混沌边缘在哪里?

Ron Fulbright南卡罗来纳大学北部
分校，南卡罗来纳州斯帕坦堡 29303

fulbrigh@uscupstate.edu

摘要
此前对元胞自动机和随机布尔网络的研究表明，当内部连接的随机性（有序/无序）被设定为一个中间临界值时，涌现行为会出现在混沌边缘。据观察，涌现行为达到最大值时对应的数值与互连元素的总数——即邻域大小——成反比。然而，不同方程预测出的数值并不相同。本文研究了一维元胞自动机（一维元胞自动机），验证了这一普遍关系，但发现其与邻域半径的相关性比与邻域大小的相关性更精确。 此外，据观察，涌现区间的临界值 非常接近 1/e，这提示我们可能发现了涌现系统的一项基本特征。

1. 引言

非线性动力学和复杂性理论领域的研究人员研究元胞自动机和布尔网络，以探究涌现系统的动态行为。元胞自动机是由元胞组成的网格，每个元胞处于有限个状态中的一种。一个元胞接下来所处的状态由一组相邻元胞的状态决定。在一维元胞自动机（一维元胞自动机）中，邻域大小 N 定义为目标元胞加上两侧各 r 个相邻元胞（$N = 2r + 1$）。

在许多方面与元胞自动机相似，布尔网络由一组变量构成，其中每个变量的下一个取值取决于与其相连的一组其他变量。这组相连的变量类似于元胞自动机中的元胞邻域。

由相互作用元素构成的系统，例如元胞自动机和布尔网络，会表现出涌现行为（Bedeau，1997年；Goldstein，1999年；O'Connor，1984年）。涌现行为的特征是，个体元素本身并不具备某些属性。相反，只有当这些元素在更大的整体中相互作用时，这些属性和行为才会涌现。涌现行为的典型例子是鸟群。鸟群的行为会自发产生于单只鸟遵循的简单相互作用规则，且不涉及任何中心协调。因此，鸟群展现出许多个体鸟不具备的属性和特征，例如绕过障碍物流动的能力。

元素之间连接方式的自由度至关重要。研究发现，当内部无序度被调节到有序与混沌之间的中间值（λ_c）时，会涌现出最强的涌现行为——这一区域称为涌现区间（Wolfram，1984年；2002年；Langton，1986年；Li、Packard 和 Langton，1990年）。这一系统行为区域称为混沌边缘，其动态变化类似于物理学中的相变；在这一过程中，内部结构的生成与消亡达到平衡，使系统编码和处理信息的能力最大化。

由于最稳健的行为出现在 λ_c，工程师希望了解或能够预测系统的 λ_c。针对特定系统，已经确定了 λ_c 的数值；然而，尚未测得适用于所有系统的通用 λ_c 值。以往研究表明，λ_c 与元胞自动机的邻域大小以及布尔网络的连通性存在某种关联，但这些度量指标对 λ_c 的预测值各不相同。

研究问题是：我们能否验证元胞自动机度量指标或布尔网络度量指标中的任一个是正确的？本文通过改变随机性程度并观察其对 λ_c 的影响，研究一维元胞自动机的行为。由于 λ_c 似乎无法针对某次运行进行预测，我们假设，对一维元胞自动机多次运行的 λ_c 取平均值，将显示其与元胞自动机度量指标或布尔网络度量指标中的某一个相符。

2. 文献综述

Wolfram（1984年；2002年）对元胞自动机进行了深入研究，并根据涌现属性的性质将系统行为分为

根据涌现属性的性质分为四类:

I类： 静态状态 – 具有唯一均匀状态且没有动力学行为 **II类：** 有序状态 - 有时会出现简单的稳定结构和周期行为，但不会演化或传播**III类：** 混沌状态 – 持续产生极其短暂的模式，不具备持久性或相干结构**IV类：** 涌现区间 - 持续演化并传播的稳定结构，呈现长期周期行为

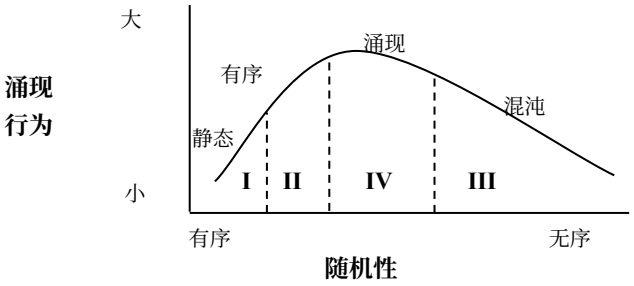


图 1 – Wolfram 确定了四种系统行为类型，其中 IV 类对应于位于有序状态和混沌状态之间的涌现区间，并取决于系统中的无序程度。转载自（Wolfram，1984年）。

图 1 展示了 Wolfram 各类别相对于有序、无序和涌现行为之间观测关系的位置。类似地，Li、Packard 和 Langton（1990年）确定了元胞自动机中的六类行为。图 2 将这些类别的位置与 Wolfram 各类别进行了比较。第 2、3 和 4 类进一步细化了 Wolfram II 类。

[1]： 空间均匀不动点——差异扩散率、熵和互信息均为零**[2]：** 空间非均匀不动点——固定模式，差异扩散率为零，熵为有限值**[3]：** 周期行为——孤立区域内呈现周期行为，熵和互信息均不为零**[4]：** 局部混沌行为——固定或振荡的边界将混沌域分隔开**[5]：** 混沌行为——差异模式扩散率高，互信息为零

[6]： 复杂行为 - 长瞬态、复杂时空模式、传播结构、互信息较大

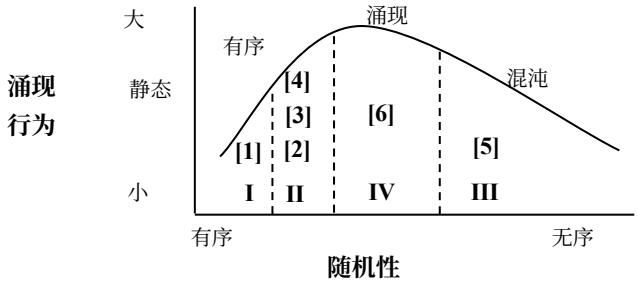


图2 – Li、Packard 和 Langton（1990）的系统行为类别（括号内）与 Wolfram（1984）的类别对比。

Langton（1986年）通过实验研究元胞自动机，改变随机性程度，并观察其随时间（即元胞自动机格点的后续世代）的行为。Langton 将此称为“λ 参数”，并指出，λ_c 当随机性达到某一程度时，便会出现最大动力学行为，如图3所示。

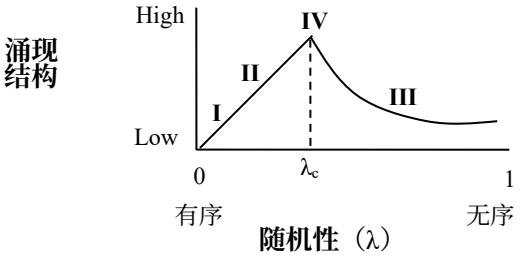


图3 – λ 参数可以改变一维元胞自动机行为中的随机性（无序）程度。最大涌现行为出现在临界值附近，λ_c， 此时系统动力学似乎发生了相变。图中标出了沃尔夫勒姆的四个类别及其大致位置。转载自（Langton，1986年）。

Langton 的 λ_c 对应于沃尔夫勒姆 IV 类（介于沃尔夫勒姆 II 类和 III 类之间），也对应于 Li、Packard 和 Langton 的 6 类。

高度有序系统（I类、II类、[1] [2] [3] [4]）过于僵化，抑制了系统的动态变化，因此无法涌现出任何结构。高度无序系统（III类、 [5]）会迅速摧毁涌现结构，导致模式无法形成并持续存在。涌现区间（IV类、 [6]）代表了

持久结构形成与消亡之间的平衡。这类结构对于信息的传输、存储和修改必不可少。

Li、Packard 和 Langton（1990年）发现， λ_c 取决于邻域大小

$$\lambda_c \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{2}{r+1}}, \qquad (1)$$

其中 r 是邻域半径。当 r取较大值时，此方程收敛为

$$\lambda_c \approx \frac{1}{N}, \qquad (2)$$

其中 N 是邻域大小（$2r+1$）。

研究人员还研究了其他类型的自组织网络。Kauffmann 等人利用随机布尔网络（随机布尔网络）研究动态行为中的相变。在随机布尔网络中，参数 p_c 控制组件之间互连关系的随机性（Kauffmann，1993年）。它在元胞自动机中发挥着与 λ_c 参数类似的作用。p_c 的临界值为

$$p_c = \frac{1}{S}\left[1 + (1 - \frac{S}{K}[(2-S)K + S - 1])^{1/2}\right], \qquad (3)$$

其中 S 是随机布尔网络中每个节点可取的状态数，K 是目标节点所连接的邻居数。注意，随机布尔网络中的 K 与元胞自动机中的 N 类似。

表1展示了使用方程（3）计算的不同p_c 值，适用于S 和 K 的各种取值；图3则展示了p_c 随K, 变化的曲线，其中K, 表示随机布尔网络（RBN）中相互连接的节点数量。图中清楚表明，随着K 增大，p_c 逐渐收敛并趋近于零。

K	*S=2*	*S=3*	*S=4*	*S=5*
2	0.500	0.333	0.317	0.310
3	0.211	0.195	0.191	0.189
4	0.146	0.140	0.138	0.137
5	0.113	0.109	0.108	0.107
6	0.092	0.089	0.089	0.088
7	0.077	0.076	0.075	0.075
8	0.067	0.066	0.065	0.065
9	0.059	0.058	0.058	0.057
10	0.053	0.052	0.052	0.052

表1 – 随机布尔网络中不同状态数 *S*和连接节点数 *K*对应的临界点 p_c。

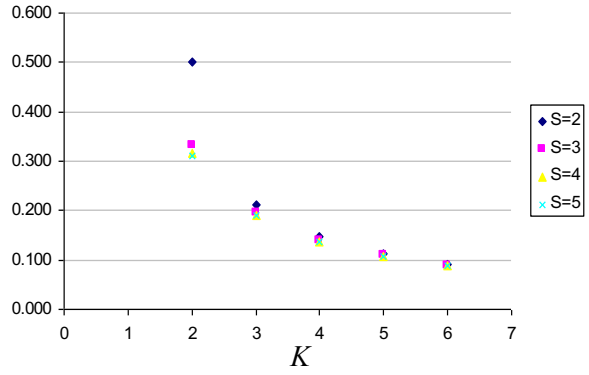


图3 – 绘制表1中的数值可见，随机布尔网络的涌现区间位置与邻域大小有关；前者以p_c表示，后者以*K*表示。

在K 的整个取值范围内，方程（3）对所有K 都符合得很好（极小的K除外），因此 我们可以对p_c 在所有 K 取值下的数值取平均，如表2所示。表2还列出了方程（1）和方程（3）对一维元胞自动机的计算值，以供比较。

图4将一维元胞自动机的方程（1）和方程（2）与随机布尔网络的方程（3）进行了比较。对于元胞自动机和随机布尔网络，曲线的形状和形式一致，清楚地显示出邻域大小与系统中无序的临界值之间呈反比关系。

N	r	p_c 公式（3）	λ_c 公式（1）	1/N 公式（2）
2	0.5	0.365	n/a	0.500
3	1.0	0.197	0.500	0.333
4	1.5	0.140	0.276	0.250
5	2.0	0.109	0.211	0.200
6	2.5	0.090	0.173	0.167
7	3.0	0.076	0.146	0.143
8	3.5	0.066	0.127	0.125
9	4.0	0.058	0.113	0.111
10	4.5	0.052	0.101	0.100

表2 – 对多个p_c值进行S平均，可以比较随机布尔网络与一维元胞自动机的临界值。

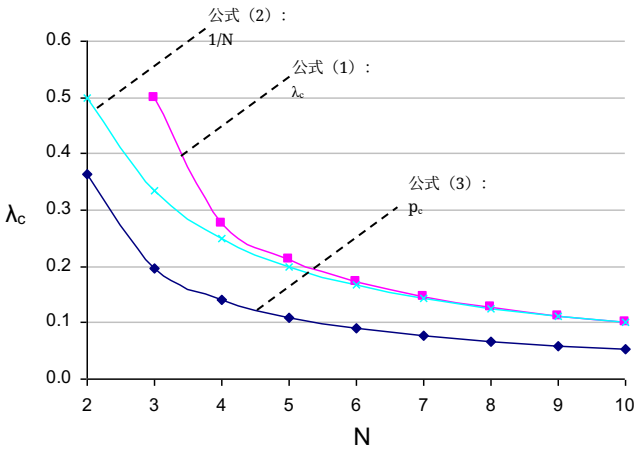


图4 – 系统中的无序临界值取决于邻域大小。方程（1）和（2）预测了一维元胞自动机的临界值，方程（3）则预测了随机布尔网络的临界值。

尽管表2和图4展现出相似的特征，但它们表明，用于确定元胞自动机中λ_c的度量指标与用于随机布尔网络的度量指标得出的数值不同。图4中随机布尔网络的曲线相较于元胞自动机的曲线明显下移。Kauffman认为，这种差异是因为随机布尔网络比元胞自动机具有更多自由度。具体而言，元胞自动机中的邻域被定义为与目标元胞在物理位置上相邻的元胞。然而，在随机布尔网络中，相邻元胞不受必须位于附近的限制。

对于元胞自动机和 RBN，λ_c可能有所不同。事实上，或许必须针对每一种不同类型的涌现系统，分别确定一个λ_c度量指标。不过，我们想知道是否存在一种 λ_c 度量指标，普遍适用于所有系统。为此，第一步是尝试通过一项独立研究，验证元胞自动机或 RBN 的度量指标。

3. 方法

本研究使用了由纽约霍巴特和威廉·史密斯学院的 David Eck 开发的元胞自动机小程序。本研究使用的 Java 小程序可在以下网址找到：

http://math.hws.edu/xJava/CA/EdgeOfChaosCA.html，但现在也可以通过以下网址使用 JavaScript 小程序：

https://math.hws.edu/eck/js/edge-of-chaos/CA.html

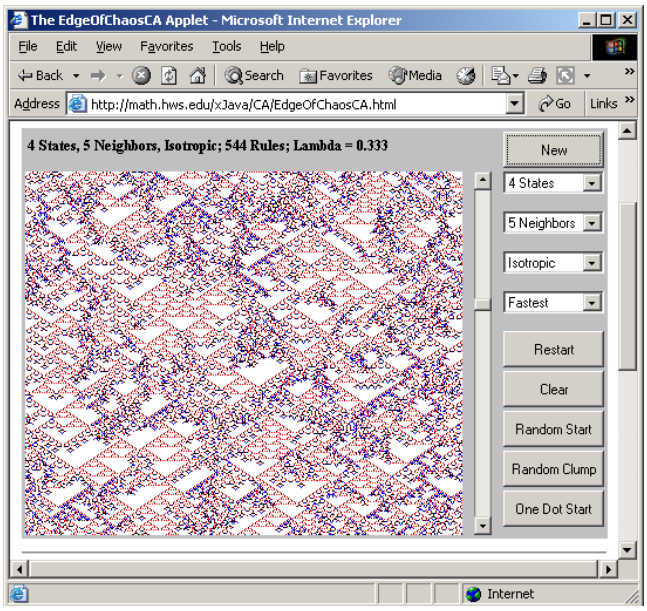


图 5 – 元胞自动机小程序允许用户更改每个元胞的状态数、邻居数和随机性（λ）。元胞自动机的世代从屏幕顶部到底部逐行显示。

记录了以下（状态数、邻域）设置下的结果：(3,3) (3,5) (3,7) (4,3) (4,5) (4,7) (5,3) (5,5) (6,3) (6,5) (7,3) 和 (7,5)。每种设置均进行了 25 次运行。每次运行中，λ 均遍历其完整范围 0.0 至 1.0。记录涌现出稳健结构时的 λ 值。对于出现多个涌现结构的运行，也记录了每次后续涌现对应的 λ 值。

图 6 展示了一次典型运行的结果。一般而言，在较低的 λ 值下，不会产生任何结构，或只产生简单的稳态结构，这对应于 Wolfram I 类行为。在较高的 λ 值下，会产生更复杂的结构，但仍呈现稳态特征——相同的不变结构在

之后的每一代中重复出现。这对应于 Wolfram II 类行为。在 λ的临界值处，涌现出复杂且不断演变的结构。这个 λ 值被记录为该次运行的 λ_c，对应于沃尔夫勒姆第四类行为。涌现结构在一系列 λ 值范围内持续存在，但在更高值下，随机噪声占据主导，这对应于 Wolfram III 类。

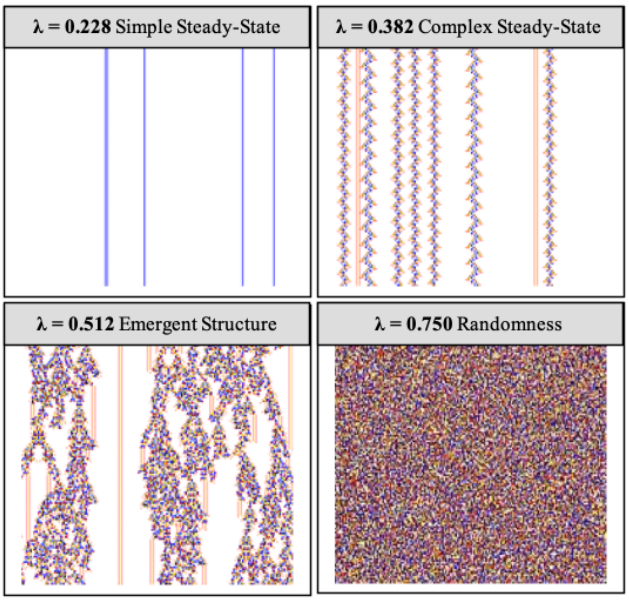


图6 – 随着随机性程度 λ 从 0.0（无随机性）变化到 1.0（完全随机），IDCA 的动态行为也随之变化。在 λ 的某个临界中间值处，会自发涌现出复杂且不断演变的结构。

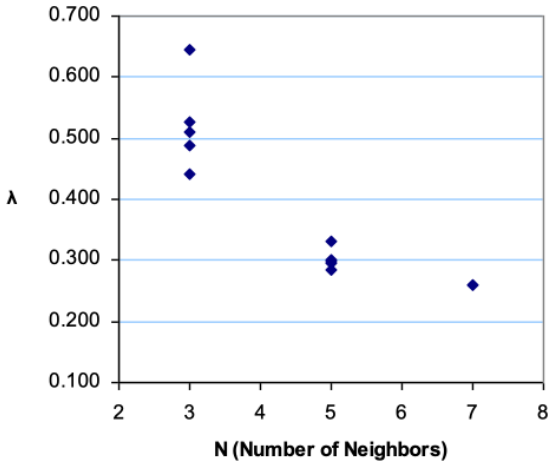
由于每次运行都会产生不同的输出，因此在相同的状态和邻居设置下进行了 25 次运行，并记录结果。对这些运行中涌现的点取平均值。

4. 结果

表3显示了不同状态数 *K* 和邻域大小 *N* 对应的 λ_c 平均值。这些结果绘制在图7中。将观测到的 λ_c 值相对于 *K* 作图时，没有观察到特定模式；但相对于 *N* 作图时，则呈现出非常明显的模式。

K	N	λ
3	3	0.646
4	3	0.510
5	3	0.488
6	3	0.526
7	3	0.441
3	5	0.284
4	5	0.331
5	5	0.295
6	5	0.301
7	5	0.299
3	7	0.259
4	7	0.261
		0.387

表3 – 不同每个元胞的状态数 (K) 和不同邻域大小 (N) 下观测到涌现行为时的 λ_c 平均值，



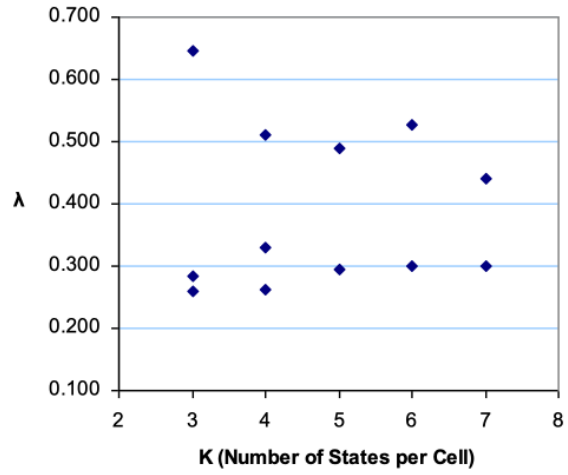


图7 – 观测到涌现行为时的 λ_c 值，表明其与邻域大小 N 有关

图7中观察到的模式与

元胞自动机和随机布尔网络方程 λ_c 中的模式相似。曲线形状几乎完全相同，随着邻域大小 N 的增大，λ_c 呈下降趋势。图8将我们的结果与元胞自动机的方程（1）和方程（2），以及布尔网络的方程（3）进行了比较。

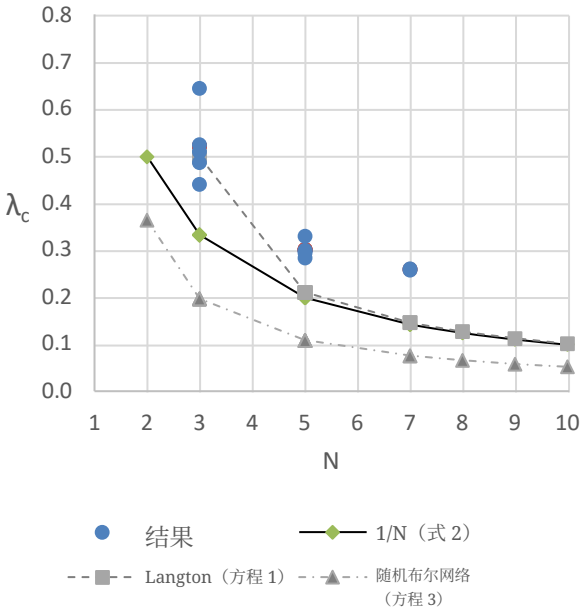


图8 – 观察到涌现行为时的 λ_c，与先前关于元胞自动机（式 1、2）和随机布尔网络（式 3）的研究所提出的方程相比。

然而，我们的结果明显高于方程（1）、（2）或（3）。我们还注意到，与邻域大小r 相比，我们的结果与邻域半径的关系更为密切，其中r 是邻域半径。回想一下，对于一维元胞自动机，N = 2r + 1。最符合我们结果的方程是简单的关系式 1/(r +1)，如图9所示。

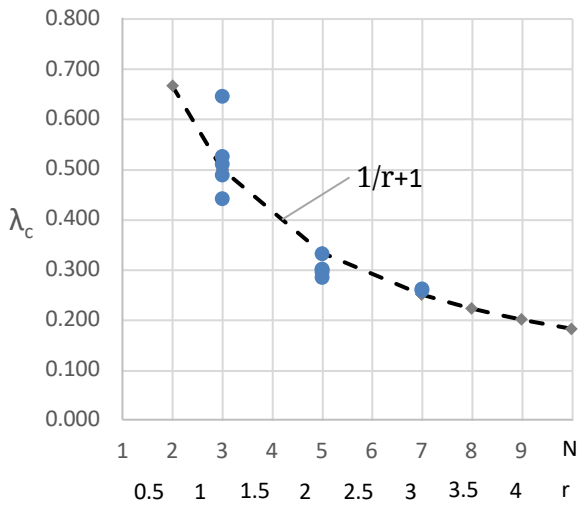


图9 – 观察到的 λ_c，与邻域半径 r 相关。

5. 结论/未来工作

我们的假设被证伪了：对一维元胞自动机进行多次运行并取平均值 λ_c，其结果将与 Li、Packard 和 Langton（1990）的元胞自动机度量指标（公式（1）、（2））或 Kauffmann（1993）的随机布尔网络方程（公式（3））一致并予以证实。如图8所示，在每个元胞的状态数K和邻域大小N设置各异的情况下，对 Eck 小程序的一维元胞自动机进行 300 次运行并取平均值λ_c后，我们的结果与这两个方程都不一致，尽管曲线的总体形状相符。因此，我们可以验证总体上存在这样一种观点：λ_c 与相邻元胞的数量呈反比关系；但我们发现，关系式 1/(r +1)比公式（1）、（2）或（3）都更符合我们的结果。因此，我们提出

$$\lambda_c \approx \frac{1}{r+1}, \qquad (4)$$

其中，邻域包含目标元胞两侧各 r 个元胞；该方程用于预测涌现行为出现时的随机性大小——即混沌边缘。

式（4）是否代表适用于所有涌现系统的一般性结论，仍是一个尚无定论的问题。我们的结果可能仅适用于本研究所用的 Eck小程序。我们获得结果的方式也可能使结果产生偏差。不过，在本研究中，我们采用了统计方法，对多次运行的结果取平均，然后

再对不同邻域大小下这些运行的平均值取平均。我们还直接观察了涌现行为，而不是像以往研究那样，通过观察互信息等次级指标来推断涌现行为。因此，我们认为，我们的结果或许确实揭示了适用于所有涌现系统的一般规律。未来的研究需要对此观点进行检验和验证。应针对一维元胞自动机以外的涌现系统开展统计研究。此外，还应将其他研究人员针对各种类型涌现系统所得的结果与本研究进行比较和对照。

我们还注意到，如表3所示，λ_c 0.387 的总体平均值与 1/*e*（0.368）非常接近（误差在 5% 以内）。常数 *e* 在数学、科学和工程的众多应用中都有出现。如果我们最终发现 *e* 参与了涌现行为的描述，也不会令人意外。我们提出以下猜想：

> **涌现区间 1/e 猜想：** 由多个局部相互作用元素组成的系统，当控制元素间互连关系的随机性程度(λ_c) 调整至以 *1/e* 为中心的中间值时，便会进入涌现区间，并表现出全局涌现行为（即随机性约为 *0.368*，或从完全没有随机性到完全随机的范围中约 *37%* 的位置）。

我们将 λ_c = 1/e 视为涌现区间的特征性度量。我们并不认为对于任何特定的涌现系统，λ_c 一定恰好等于 1/e，尽管这种情况确实有可能发生。相反，我们将其视为一种统计度量。举例来说，可以看看一名棒球运动员的打击率。打击率是用安打数除以打席数计算得出的，取值范围为 0–1。美国职业棒球大联盟所有球员的平均打击率约为 0.248。虽然有些球员的个人打击率可能是 0.248，但这一统计数据并不意味着所有 棒球运动员都会或必须达到 0.248 的打击率。事实上，在任何特定时刻，大多数 棒球运动员的打击率都不是 0.248。打击率这一特征指标并非用于预测个体的表现，而是通过揭示投手与击球手之间的关系，帮助我们深入了解棒球这项运动的本质。击球员成功的概率只有约 25%。在 75% 的情况下，击球员要么无法上垒，要么通过安打以外的方式上垒。

同样，1/r 猜想提示工程师和系统设计师将其系统中的随机性调整至以 1/e 为中心的范围，以获得最稳健的性能。未来的工作应比较其他系统的涌现点与 1/e 猜想的吻合程度。

6. 参考文献

Bedeau, M.（1997年）。《哲学视角：心灵、因果与世界》第11卷中的弱涌现，马萨诸塞州马尔登：Blackwell，375–399。Goldstein, J.（1999年）。《作为建构的涌现：历史与议题》。《涌现》1:1，49-72。Kauffmann, S.（1993年）。《秩序的起源：进化中的自组织与选择》，牛津大学出版社，纽约。Langton, C.G.（1986年）。使用元胞自动机研究人工生命，《物理学D》22，120-149。Li, W.、Packard, N.H. 和 Langton, C.G.（1990年）。《元胞自动机规则空间中的转变现象》。圣菲研究所工作论文：1990-008。在线获取：https://www.santafe.edu/research/results/working-papers/transition-phenomena-in-cellular-automata-rule-spa，最后访问于2021年7月。O'Connor, T.（1994年）。涌现属性。《美国哲学季刊》《，31》，91-104。Wolfram, S.（1984年）。《元胞自动机中的普适性与复杂性》。《物理学D》10。Wolfram, S.（2002年）。《元胞自动机：一种新型科学》，Wolfram Media。