arXiv:2304.07173v1 [math.AG] 14 Apr 2023

Springer 解消的量子上同调的自同构及其应用

CHANGZHENG LI、CHANGJIAN SU 和 RUI XIONG

Abstract. 本文引入了量子 Demazure–Lusztig 算子，它们通过环自同构作用于 Springer 解消的等变量子上同调。本文的主要应用是给出环面等变量子上同调的生成元与关系表示。我们为经典型提供了明确的描述。此外，通过取 Toda 极限，我们还重新得到 Kim 关于完全旗簇的早期结果。

关键词：量子 Demazure–Lusztig 算子，Springer 解消，量子上同调

1. Introduction

复射影流形 X 的量子上同调环 $QH^*(X)$，是通过引入格罗莫夫–维滕不变量对经典上同调环 $H^*(X) = H^*(X,\mathbb{C})$ 作出的变形。当 X 是一个配备了良好约化群 $\mathbb{G}$ 作用的非紧代数簇时，仍可通过局部化定义等变量子乘积（例如参见[Liu13]）。辛分解是这类簇的一个有趣例子，它们通常成对出现，称为辛对偶 [Kam22]。辛对偶是一种三维镜像对称，它推广了几何表示论中广为人知的结构 [BLPW16]。Okounkov 及其合作者通过研究辛分解的枚举几何，开创了辛对偶的研究；这一研究与几何、表示论和数学物理中的各种结构密切相关[Oko18]。已有研究探讨了辛分解的若干例子中的 $QH^*_{\mathbb{G}}(X)$[OP10, BMO11, Su16, MS13, MO19, Dan22, MP15, KMP21]。

Springer 解消是复半单单连通李群 G 的完全旗流形 $\mathcal{B}$ 的余切丛，是最经典的辛消解实例。它是 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ 中幂零锥的一个解消，并带有 $\mathbb{G} = G \times \mathbb{C}^*$ 的自然作用，其中 $\mathbb{C}^*$ 对余切纤维进行伸缩。设 T 是 G 的极大环面，其李代数为 $\mathfrak{t}$，并记 $\mathbb{T} := T \times \mathbb{C}^*$。$\mathbb{T}$-等变量子上同调环 $QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$ 可以定义为.....

$$QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B}) = \big(H^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B}) \otimes \mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}}),\, *\big),$$

这是由 Braverman、Maulik 和 Okounkov 证明的等变量子 Chevalley 公式所致 [BMO11，定理 3.2]。这里，$T^\vee_{\mathrm{reg}}$ 是复对偶环面 $T^\vee$ 中根超平面并集的补集（见第 2 节）。

$T^*\mathcal{B}$ 的等变量子上同调环中存在一种令人惊讶的对称性，这正是我们的第一个主要定理所揭示的。为了说明这种对称性，我们先从经典斯普林格理论讲起。回顾一下，退化仿射海克代数 $\mathcal{H}_\hbar$ 是一个 $\mathbb{C}[\hbar]$-代数，由 $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}^*)$ 和群代数 $\mathbb{C}[W]$ 生成，并满足二者之间的相互作用关系。正如第 2.1 节将要回顾的，$\mathcal{H}_\hbar$ 通过卷积代数的一个同构 [CG10, Lus88]，作用在 $\mathbb{T}$-等变上同调 $H^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$ 上。对应于 $w \in W \subset \mathcal{H}_\hbar$ 的算子通常称为 Demazure–Lusztig 算子 [Gin98]。另一方面，存在一个自然的

由魏尔群在 $T^\vee_{\mathrm{reg}}$ 上的作用诱导的魏尔群在系数环 $\mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}})$ 上的作用。 T_w 上的量子 Demazure–Lusztig 算子 $= H^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B}) \otimes \mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}})$ 是这两个作用的对角张量积，参见定义 3.1。我们的第一个主要定理是以下这一出人意料的结果；关于该结果的简要示例，请参见例 3.3，其中取 $T^*\mathbb{P}^1$。

定理 A（定理 3.2）。每个量子 Demazure–Lusztig 算子都是 $QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$ 的环自同构。

注意，通常的 Demazure–Lusztig 算子通过 Leibniz 型公式 [Gin98, §12], 与等变杯积相互作用，但除平凡情形外，它从来不是环自同构。由于我们定义的量子 Demazure–Lusztig 算子会在量子变量的原点产生极点，因此无法将其投影到等变上同调中。我们证明的关键要素是 Maulik 和 Okounkov[MO19] 引入的稳定基。我们通过直接计算实现这一目标，所用的是第二作者 [Su16] 给出的一个关于除子类与稳定基相乘的显式公式。证明还运用了余切丛情形中出现的一些关键结构。

作为上述定理的一个应用，我们得到 $QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$ 的环表示。对于任意支配权 λ，我们在 (4.3) 中定义一个取值于 $QH^2_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$ 的方阵 $\Theta(\lambda)$，其灵感来自量子 Chevalley 公式。根据交换代数中的一个观察（如引理 4.9 所示），这为寻找等变量子上同调中的关系提供了一种有效方法。通过命题 4.11 中的变形原理，我们得到了第二个主要结果。

定理 B（定理 4.1）。 $\mathbb{T}$-等变量子上同调 $QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$ 由除子生成，其关系为：对于所有支配权 λ 及所有 $k \geq 1$，均有 $\mathrm{tr}\left(\Theta(\lambda)^k\right) = \sum_{\mu \in W\lambda} \mu^k$。

上述环表示可应用于 Calogero–Moser 系统的研究。该系统是一种源自一维多体问题的可积系统（例如，参见 [Eti07、BH18] 及其中的参考文献）。结合定理 B 和 [BMO11，定理 3.2], ，我们在推论 4.13 中得到了经典三角 Calogero–Moser 映射的显式描述。

我们将给出所有经典型中 $QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$ 的显式环表示。我们不直接使用定理 B 中的关系，而是计算 $\Theta(\lambda)$ 的特征多项式。例如，在 A_{n-1} 型中，旗簇 $\mathcal{B} = \mathcal{F}\ell_n$ 参数化 $\mathbb{C}^n$ 中的完全旗，而 Springer 解消 $T^*\mathcal{F}\ell_n$ 参数化满足以下条件的配对 (A, ϕ)： A 是一个幂零矩阵， $\phi \in \mathcal{F}\ell_n$ 是由 A-不变子空间构成的完全旗。在 $\Theta(\lambda)$ 这一族中，我们可以找到一个具有如下形式的矩阵

$$\begin{bmatrix} \chi_1 & \frac{\hbar}{1-q_1/q_2} & \frac{\hbar}{1-q_1/q_3} & \cdots & \frac{\hbar}{1-q_1/q_n} \\ \frac{\hbar}{1-q_2/q_1} & \chi_2 & \frac{\hbar}{1-q_2/q_3} & \cdots & \frac{\hbar}{1-q_2/q_n} \\ \frac{\hbar}{1-q_3/q_1} & \frac{\hbar}{1-q_3/q_2} & \chi_3 & \cdots & \frac{\hbar}{1-q_3/q_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\hbar}{1-q_n/q_1} & \frac{\hbar}{1-q_n/q_2} & \frac{\hbar}{1-q_n/q_3} & \cdots & \chi_n \end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

其中 $\chi_i = x_i + \hbar \sum_{a<i} \frac{q_a/q_i}{1-q_a/q_i} - \hbar \sum_{i<b} \frac{q_i/q_b}{1-q_i/q_b}$。矩阵 (1.1) 恰好与 [Eti07, §2.8] 中的矩阵相同。 $T^*\mathcal{B}$的 $\mathbb{T}$-等变量子上同调的表示可以表述如下,

定理 C（定理 5.1）。 $T^*\mathcal{F}\ell_n$ 的环面等变量子上同调由除子 $x_1, \ldots, x_n$ 生成，满足关系 $\mathcal{E}_k(\chi) - e_k(t)$，其中 $k = 1, \ldots, n$。这里， $\mathcal{E}_k(\chi)$ 是矩阵 (1.1) 的特征多项式的系数。

我们将在定理 5.2 中，通过对 $\{1,\dots,n\}$ 的 k 子集进行匹配，给出 $\mathcal{E}_k(\chi)$ 的组合描述；这与 Feynman 的初等计算 [Pol19] 一致。其他经典型的计算见定理 5.4（类型 B 和类型 C）及定理 5.7（类型 D）。

我们对 $QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$ 的显式描述还有另一项应用。正如 [BMO11, §8], 中所解释的，我们可以通过取 Toda 极限来恢复 $QH^*_T(\mathcal{B})$。在量子舒伯特演算和镜像对称的背景下，一个重要问题是给出 $\mathcal{B}$ 的（T 等变）量子上同调环表示的精确描述，或者更一般地，给出部分旗簇的精确描述。对于 B 型 A [GK95、AS95、CF99] 的部分旗簇，以及 Kim[Kim99] 对一般李型的完全旗流形 $\mathcal{B}$，这一问题已经得到解决。然而，一般而言，非 A 型部分旗簇的精确描述尚未给出。通过取 Toda 极限，我们能够重新得到经典李型的 $QH^*_T(\mathcal{B})$ 表示，并讨论其与 Kim 的描述之间的联系。对于 B 型 A_{n-1}，矩阵（1.1）（经共轭后）在 Toda 极限下收敛到量子舒伯特演算中著名的三对角矩阵：

$$\begin{bmatrix} x_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ q_1/q_2 & x_2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2/q_3 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

这得到了 Givental 和 Kim [GK95]所获得的表示。若能在两种描述之间建立直接（不依赖类型）的联系，将会很有趣。我们寻找 $QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$ 环表示的方法或许可以推广到部分旗簇的余切丛。因此，这种方法有望用于解决上述关于部分旗簇的问题。

本文结构如下。第 2 节回顾 Springer 解消 $T^*\mathcal{B}$的等变量子上同调的背景。第 3 节定义量子 Demazure–Lusztig 算子，并证明这些算子通过环自同构作用于 $T^*\mathcal{B}$ 的等变量子上同调。第 4 节给出 $QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$ 的环表示，并明确描述经典三角 Calogero–Moser 系统。第 5 节针对所有经典李型，计算 $QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$ 的环表示。最后，在附录 A 和附录 B 中，我们讨论通过取 Toda 极限得到的 $QH^*_T(\mathcal{B})$ 的环表示，并提供 $QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$ 在 A_{n-1}型下的一些计算细节。

致谢。作者谨向 Pavel Etingof、Michael Finkelberg、Michael McBreen、Leonardo C. Mihalcea、Andrei Okounkov、Nicholas Proudfoot、Peng Shan、Kirill Zainouline 和 Yehao Zhou 致以谢意，感谢他们提供的有益讨论和宝贵意见。C. Li 获得国家自然科学基金委员会项目（12271529 和 11831017）的部分资助。C. Su 获得清华大学清华大学数学科学中心启动基金的部分资助。R. Xiong 获得加拿大 NSERC探索基金项目 RGPIN-2015-04469 的部分资助。

2. Preliminaries

In t本节回顾关于 $T^*\mathcal{B}$ 的量子上同调的一些基本结果 .

记号。设 G 是一个李代数为 $\mathfrak{g}$ 的复半单单连通群，$T \subset G$ 是一个李代数为 $\mathfrak{t}$ 的极大环面。设 $R \subset \mathfrak{t}^*$ 是 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ 的根系。固定一组单根基 $\Pi = \{\alpha_i\}_{i=1}^r \subset R$，并令 $\{\omega_i\}_{i=1}^r \subset \mathfrak{t}^*$ 表示基本权，其中 r 是 G 的秩。令 $R^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in R\} \subset \mathfrak{t}$ 表示余根集合。由于 G 是单连通的，我们可以将（余）特征格典范地识别为权重格（分别为余根格）：

$$X^*(T) = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{C}^*) \cong \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{\omega_i\}_{i=1}^r, \quad \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, T) \cong \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}} R^\vee.$$

除非另有说明，$\alpha > 0$ 始终表示正根集合 R^+ 中的一个元素 α。相应的反射 s_α：$\mathfrak{t}^* \to \mathfrak{t}^*$ 定义为 $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$，其中$\langle \cdot, \cdot \rangle$：$\mathfrak{t}^* \times \mathfrak{t} \to \mathbb{C}$ 表示自然配对。我们也将 $\mathfrak{t}$上的诱导反射记为 s_α。魏尔群 W由简单反射 $s_i = s_{\alpha_i}$生成，其中 $i = 1, \ldots\ldots, r$。它带有布鲁哈特序 $\geq$，并具有标准长度函数 ℓ：$W \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$。令 $X^*(T)_+$表示 $X^*(T)$中的支配权集合。对于任意 $\pm\lambda \in X^*(T)_+$，我们将稳定 λ的 W 子群记为 W_λ，该子群由满足 $\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle = 0$的简单反射 s_i 生成。W/W_λ 中的每个陪集 uW_λ 都有唯一的最短长度代表元，记为 $\bar{u}$。因此，W/W_λ 可以与最短长度代表元构成的子集 $W^\lambda \subset W$ 等同。

退化仿射海克代数 $\mathcal{H}_\hbar$ 是一个分次 $\mathbb{C}[\hbar]$-代数，由 $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \mathfrak{t}^*}$ 和 W 生成，满足

(1) $x_{c\lambda+\mu} = c x_\lambda + x_\mu$、$x_\lambda x_\mu = x_\mu x_\lambda$、$\forall \lambda$、$\mu \in \mathfrak{t}^*$、$\forall c \in \mathbb{C}$;
(2) 元素 $w \in W$ 在 $\mathcal{H}_\hbar$ 中构成魏尔群。(3) $s_i x_\lambda - x_{s_i(\lambda)} s_i = \hbar \langle \alpha_i^\vee$、$\lambda \rangle$、$\forall \lambda \in \mathfrak{t}^*$、$\forall i = 1$、……、$r$;

$\mathcal{H}_\hbar$ 上的分次定义为 $\deg\, x_\lambda = 2$、$\deg\, w = 0$、$\deg\, \hbar = 2$。

设 $T^\vee := \mathbb{C}^* \otimes_{\mathbb{Z}} X^*(T)$ 为复对偶环面，$T^\vee_{\mathrm{reg}}$ 为所有根超平面 $\{q^{\alpha^\vee} = 1\}_{\alpha \in R^+}$ 的补集。这里将 $q^{\alpha^\vee}$ 视为定义在 $T^\vee$ 上的函数，并且对于 $\alpha^\vee = \sum_i a_i \alpha_i^\vee$，$q^{\alpha^\vee} = \prod_i (q^{\alpha_i^\vee})^{a_i}$。本文中，我们主要取系数于

$$\mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}}) = \mathbb{C}\big[\, q^{\alpha^\vee}, \tfrac{1}{1-q^{\alpha^\vee}} \,\big|\, \alpha \in R \,\big]. \tag{2.1}$$

对于任意权重 $\lambda \in X^*(T)$，我们将考虑 $\mathcal{O}(\mathfrak{t})$ 中的线性函数 p_λ 和作用于 $\mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}})$ 上的微分算子 ∂_λ，它们分别定义为

$$p_\lambda(\alpha^\vee) = \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle, \qquad \partial_\lambda q^{\alpha^\vee} = \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle q^{\alpha^\vee}. \tag{2.2}$$

我们还将考虑群的作用

$$\mathbb{G} := G \times \mathbb{C}^*, \quad \mathbb{T} := T \times \mathbb{C}^*. \tag{2.3}$$

2.1. Springer 解消的等变上同调。 G 的完全旗流形 $\mathcal{B}$ 参数化了 $\mathfrak{g}$ 的博雷尔子代数 $\mathfrak{b}$。令 $\mathcal{N}$ 表示 $\mathfrak{g}$ 中幂零元素构成的锥，即满足 $\mathrm{ad}_x \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ 为幂零的那些 $x \in \mathfrak{g}$。余切丛 $T^*\mathcal{B}$ 与子簇同构

$$\tilde{\mathcal{N}} = \{(A, \mathfrak{b}) \mid A \in \mathcal{N}, A \in \mathfrak{b}\} \subset \mathcal{N} \times \mathcal{B}$$

˜，通过同一 $T^*_{\mathfrak{b}}\mathcal{B} \cong [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = \mathfrak{n}$ 进行识别。自然投影 $\mathcal{N} \to \mathcal{N}$，或等价地，˜复合映射 $T^*\mathcal{B} \cong \mathcal{N} \to \mathcal{N}$，是一个奇点解消，称为 Springer 解消。

令 B 表示 G的标准 Borel 子群，其李代数由 $\mathfrak{t}$ 以及由正根参数化的根空间张成。在恒等 $\mathcal{B} = G/B$下，余切丛 $T^*\mathcal{B}$ 具有自然的 $\mathbb{G}$作用，其中 G作用通过左乘作用于 $\mathcal{B}$，而 $\mathbb{C}^*$ 作用则由伸缩作用给出。具体而言，对于任意 $(g, z) \in \mathbb{G}$，该作用表示为

$$(g, z) \cdot (xB, \xi) = (gxB, z^{-1} g^* \xi),$$

其中， ξ 是位于 $gB \in G/B$ 处的余切向量，而 $g^*\xi$ 是通过 g的左平移诱导的、将其拉回到 gxB 处的余切向量。

令 Y表示 $T^*\mathcal{B}$、 $\mathcal{B}$，或一个点 pt，并令 $A \leq \mathbb{G}$ 为一个复约化子群。下面描述 Y的 A-等变上同调 $H^*_A(Y) = H^*_A(Y, \mathbb{C})$。另以 $\hbar$ 表示 $H^*_{\mathbb{C}^*}(\text{pt})$ 的标准生成元。我们有

$$\begin{aligned} H^*_T(\mathrm{pt}) &= \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}^*), & H^*_{\mathbb{T}}(\mathrm{pt}) &= \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}^*)[\hbar], \\ H^*_G(\mathrm{pt}) &= \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}^*)^W, & H^*_{\mathbb{G}}(\mathrm{pt}) &= \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}^*)^W[\hbar]. \end{aligned}$$

注意， $T^*\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{B}$上的一个向量丛，因此

$$H^*_{\mathbb{G}}(T^*\mathcal{B}) = H^*_{\mathbb{G}}(\mathcal{B}) = H^*_G(\mathcal{B})[\hbar], \tag{2.4}$$

$$\text{and} \quad H^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B}) = H^*_{\mathbb{T}}(\mathcal{B}) = H^*_T(\mathcal{B})[\hbar]. \tag{2.5}$$

每个 $\lambda \in X^*(T)$都定义了 $\mathcal{B}$上的一个线丛 $\mathcal{L}_\lambda := G \times_B \mathbb{C}_\lambda$。 $\mathcal{L}_\lambda$ 的等变第一陈类记作:

$$D^{G,\mathcal{B}}_\lambda = c^G_1(\mathcal{L}_\lambda) \in H^2_G(\mathcal{B}), \quad D^{T,\mathcal{B}}_\lambda = c^T_1(\mathcal{L}_\lambda) \in H^2_T(\mathcal{B}). \tag{2.6}$$

类似地，对于 $A \leq \mathbb{G}$，我们用 $D^{A,\ T^*\mathcal{B}}_\lambda$ 表示通过拉回 $\mathcal{L}_\lambda$得到的 $T^*\mathcal{B}$ 上的线丛的 A-等变第一陈类。若无歧义，我们将所有类都简单记作 D_λ。

令 $\mathrm{St} := T^*\mathcal{B} \times_{\mathfrak{N}} T^*\mathcal{B}$ 表示斯坦伯格簇，它继承了一个 $\mathbb{G}$ 作用。令 $H^{\mathbb{G}}_*(\mathrm{St})$ 表示斯坦伯格簇的 $\mathbb{G}$-等变 Borel–Moore 同调，它通过卷积具有结合代数结构，参见 [CG10]。等变上同调 $H^*_{\mathbb{G}}(T^*\mathcal{B})$ 具有 $H^{\mathbb{G}}_*(\mathrm{St})$ 的典范作用，因此也具有仿射 Hecke 代数 $\mathcal{H}_\hbar$ 的典范作用；这是由于 Lusztig [Lus88] 证明了一个 $\mathbb{C}[\hbar]$- 代数同构 $\mathcal{H}_\hbar \simeq H^{\mathbb{G}}_*(\mathrm{St})$。该同构可显式描述如下。

(1) 对任意 $\lambda \in X^*(T)$， $x_\lambda \in \mathcal{H}_\hbar$ 被映为 D_λ 从$T^*\mathcal{B}$ 到 St 的对角推前。特别地，对任意 $\gamma \in H_{\mathbb{G}}(T^*\mathcal{B})$， x_λ在 γ上的作用由与 D_λ的等变乘积给出，即

$$x_\lambda(\gamma) = D_\lambda \cdot \gamma.$$

(2) 设 $\mathcal{P}_i := G/P_i$，其中 $P_i := B \cup Bs_iB$ 是包含 B 的极小抛物子群。 $\mathcal{B} \times_{\mathcal{P}_i} \mathcal{B}$ 在 $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ 中的余法丛的基本类是 $H^{\mathbb{G}}_*(\mathrm{St})$ 中定义良好的元素，并且它对应于 $s_i - 1$。

仿射 Hecke 代数 $\mathcal{H}_\hbar$ 也作用于 $\mathbb{T}$-等变上同调 $H^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B}) = H^*_{\mathbb{T}}(\mathrm{pt}) \otimes_{H^*_{\mathbb{G}}(\mathrm{pt})} H^*_{\mathbb{G}}(T^*\mathcal{B})$ 上。算子 x_λ, w 都是 $H^*_{\mathbb{T}}(\mathrm{pt})$-线性的。此外，算子 $w \in W \subset \mathcal{H}_\hbar$ 也称为 Demazure–Lusztig 算子，参见 [Gin98]。

根据 Borel，有一个同构，

$$\mathcal{O}(\mathfrak{t}) \xrightarrow{\sim} H^*_G(\mathcal{B}) \tag{2.7}$$

它将 p_λ 映射到 D_λ；此外，以下结论成立。

命题 2.1（[Bor53], , 另见 [AF]）。我们有如下环表示

$$H^*_T(\mathcal{B}) = \mathbb{C}[\lambda, D_\lambda]_{\lambda \in X(T)} \big/ \big\langle f(D_\lambda) - f(\lambda) \mid f(\lambda) \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}^*)^W \big\rangle,$$

其中 $f(D_\lambda)$ 是通过将 λ 替换为 D_λ 得到的。

2.2. Calogero–Moser 系统。Calogero–Moser 系统是研究一维多体问题中的一个哈密顿系统。该系统最初以有理形式写出，随后 Sutherland 和 Krichever 分别将其推广到三角情形和椭圆情形（参见例如 [Eti07、BH18] 及其中的参考文献）。

为满足我们的需要，我们主要关注三角 Calogero–Moser 系统，它是定义在 $\mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}} \times \mathfrak{t})[\hbar]$ 上的一个可积系统，其哈密顿量定义如下。对于任意非退化的 W-不变二次型 $C \in \mathrm{Sym}^2(\mathfrak{t}^*)^W$，我们将哈密顿量定义为

$$C(p) - \hbar^2 \sum_{\alpha>0} \frac{C(\alpha^\vee, \alpha^\vee)}{(q^{\alpha^\vee/2} - q^{-\alpha^\vee/2})^2} \in \mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}} \times \mathfrak{t})[\hbar], \tag{2.8}$$

其中 p_λ 由 (2.2) 定义，并自然地视为 $\mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}} \times \mathfrak{t})$ 中的一个函数。三角 Calogero–Moser 系统可以用一个 $\mathbb{C}[\hbar]$-线性嵌入来描述

$$\eta^{\mathrm{cl}}_{\mathrm{CM},\hbar} : \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}^*)^W[\hbar] \hookrightarrow \mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}} \times \mathfrak{t})[\hbar], \tag{2.9}$$

其像由满足以下特征的泊松对易函数组成

(1) 对任意 $f \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}^*)^W$， $f(p)$ 是 $\eta^{\mathrm{cl}}_{\mathrm{CM},\ \hbar}(f)$ 的首项；(2) 对任意 $C \in \mathrm{Sym}^2(\mathfrak{t}^*)^W$， $\eta^{\mathrm{cl}}_{\mathrm{CM},\ \hbar}(C)$ 是 (2.8) 中定义的哈密顿量。

这种映射的存在性可由 Dunkl 算子的构造得到保证。对于任意$\lambda \in X^*(T)$，经典三角 Dunkl 算子为

$$\mathrm{Dun}_\lambda := p_\lambda - \hbar \sum_{\alpha>0} \left\langle \lambda, \alpha^\vee \right\rangle \frac{q^{\alpha^\vee}}{1 - q^{\alpha^\vee}} s_\alpha \in \mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}} \times \mathfrak{t})[\hbar] \rtimes \mathbb{C}[W]. \tag{2.10}$$

对于任意多项式 $f(\lambda) \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}^*)$，记作

$$f(\mathrm{Dun}_\lambda) = \sum_{w \in W} D(w, f, \hbar) \cdot w \in \mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}} \times \mathfrak{t})[\hbar] \rtimes \mathbb{C}[W],$$

其中 $D(w, f, \hbar) \in \mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}} \times \mathfrak{t})[\hbar]$，我们定义

$$D(f, \hbar) := \sum_w D(w, f, \hbar) \in \mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}} \times \mathfrak{t})[\hbar].$$

则 $\eta^{\mathrm{cl}}_{\mathrm{CM},\ \hbar}(f) = D(f, \hbar)$，其中 $f \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}^*)^W$。

令 $\mathcal{D}(T^\vee_{\mathrm{reg}})$ 表示 $\mathbb{C}$ 上的微分算子的 $\mathbb{C}$-代数。三角 Calogero–Moser 系统的量子版本同样可描述为

$$\eta_{\mathrm{CM},\hbar} : \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}^*)^W[\hbar] \hookrightarrow \mathcal{D}(T^\vee_{\mathrm{reg}})[\hbar]$$

其由类似条件刻画，并可使用（量子）三角 Dunkl 算子 [Hec97, EFMV11] 以类似方式构造。

为此，我们需要一个规范变换。令

$$\delta = \prod_{\alpha>0} (q^{\alpha^\vee} - 1). \tag{2.11}$$

这定义了一个 ϑ 在 $\mathcal{D}(T^\vee_{\mathrm{reg}})[\hbar]$ 上的自同构，由 $\vartheta(x) = \delta^\hbar x \delta^{-\hbar}$给出。通过直接计算，我们得到

$$\vartheta(q^{\alpha^\vee}) = q^{\alpha^\vee} \quad \text{and} \quad \vartheta(\partial_\lambda) = \partial_\lambda + \hbar \sum_{\alpha>0} \frac{\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle\, q^{\alpha^\vee}}{1 - q^{\alpha^\vee}}.$$

T这诱导出一个 ϑ^{cl} 泊松代数 $\mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}}\times\mathfrak{t})[\hbar]$ 的自同构，使得 $\mathfrak{t}$

$$\vartheta^{\mathrm{cl}}(q^{\alpha^\vee})=q^{\alpha^\vee}\quad\text{and}\quad\vartheta^{\mathrm{cl}}(p_\lambda)=p_\lambda+\hbar\sum_{\alpha>0}\frac{\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle\,q^{\alpha^\vee}}{1-q^{\alpha^\vee}}.$$

记

$$\overline{\eta}_{\mathrm{CM},\hbar}=\vartheta\circ\eta_{\mathrm{CM},\hbar},\qquad\overline{\eta}^{\mathrm{cl}}_{\mathrm{CM},\hbar}=\vartheta^{\mathrm{cl}}\circ\eta^{\mathrm{cl}}_{\mathrm{CM},\hbar}.\tag{2.12}$$

2.3. 量子上同调。我们将研究空间 $X\in\{\mathcal{B},T^*\mathcal{B}\}$ 的 A-等变量子上同调 $QH^*_A(X)$。这里，$A\le\mathbb{G}$ 是一个复约化子群。特别地，对于 $X=T^*\mathcal{B}$，我们要求 A 包含 $\{e\}\times\mathbb{C}^*$，以确保 A-不动点集 X^A 始终是紧的。

注意，G 是单连通的。我们有如下同一

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}R^\vee=\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*,T)\simeq H_2(X,\mathbb{Z}).$$

每个正余根 $\alpha^\vee$ 都定义一个 SL_2 子群 $G_{\alpha^\vee}\subset G$，进而定义一条有理曲线 $G_{\alpha^\vee}B/B\subset\mathcal{B}\subset T^*\mathcal{B}$。因此，$H_2(X,\mathbb{Z})$ 中有效类构成的锥 $\mathrm{Eff}(X)$ 由正余根生成。对于每个有效曲线类 $\beta\in\in\mathrm{Eff}(X)\subset H_2(X,\mathbb{Z})$，以及 $\gamma_1,\dots,\gamma_k\in H_A(X)$，$k$ 点、属 0 的等变 Gromov–Witten 不变量由下式给出

$$\langle\gamma_1,\dots,\gamma_k\rangle^X_{0,k,\beta}=\int_{[\overline{M}_{0,k}(X,\beta)]^{\mathrm{vir}}}\mathrm{ev}^*(\gamma_1\boxtimes\cdots\boxtimes\gamma_k),$$

其中 $[\overline{M}_{0,k}(X,\beta)]^{\mathrm{vir}}$ 是 k 点标记稳定映射到 X 的模空间的虚基本类，参见 [CK99] 和 [BMO11 第 4] 节。对于非紧的 $X=T^*\mathcal{B}$，积分通过等变留数定义，参见 [Liu13]。量子上同调

$$QH^*_A(X)=(H^*_A(X)\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[\![q^\beta]\!]_{\beta\in\mathrm{Eff}(X)},*)$$

是等变上同调 $H^*_A(X)$ 的一种变形。量子乘积 $*$ 是定义在 $QH^*_A(X)$ 上的 $\mathbb{C}[\![q^\beta]\!]_{\beta\in\mathrm{Eff}(X)}$-双线性乘积，使得对于任意 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\in H^*_A(X)$，有

$$(\gamma_1*\gamma_2,\gamma_3)=\sum_{\beta\in\mathrm{Eff}(X)\cup\{0\}}q^\beta\langle\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\rangle^X_{0,3,\beta}.$$

这里 $(\cdot,\cdot)$ 是 Poincar´e 配对；当 $T^*\mathcal{B}$ 时，可利用等变留数计算该配对。

众所周知，$QH^*_A(X)$ 构成一个带单位元 1 的分次交换 $H^*_A(\mathrm{pt})$-代数。这里，q^β 的次数定义为

$$\deg q^\beta=2\langle-K_X,\beta\rangle,$$

其中 K_X 是 X的典范丛。特别地，$q^{\alpha^\vee}$ 在 $QH^*_A(T^*\mathcal{B})$中的次数为零，因为 $K_{T^*\mathcal{B}}$ 是平凡的。

在 $H^2(X)$上的纤维为 $H^*_A(X)$的平凡向量丛上，存在一个平坦联络 ∇，称为杜布罗温联络，其定义如下:

$$\nabla_\lambda:=\partial_\lambda-\lambda*,\quad\forall\lambda\in H^2(X),$$

其中，∂_λ 如式（2.2）所示，通过将 $H^2(X)$与 $\mathfrak{t}^*$等同来定义。随后，等变上同调$QH^*_A(X)$带有一个 $H^*_A(\mathrm{pt})$-$\mathcal{D}$-模结构，称为 X的 A-等变量子 $\mathcal{D}$-模。 [BMO11] 的主要结果如下。

命题 2.2（[BMO11，定理 3.2]）。

（1） D_λ 的量子乘法由下式给出

$$x_\lambda + \hbar \sum_{\alpha>0} \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \frac{q^{\alpha^\vee}}{1-q^{\alpha^\vee}}(s_\alpha - 1).$$

(2) $T^*\mathcal{B}$ 的量子联络可解析延拓至 $T^\vee_{\mathrm{reg}}$，且由下式给出

$$\nabla_\lambda = \partial_\lambda - x_\lambda - \hbar \sum_{\alpha>0} \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \frac{q^{\alpha^\vee}}{1-q^{\alpha^\vee}}(s_\alpha - 1).$$

此外，$H^*_{\mathbb{G}}$(pt)-结构由量子 Calogero–Moser 映射 $\overline{\eta}_{\mathrm{CM},\hbar}$ 给出。(3) 我们有一个 $\mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}})$-代数同构

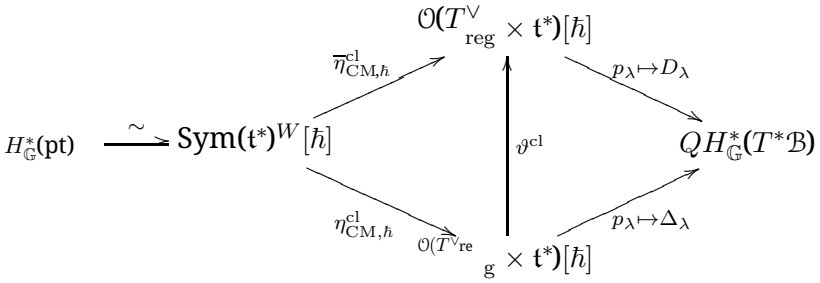
$$\mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}} \times \mathfrak{t})[\hbar] \xrightarrow{\sim} QH^*_{\mathbb{G}}(T^*\mathcal{B}) \tag{2.13}$$

将 p_λ 映至 D_λ。此外，$H^*_{\mathbb{G}}$(pt)-结构由经典 Calogero–Moser 映射$\overline{\eta}^{\mathrm{cl}}_{\mathrm{CM},\hbar}$ 给出。

注 2.3. 上述命题的第 (3) 部分有如下等价表述。引入

$$\Delta_\lambda = D_\lambda + \hbar \sum_{\alpha>0} \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \frac{q^{\alpha^\vee}}{1-q^{\alpha^\vee}}, \tag{2.14}$$

我们有一个 $\mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}})$-代数同构，如 (2.13)，它将 p_λ 映至 Δ_λ。此时，$H^*_{\mathbb{G}}$(pt)-结构由经典 Calogero–Moser 映射 $\eta^{\mathrm{cl}}_{\mathrm{CM},\hbar}$ 给出（不作规范变换）。这一关系可用下图概括



注记 2.4。注意，命题 2.2 (3) 表明，$QH^*_{\mathbb{G}}(T^*\mathcal{B})$ 由除子D_λ （或等价地，由类 Δ_λ）生成。(2.13) 中的同构是在细化等变量子上同调后得到的

$$QH^*_{\mathbb{G}}(T^*\mathcal{B}) = H^*_{\mathbb{G}}(T^*\mathcal{B}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}}) \tag{2.15}$$

将形式幂级数 $\mathbb{C}[\![q^\beta]\!]_\beta$ 替换为函数环 $\mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}})$。换言之，量子乘积可以解析延拓到环 $T^\vee_{\mathrm{reg}}$。

同样的论证也适用于 $QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$。也就是说，$QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$ 由除子D_λ （或等价地，由 Δ_λ）生成，并且我们可以将其实现于

$$QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B}) = H^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}}). \tag{2.16}$$

这些事实对于定义量子 Demazure–Lusztig 算子至关重要。

3. Automorhisms of $QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$

下面定义本文的主要对象。

定义 3.1（量子 Demazure–Lusztig 算子）。对于任意 $u \in W$，我们将量子 Demazure–Lusztig 算子 T_u 定义为作用在 $QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B}) = H^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B}) \otimes \mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}})$ 上的算子，其定义如下：

$$T_u = u \otimes u, \tag{3.1}$$

其中，右侧第一个 u 是 $\mathcal{H}_\hbar$ 的一个元素，即通常的 Demazure–Lusztig 算子；第二个 u 表示由 $T^\vee_{\mathrm{reg}}$ 上的作用诱导出的对 $\mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}})$ 的作用，即$u(q^{\alpha^\vee}) := q^{u\alpha^\vee}$。

本节旨在阐述以下令人惊讶的定理，该定理将在第 4 节中寻找 $QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$ 的表示时发挥重要作用。

定理 3.2. 对任意 $u \in W$和 $\gamma_1, \gamma_2 \in QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$,

$$T_u(\gamma_1 * \gamma_2) = T_u(\gamma_1) * T_u(\gamma_2). \tag{3.2}$$

因此， T_u 是关于量子乘积的环自同构。

例 3.3. 考虑 $G = SL(2,\mathbb{C})$ 的情形。令 $s := s_\alpha \in W$ 为唯一的简单反射， ϖ 为基本权，并令 $q := q^{\alpha^\vee}$ 表示唯一的本原有效曲线类。注意， $-D_\varpi = D_{-\varpi} \in H^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathbb{P}^1)$是等变第一陈类 $c_1^{\mathbb{T}}(\mathcal{O}(1)) \in H^*_{\mathbb{T}}(\mathbb{P}^1)$的拉回。根据命题 2.2 (1),

$$D_\varpi * D_{-\varpi} = D_\varpi D_{-\varpi} + \hbar\frac{q}{1-q}(D_\varpi - D_{-\varpi} - \hbar).$$

我们有

$$\begin{aligned} T_s(D_\varpi) * T_s(D_{-\varpi}) &= (D_{-\varpi} + \hbar) * (D_\varpi - \hbar) \\ &= D_\varpi D_{-\varpi} + \hbar\frac{1}{1-q}(D_\varpi - D_{-\varpi} - \hbar), \\ T_s(D_\varpi * D_{-\varpi}) &= D_\varpi D_{-\varpi} + \hbar\frac{q^{-1}}{1-q^{-1}}(D_{-\varpi} - D_\varpi + \hbar) \\ &= D_\varpi D_{-\varpi} + \hbar\frac{1}{1-q}(-D_{-\varpi} + D_\varpi - \hbar). \end{aligned}$$

Thus

$$T_s(D_\varpi * D_{-\varpi}) = T_s(D_\varpi) * T_s(D_{-\varpi}).$$

3.1. 稳定基。稳定基由 Maulik 和 Okounkov 在他们关于 Nakajima 箭图簇量子上同调的开创性著作 [MO19] 中引入。它在我们对定理 3.2 的证明中起着至关重要的作用。下面简要回顾 Springer 解消的稳定基定义，更多细节见 [MO19，第 3] 章或 [Su17] 。

回顾一下，环面 $\mathbb{T}$ 作用于 $T^*\mathcal{B}$，其不动点为 $(wB, 0) \in T^*\mathcal{B}$ for $w \in W$。对于任意 $w \in W$ 和 $\gamma \in H^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$，我们用 $\gamma|_w$ 表示 γ 在不动点 $(wB, 0)$ 处的限制。稳定包络的定义取决于 $\mathfrak{t}$中 Weyl 室的选择。为了我们的目的，需要选择负 Weyl 室，并用下标中的 $-$ 表示。令 B^- 表示相反的 Borel 子群。稳定基由以下命题刻画。

命题 3.4（[MO19, Su17]）。存在唯一的一族类

$$\left\{ \mathrm{Stab}_-(w) \in H^{2\dim\mathcal{B}}_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B}) \,\middle|\, w \in W \right\}$$

其满足以下性质：

(1) $\mathrm{Stab}_-(w)$ 支持在相反舒伯特簇的余法丛之并上B^-uB/B 对于 $u \geq w$，即，除非 $u \geq w$，否则 $\mathrm{Stab}_-(w)|_u = 0$；(2) $\mathrm{Stab}_-(w)|_w = \prod_{\alpha>0,\ w\alpha>0} (w\alpha - \hbar) \prod_{\alpha>0,\ w\alpha<0}$(3) 对任意 $u > w$，$\mathrm{Stab}_-(w)|_u$ 可被 $\hbar$ 整除。

此外，反演等变参数后，稳定基构成了 $H^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$ 的一组基。

命题 3.5（[Su16，定理 3.14]）。对于 $w \in W$ 和 $\lambda \in X^*(T)$，以下等式在 $QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$ 中成立

$$\begin{aligned} D_\lambda * \mathrm{Stab}_-(w) = w(\lambda)\,\mathrm{Stab}_-(w) - \hbar \sum_{\alpha>0, w\alpha>0} \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle\, \mathrm{Stab}_-(ws_\alpha) \\ - \hbar \sum_{\alpha>0} \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \frac{q^{\alpha^\vee}}{1-q^{\alpha^\vee}} \big(\mathrm{Stab}_-(w) + \mathrm{Stab}_-(ws_\alpha) \big). \end{aligned}$$

注 3.6。上述公式也可以由命题 2.2 (1) 以及稳定基杯积的 Chevalley 公式 [Su16，定理 3.7] 推出。

回顾在 (2.14) 中定义的类 Δ_λ。命题 3.5 可以改写为

$$\begin{aligned} \Delta_\lambda * \mathrm{Stab}_-(w) = w(\lambda)\,\mathrm{Stab}_-(w) - \hbar \sum_{\alpha>0, w\alpha>0} \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \frac{1}{1-q^{\alpha^\vee}}\, \mathrm{Stab}_-(ws_\alpha) \\ - \hbar \sum_{\alpha>0, w\alpha<0} \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \frac{q^{\alpha^\vee}}{1-q^{\alpha^\vee}}\, \mathrm{Stab}_-(ws_\alpha). \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.2. 定理 3.2 的证明。我们先证明以下引理。

引理 3.7. 对任意的 $w, u \in W$ 和 $\lambda \in X^*(T)$，我们有
(1) $T_u\big(\mathrm{Stab}_-(w)\big) = (-1)^{\ell(u)}\, \mathrm{Stab}_-(wu^{-1})$;
(2) $T_u(\Delta_\lambda) = \Delta_{u\lambda}$。

证明. 由于 $\mathrm{Stab}_-(w)$ 没有量子分量，我们有 $T_u(\mathrm{Stab}_-(w)) = u(\mathrm{Stab}_-(w))$。由 [Su17，引理 3.2]，我们知道 $u\big(\mathrm{Stab}_-(w)\big) = (-1)^{\ell(u)}\, \mathrm{Stab}_-(wu^{-1})$。这就证明了第一部分 (1)。

对于第二部分 (2)，只需证明 $w = s_i$ 为简单反射的情形:

$$\begin{aligned} T_{s_i}(\Delta_\lambda) &= s_i(D_\lambda) + \hbar \sum_{\alpha>0} \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \frac{q^{s_i\alpha^\vee}}{1-q^{s_i\alpha^\vee}} \\ &= D_{s_i\lambda} + \hbar \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle + \hbar \sum_{\alpha>0, \alpha\neq\alpha_i} \langle s_i\lambda, \alpha^\vee \rangle \frac{q^{\alpha^\vee}}{1-q^{\alpha^\vee}} + \hbar \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \frac{q^{-\alpha_i^\vee}}{1-q^{-\alpha_i^\vee}} \\ &= \Delta_{s_i\lambda}. \end{aligned}$$

这里，在第二个等式中，我们用到了以下事实：$s_i(R^+ \setminus \{\alpha_i\}) = R^+ \setminus \{\alpha_i\}$ 以及 $s_i(D_\lambda) = s_i x_\lambda \cdot 1 = (x_{s_i\lambda} + \hbar\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle) \cdot 1 = D_{s_i\lambda} + \hbar\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle$。□

利用这个引理，我们可以证明定理 3.2 的以下特殊情形。

命题 3.8. 对任意 w、$u \in W$ 和 $\lambda \in X^*(T)$，

$$T_u(\Delta_\lambda * \mathrm{Stab}_-(w)) = T_u(\Delta_\lambda) * T_u(\mathrm{Stab}_-(w)). \tag{3.4}$$

证明. 证明通过使用 T_u 的定义、引理 3.7 和 (3.3) 直接计算得到。一方面，我们有

$$\begin{aligned}&(-1)^{\ell(u)}T_u(\Delta_\lambda) * T_u(\mathrm{Stab}_-(w)) = \Delta_{u\lambda} * \mathrm{Stab}_-(wu^{-1})\\ &= w(\lambda)\,\mathrm{Stab}_-(wu^{-1}) - \hbar \sum_{\alpha>0, wu^{-1}\alpha>0} \left\langle u\lambda, \alpha^\vee \right\rangle \frac{1}{1-q^{\alpha^\vee}}\,\mathrm{Stab}_-(wu^{-1}s_\alpha)\\ &\quad - \hbar \sum_{\alpha>0, wu^{-1}\alpha<0} \left\langle u\lambda, \alpha^\vee \right\rangle \frac{q^{\alpha^\vee}}{1-q^{\alpha^\vee}}\,\mathrm{Stab}_-(wu^{-1}s_\alpha).\end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}&(-1)^{\ell(u)}T_u(\Delta_\lambda * \mathrm{Stab}_-(w))\\ &= w(\lambda)\,\mathrm{Stab}_-(wu^{-1}) - \hbar \sum_{\beta>0, w\beta>0} \left\langle \lambda, \beta^\vee \right\rangle \frac{1}{1-q^{u\beta^\vee}}\,\mathrm{Stab}_-(ws_\beta u^{-1})\\ &\quad - \hbar \sum_{\beta>0, w\beta<0} \left\langle \lambda, \beta^\vee \right\rangle \frac{q^{u\beta^\vee}}{1-q^{u\beta^\vee}}\,\mathrm{Stab}_-(ws_\beta u^{-1})\end{aligned}$$

通过匹配上述两个表达式中的系数，我们完成证明。

情形 A. $\mathrm{Stab}_-(wu^{-1})$的两个系数均为 $w(\lambda)$。

情形 B. 设 $\alpha > 0$ 使得 $u^{-1}\alpha = \beta > 0$。若 $wu^{-1}\alpha > 0$，即 $w\beta > 0$，则有

$$\left\langle u\lambda, \alpha^\vee \right\rangle \frac{1}{1-q^{\alpha^\vee}}\,\mathrm{Stab}_-(wu^{-1}s_\alpha) = \left\langle \lambda, \beta^\vee \right\rangle \frac{1}{1-q^{u\beta^\vee}}\,\mathrm{Stab}_-(ws_\beta u^{-1}).$$

类似地，若 $wu^{-1}\alpha < 0$，即 $w\beta < 0$，则有

$$\left\langle u\lambda, \alpha^\vee \right\rangle \frac{q^{\alpha^\vee}}{1-q^{\alpha^\vee}}\,\mathrm{Stab}_-(wu^{-1}s_\alpha) = \left\langle \lambda, \beta^\vee \right\rangle \frac{q^{u\beta^\vee}}{1-q^{u\beta^\vee}}\,\mathrm{Stab}_-(ws_\beta u^{-1}).$$

情形 C。令 $\alpha > 0$ 使得 $u^{-1}\alpha = -\beta > 0$。若 $wu^{-1}\alpha > 0$，即 $w\beta < 0$，则有

$$\begin{aligned}\left\langle u\lambda, \alpha^\vee \right\rangle \frac{1}{1-q^{\alpha^\vee}}\,\mathrm{Stab}_-(wu^{-1}s_\alpha) &= \left\langle \lambda, -\beta^\vee \right\rangle \frac{1}{1-q^{-u\beta^\vee}}\,\mathrm{Stab}_-(ws_\beta u^{-1})\\ &= \left\langle \lambda, \beta^\vee \right\rangle \frac{q^{u\beta^\vee}}{1-q^{u\beta^\vee}}\,\mathrm{Stab}_-(ws_\beta u^{-1}).\end{aligned}$$

类似地，若 $wu^{-1}\alpha < 0$，即 $w\beta > 0$，则有

$$\begin{aligned}\left\langle u\lambda, \alpha^\vee \right\rangle \frac{q^{\alpha^\vee}}{1-q^{\alpha^\vee}}\,\mathrm{Stab}_-(wu^{-1}s_\alpha) &= \left\langle \lambda, -\beta^\vee \right\rangle \frac{q^{-u\beta^\vee}}{1-q^{-u\beta^\vee}}\,\mathrm{Stab}_-(ws_\beta u^{-1})\\ &= \left\langle \lambda, \beta^\vee \right\rangle \frac{1}{1-q^{u\beta^\vee}}\,\mathrm{Stab}_-(ws_\beta u^{-1}).\end{aligned}$$

□

我们还需要以下一个简单引理。

引理 3.9。令 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$。

(1) 假设 $T_u(\gamma_1 * \gamma_2) = T_u(\gamma_1) * T_u(\gamma_2)$ 且 $T_u(\gamma_1 * \gamma_3) = T_u(\gamma_1) * T_u(\gamma_3)$。那么对任意 $f_2, f_3 \in H^*_{\mathbb{T}}(\mathrm{pt}) \otimes \mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}})$,

$$T_u(\gamma_1 * (f_2\gamma_2 + f_3\gamma_3)) = T_u(\gamma_1) * T_u(f_2\gamma_2 + f_3\gamma_3).$$

(2) 假设对于任意 $i = 1, 2$ 和 $\gamma \in QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$, $T_u(\gamma_i * \gamma) = T_u(\gamma_i) * T_u(\gamma)$。那么

$$T_u(\gamma_1 * \gamma_2 * \gamma) = T_u(\gamma_1 * \gamma_2) * T_u(\gamma).$$

证明。第一条由 T_u 的定义可得，第二条则由量子乘积的结合律可得。□

现在我们可以证明定理 3.2。

定理 3.2 的证明。回顾一下，根据命题 3.4，在反转等变参数后，稳定基构成了 $H_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$ 的一组基。因此，根据命题 3.8 和引理 3.9 (1)，对于 $\gamma_1 = \Delta_\lambda$ with $\lambda \in X^*(T)$ 以及任意 $\gamma_2 \in QH_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$，(3.2) 成立。由于 $QH_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$ 由类 Δ_λ 生成，定理由引理 3.9 (2) 得证。□

4. Presentation of Quantum Cohomology

$T^*\mathcal{B}$ 的等变上同调由除子 D_μ 生成。因此，存在一个自然的满射态射 π，它是 $\mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}})[\hbar]$ 上的代数态射，

$$\pi : \mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}})[\hbar][\mu, D_\mu]_{\mu\in X^*(T)} \longrightarrow QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B}). \tag{4.1}$$

本节中，我们将确定核 $\ker\pi$。更确切地说，对于任意（反）占优权 $\lambda \in X^*(T)_\pm$ 以及正整数 k，我们令

$$\mathcal{R}^k_\lambda = \operatorname{tr}\left(\Theta(\lambda)^k\right) - \sum_{u\in W^\lambda} (u\lambda)^k \tag{4.2}$$

关于 $\Theta(\lambda) = \left(\Theta_{u,\ v}(\lambda)\right)_{u,\ v\in W^\lambda}$ 是一个阶数为 $|W^\lambda| = |W\lambda|$ 的方阵，定义如下

$$\Theta_{u,v}(\lambda) = \begin{cases} \Delta_{u\lambda}, & \text{if } u = v, \\ \frac{-\hbar\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle}{1-q^{u\alpha^\vee}}, & \text{if } \overline{us_\alpha} = v \text{ for some } \alpha \in R^+ \setminus R^+_\lambda, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.3}$$

这里 $R^+_\lambda := R^+ \bigcap(\sum_{s_i\in W_\lambda} \mathbb{Z}\alpha_i)$，并且我们回顾一下，$\overline{us_\alpha} \in W^\lambda$ 表示陪集 $us_\alpha W_\lambda \in W/W_\lambda$ 的最短长度代表元。第二种情况下的根 α 是唯一的 [FW04]。下面的定理是本节的主要结果。

定理 4.1. 我们有如下表示:

$$QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B}) \cong \mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}})[\hbar][\mu, D_\mu]_{\mu\in X^*(T)} \Big/ \left\langle \mathcal{R}^k_\lambda \mid \lambda \in X^*(T)_+, k > 0 \right\rangle.$$

Exam例 4.2. 令 $G = SL(2,\mathbb{C})$，并使用与例 3.3 中相同的记号。该 n

$$\Theta(\varpi) = \begin{bmatrix} D_\varpi + \hbar\frac{q}{1-q} & \frac{-\hbar}{1-q} \\ \frac{-\hbar}{1-q^{-1}} & D_{-\varpi} - \hbar\frac{q}{1-q} \end{bmatrix},$$

and

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\Theta(\varpi)^2\right) &= \left(D_\varpi + \hbar\tfrac{q}{1-q}\right)^2 + \tfrac{\hbar^2}{(1-q)(1-q^{-1})} \\ &= D_\varpi * D_\varpi + 2\hbar\tfrac{q}{1-q}D_\varpi - \hbar^2\tfrac{q}{1-q}. \end{aligned}$$

定理 4.1 给出

$$D_\varpi * D_\varpi + 2\hbar\frac{q}{1-q}D_\varpi - \hbar^2\frac{q}{1-q} = \varpi^2. \tag{4.4}$$

因此， $QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$ 由 D_ϖ 生成，并满足关系式 (4.4)。

另一方面， $T^*\mathcal{B} = T^*\mathbb{P}^1$ 也是一个超环面簇。按照 [MS13], 的记法，我们分别用 x 和 y 表示位于 0 和 ∞处的余切纤维的基本类。我们记作$h = -\hbar$。于是

$$x = -\varpi - D_\varpi \quad and \quad y = \varpi - D_\varpi.$$

因此，我们得到以下关系，这与 [MS13, Theorem 1.1],相容

$$x * y = q(h - x) * (h - y).$$

注 4.3。注意， $\mathbb{G}$-等变（量子）上同调可以视为不变量环，这些不变量是关于下文第 4.1 节开头回顾的左侧 Weyl 群作用而言的。由引理 4.4 不难得到

$$QH^*_{\mathbb{G}}(T^*\mathcal{B}) \cong \mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}})[\hbar][D_\mu]_{\mu\in X^*(T)} \cong \mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}} \times \mathfrak{t}^*)[\hbar].$$

这得到了 Braverman、Maulik 和 Okounkov 的命题 2.2 (3) 的第一部分。利用命题 2.2 (3) 的第二部分，我们的结果为 Calogero–Moser 系统提供了一个应用，见推论 4.13。

4.1. 关系的构造。在本小节中，我们将证明等式 $\mathcal{R}^k_\lambda = 0$在 $QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$ 中成立。

回顾一下， $H^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$ 上的左侧 Weyl 群作用是由 G在 $T^*\mathcal{B}$上的左乘作用诱导的。将其线性延拓到 $\mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}})$ 上后，我们得到 W在$QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$ 上的左作用。对于 $w \in W$，我们用 w^L表示此作用。注意到 w^L保持线丛，并利用 [MNS22、方程 (12)] [1], ，我们有

引理 4.4. 对任意 $f \in H^*_{\mathbb{T}}(\mathrm{pt})$、 $g \in \mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}})$、 $\mu \in X^*(T)$ 以及 $\gamma_1, \gamma_2 \in QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$，以下结论成立：

(1) $w^L(fgD_\mu) = w(f)gD_\mu$;
(2) $w^L(\gamma_1 * \gamma_2) = (w^L\gamma_1) * (w^L\gamma_2)$.

因此，每个 w^L 都是 $QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$ 的环自同构。此外，上述 W 作用与仿射 Hecke 代数 $\mathcal{H}_\hbar$ 的作用相交换。

引理 4.5. 设 u、 v、 $w \in W$ 和 $\alpha \in R^+ \setminus R^+_\lambda$。我们有

(1) $\Theta_{1,\ s_\alpha}(\lambda) = \frac{-\hbar\langle\lambda,\ \alpha^\vee\rangle}{1-q^{\alpha^\vee}}$；
(2) $T_u(\Theta_{1,\ w}) = \Theta_{\bar{u},\ \overline{uw}}$;
(3) $v^L \circ T_u(\Theta_{1,\ w}) = \Theta_{\bar{u},\ \overline{uw}}$。

证明. 命题 (1) 直接由 $\Theta(\lambda)$ 的定义得出。接下来，我们需要针对 $\Theta(\lambda)$ (4.3) 定义中的每种情形验证命题 (2)。在第一种情形下，由引理 3.7 (2)，有 $T_u(\Theta_{1,1}) = T_u(\Delta_\lambda) = \Delta_{u\lambda} = \Theta_{u,\overline{u\cdot 1}}$；第二种情形由 T_u 的定义得出；如果 $\Theta_{1,w}$ 的情形发生（即 $\Theta_{1,w} = 0$），那么 $\Theta_{u,\overline{uw}}$ 也成立。最后，由于 $\Theta(\lambda)$ 中的每个元素都在引理 4.4 (1) 中的左侧 Weyl 群作用 v^L 下保持不变，因此命题 (3) 得证。□

Let

$$\varsigma_\lambda = \sum_{w\in W_\lambda} (-1)^{\ell(w)} \operatorname{Stab}_-(w), \tag{4.5}$$

表示平均化类。定义

$$\Sigma(\lambda) = \left(v^L \circ T_u(\varsigma_\lambda)\right)_{u,v\in W^\lambda}. \tag{4.6}$$

注意， $T_u(\varsigma_\lambda)$ 并非由 W_λ 固定[2] 。

引理 4.6. 对任意 $w \in W_\lambda$ 和 u、 $v \in W^\lambda$，我们有

(1) $T_w(\varsigma_\lambda) = \varsigma_\lambda$;

[1] *loc. cit.* 中的公式是针对 $QH^*_T(G/P)$ 陈述的，而整个设定适用于所有 G-簇。[2]利用 [MNS22 定理 4.3] 和 [AMSS17 命题 9.7], ，我们可以证明，对于任意 $s_i \in W_\lambda$，$s^L_i(\varsigma_\lambda) = \frac{\hbar+\alpha_i}{\hbar-\alpha_i}\varsigma_\lambda$。

(2) $\Sigma(\lambda)_{u,v} = v^L\left(\sum_{w\in uW_\lambda}(-1)^{\ell(w)}\operatorname{Stab}_-(w^{-1})\right)$.

证明。两个陈述都可直接由引理 3.7 得出，并且对于任意 $u, w \in W$，$\ell(wu^{-1}) \equiv \ell(w) + \ell(u) \mod 2$。□

定义对角矩阵

$$\Xi(\lambda) = \operatorname{diag}\left(u\lambda\right)_{u\in W^\lambda}. \tag{4.7}$$

作为定理 3.2 的一个应用，我们得到以下关键命题。

命题 4.7. 对任意 $\lambda \in X^*(T)_\pm$，我们有

$$\Theta(\lambda) * \Sigma(\lambda) = \Sigma(\lambda) * \Xi(\lambda), \tag{4.8}$$

其中，矩阵的乘积按量子乘积计算。

证明. 我们先比较两边的 (1, 1) 项。根据定义，

$$\begin{aligned}
&(\Theta(\lambda) * \Sigma(\lambda))_{1,1}\\
&= \sum_{w\in W^\lambda} \Theta(\lambda)_{1,w} * \Sigma(\lambda)_{w,1}\\
&= \Theta(\lambda)_{1,1} * \Sigma(\lambda)_{1,1} + \sum_{\alpha\in R^+\setminus R_\lambda^+} \Theta(\lambda)_{1,\overline{s_\alpha}} * \Sigma(\lambda)_{\overline{s_\alpha},1}\\
&= \sum_{w\in W_\lambda} (-1)^{\ell(w)}\Delta_\lambda * \operatorname{Stab}_-(w) + \hbar \sum_{\alpha\in R^+\setminus R_\lambda^+} \frac{\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle}{1-q^{\alpha^\vee}} \sum_{w\in W_\lambda} (-1)^{\ell(w)} \operatorname{Stab}_-(ws_\alpha)\\
&= \lambda\cdot\varsigma_\lambda = \lambda\cdot\Sigma(\lambda)_{1,1}.
\end{aligned}$$

这里，第三个等号用到了引理 4.6 (1) 中的等式 $T_{\overline{s_\alpha}}(\varsigma_\lambda) = T_{s_\alpha}(\varsigma_\lambda)$，以及事实 $(-1)^{\ell(s_\alpha)} = -1$。第四个等号由 (3.3) 以及以下事实得出：(i) 对任意 $w \in W_\lambda$，$w(\lambda) = \lambda$；(ii) 对每个 $\alpha \in R_\lambda^+$，$\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle = 0$；(iii) 对每个 $w \in W_\lambda$ 和 $\alpha \in R^+ \setminus R_\lambda^+$，$w\alpha > 0$。

对于一般的 $u, v \in W^\lambda$，将 $v^L \circ T_u$ 应用于上述等式，可得

$$\begin{aligned}
v(\lambda)\cdot\Sigma(\lambda)_{u,v} = v^L\circ T_u(\lambda\cdot\Sigma(\lambda)_{1,1}) &= v^L\circ T_u\Big(\sum_{w\in W^\lambda}\Theta(\lambda)_{1,w} * \Sigma(\lambda)_{w,1}\Big)\\
&= \sum_{w\in W^\lambda} \Theta(\lambda)_{u,\overline{uw}} * \Sigma(\lambda)_{\overline{uw},v}\\
&= \sum_{w\in W^\lambda} \Theta_{u,w}(\lambda) * \Sigma(\lambda)_{w,v}\\
&= (\Theta(\lambda) * \Sigma(\lambda))_{u,v}.
\end{aligned}$$

这里，第二个等号由引理 4.4、4.5、4.6 和定理 3.2 得出。至此命题得证。□

例 4.8。设 $G = SL(2,\mathbb{C})$，并采用例 3.3 中的相同记号。于是命题 4.7 给出

$$\begin{bmatrix} \Delta_\varpi & \frac{-\hbar}{1-q} \\ \frac{-\hbar}{1-q^{-1}} & \Delta_{-\varpi} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \operatorname{Stab}_-(\mathrm{id}) & s^L\operatorname{Stab}_-(\mathrm{id}) \\ -\operatorname{Stab}_-(s) & -s^L\operatorname{Stab}_-(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Stab}_-(\mathrm{id}) & s^L\operatorname{Stab}_-(\mathrm{id}) \\ -\operatorname{Stab}_-(s) & -s^L\operatorname{Stab}_-(s) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \varpi & \\ & -\varpi \end{bmatrix}$$

下一个引理适用于任意域 $\mathbb{F}$ 上的交换代数。

引理 4.9. 设 Θ,Σ 是阶数为 m 、元素属于 $\mathbb{F}$-代数 $\mathcal{A}$ 的方阵，并且 $\Xi=\mathrm{diag}(a_1,\dots,a_m)$，其中 $a_1,\dots,a_m$ 是 $\mathbb{F}$ 中互不相同的元素。假设

$$\Theta\cdot\Sigma=\Sigma\cdot\Xi.$$

如果 Σ 的每一列至少有一个单位，那么 $\det(\Sigma)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的单位。

证明。假设 $\det(\Sigma)$ 不是 $\mathcal{A}$ 中的单位。那么存在一个包含 $\det(\Sigma)$ 的极大理想 $\mathfrak{m}$ ，使得 $\overline{\mathcal{A}}:=\mathcal{A}/\mathfrak{m}$ 是一个域，且 $\det(\Sigma)=0\in\overline{\mathcal{A}}$。注意，根据我们的假设，$\overline{\Sigma}$ 的列都是非零向量；因此，根据假设，它们是 $\overline{\Theta}$ 对应于不同特征值的特征向量。因此，它们构成 $\overline{\mathcal{A}}^m$ 的一组基。换言之，$\det(\Sigma)=\det(\overline{\Sigma})$ 可逆，由此得到矛盾。□

记 $\mathbb{F}=\mathrm{Frac}H^*_{\mathbb{T}}(\mathrm{pt})((\hbar^{-1}))$，并考虑如下 $\mathbb{F}$-代数

$$\mathcal{A}=QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})\otimes_{H^*_{\mathbb{T}}(\mathrm{pt})}\mathbb{F}. \tag{4.9}$$

命题 4.10。对于任意 $\lambda\in X^*(T)_{\pm}$，行列式 $\det\Sigma(\lambda)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的单位。

证明。对于任意 $v\in W^\lambda$，由 [AMSS17、命题 9.7 和引理 7.3], ，我们有

$$\Sigma(\lambda)_{1,v}=(-1)^{\dim\mathcal{B}}\hbar^{\dim\mathcal{B}}+\big(\text{terms of lower degrees in }\hbar\big),$$

因此，它是 $\mathcal{A}$ 中的一个单位元。于是，$\Sigma(\lambda)$ 的每一列在 $\mathcal{A}$ 中都包含一个单位元（位于第一行）。此外，$\Xi(\lambda)$ 的对角项是 $\mathbb{F}$ 中互不相同的元素。由引理 4.9，$\det\Sigma(\lambda)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个单位元。□

命题 4.11。对于任意 $\lambda\in X^*(T)_{\pm}$ 和 $k\in\mathbb{Z}_{>0}$，在 $QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$ 中，我们有

$$\mathrm{tr}\left(\Theta(\lambda)^k\right)=\sum_{u\in W^\lambda}(u\lambda)^k. \tag{4.10}$$

证明。由命题 4.10，$\det\Sigma(\lambda)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个单位元，因此 $\Sigma(\lambda)$ 可逆。于是，由命题 4.7，我们在 $\mathcal{A}$ 中有以下关系：

$$\mathrm{tr}\left(\Theta(\lambda)^k\right)=\mathrm{tr}\left(\Sigma(\lambda)^{-1}*\Theta(\lambda)^k*\Sigma(\lambda)\right)=\mathrm{tr}\left(\Xi(\lambda)^k\right)=\sum\nolimits_{u\in W^\lambda}(u\lambda)^k.$$

注意到存在一个自然嵌入 $QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})\hookrightarrow QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})\otimes_{H_{\mathbb{T}}(\mathrm{pt})}\mathbb{F}=\mathcal{A}$，且等式 (4.10) 两边的取值都在 $QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$ 中，故结论成立。□

4.2. 定理 4.1 的证明。根据命题 4.11，所有 $\mathcal{R}^k_\lambda$ 都属于 π 的核。一旦我们证明它们生成整个核，证明就完成了。以下变形原理是我们论证中的关键要素，其证明类似于 Siebert 和 Tian [ST97] 的一个引理。

命题4.12（变形原理）。设 $\{\mathcal{R}_i\}_{i\in I}$ 是 $\ker\pi$ 中的一个元素族。假设对所有 $i\in I$

$$\mathcal{R}_i=f_i(D_\mu)-f_i(\mu)\mod\hbar,$$

其中 $\{f_i\}_{i\in I}$ 生成 $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}^*)^W$。那么 $\ker\pi$ 由 $\{\mathcal{R}_i\}_{i\in I}$ 生成。

证明。我们有如下图

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}})[\hbar][\mu,D_\mu]_\mu & \xrightarrow{\pi} & QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})\\ \downarrow & & \downarrow\\ \mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}})[\mu,D_\mu]_\mu & \xrightarrow[\varphi]{} & QH^*_T(T^*\mathcal{B}),\end{array}$$

其中，竖直映射是模 $\hbar$。由于 $T^*\mathcal{B}$ 是一个同胚辛簇，量子乘积与等变乘积在模 $\hbar$ [BMO11] 下重合。因此，由命题 2.1 和同构 (2.5)，我们得到

$$\ker\varphi = \left\langle f(D_\mu) - f(\mu) \mid f(\mu) \in \mathrm{Sym}(\mathfrak{t}^*)^W \right\rangle.$$

令 J 为由 $\{\mathcal{R}_i\}_{i\in I}$ 生成的理想。假设 $J \neq \ker\pi$。取 γ 为一个次数最小的元素，使得 $\gamma \in \ker\pi \setminus J$，其中次数按 $\hbar$ 计算。根据上述图的交换性，

$$\varphi(\gamma \bmod \hbar) = \pi(\gamma) \bmod \hbar = 0.$$

注意，根据我们的假设，$J/\langle\hbar\rangle = \ker\varphi$。我们可以写成

$$\gamma = \gamma_1 + \hbar\gamma_2$$

对于 $\gamma_1 \in J$，以及某个 $\hbar$-次数小于 γ 的 $\gamma_2 \notin J$。由于 $J \subset \ker\pi$，我们有 $\hbar\pi(\gamma_2) = 0$，这意味着 $\pi(\gamma_2) = 0$。因此，$\gamma_2 \in \ker\pi \setminus J$，且 γ_2 的 $\hbar$-次数小于 γ 的次数，这与 γ 的选取矛盾。□

定理 4.1 的证明。首先，根据命题 4.11，我们有 $\mathcal{R}^k_\lambda \in \ker\pi$。模去 $\hbar$ 后，矩阵 $\Theta(\lambda)$ 变为对角矩阵，其对角元为 $D_{u\lambda}$，其中 $u \in W^\lambda$。因此，

$$\mathcal{R}^k_\lambda = \sum_{u\in W^\lambda} (D_{u\lambda})^k - \sum_{u\in W^\lambda} (u\lambda)^k \mod \hbar.$$

根据 [Hum78, 第 23 节，1], 对于所有支配权 λ，$\sum_{u\in W^\lambda}(u\lambda)^k$ 这些多项式张成空间 $\mathrm{Sym}(\mathfrak{t}^*)^W$。因此，所有 $\mathcal{R}^k_\lambda$ 构成的族满足变形原理 4.12 的条件。由此可得，所有 $\mathcal{R}^k_\lambda$ 生成了 π 的核。□

4.3. 经典 Calogero–Moser 映射的显式公式。本小节将给出经典三角 Calogero–Moser 映射 (2.8) 的显式公式。回顾一下，对于任意余根 $\alpha^\vee$，$q^{\alpha^\vee}$ 自然是定义在 $T^\vee_{\mathrm{reg}}$ 上的函数，而 (2.2) 中定义的 p_λ 是定义在 $\mathfrak{t}$ 上的线性函数。两者都可以自然地视为定义在 $T^\vee_{\mathrm{reg}} \times \mathfrak{t}$ 上的函数。

令 $Y(\lambda)$ 为将 (4.3) 中的 $\Delta_{u\lambda}$ 替换为 $p_{u\lambda}$ 后，从 $\Theta(\lambda)$ 得到的矩阵。由命题 2.2 (3)，立即可得

推论 4.13。我们有

$$\eta^{\mathrm{cl}}_{\mathrm{CM},\hbar}\left(\sum_{u\in W^\lambda} (u\lambda)^k\right) = \mathrm{tr}(Y(\lambda)^k) \in \mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}} \times \mathfrak{t})[\hbar].$$

注 4.14。P. Etingof 在私人通信中告诉我们，我们的矩阵 $Y(\lambda)$ 可视为 Dunkl 算子在 $\mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}} \times \mathfrak{t})[\hbar] \rtimes \mathbb{C}[W]$ 的基 W 下的矩阵，前提是 λ 严格占优（即 W_λ 是平凡的）。在有理情形（与我们的情形类似）中，这种方法给出了有理 Calogero–Moser 映射在经典和量子情形下的已知显式公式，该公式基于 Lax 对 [SS93] 得出。在三角情形（即我们的情形）中，推论 4.13 可转化为以下无迹公式：

$$\mathrm{tr}\left(\sum_{w\in W} \mathrm{Dun}^k_{w\lambda} - \sum_{w\in W} w\,\mathrm{Dun}^k_\lambda\, w^{-1}\right) = 0. \tag{4.11}$$

回顾一下，Dun_λ 是式 (2.10) 中定义的经典三角 Dunkl 算子。值得注意的是，三角 Dunkl 算子和魏尔群元素生成退化 Hecke 代数 $\mathcal{H}_\hbar$，因此与有理情形不同，式 (4.11) 中的两个求和并不相等。

为了将我们的结果与上述公式联系起来，需要注意的是

$$\operatorname{tr}(Y(\lambda)^k) = \operatorname{tr}(\mathrm{Dun}_\lambda^k) = \frac{1}{|W|}\operatorname{tr}\left(\sum_{w\in W} w\,\mathrm{Dun}_\lambda^k\, w^{-1}\right).$$

另一方面，将 [EFMV11，引理 2.2] 推广到三角情形，我们可以得出 $\sum_{w\in W}\mathrm{Dun}_{w\lambda}^k$ 是 $\eta^{\mathrm{cl}}_{\mathrm{CM},\hbar}\left(\sum_{w\in W}(w\lambda)^k\right)$ 的标量矩阵。因此，

$$\eta^{\mathrm{cl}}_{\mathrm{CM},\hbar}\left(\sum_{w\in W}(w\lambda)^k\right) = \frac{1}{|W|}\operatorname{tr}\left(\sum_{w\in W}\mathrm{Dun}_{w\lambda}^k\right).$$

推论 4.13 因而等价于 (4.11)。值得探讨的是，能否对 (4.11) 给出直接证明。此外，需要注意的是，无迹公式 (4.11) 在量子情形下并不成立。

在实际计算中，我们的矩阵规模较小，且只涉及矩阵幂，因此无需将 $|W|$ 阶方阵代入对称多项式。这显著降低了计算复杂度。

例 4.15（哈密顿量）。设 $\lambda \in X^*(T)_+$ 严格占优，且 W_λ 是平凡的。通过直接计算，我们得到

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left(Y(\lambda)^2\right) &= \sum_{w\in W} p_{w\lambda}^2 + \hbar^2 \sum_{w\in W}\sum_{\alpha>0}\left\langle\lambda,\alpha^\vee\right\rangle^2 \frac{1}{\left(1-q^{w\alpha^\vee}\right)\left(1-q^{-w\alpha^\vee}\right)}\\ &= \sum_{w\in W} p_{w\lambda}^2 - \hbar^2\sum_{\alpha>0}\left(\sum_{w\in W}\left\langle w\lambda,\alpha^\vee\right\rangle^2\right)\frac{1}{\left(q^{\alpha^\vee/2}-q^{-\alpha^\vee/2}\right)^2}.\end{aligned}$$

令 $C \in \mathrm{Sym}^2(\mathfrak{t}^*)$ 为非退化二次型，它在相差一个标量的意义下是唯一的。因此，

$$0 \neq \sum_{w\in W}(w\lambda)^2 = c_\lambda \cdot C \in \mathrm{Sym}^2(\mathfrak{t}^*),$$

对某个常数 c_λ。于是我们可以将上式改写为

$$c_\lambda \cdot \left(C(p) - \hbar^2 \sum_{\alpha>0}\frac{C(\alpha^\vee,\alpha^\vee)}{\left(q^{\alpha^\vee/2}-q^{-\alpha^\vee/2}\right)^2}\right).$$

推论 4.13 表明

$$\eta^{\mathrm{cl}}_{\mathrm{CM},\hbar}(C) = C(p) - \hbar^2\sum_{\alpha>0}\frac{C(\alpha^\vee,\alpha^\vee)}{\left(q^{\alpha^\vee/2}-q^{-\alpha^\vee/2}\right)^2},$$

它是经典 Calogero–Moser 系统 (2.8) 的哈密顿量。

5. Computation for Classical Types

本节中，我们计算经典型群 G 的 $QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$。

5.1. A_{n-1}型。回顾一下，在 A_{n-1}型中，$G = SL(n,\mathbb{C})$。虽然为了方便进行ˆ计算，我们更倾向于使用 GL记号。令 T 为ˆ$G := GL(n,\mathbb{C})$的对角矩阵子群，并令ˆ$\mathfrak{t}$ 为其李代数。我们记ˆ$\mathbb{G} =$ ˆ$G \times \mathbb{C}^*$ 和ˆ$\mathbb{T} =$ ˆ$T \times \mathbb{C}^*$。仔细检查证明可知，将所有论证中的 $\mathfrak{t}$ 替换为ˆ$\mathfrak{t}$ 后，本文的所有论证对 GL 仍然成立，只需稍作修改。

我们记 $\mathbf{e}_i \in X^*($ $\hat{T}$) 第 i 个对角元素的投影。因此

$$X^*(\hat{T}) = \mathbb{Z}\mathbf{e}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\mathbf{e}_n.$$

记 $\{\mathbf{e}_j^\vee\}$ 为 $\{\mathbf{e}_i\}$ 的对偶基。简单余根为

$$\alpha_i^\vee = \mathbf{e}_i^\vee - \mathbf{e}_{i+1}^\vee \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

记 $q_i = q^{\mathbf{e}_i^\vee}$。注意，对于 $i < j$，有 $q_i/q_j = q^{\mathbf{e}_i^\vee - \mathbf{e}^\vee_j} \in \mathbf{Eff}(\mathcal{B})$。沿用经典舒伯特演算中的记号（例如 [AF]），记

$$x_i = D_{-\mathbf{e}_i}, \qquad t_i = -\mathbf{e}_i.$$

我们还记

$$\chi_i = \Delta_{-\mathbf{e}_i} = x_i + \hbar \sum_{a<i} \frac{q_a/q_i}{1 - q_a/q_i} - \hbar \sum_{i<b} \frac{q_i/q_b}{1 - q_i/q_b}.$$

相对于有序集合 $W^{-\mathbf{e}_1} = \{\mathbf{id}\ s_1、\ \ldots\ldots、\ s_{n-1} \cdots s_1\}$ 直接计算可得

$$M(\chi) := \Theta(-\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} \chi_1 & \frac{\hbar}{1-q_1/q_2} & \frac{\hbar}{1-q_1/q_3} & \cdots & \frac{\hbar}{1-q_1/q_n} \\ \frac{\hbar}{1-q_2/q_1} & \chi_2 & \frac{\hbar}{1-q_2/q_3} & \cdots & \frac{\hbar}{1-q_2/q_n} \\ \frac{\hbar}{1-q_3/q_1} & \frac{\hbar}{1-q_3/q_2} & \chi_3 & \cdots & \frac{\hbar}{1-q_3/q_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\hbar}{1-q_n/q_1} & \frac{\hbar}{1-q_n/q_2} & \frac{\hbar}{1-q_n/q_3} & \cdots & \chi_n \end{bmatrix}. \tag{5.1}$$

由命题 4.11 的证明，我们在 $\mathcal{A}$ 上有如下恒等式

$$\Sigma(-\mathbf{e}_1)^{-1} * M(\chi) * \Sigma(-\mathbf{e}_1) = \Xi(-\mathbf{e}_1) = \mathrm{diag}(t_1, \dots, t_n).$$

设 y 为一个不定元。因此有

$$\det\Big(y1_n + M(\chi)\Big) = \prod_{i=1}^{n} (y + t_i).$$

展开特征多项式

$$\det\Big(y1_n + M(\chi)\Big) = y^n + \mathcal{E}_1(\chi) y^{n-1} + \cdots + \mathcal{E}_{n-1}(\chi) y + \mathcal{E}_n(\chi).$$

因此，以下关系在 $QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$中成立，

$$\mathcal{E}_k(\chi) = e_k(t)$$

其中， e_k 是第 k个初等对称多项式。由于 W不变多项式代数由第 k个初等对称多项式生成。根据命题4.12，我们可以得出量子上同调的以下表示。

定理 5.1。对于类型 A_{n-1}，我们有

$$QH^*_{\hat{\mathbb{T}}}(T^*\mathcal{B}) = \frac{\mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}})[\hbar, x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n]}{\langle \mathcal{E}_k(\chi) - e_k(t), k = 1, \dots, n \rangle}. \tag{5.2}$$

因此 $\hat{}$ y，因为 T是由关系$\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_n = 0$从 T中截取的，我们可以得出 t

$$QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B}) = QH^*_{\hat{\mathbb{T}}}(T^*\mathcal{B}) / \langle e_1(t) \rangle .$$

接下来，我们将给出 $\mathcal{E}_k(\chi)$ 的组合公式。令 K为 $\{1, \dots, n\}$ 中阶为 k的子集。 K 的一个匹配是一个映射 $\pi : K \to K$，满足 $\pi^2 =$id，即 K上的一个对合。若匹配 π 对应的对合 π 没有不动点，则称其为完美匹配。记

$$J(\pi) = \prod_{\pi(i)=i} \chi_i \quad \text{and} \quad V(\pi) = \prod_{\pi(i)=j>i} \frac{\hbar^2 q_i q_j}{(q_i - q_j)^2}.$$

注意，$\frac{q_iq_j}{(q_i-q_j)^2} = \frac{q_i/q_j}{(1-q_i/q_j)^2} \in \mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}})$。

定理 5.2. 对任意 $1 \le k \le n$,

$$\mathcal{E}_k(\chi) = \sum_K \sum_\pi J(\pi)V(\pi), \tag{5.3}$$

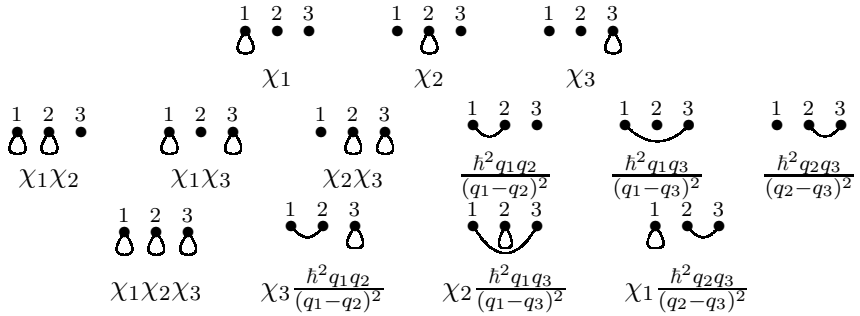
其中，对 $\{1,\dots,n\}$的所有 k-子集 K 求和，并对 K的匹配 π 求和。

上述定理的证明涉及一些从组合学角度来看很有意思的等式。细节见附录 B。

例 5.3. 对于 $n=3$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1(\chi) &= \chi_1+\chi_2+\chi_3\\
\mathcal{E}_2(\chi) &= \chi_1\chi_2+\chi_1\chi_3+\chi_2\chi_3+\frac{\hbar^2q_1q_2}{(q_1-q_2)^2}+\frac{\hbar^2q_1q_3}{(q_1-q_3)^2}+\frac{\hbar^2q_2q_3}{(q_2-q_3)^2}\\
\mathcal{E}_3(\chi) &= \chi_1\chi_2\chi_3++\chi_3\frac{\hbar^2q_1q_2}{(q_1-q_2)^2}+\chi_2\frac{\hbar^2q_1q_3}{(q_1-q_3)^2}+\chi_1\frac{\hbar^2q_2q_3}{(q_2-q_3)^2}.
\end{aligned}$$

我们可以通过如下方式绘制匹配，来说明上面的每一项



5.2. B_n 型与 C_n型。权格自然地识别为

$$\mathbb{Z}\mathbf{e}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\mathbf{e}_n$$

其简单余根集合为

$$\alpha_i^\vee = \mathbf{e}_i^\vee - \mathbf{e}_{i+1}^\vee \quad (i=1,\dots,n-1) \qquad \alpha_n^\vee = p\mathbf{e}_n^\vee$$

其中，$p=2$ 对应 B_n 型，$p=1$ 对应 C_n型。我们记

$$q_i = q^{\mathbf{e}_i^\vee}, \qquad x_i = D_{-\mathbf{e}_i}, \qquad \chi_i = \Delta_{-\mathbf{e}_i}, \qquad t_i = -\mathbf{e}_i.$$

相对于有序集合

$$W^{-\mathbf{e}_1} = \big\{\mathrm{id}, s_1, \dots, s_n\cdots s_1, s_{n\text{-}1}s_n\cdots s_1, \dots, s_1\cdots s_{n\text{-}1}s_n\cdots s_1\big\},$$

我们有

$$M(\chi) := \Theta(-\mathbf{e}_1) = \left[\begin{array}{ccc|ccc}
\chi_1 & \cdots & \frac{\hbar}{1-q_1/q_n} & \frac{\hbar}{1-q_1q_n} & \cdots & \frac{p\hbar}{1-q_1^p}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
\frac{\hbar}{1-q_n/q_1} & \cdots & \chi_n & \frac{p\hbar}{1-q_n^p} & \cdots & \frac{\hbar}{1-q_1q_n}\\
\hline
\frac{\hbar}{1-q_n^{-1}q_1^{-1}} & \cdots & \frac{p\hbar}{1-q_n^{-p}} & -\chi_n & \cdots & \frac{\hbar}{1-q_1/q_n}\\
\vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\frac{p\hbar}{1-q_1^{-p}} & \cdots & \frac{\hbar}{1-q_1^{-1}q_n^{-1}} & \frac{\hbar}{1-q_n/q_1} & \cdots & -\chi_1
\end{array}\right]. \tag{5.4}$$

这里，在右上（分别为左下）分块中，当 $i+j\neq n+1$ 和 $\frac{p\hbar}{1-q_i^p}$ 时，(i,j) 项为 $\frac{\hbar}{1-q_iq_{n+1-j}}$（分别为 $\frac{\hbar}{1-q_{n+1-i}^{-1}q_j^{-1}}$）；否则为 $\frac{p\hbar}{1-q_j^{-p}}$。与类型 A 的情形类似，我们有

$$\det\Big(y1_{2n}+M(\chi)\Big)=\prod_{i=1}^{n}(y^2-t_i^2).$$

展开特征多项式

$$\det\Big(y1_{2n}+M(\chi)\Big)=y^{2n}+\mathcal{E}_1(\chi)y^{2n-1}+\cdots+\mathcal{E}_{2n-1}(\chi)y+\mathcal{E}_{2n}(\chi).$$

因此，对于每个 $k\in\{1,\dots,n\}$，$\mathcal{E}_{2k-1}(\chi)=0$，且以下关系在 $QH_{\mathbb{T}}^*(T^*\mathcal{B})$ 中成立，

$$\mathcal{E}_{2k}(\chi)=(-1)^k e_k(t^2).$$

由于 W-不变多项式代数由平方的第 k 个初等对称多项式生成。根据命题4.12中的变形原理，我们可以得出以下量子上同调的表示。

定理 5.4. 对于 B_n 或 C_n 型的 G，我们有

$$QH_{\mathbb{T}}^*(T^*\mathcal{B})=\frac{\mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}})[\hbar,x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n]}{\langle\mathcal{E}_{2k}(\chi)-(-1)^k e_k(t^2),k=1,\dots,n\rangle}. \tag{5.5}$$

5.3. D_n 型。权格可自然地表示为

$$\left\{\lambda_1\mathbf{e}_1+\cdots+\lambda_n\mathbf{e}_n\;\middle|\;\lambda_i\in\frac{1}{2}\mathbb{Z},\lambda_i-\lambda_j\in\mathbb{Z}.\right\}$$

与简单余根集合

$$\alpha_i^\vee=\mathbf{e}_i^\vee-\mathbf{e}_{i+1}^\vee\quad(i=1,\dots,n-1)\qquad\alpha_n^\vee=\mathbf{e}_{n-1}^\vee+\mathbf{e}_n^\vee.$$

我们记

$$q_i=q^{\mathbf{e}_i^\vee},\qquad x_i=D_{-\mathbf{e}_i},\qquad\chi_i=\Delta_{-\mathbf{e}_i},\qquad t_i=-\mathbf{e}_i.$$

相对于有序集合

$$W^{-\mathbf{e}_1}=\big\{\mathrm{id},s_1,\dots,s_{n\text{-}1}s_{n\text{-}2}\cdots s_1,s_ns_{n\text{-}2}\cdots s_1,s_n\cdots s_1,s_{n\text{-}2}s_n\cdots s_1,\dots,s_1\cdots s_{n\text{-}2}s_n\cdots s_1\big\},$$

我们有

$$M(\chi):=\Theta(-\mathbf{e}_1)=\left[\begin{array}{ccc|ccc}\chi_1&\cdots&\frac{\hbar}{1-q_1/q_n}&\frac{\hbar}{1-q_1q_n}&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&&\vdots\\\frac{\hbar}{1-q_n/q_1}&\cdots&\chi_n&0&\cdots&\frac{\hbar}{1-q_nq_1}\\\hline\frac{\hbar}{1-q_n^{-1}q_1^{-1}}&\cdots&0&-\chi_n&\cdots&\frac{\hbar}{1-q_1/q_n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\frac{\hbar}{1-q_1^{-1}q_n^{-1}}&\frac{\hbar}{1-q_n/q_1}&\cdots&-\chi_1\end{array}\right]. \tag{5.6}$$

这里，在右上（分别为左下）分块中，当 $i+j\neq n+1$ 时，(i,j) 项由 $\frac{\hbar}{1-q_iq_{n+1-j}}$（分别为 $\frac{\hbar}{1-q_{n+1-i}^{-1}q_j^{-1}}$）给出，否则为 0。与 A 型的情况类似，我们有

$$\det\Big(y1_{2n}+M(\chi)\Big)=\prod_{i=1}^{n}(y^2-t_i^2).$$

展开特征多项式

$$\det\left(y1_{2n}+M(\chi)\right)=y^{2n}+\mathcal{E}_1(\chi)y^{2n-1}+\cdots+\mathcal{E}_{2n-1}(\chi)y+\mathcal{E}_{2n}(\chi).$$

因此，对于每 个 $k\in\{1,\ldots,n\}$，$\mathcal{E}_{2k-1}(\chi)=0$，且在 $QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$中有如下关系：

$$\mathcal{E}_{2k}(\chi)=(-1)^k e_k(t^2).$$

对于类型 D_n，多项式 $e_n(t)$也具有 W-不变性。特别地，

$$(-1)^n\mathcal{E}_{2n}(\chi)=(-1)^n\det M(\chi)=e_n(t^2)=e_n(t)^2.$$

考虑

$$A(\chi)=\begin{bmatrix}\chi_1 & \frac{\hbar(1-q_1)(1+q_2)}{(1-q_1/q_2)(1-q_1q_2)}&\cdots&\frac{\hbar(1-q_1)(1+q_n)}{(1-q_1/q_n)(1-q_1q_n)}\\ \frac{\hbar(1-q_2)(1+q_1)}{(1-q_2/q_1)(1-q_1q_2)}&\chi_2&\cdots&\frac{\hbar(1-q_2)(1+q_n)}{(1-q_2/q_n)(1-q_2q_n)}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \frac{\hbar(1-q_n)(1+q_1)}{(1-q_n/q_1)(1-q_1q_n)}&\frac{\hbar(1-q_n)(1+q_2)}{(1-q_n/q_2)(1-q_2q_n)}&\cdots&\chi_n\end{bmatrix}.\tag{5.7}$$

引理 5.5。我们有

$$\det M(\chi)=\det A(\chi)\cdot\det A(-\chi).$$

证明。记

$$L=\left[\begin{array}{ccc|c}1&&&-q_1^{-1}\\&\ddots&&\\&&1&-q_n^{-1}\\\hline -q_1&&&-1\\&\ddots&&\\&&-q_n&-1\end{array}\right],\qquad R=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&&&q_1^{-1}&&\\&\ddots&&&\ddots&\\&&1&&&q_n^{-1}\\\hline &&q_n&&&-1\\q_1&&&-1&&\end{array}\right].$$

通过直接计算，我们得到

$$\frac{1}{2}LM(\chi)R=\begin{bmatrix}A(\chi)&\\&A(-\chi)^{\mathfrak{t}}\end{bmatrix}.$$

注意到

$$\frac{1}{2}RL=\left[\begin{array}{ccc|ccc}&&&&&-q_1^{-1}\\&&&&&\\&&&&-q_n^{-1}&\\\hline &&q_n&&&\\&&&&&\\q_1&&&&&\end{array}\right]$$

其行列式为 1。因此，我们得到所述结论。 □

考虑.....的展开

$$\det A(\chi)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(-1)^{\ell(\sigma)}m_\sigma,\qquad m_\sigma=A(\chi)_{1\sigma(1)}\cdots A(\chi)_{n\sigma(n)}.$$

引理 5.6。我们有

$$\det A(\chi)=\sum_{\sigma}(-1)^{\ell(\sigma)}m_\sigma$$

w其中 σ 遍历所有非平凡循环长度均为偶数的置换。

证明。若 σ 是一个含有非平凡奇环的置换，我们通过反转 σ 中包含最小索引的唯一奇环来定义 σ' 。由于对应关系 $\sigma \mapsto \sigma'$ 是一个对合，只需证明

$$m_\sigma + m_{\sigma'} = 0.$$

不失一般性，我们可以假设奇环为 $(1 \cdots k)$，其中 k 为奇数。注意

$$\begin{aligned} A(\chi)_{12}A(\chi)_{23}\cdots A(\chi)_{k1} &= \prod_i \frac{\hbar(1-q_i)(1+q_{i+1})}{(1-q_i/q_{i+1})(1-q_iq_{i+1})} \\ &= \prod_i \frac{\hbar(1-q_i^2)q_i}{(q_{i+1}-q_i)(1-q_iq_{i+1})} \\ &= (-1)^k A(\chi)_{1k}A(\chi)_{21}\cdots A(\chi)_{k,k-1}. \end{aligned}$$

其中指标被视为 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 的元素。因此我们可以推出 $m_\sigma + m_{\sigma'} = 0$。 □

特别地，我们有

$$\det A(\chi) = \det\big(-A(-\chi)\big) = (-1)^n \det A(-\chi).$$

结合引理 5.5，我们有

$$\big(\det A(\chi)\big)^2 = (-1)^n \det\big(M(\chi)\big) = e_n(t)^2.$$

注意，$e_n(t) \in H^*_G(\mathrm{pt})$，并且我们可以将 $\det A(\chi)$ 视为 $QH^*_{\mathbb{G}}(T^*\mathcal{B})$ 的一个元素，见注 4.3。由于根据命题 2.2 (3)，$QH^*_{\mathbb{G}}(T^*\mathcal{B})$ 是一个整环，因此我们有 $\det A(\chi) = \pm e_n(t)$。又由于 $\det A(\chi) = e_n(x) \bmod \hbar$，唯一的可能性是 $\det A(\chi) = e_n(t)$。

定理 5.7。对于 G 型的 D_n，我们有

$$QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B}) = \frac{\mathcal{O}(T^\vee_{\mathrm{reg}})[\hbar, x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n]}{\left\langle \begin{array}{l} \mathcal{E}_{2k}(\chi) - (-1)^k e_k(t^2), k = 1, \ldots, n-1 \\ \det A(\chi) - e_n(t) \end{array} \right\rangle}. \tag{5.8}$$

Appendix A. Toda limit

$\mathcal{B}$ 的等变量子上同调可以通过如下取 Toda 极限从 $T^*\mathcal{B}$的等变量子上同调得到。

定义 A.1。类 $\gamma \in QH^*_{\mathbb{G}}(T^*\mathcal{B})$ 的 Toda 极限定义为

$$\lim^{\mathrm{td}} \gamma = \lim_{\hbar\to\infty} \gamma(\hbar, \hbar^{-2\rho}q) \in QH^*_G(\mathcal{B}),$$

其中，$\gamma(\hbar, \hbar^{-2\rho}q)$ 表示通过代入 γ 所得到的类

$$q^\beta \mapsto \hbar^{-\langle 2\rho,\beta\rangle} q^\beta.$$

当 $\gamma \in QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$ 时，$\gamma \in QH^*_T(\mathcal{B})$ 也称为 Toda 极限。

命题 A.2（[BMO11，命题 8.1]）。对于任意两个 Toda 极限均收敛的类 γ_1、$\gamma_2 \in QH^*_{\mathbb{G}}(T^*\mathcal{B})$，我们有

$$\big(\lim^{\mathrm{td}} \gamma_1\big) * \big(\lim^{\mathrm{td}} \gamma_2\big) = \lim^{\mathrm{td}} (\gamma_1 * \gamma_2)$$

如果我们将 $\mathbb{G}$ 替换为 $\mathbb{T}$，这些结论也成立。

注 A.3. [BMO11] 中的命题 8.1 仅陈述了 γ_1 为除子的情形。不过，其中的证明在一般情况下也成立。这也可由 $QH^*_{\mathbb{G}}(T^*\mathcal{B})$由除子生成这一事实推出。

取 Toda 极限，我们可以从 $QH^*_{\mathbb{T}}(T^*\mathcal{B})$得到等变上同调$QH^*_T(\mathcal{B})$的环表示。下文将讨论经典型 $\mathcal{B}$ 的这种表示，并将其与 Kim [Kim99]利用 Langlands 对偶李群的 Toda 格的运动积分给出的优美描述进行比较。

令类型为 A_{n-1}。注意 $\rho = (n-1)\mathsf{e}_1 + (n-2)\mathsf{e}_2 + \cdots + \mathsf{e}_{n-1}$. 我们将（5.1）共轭为

$$\operatorname{diag}\left(1, -\hbar, \ldots, (-\hbar)^{n-1}\right).$$

注意

$$\lim{}^{\mathrm{td}} \frac{(-1)^{i-j}\hbar^{1+i-j}}{1-q_i/q_j} = \lim_{\hbar\to\infty} \frac{(-1)^{j-i}\hbar^{1+i-j}}{1-\hbar^{2(i-j)}q_i/q_j} = \begin{cases} q_j/q_{j+1}, & i = j+1, \\ -1, & j = i+1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

取 Toda 极限后，我们得到以下矩阵

$$\begin{bmatrix} x_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ q_1/q_2 & x_2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2/q_3 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{bmatrix}. \tag{A.1}$$

根据命题A.2，这涵盖了 Kim99 中 [内 A_{n-1} 类型的 $QH^*_T(\mathcal{B})$ 的表示].

类型 B_n。注 $\rho = (n-\frac{1}{2})\mathsf{e}_1 + (n-\frac{3}{2})\mathsf{e}_2 + \cdots + \frac{1}{2}\mathsf{e}_n$. 我们将 (5.4) 通过共轭变换

$$\operatorname{diag}\left(\hbar^{-n+1/2}, \ldots, \hbar^{-1/2}, \hbar^{1/2}, \ldots, \hbar^{n-1/2}\right).$$

逐项取 Toda 极限，可得到以下矩阵

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} x_1 & 1 & & & & & & & & \\ -q_1/q_2 & x_2 & \ddots & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & & & & & & \\ & & -q_{n-1}/q_n & x_n & & 2 & & & & \\ \hline & & & & -2q_n^2 & -x_n & 1 & & & \\ & & & & & -q_n/q_{n-1} & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & \ddots & -x_2 & 1 & \\ & & & & & & & -q_1/q_2 & -x_1 & \end{array}\right]. \tag{A.2}$$

我们需要以下引理。

引理 A.4（[Mui60]）。三对角矩阵的行列式为

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & x_2 & a_2 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = \sum_{\sigma} \left(\prod_{i=\sigma(i)} x_i \prod_{\sigma(i)=i+1} (-a_i b_i) \right),$$

其中 σ 遍历满足 $|\sigma(i) - i| \le 1$ 的 $\{1, \ldots, n\}$ 上的对合，且该条件对任意 $1 \le i \le n$都成立。

作为推论，对于任意 $1 \le i \le n$，将 (a_i, b_i) 替换为 $(-a_i, -b_i)$ 不会改变三对角矩阵的特征多项式。利用引理 A.4，通过适当重新指定 (A.2) 中的符号，并在必要时重新排列列和行，我们可还原出 $\mathfrak{sp}_n$中 Kim99]得到的矩阵。

类型 C_n。注意 $\rho = n\mathbf{e}_1 + (n-1)\mathbf{e}_2 + \cdots + \mathbf{e}_n$。我们可以通过同一个对角矩阵进行共轭

$$\operatorname{diag}\left(\hbar^{-n+1/2}, \ldots, \hbar^{-1/2}, \hbar^{1/2}, \ldots, \hbar^{n-1/2}\right).$$

由于 p 与类型 B不同，我们得到如下矩阵

$$M = \left[\begin{array}{cccc|cccc} x_1 & 1 & & & & & & \\ -q_1/q_2 & x_2 & \ddots & & & & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & & & & \\ & & -q_{n-1}/q_n & x_n & 1 & & & \\ \hline & & & -q_n & -x_n & 1 & & \\ & & -q_{n-1} & & -q_n/q_{n-1} & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \ddots & -x_2 & 1 \\ -q_1 & & & & & & -q_1/q_2 & -x_1 \end{array}\right]. \tag{A.3}$$

引理 A.5. 多项式 $y\det(y1_{2n} + M)$ 是如下矩阵的特征多项式

$$\left[\begin{array}{cccc|c|cccc} x_1 & -1 & & & & & & & \\ q_1/q_2 & x_2 & \ddots & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & & & & & \\ & & q_{n-1}/q_n & x_n & -1/2 & & & & \\ \hline & & & q_n & 0 & 1/2 & & & \\ \hline & & & & -q_n & -x_n & 1 & & \\ & & & & & -q_n/q_{n-1} & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & -x_2 & 1 \\ & & & & & & & -q_1/q_2 & -x_1 \end{array}\right]. \tag{A.4}$$

证明。这里我们只给出证明概要。通过展开行列式，特征多项式 $\det(y1_{2n} + M)$ 等于

$$q_1 + q_2 \det\begin{bmatrix} y+x_1 & \\ & y-x_1 \end{bmatrix} + q_3 \det\begin{bmatrix} y+x_1 & 1 & & \\ -q_1/q_2 & y+x_2 & & \\ & & y-x_2 & 1 \\ & & -q_1/q_2 & y-x_1 \end{bmatrix} + \cdots$$

将 yq_i 写作

$$\frac{1}{2}(q_i/q_{i+1}) \cdots (q_{n-1}/q_n) q_n (y + x_i) + \frac{1}{2}(q_i/q_{i+1}) \cdots (q_{n-1}/q_n) q_n (y - x_i).$$

由引理 A.4 及繁琐的计算，我们可以得出结论：$y\det(y1_{2n} + M)$ 与矩阵 (A.4) 的特征多项式相同。□

通过对 (A.4) 适当重新赋予符号，并在必要时重新排列列和行，我们可以得到 $\mathfrak{so}_{2n+1}$ 中 Kim99] 在 [中得到的矩阵。

D_n型。注意，$\rho = (n-1)\mathsf{e}_1 + (n-2)\mathsf{e}_2 + \cdots + \mathsf{e}_{n-1}$. 我们可以对角矩阵进行共轭

$$\operatorname{diag}\left(\hbar^{-n+1}, \ldots, -\hbar^{-1}, 1, 1, \hbar, \ldots, \hbar^{n-1}\right).$$

我们得到以下矩阵

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} x_1 & 1 & & & & & & & & \\ -q_1/q_2 & x_2 & \ddots & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & & 1 & & & & \\ & & -q_{n-1}/q_n & x_n & & & 1 & & & \\ \hline & & & -q_{n-1}q_n & & -x_n & 1 & & & \\ & & & & -q_{n-1}q_n & -q_n/q_{n-1} & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & \ddots & -x_2 & 1 & \\ & & & & & & & -q_1/q_2 & -x_1 \end{array}\right]. \tag{A.5}$$

直接展开行列式，不难证明它与该矩阵具有相同的特征多项式

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} x_1 & -1 & & & & & & & & \\ q_1/q_2 & x_2 & \ddots & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & & -1 & & & & \\ & & q_{n-1}/q_n & x_n & & & 1 & & & \\ \hline & & & q_{n-1}q_n & & -x_n & 1 & & & \\ & & & & -q_{n-1}q_n & -q_n/q_{n-1} & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & \ddots & -x_2 & 1 & \\ & & & & & & & -q_1/q_2 & -x_1 \end{array}\right]. \tag{A.6}$$

这是 [Kim99]中 $\mathfrak{so}_{2n}$ 的矩阵。

Appendix B. Proof of Theorem 5.2

对于 A_{n-1}型，魏尔群 W 由对称群 $\mathfrak{S}_n$给出。

引理 B.1. 对于 $n \geq 2$，我们有

$$\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n \\ \sigma(1)=1}} \frac{1}{t_{\sigma(1)}-t_{\sigma(2)}} \cdots \frac{1}{t_{\sigma(n-1)}-t_{\sigma(n)}} \frac{1}{t_{\sigma(n)}-t_{\sigma(1)}} = \begin{cases} \frac{-1}{(t_1-t_2)^2}, & n=2, \\ 0, & n>2. \end{cases} \tag{B.1}$$

证明. 对于 $n=2$，这个断言显然成立。现在假设 $n>2$。只需证明

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \frac{1}{t_{\sigma(1)}-t_{\sigma(2)}} \cdots \frac{1}{t_{\sigma(n-1)}-t_{\sigma(n)}} \frac{1}{t_{\sigma(n)}-t_{\sigma(1)}} = 0 \tag{B.2}$$

对于 $n>2$。事实上，和式 (B.2) 中的每一项在循环 $(12\cdots n)$ 的作用下均保持不变，因此可得 (B.1)。沿着 [FN16], 的思路，我们考虑 $H^*_{\mathbb{T}}(\mathcal{B})$ 中的以下类，

$$\gamma = -\prod_{\substack{i<j \\ j-i\neq 1,n-1}} (x_i - x_j),$$

这里回顾 $x_i = D_{-\mathbf{e}_i}$ 和 $t_i = -\mathbf{e}_i$。根据阿蒂亚–博特局部化定理 [AB84], , 我们有

$$\int_{\mathcal{B}} \gamma = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\gamma|_\sigma}{\prod_{i<j}(t_{\sigma(i)} - t_{\sigma(j)})} \in H^*_{\mathbb{T}}(\mathrm{pt})$$

这恰好是 (B.2) 的左侧。但 $\deg_{\mathbb{C}} \gamma = {}^{n}{}_{(n-1)}{}_{2} \quad - n < \dim \mathcal{B}$, 因此 $\int_{\mathcal{B}} \gamma = 0$。 □

引理 B.2。我们有

$$\det \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{t_1-t_2} & \frac{1}{t_1-t_3} & \cdots & \frac{1}{t_1-t_n} \\ \frac{1}{t_2-t_1} & 0 & \frac{1}{t_2-t_3} & \cdots & \frac{1}{t_2-t_n} \\ \frac{1}{t_3-t_1} & \frac{1}{t_3-t_2} & 0 & \cdots & \frac{1}{t_3-t_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{t_n-t_1} & \frac{1}{t_n-t_2} & \frac{1}{t_n-t_3} & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \sum_{\pi} \prod_{\pi(i)=j>i} \frac{1}{(t_i - t_j)^2} \tag{B.3}$$

其中求和遍历 $\{1, \ldots, n\}$ 的所有完美匹配 π。

证明。我们来考察上述行列式的展开

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\ell(\sigma)} m_\sigma.$$

首先，由于对角线元素均为零，若 σ 有不动点，则有 $m_\sigma = 0$。注意，(B.3) 的右端等于对满足 $\sigma^2 = \mathrm{id}$ 的置换 σ 的和。

对于任意满足 $\sigma^2 \neq \mathrm{id}$ 的置换 σ， σ 的循环分解必有一个长度为 > 2 的循环。设 η_σ 为包含最小指标的 σ 中长度为 > 2 的循环，并用 A_σ 表示 η_σ 的指标集合。设 $[\sigma]$ 为满足 $A_\sigma = A_{\sigma'}$ 且对所有 $i \notin A_\sigma$ 均有 $\sigma(i) = \sigma'(i)$ 的置换 σ' 的集合。换言之， $\sigma' \in [\sigma]$ 是通过对 η_σ 的 σ 个指标进行置换得到的。由上面的引理 B.1,

$$\sum_{\sigma' \in [\sigma]} m_{\sigma'} = 0$$

注意，所有置换 $\sigma' \in [\sigma]$ 的符号都相同。证明完毕。 . □

引理 B.3。定理 5.2 对 $k = n$ 成立，即

$$\det \begin{bmatrix} \chi_1 & \frac{\hbar}{1-q_1/q_2} & \cdots & \frac{\hbar}{1-q_1/q_n} \\ \frac{\hbar}{1-q_2/q_1} & \chi_2 & \cdots & \frac{\hbar}{1-q_2/q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\hbar}{1-q_n/q_1} & \frac{\hbar}{1-q_n/q_2} & \cdots & \chi_n \end{bmatrix} = \sum_{\pi} J(\pi) V(\pi),$$

其中对 $\{1, \ldots, n\}$ 上的所有匹配 π 求和。

证明。根据关于 χ_i's 的多项式展开，行列式等于

$$\sum_{A} \chi_{a_1} \cdots \chi_{a_s} \det \begin{bmatrix} 0 & \frac{\hbar}{1-q_{b_1}/q_{b_2}} & \cdots & \frac{\hbar}{1-q_{b_1}/q_{b_t}} \\ \frac{\hbar}{1-q_{b_2}/q_{b_1}} & 0 & \cdots & \frac{\hbar}{1-q_{b_2}/q_{b_t}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\hbar}{1-q_{b_d}/q_{b_1}} & \frac{\hbar}{1-q_{b_d}/q_{b_2}} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

其中求和遍历 $\{1,\dots,n\}$ 的所有子集 $A=\{a_1,\dots,a_s\}$，其补集为 $\{b_1<\cdots<b_t\}$。注意，根据引理 B.2

$$\det\begin{bmatrix} 0 & \frac{\hbar}{1-q_{b_1}/q_{b_2}} & \cdots & \frac{\hbar}{1-q_{b_1}/q_{b_t}} \\ \frac{\hbar}{1-q_{b_2}/q_{b_1}} & 0 & \cdots & \frac{\hbar}{1-q_{b_2}/q_{b_t}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\hbar}{1-q_{b_t}/q_{b_1}} & \frac{\hbar}{1-q_{b_t}/q_{b_2}} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\hbar^t q_{b_1}\cdots q_{b_t}\det\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{q_{b_2}-q_{b_1}} & \cdots & \frac{1}{q_{b_t}-q_{b_1}} \\ \frac{1}{q_{b_1}-q_{b_2}} & 0 & \cdots & \frac{1}{q_{b_t}-q_{b_2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{q_{b_1}-q_{b_t}} & \frac{1}{q_{b_2}-q_{b_t}} & \cdots & 0 \end{bmatrix}=\sum_{\pi}V(\pi),$$

其中求和遍历 π 在 $\{b_1<\ldots<b_t\}$上的所有完美匹配。我们可以将 π 扩展为 $\{1,\dots,n\}$ 上的一个（不一定是完美）匹配，令 $\pi(a_i)=a_i$，其中 $i=1,\dots,s$。因此，行列式等于

$$\sum J(\pi)V(\pi)$$

求和遍历 π 在 $\{1,\dots,n\}$上的所有匹配。 □

定理 5.2 的证明。与引理 B.3 的证明类似，y^{n-k} 在 $\det\left(y1_n+M(\chi)\right)$ 中的系数为

$$\sum_K\det\begin{bmatrix} \chi_{c_1} & \frac{\hbar}{1-q_{c_1}/q_{c_2}} & \cdots & \frac{\hbar}{1-q_{c_1}/q_{c_k}} \\ \frac{\hbar}{1-q_{c_2}/q_{c_1}} & \chi_{c_2} & \cdots & \frac{\hbar}{1-q_{c_2}/q_{c_k}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\hbar}{1-q_{c_k}/q_{c_1}} & \frac{\hbar}{1-q_{c_k}/q_{c_2}} & \cdots & \chi_{c_k} \end{bmatrix}$$

其中求和遍历所有阶数为 k 的子集 $K=\{c_1<\cdots<c_k\}\subset\{1,\dots,n\}$。根据引理 B.3，它等于

$$\sum_K\sum_{\pi}J(\pi)V(\pi)$$

其中 K a k-子集由 $\{1,\dots,n\}$ 和 π 穿过 K的匹配。这就完成了证明。□

References

[AB84] M. F. Atiyah 和 R. Bott. 动量映射与等变上同调。

Topology 23 1 1 28, , ( ): – .[AF] David 1984

Anderson 和 William Fulton. *Equivariant Cohomology in Algebraic Geometry, Cambridge*. 高等数学研究丛书，剑桥大学出版社，剑桥，2023。[AMSS17] Paolo Aluffi、Leonardo C Mihalcea、J¨org Sch¨urmann 和 Changjian Su. 特征循环的阴影、Verma 模以及 Schubert 胞腔的 Chern-Schwartz-MacPherson 类的正性。

appear in Duke Math J. arXiv preprint arXiv:1709.08697 2017 *to* , , .[AS95] Alexander

Astashkevich 和 Vladimir Sadov. 部分旗流形的量子上同调 $F_{n_1\cdots n_k}$。 *Comm. Math. Phys.*, 170(3):503–528, 1995。[BH18] Indranil Biswas 和 Jacques Hurtubise. Calogero-Moser 系统的几何。 *J. Math. Phys.*, 59 9( ):091403, 10, 2018。

[BLPW16] Tom Braden、Anthony Licata、Nicholas Proudfoot 和 Ben Webster. 锥形辛消解的量子化 II：范畴 $\mathcal{O}$ 与辛对偶。 *Astérisque*, (384):75–179, 2016。附录由 I. Losev 撰写。[BMO11] Alexander Braverman、Davesh Maulik 和 Andrei Okounkov. Springer 解消的量子上同调。 *Adv. Math.*, 227(1):421–458, 2011。[Bor53] Armand Borel. 关于紧李群的主纤维丛空间和齐性空间的上同调。 *Ann. of Math. (2)*, 57:115–207, 1953。[CF99] Ionut。Ciocan-Fontanine. 关于部分旗簇的量子上同调环。 *Duke Math. J.*, 98 3 485 524, 1999 ( ): – .[CG10] Neil Chriss 和 Victor Ginzburg. *Representation theory and complex geometry*. Modern Birkh¨äuser Classics. Birkh¨äuser Boston, Ltd.，波士顿，马萨诸塞州，2010。1997 年版重印。[CK99] David A. Cox 和 Sheldon Katz. *Mirror symmetry and algebraic geometry* 68 *Mathemat-*，第 [卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，[。[Dan22] Ivan Danilenko. 仿射格拉斯曼流形切片的量子微分方程。 *ical Surveys and Monographs* 1999 *arXiv preprint arXiv:2210.17061* 2022 ,.[EFMV11] Pavel Etingof、Giovanni Felder、Xiaoguang Ma 和 Alexander Veselov. 关于复晶体反射群的椭圆 Calogero-Moser 系统。 *J. Algebra*, 329:107–129, 2011。[Eti07] Pavel Etingof. *Calogero-Moser systems and representation theory*. 苏黎世高等数学讲座。欧洲数学会 (EMS)，苏黎世，2007。[FN16] L´ászl´o M. Feh´ér 和 J´ános Nagy. 运用等变上同调的加法组合学。2016。[FW04] W. Fulton 和 C. Woodward. 关于舒伯特类的量子乘积。 *J. Algebraic Geom.*, 13 4 641 661, 2004 ( ): – .[Gin98] Victor Ginzburg. Hecke 代数和量子群表示论中的几何方法。载于 *Representation theories and algebraic geometry (Montreal, PQ, 1997)*，第 *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci.* 卷，127–183 页。Kluwer 学术出版社，Dordrecht，1998。笔记由 Vladimir Baranovsky [V. Yu. Baranovski˘ı]整理。[GK95] Alexander Givental 和 Bumsig Kim. 旗流形的量子上同调与 Toda 格。*Comm. Math. Phys.*, 168(3):609–641, 1995。[Hec97] G. J. Heckman. Dunkl 算子。第 245 号，第 Exp. No. 828, 4, 223–246 页。1997。Bourbaki 研讨会，1996/97 年卷。[Hum78] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory* 9 *Graduate*，第 [卷。*Texts in Mathematics* 1978 Springer-Verlag，纽约—柏林，[。修订版，第二次印刷。[Kam22] Joel Kamnitzer. 辛消解、辛对偶与库仑分支。 *arXiv preprint arXiv::2202.03913* 2022 ,.[Kim99] Bumsig Kim. 旗流形的量子上同调 G/B *Ann. of* 与量子 Toda 格。， *Math. (2)* 149 1 129 148, 1999 ( ): – .[KMP21] Joel Kamnitzer、Michael McBreen 和 Nicholas Proudfoot. 量子 Hikita 猜想。 *Adv.* , :论文编号 。[*Math.* 390 107947, 53, 2021 Liu13] Chiu-Chu Melissa Liu. Gromov-Witten 理论与轨形 Gromov-Witten 理论中的局部化。载于 *Handbook of moduli. Vol. II*，第 25 卷（ *Adv. Lect. Math. (ALM)*），353–425 页。Int. Press，Somerville，马萨诸塞州，2013。[Lus88] George Lusztig. 尖点局部系统与分次 Hecke 代数。I。 *Inst. Hautes Études Sci. Publ.* , ( ): – .[MNS22] *Math.* 67 145 202, 1988 Leonardo C. Mihalcea、Hiroshi Naruse 和 Changjian Su. 等变（量子）上同调与 K 理论上的左 De mazure-Lusztig 算子。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (16 12147, 2022 12096): – .[MO19] Davesh Maulik 和 Andrei Okounkov. 量子群与量子上同调。 *Astérisque*, (408):ix+209, 2019。[MP15] Michael McBreen 和 Nicholas Proudfoot. 锥形辛消解的交上同调与量子上同调。 *Algebr. Geom.*, 2(5):623–641, 2015。[MS13] Michael B. McBreen 和 Daniel K. Shenfeld. 超环面簇的量子上同调。 *Lett.* , ( ): – .[Mui60] *Math. Phys.* 103 11 1273 1291, 2013 Thomas Muir. *A treatise on the theory of determinants*. Dover Publications, Inc.，纽约，1960。William H. Metzler 修订并扩充。[Oko18] Andrei Okounkov. 枚举几何与几何表示论的交汇处。载于 *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. I.* ，第 – 页。 *Plenary lectures* 839 867 2018 World Sci. Publ.，Hackensack，新泽西州，。

[OP10] A. Okounkov 和 R. Pandharipande。《平面上点的希尔伯特概形的量子上同调》。 *Invent. Math.*, 179(3):523–557，2010。[Pol19] Alexios P. Polychronakos。费曼关于 Calogero 守恒积分交换性的证明。 *Annals of Physics*，403:145–151，2019 年 4 月。[SS93] B Sriram Shastry 和 Bill Sutherland。$1/r^2$ 系统中的超拉克斯对与无限对称性。*Physical review letters*，70(26):4029，1993。[ST97] Bernd Siebert 和 Gang Tian。关于法诺流形的量子上同调环及 Vafa 和 Intriligator 公式。 *Asian J. Math.*，1(4):679–695，1997。[Su16] Changjian Su。 G/P的余切丛的等变量子上同调。 *Adv. Math.*，289:362–383，2016。[Su17] Changjian Su。 Springer 解消稳定基的限制公式。 *Selecta Math. (N.S.)*，23(1):497–518，2017。

(CHANGZHENG LI) School of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, P.R. China*Email address*: lichangzh@mail.sysu.edu.cn (CHANGJIAN SU)
Yau Mathematical Sciences Center, Tsinghua University, Beijing, China*Email address*: changjiansu@mail.tsinghua.edu.cn (RuiXiong) Department of Mathematics and Statistics, University of Ottawa, 150 Louis-Pasteur,Ottawa, ON, K1N 6N5, Canada*Email address*: rxion043@uottawa.ca