟合（见图 6），但传递阻抗仍可观察到一些较大的差异。我们还注意到，初始参数集会在很大程度上影响结果，因此该方法对初始化的稳健性较差。防止面积函数为负的两种可能策略是

(1) 进一步限制参数 S_0，c_m 和 s_m，使面积函数 S 始终为正；(2) 在代价函数中添加一个惩罚项，对 S 的负值或较小值进行惩罚。

在这里，第一种策略并不十分实用。它会对 S_0 施加严格限制：下界必须相对较大，或者对 c_m 和 s_m 的限制会导致可接受的几何结构受到很大限制。

第二种策略仍然为与几何形状相关的参数保留了很大的自由度，因此将在下文中采用。惩罚项选为

$$J_{1,H^{(1)}}(S_0,\mathbf{c},\mathbf{s},\ell) = 10^4 \frac{\|\max\left(H^{(1)} - S(x),0\right)\|_\infty}{H^{(1)}}, \tag{14}$$

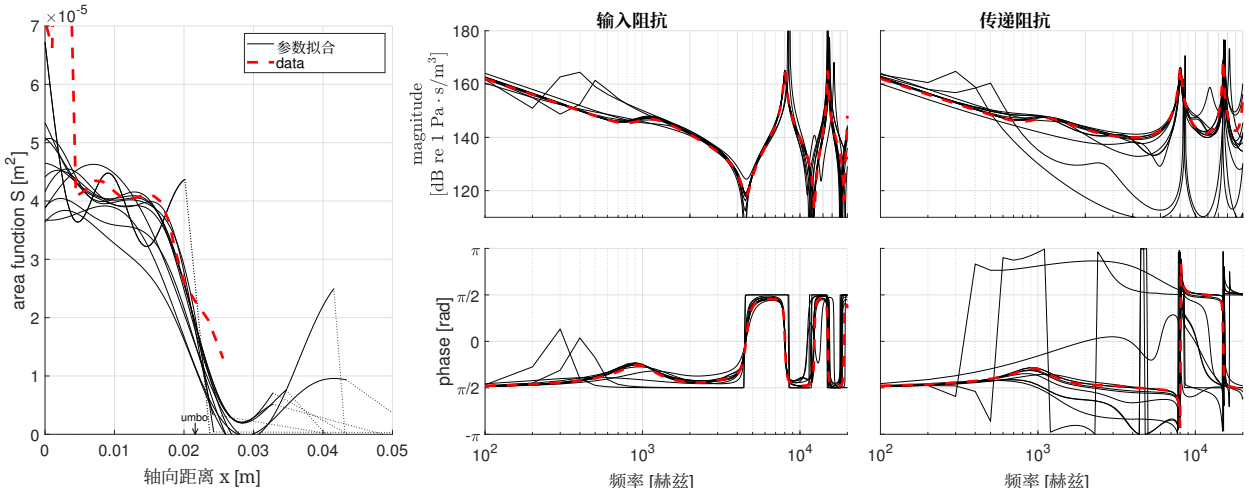


图 6：参数拟合可能会导致面积函数出现负值。受试者 3 和阻抗模型 (i) 的结果。十二组不同初始参数集各自对应的解分别以黑线表示。左：面积函数。后部表示阻抗模型中的圆锥部分，参见第 2 节的讨论。中：输入阻抗 Z_{in}。右：传递阻抗 Z_{tr}。

其中，$\|\cdot\|_\infty$ 是离散上确界范数。该惩罚项用于惩罚面积函数小于 $H^{(1)}$的情况。我们选择 $H^{(1)} = 10^{-5}\mathrm{m}^2$, ，其约为半径为 2.5 mm 的标准圆锥底面积的一半。

更新后的过程现在通常会生成在 $[0, \ell]$ 上为正的函数。如果面积仍然变为负值，那么模型与数据失配可能只是过大，因此无法使用底层的一维替代模型 (1a)-(1c) 进行有意义的参数拟合，或者初始值选择不当。

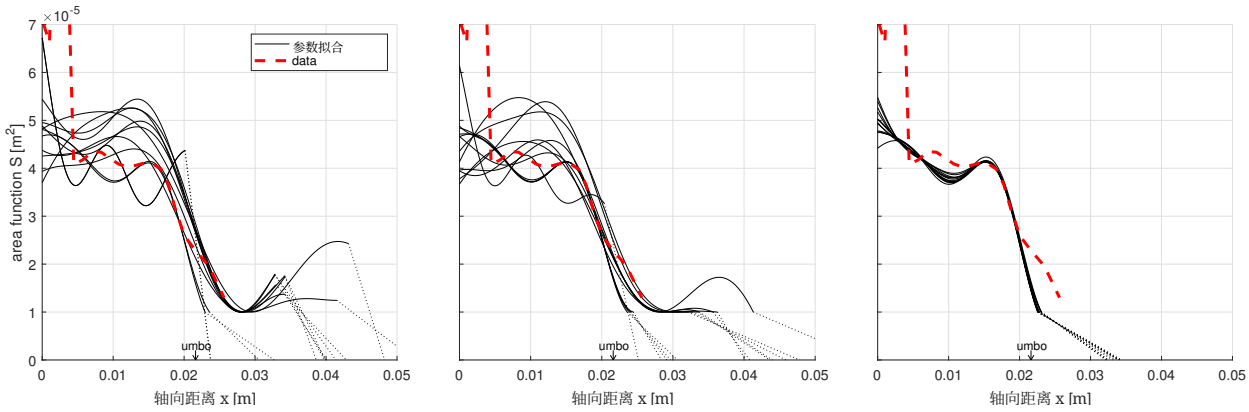


图 7：左：对受试者 3 和阻抗模型 (i) 的十二组不同初始参数集采用惩罚项 J_1 后的结果。由于鼓膜附近的面积函数大幅增大，参数拟合可能会产生不切实际的耳道几何形状。中：对受试者 3 和阻抗模型 (i) 的十二组不同初始参数集采用惩罚项 J_1 和 J_2 后的结果。参数拟合可能会大幅高估耳道长度。右：对受试者 3 和阻抗模型 (i) 的十二组不同初始参数集采用惩罚项 J_1、J_2 以及耳道长度的先验估计 ℓ 后的结果。参数拟合得到了合理的面积函数。

有时，面积函数达到最小值后会陡然增大。图 7a 展示了这种情况的一个例子。从解剖学角度看，这至少是不寻常的。因此，我们采用另一个惩罚项，对耳道末端面积大于总体最小值或接近该最小值的解施加惩罚。这个附加惩罚项表示为

$$J_{2,H^{(2)}}(S_0, \mathbf{c}, \mathbf{s}, \ell) = 10^4 \left\| \max\left(\frac{S(\ell) - S(x) - H^{(2)}}{|S(x)|}, 0 \right) \right\|_\infty . \tag{15}$$

惩罚项选为 $H^{(2)} = 0$ ，这将确保面积函数的最小值位于

耳道末端。此时代价函数变为

$$J = J_0 + J_{1,H^{(1)}} + J_{2,H^{(2)}}. \tag{16}$$

在参数拟合中使用更新后的代价函数 J，可得到更符合实际的耳道截面函数，见图 7b。

4.2 适用于较长和较短的耳道

每个人的耳道长度各不相同，因此将 ℓ 的范围设为 15 mm $\leq \ell \leq$ 45 mm，以便对较短和较长的耳道进行建模。然而，随意设置 ℓ 的初始值可能会导致 Nelder-Mead 算法收敛到局部最小值，使 ℓ 的取值不理想，如图 7b 所示。为避免这种情况，我们首先通过查看数据的输入阻抗幅值中的第一个最大值来估算 ℓ，例如图 6b 中约 8 kHz 处的最大值。假设波导为刚性端接圆柱形，则初始长度估算如下

$$\ell_{\mathrm{est}} = \frac{c}{2 f_{\max}}, \tag{17}$$

其中，$f_{\max}$ 对应于输入阻抗幅值（即数据）达到第一个最大值时的频率。结果表明，通常第一个最大值对应的频率比第一个最小值能得出更好的结果，因此使用方程（17）估算长度。耳道并非刚性端接的圆柱形波导，但这种假设仍是合理的初步近似。将此估算得到的 ℓ_{est} 作为初始参数，可使数值模拟得到更合适的结果。为确保参数拟合期间总长度不会与估算的初始长度相差太大，我们将 ℓ 的范围重新定义为 $\ell_{\mathrm{est}} - 3$ mm $\leq \ell \leq \ell_{\mathrm{est}} + 1\,$mm。上界设置得更严格，因为阻抗模型已假定耳道因末端的圆锥而更长，该圆锥代表耳道最深处。对于大多数初始值，这些范围都能得到合理的结果，见图 7c。采用改进方法得到的更多结果将在第5节的验证中讨论。

在以下小节中，我们将进一步讨论所选频率集合对参数拟合的影响，以及面积函数扩展长度的影响。

4.3 参数拟合中所用带宽和频率间隔的影响

虽然前面几个小节中的改进使参数拟合结果有所提升，但在某些情况下，极高频处仍会出现问题，因为一维模型无法捕捉三维几何结构的某些特征。这意味着，并非所有耳道形状都能在最高 20 千赫兹的频率范围内获得良好的传递阻抗估计。图8展示了一个例子。在此例中，约 17 千赫兹处输入阻抗幅值的最小值远低于通常水平。对于这个个体，使用号角方程无法得到高频处的良好近似。因此，参数拟合时限制频率范围，或许有助于改善低频部分的结果。将频率范围限制在低于 10 千赫兹，可改善参数拟合得到的输入阻抗 Z_{in} 和传递阻抗 Z_{tr}，见图9。

下文将探讨频率子集的不同选择。所考虑的频率集采用均匀分布或对数分布（向上取整至最接近的 100 赫兹）。图 10 展示了对均匀分布频率的验证，其中传递阻抗的幅值差和相位差是相对于参考数据计算的。对于某些频率集，低频范围（最高至 3 千赫兹）或高频范围（高于 3 千赫兹）采用了更精细的分辨率。我们还考虑了不同的上限：出于上文所述的原因，频率集被限制在最高至 20 千赫兹或 10 千赫兹的范围内。此外，对于某些频率集 $\mathcal{F}$，还纳入了对应于输入阻抗幅值最大值和最小值的频率，因为相对于数据而言，这些频率通常会产生最大的误差，而且这些频率是特定耳道形状的特征。我们观察到，采用对数分布并额外纳入对应于输入阻抗幅值最大值和最小值的频率的频率集，在特定频率范围内相对于验证函数得出的函数值较低

$$J_{\mathrm{val}}(Z_{\mathrm{tr}}) = \sum_{\substack{f=100\,\mathrm{Hz},200\,\mathrm{Hz},\\ \ldots,20\,\mathrm{kHz}}} A \left| \log_{10} \left| \frac{Z_{\mathrm{tr}}(f)}{Z_{\mathrm{tr,data}}(f)} \right| \right|^2 + B \arg\left(\frac{Z_{\mathrm{tr}}(f)}{Z_{\mathrm{tr,data}}(f)} \right)^2. \tag{18}$$

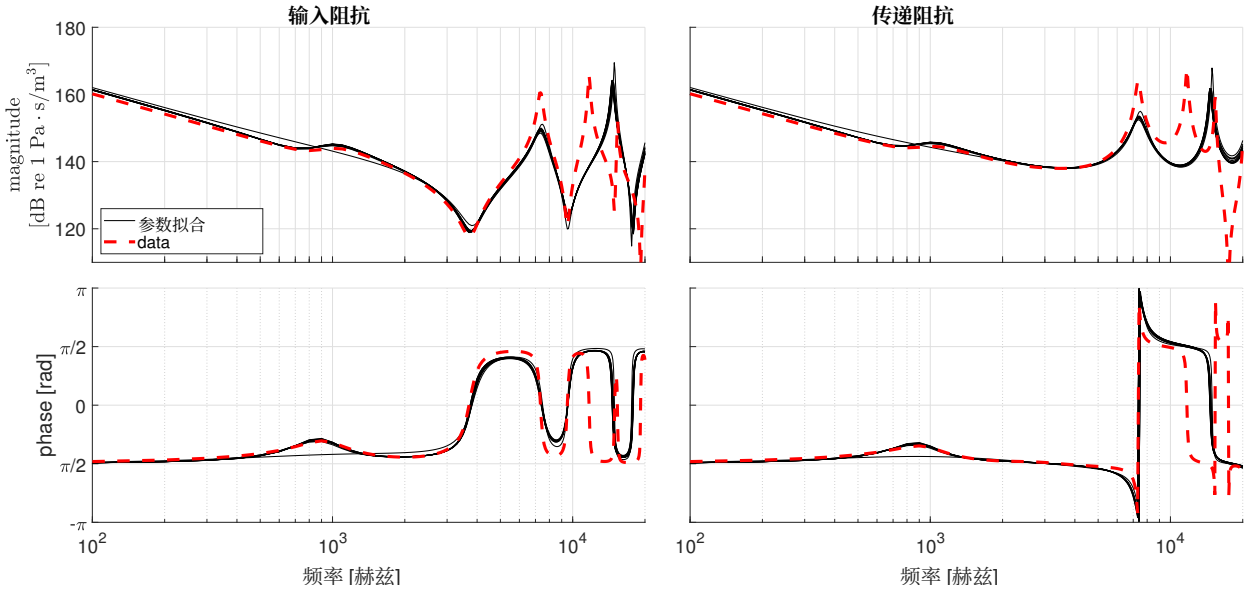


图8：受试者9的耳道及阻抗模型 (i)，以此为例说明一维模型无法再现的高频特性情况。入口阻抗和传递阻抗数据中的最后一个最小值非常低。在参数拟合中纳入高频数据，很可能会影响低频的精度。

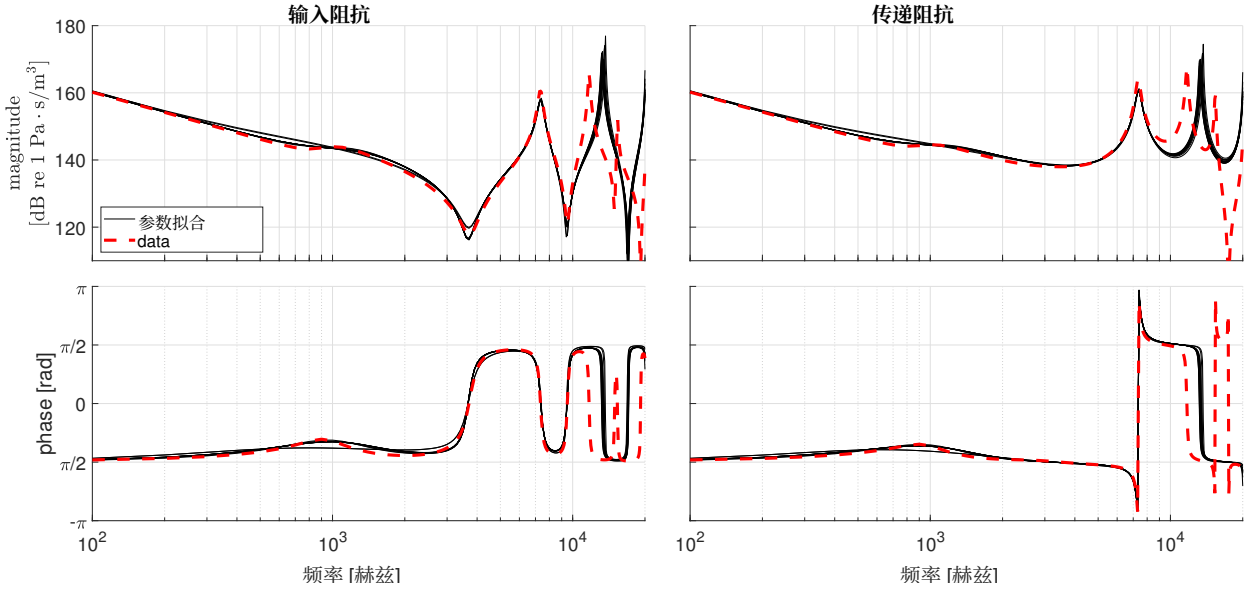


图9：受试者9的耳道及阻抗模型 (i)，仅使用频率不超过 10 千赫兹的数据时的情况。与图8相比，可以观察到低频范围有所改善，尤其是在 8 千赫兹以下。

尽管其他配置得出的验证函数值相近，但绘制随频率变化的实际幅值分贝差后发现，在低频下，采用均匀分布频率的方案表现稍差：在 100 赫兹至 6 千赫兹的频率范围内，幅值差最高可达 3 分贝；图 10 给出了一个示例。相比之下，对数分布频率在该频率范围内的幅值差最高仅为 1.5 分贝。第 5 节的验证中讨论并展示了这一情况。因此，第 5 节的验证选择了包含最大值和最小值频率的对数分布频率集。

由于人们通常尤其关注低于 10 千赫兹的频率，因此我们将频率范围限制在 10 千赫兹以内，以改善该范围内的结果，尤其是在耳道中的压力分布因耳道几何形状而呈现显著三维效应时。

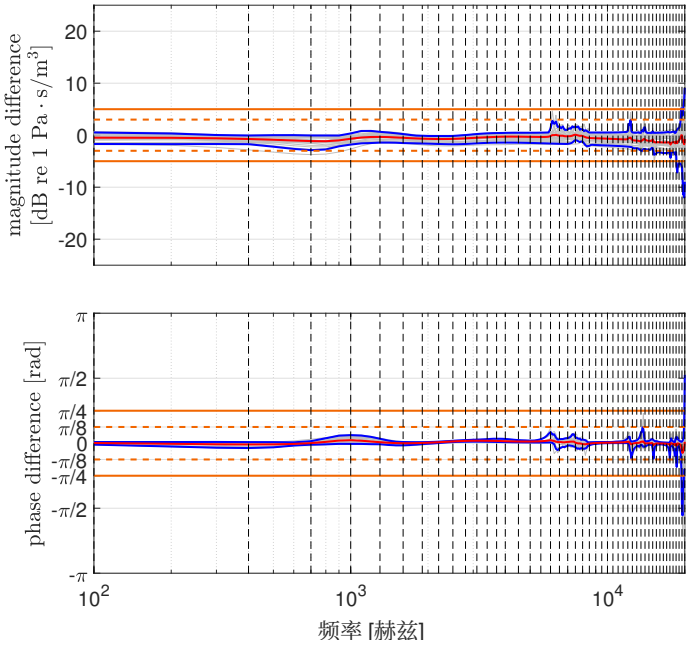
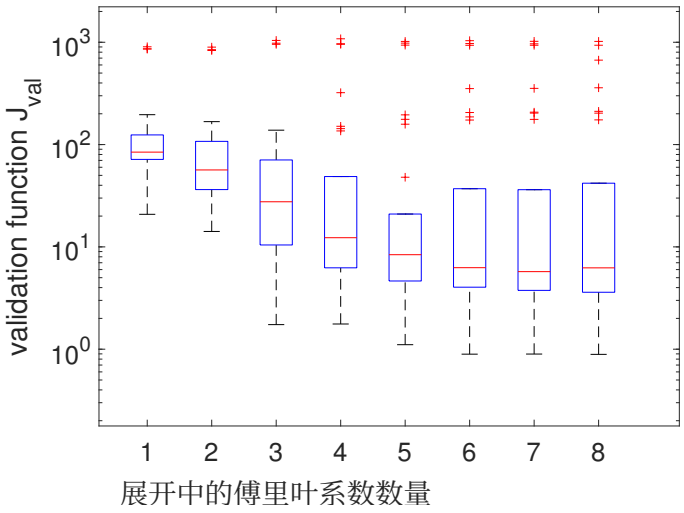


图 10：验证参数拟合时，对所有数据集，考虑线性分布且最高达 20 千赫兹的频率下传递阻抗的差异。实线：5 分贝或 45° 的差异。虚线：3 分贝或 22.5° 的差异。蓝线：第 5 和第 95 分位数。中间的红线：均值。灰色虚线：参数拟合过程中使用的频率。

4.4 I　面积函数展开中参数数量的影响



Fig图 11：验证函数 J_{val} 随面积函数中的傅里叶系数数量变化 .

在前几节的参数拟合中，参数 c_i 和 s_i 的数量始终设为 $M = 4$。本节将讨论参数数量 M 变化时的观察结果。图11展示了针对不同参数 M计算得到的式（18）中的验证函数 J_{val} 。箱线图所依据的数据，是全部十位受试者和三种不同阻抗模型（i）—（iii）的精细参数拟合结果。我们观察到 $M \geq 4$仅有微小变化。因此，考虑到后续实验中计算成本不断增加， $M = 4$ 被选作精度与计算成本之间的合理折中。

5 验证

5.1 传递阻抗

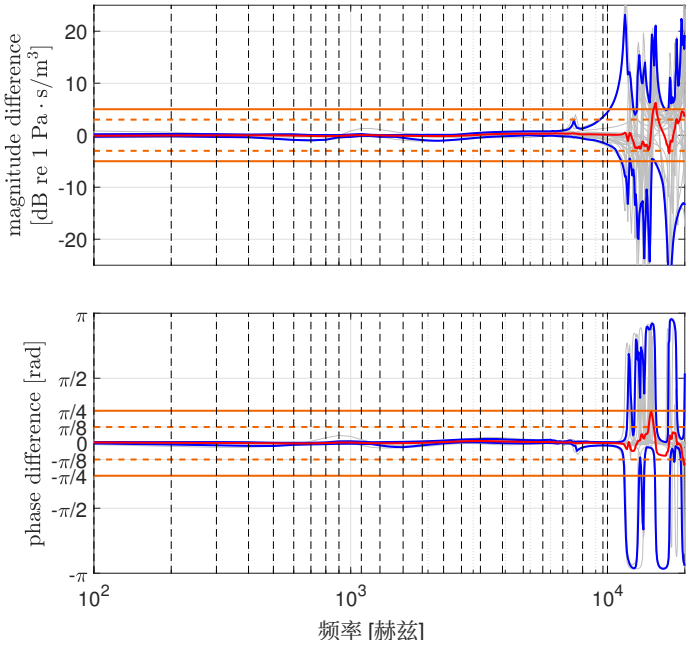


图12：验证参数拟合的效果，考察 10 千赫兹以内各频率下传递阻抗的差异。直实线：差异为 5 分贝或 45°。直虚线：差异为 3 分贝或 22.5°。蓝线：第 5 和第 95 分位数。中间的红线：均值。灰色虚线：参数拟合时使用的频率。

本节将介绍验证结果。为此，我们考虑了十种不同的耳道，并采用了三种不同的鼓膜阻抗模型，具体讨论见第3节。

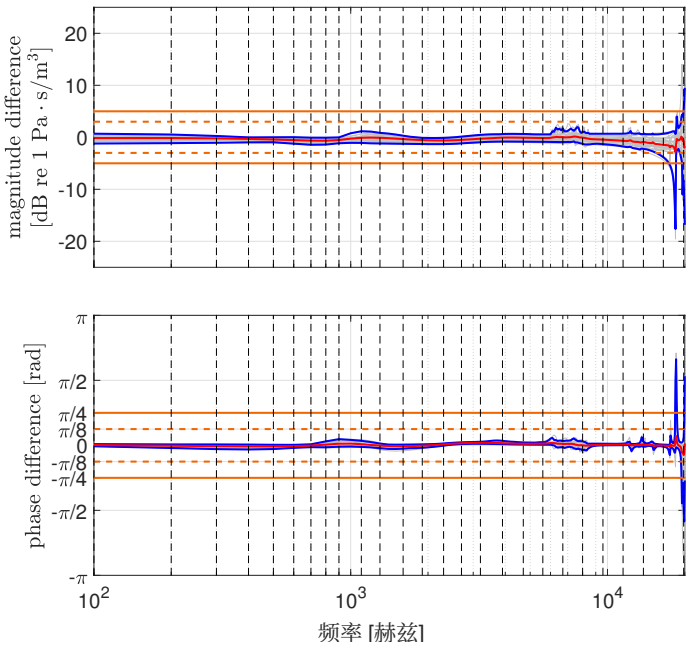


图13：验证参数拟合的效果，考察 20 千赫兹以内各频率下传递阻抗的差异；排除在高频下表现异常的受试者9。直实线：差异为 5 分贝或 45°。直虚线：差异为 3 分贝或 22.5°。蓝线：第 5 和第 95 分位数。中间的红线：均值。灰色虚线：参数拟合时使用的频率。

在图12中　数据与参数拟合结果之间的传递阻抗级别和相位差　　，
i.e.,

$$20\log_{10}\left(\left|\frac{Z_{\mathrm{tr}}}{Z_{\mathrm{tr,data}}}\right|\right)\ \text{and}\ \arg\left(\frac{Z_{\mathrm{tr}}}{Z_{\mathrm{tr,data}}}\right),$$

绘制了。T　　蓝线表示基于 30 组数据
数据集，即，　总共涵盖 10 名不同的受试者，以及鼓膜处的三种不同阻抗模型。

所有情况下均针对十二个初始参数集进行了参数拟合。仅保留在全部 200 个频率下代价函数最低的结果。结果如图12所示。在这种情况下，对于最高达 7 千赫的所有频率，幅值差均小于 1 分贝；对于 7 千赫至 10 千赫之间的频率，幅值差仍小于 5 分贝。在大多数情况下，最高达 10 千赫的频率范围内，幅值差甚至小于 3 分贝。对于更高频率，差异非常大，因为参数拟合仅使用了最高达 10 千赫的频率。不过请注意，对于大多数几何结构，较高频率下也取得了合理的结果，见图13。

5.2 耳道面积函数

在参数拟合过程中，耳道面积函数的估计参数可用于构建面积函数，从而获得几何形状的近似模型。

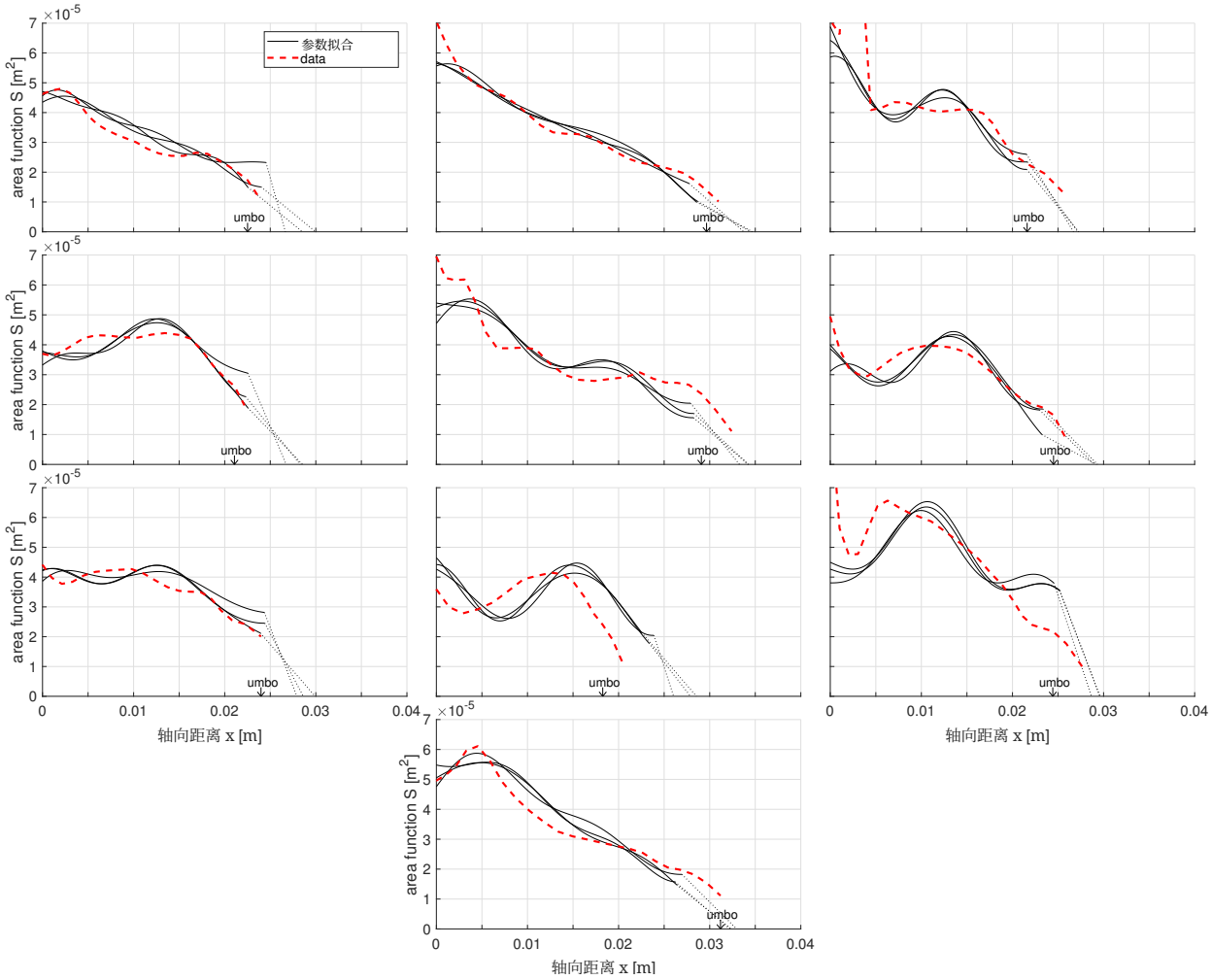


图14：10 千赫兹下全部十名受试者和三种阻抗模型的耳道面积函数结果。

图14展示了通过参数拟合获得的截面函数（使用截至10 千赫兹的对数分布频率），并将其与采用 [3] 中所述方法、根据三维几何结构计算出的面积函数进行了比较。对于大多数耳道而言，其主要特征都得到了较为合理的重现。需要注意的是，用于生成数据的几何形状在通过VMTK工具箱获得的中心轴第一个弯曲处进行了截断。该中心轴不同于 [3]提出的中心轴。尤其是入口处

表面不会垂直于 [3] 所定义的中心轴，这解释了某些受试者（如受试者 3和受试者9）的截面函数在入口处出现较大偏差的原因。总体而言，参数拟合得到的近似结果与采用 [3]中的方法生成的截面函数相当接近。用于生成数据的阻抗模型对截面函数的影响也很小。

5.3 鼓膜处的阻抗

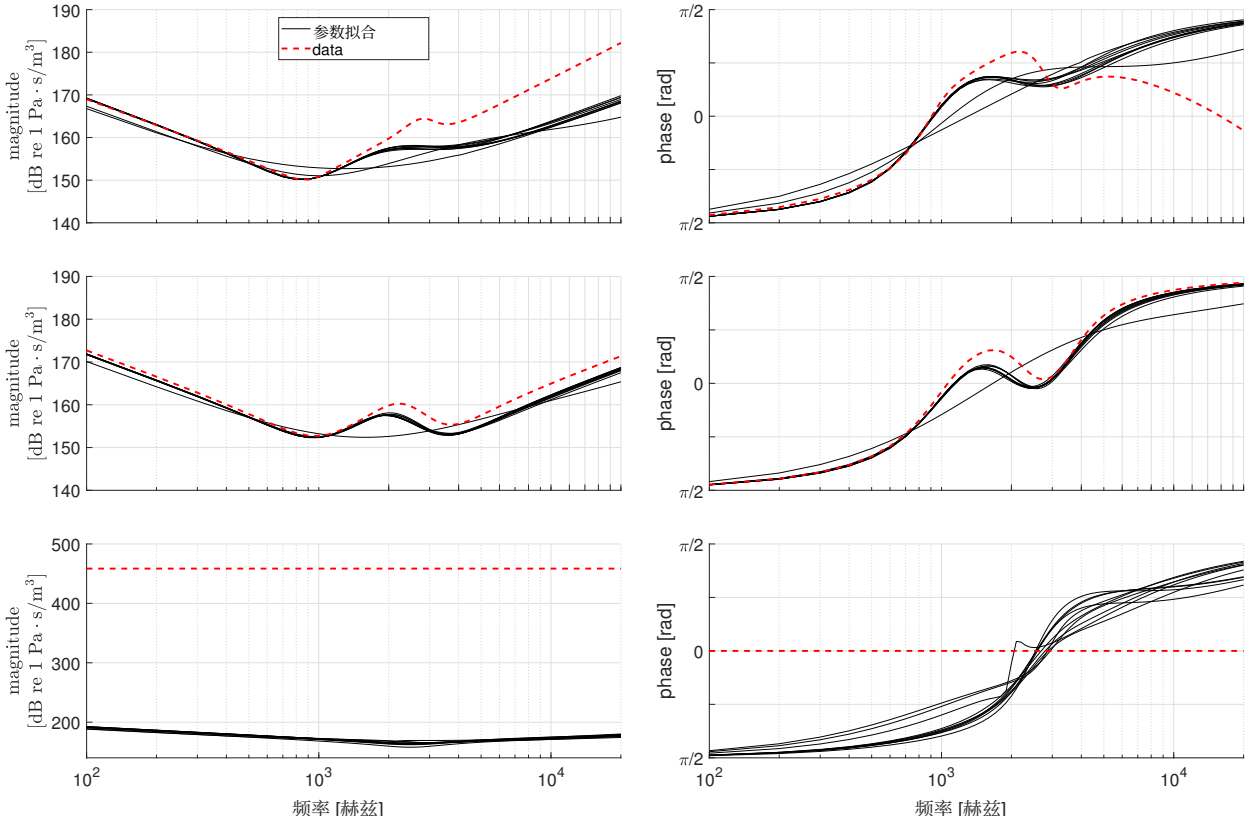


图15：针对不同底层模型数据估算的鼓膜处阻抗：(i) Hudde (ii) 双谐振器 (iii) 刚性情况。

参数拟合也得到了鼓膜处阻抗的近似值，如图15所示。双谐振器模型 (ii) 的数据可以得到很好的重建，因为这是我们在参数拟合中使用的阻抗模型。 [13] 的模型在低频范围内得到了很好的近似。阻抗条件 (iii) 无法得到很好的近似，因为参数范围不允许出现幅值如此高的阻抗。不过，可以观察到其幅值比其他情况更大，因此得到的参数拟合结果更接近刚性情况。在所有情况下，真实鼓膜阻抗在高于 2千赫的频率处的幅值都大于估算值。

6 结论

本文介绍并验证了一种根据输入阻抗估算传递阻抗的方法。使用合成数据，该方法能够得出准确结果，尤其是在100赫兹至7千赫的频率范围内。此外，我们还可以估算耳道面积函数和鼓膜阻抗；对于面积函数，识别出了几何形状的主要特征。如果所采用的阻抗模型拟合良好，则在低频范围内能够较好地估算鼓膜阻抗。然而，在较高频率下，通常会低估鼓膜阻抗。未来的工作应包括利用体内测量对该方法进行验证和改进。

致谢

本研究部分经费由德国科学基金会（DFG，德国研究基金会）资助——项目编号352015383——SFB 1330 C1

数据可用性声明

完整模型的实现可在 GitHub 上获取，参考链接：
https://github.com/nickwulbusch/ear-canal-parameter-fitting-1d。

参考文献

[1] M. Blau、T. Sankowsky、P. Roeske、H. Mojallal、M. Teschner 和 C. Thiele，《封闭的人类尸体耳中鼓膜处声压的预测》，声学学报，第 96 卷第 3 期，第 554–566 页，2010 年。[2] A. G. Webster，《声阻抗与号角及留声机理论》，美国国家科学院院刊，第 5 卷第 7 期，第 275–282 页，1919 年。[3] M. R. Stinson 和 B. W. Lawton，《用于预测声压级分布的人耳道几何结构描述》，美国声学学会杂志，第 85 卷第 6 期，第 2492–2503 页，1989 年。[4] H. Hudde、A. Engel 和 A. Lodwig，《鼓膜处声压的估算方法》，美国声学学会杂志，第 106 卷第 4 期第 1 部分，第 1977–1992 页，1999 年。[5] D. M. Rasetshwane 和 S. T. Neely，《根据反射率反演耳道面积函数》，美国声学学会杂志，第 130 卷第 6 期，第 3873–3881 页，2011 年。[6] T. Sankowsky-Rothe、M. Blau、E. Rasumow、H. Mojallal、M. Teschner 和 C. Thiele，《封闭的人耳中鼓膜处声压的预测》，声学学报，第 97 卷第 4 期，第 656–668 页，2011 年。[7] T. Sankowsky-Rothe、M. Blau、S. K¨ohler 和 A. Stirnemann，《利用集成耳道麦克风对助听器进行个体化均衡》，声学学报，第 101 卷第 3 期，第 552–566 页，2015 年。[8] N. N. Souza、S. Dhar、S. T. Neely 和 J. H. Siegel，《九种耳道刺激级估算方法的比较》，美国声学学会杂志，第 136 卷第 4 期，第 1768–1787 页，2014 年。[9] D. M. Rasetshwane、S. T. Neely、J. B. Allen 和 C. A. Shera，《声学号角的反射率与逆问题求解》，美国声学学会杂志，第 131 卷第 3 期，第 1863–1873 页，2012 年。[10] J. A. Nelder 和 R. Mead，《一种函数最小化单纯形法》，计算机杂志，第 7 卷第 4 期，第 308–313 页，1965 年。[11]N. Wulbusch，《耳道参数拟合 1d [code],》，2023 年。[在线]。网址：https://github.com/nickwulbusch/ear-canal-parameter-fitting-1d[12] A. Stirnemann，《基于外耳传递阻抗的中耳模型》，声学进展——*DAGA 2011*，杜塞尔多夫 ¨杜塞尔多夫，2011 年。[13] H. Hudde 和 A. Engel，《测量并建模人类中耳和耳道的基本特性。第三部分：传递函数与模型计算》，声学学报，第 84 期，第 1091–1109 页，1998 年。[14] J. J. Rosowski、P. J. Davis、S. N. Merchant、K. M. Donahue 和 M. D. Coltrera，《尸体中耳作为活体耳朵的模型：中耳输入导纳的比较》，耳鼻喉科年鉴，第 99 卷第 5 期第 1 部分，第 403–412 页，1990 年。[15] H. Hudde 和 A. Engel，《测量并建模人类中耳和耳道的基本特性。第一部分：模型结构与测量技术》，声学学报，第 84 期，第 720–738 页，1998 年。

[16]J. D'Errico。fminsearchbnd，fminsearchcon。[在线]。网址：
https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/8277-fminsearchbnd-fminsearchcon[17] R. Roden 和 M. Blau，《用于声学研究的 IHA 人体几何结构数据库：躯干、头部及完整外耳》，2020 年 8 月，第 49 届国际噪声控制工程大会暨展览会（Inter-Noise），首尔。[18] ——，《用于声学研究的 IHA 人体几何结构数据库：躯干、头部及完整外耳》，2021 年。[19] L. Antiga，《大动脉几何形状与血流的患者特异性建模》，2002 年 1 月，博士论文，米兰理工大学生物工程系。[20]A. Mjaavatten，《二维或三维空间中一维曲线的曲率》。[在线]。网址：
https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/69452-curvature-of-a-1d-curve-in-a-2d-or-3d-space，（最后访问日期：2023 年 3 月 8 日）。[21] D. Claxton，《Frenet》。[在线]。网址：
https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/111

69-

frenet，（最后访问于2023年3月8日）。[22] COMSOL，"Comsol multiphysics ®"，瑞典斯德哥尔摩。[在线]。网址：www.comsol.com