arXiv:2304.07207v1 [math.GT] 14 Apr 2023

# 二球面分支覆盖的组合表示。

Arcelino Lobato *

2023年4月17日

**摘要**

*William Thurston*（1946—2012）通过将平面图与一般的二球面分支自覆盖相对应，给出了其组合刻画 [8]。作者推广了局部平衡的概念，将瑟斯顿结果扩展至任意二球面分歧覆盖。作为应用，我们为每个给定的分歧轮廓给出实有理函数等价类数量的下界。此外，作为推论，我们为一条定理提供了新的证明 [5,11,12]；该定理对应于计数几何中一个实性问题的特殊情形，这个问题曾被称为 B. & M. Shapiro 猜想，如今已成为一条定理 [12]。我们所证明的定理版本针对一般有理函数，并断言：若该函数的所有临界点均为实数，则可通过与一个自同构作后复合，将其变为实系数有理映射 $\mathbb{CP}^1$。我们给出的证明具有构造性，并以初等论证为基础。

## 目录

**1 引言** 2

**2 预备知识** 5
2.1 图论.5 2.2 分歧覆盖与胞腔图.8 2.3 根据图示构造分歧覆盖.11

**3 Thurston 定理的一般版本** 14

**4 具有实临界点的有理函数** 21
4.1 构造实有理函数.23 4.2 实全局平衡图的局部平衡性.24 4.3 一个组合问题.25

*无所属机构

# 1 引言

本文通过一种胞腔图对二维球面上的保向分歧覆盖进行组合描述，该图刻画了它们的分歧轮廓。为此，我们探讨以下实现问题：

**问题 1.** 在亏格为 $g$ 的紧致可定向曲面上绘制的哪些图，可以是某个适当分歧覆盖对一条经过二球面分歧点的若尔当曲线的拉回？它们具有哪些组合性质？

这是一次尝试，旨在实现这样一个理念：通过较简单的对象来编码复杂的数学结构、对象或理论。在这方面，最令人瞩目且最成功的成果，是格罗滕迪克的儿童画 (儿童绘画）理论。该理论是格罗滕迪克对一个问题的回答：如何确定哪些黎曼曲面能够作为代数数域上的代数曲线来定义。不仅如此，这也是格罗滕迪克雄心勃勃的计划的实现，旨在完整描述代数数域的自同构群，即绝对伽罗瓦群。他证明，恰好那些能够实现为定义在代数数域上的代数曲线的黎曼曲面，可以通过在其底层拓扑曲面上绘制图来构造。这些图须满足这样的条件：它们将曲面分解为一组互不相交的拓扑圆盘（见 [15]）。这类图称为胞腔图（或胞腔映射（见定义 1））。

2010年前后，Thurston 利用绘制在球面上的四正则有向图，对黎曼球面的泛型分歧自覆盖给出了组合描述。这是他对其在确定有理函数的形状时提出的难题的回答。更确切地说，他提供了一个简单模型，能够编码有理函数的分歧信息，并可据此重构该函数。

据我们所知，如上所述，通过将映射限制在一个图（由有限个 0-胞腔和 1-胞腔组成）上来捕捉其本质，这一思想最早可追溯到*Alexander*（技巧）引理 [16] 与$Sch\ddot{}oenflies$ 定理 [1]；该定理允许我们通过将闭二维胞腔上的同胚限制在边界圆上，来区分这些同胚（在同伦意义下）。

Thurston 证明了以下定理。

**定理 T**(Thurston- [8])。一个四-正则平面有向图 $\Gamma$ 若有 $2d-2$ 个顶点，则等于 $f^{-1}(\Sigma)$，当且仅当存在某个泛型的、度为 $d$ 的分歧覆盖 $f\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$，以及一条若尔当曲线 $\Sigma \subset \mathbb{S}^2$，它包含 $f$ 的临界值：

**0.** 胞腔分解： $\Gamma$ 的每个面都是若尔当区域（特别是， $\Gamma$ 是连通的）

**1.** 全局平衡： 对于 $\Gamma$各面的任意交替白蓝染色，白色面有 $d$ 个，蓝色面有 $d$ 个，并且

**2.** 局部平衡： 对于 $\Gamma$ 中的任意定向简单闭曲线 $\gamma$，若其左侧为蓝色面、右侧为白色面（角处除外），则 $\gamma$左侧的蓝色面严格多于白色面。

$\mathbb{S}^2$的一个度为 $d$ 的分歧覆盖称为一般的，如果它具有最多数量的临界值（分歧点）。对于 $\mathbb{S}^2$ 的自覆盖，这一数量恰好等于 $2d-2$。另一种说法是，每个临界点的分歧指数均为 2，且它们的像两两不同。根据黎曼—赫尔维茨公式 [9]，亏格为 $g$、度为 $d$ 的分歧覆盖，其分歧点的最大数量等于 $2(d+g-1)$。

我们可以自然地将瑟斯顿平衡图图视为格罗滕迪克儿童画的推广。对于每幅儿童画，只需在每个儿童画的面中标记一个新顶点，再将其与该面相邻的所有顶点连接起来，就能轻易构造出一幅平衡图。这些平衡图在相对于儿童画顶点的同伦意义下都相同。不过，本文不会沿着格罗滕迪克开辟的方向继续探索。尽管如此，值得一提的是，正如 Shabbat 在 [17]，中指出的那样，我们所提出的图似乎是最有希望用于支持格罗滕迪克理论推广的候选对象，同时也可能成为胡尔维茨理论的工具。在即将发表的一系列论文中，我们将探讨平衡图的计数问题，

并将其与胡尔维茨理论、曲线模空间和复分析联系起来。我们还将探讨定义在平衡图上的一类运算。

本文的主要结果是对 Thurston 定理（T）的重大推广。它涵盖任意度 $d>0$ 的分歧覆盖，其中 $\mathbb{S}^2$ 是任意亏格的闭拓扑曲面，且具有任意可容许的分歧轮廓（见第2.2节）。为此，我们建立了局部平衡的新定义，该定义能够涵盖所有正亏格紧致曲面。

我们证明的完整一般性版本如下：

**定理**( A - Thurston 定理的一般性版本)。亏格为 $g$ 的胞腔图 $\Gamma \subset S_g$ 等于$f^{-1}(\Sigma)$，当且仅当它是某个度为 $d$ 的分歧覆盖 $f: S_g \to \mathbb{S}^2$，以及某条若尔当曲线 $\Sigma \subset \mathbb{S}^2$的拉回图；该曲线包含 $f$的临界值。换言之，它是一个平衡图（即全局平衡且局部平衡）。

我们定义了两类胞腔图，分别称为拉回图（10）和可容许图（18）。拉回图实际上是广义的儿童画。它们是通过分歧覆盖对一条包含该映射分歧点的若尔当曲线进行提升而得到的胞腔图。可容许图编码了构造 $\mathbb{S}^2$ 的分歧覆盖的一种方法（见 2.3.1）。因此，我们将证明平衡图是 $\mathbb{S}^2$ 中某些特殊曲线在分歧覆盖下的原像这一问题，归结为确保能够将其提升为可容许图。要解决这一问题，只需证明增强平衡图（即插入了一些度为 2 的顶点的图，见定义 15）具有良好的顶点标记，从而使其成为可容许图。在一般的平面情形下，Thurston 借助上同调解决了这一问题。作为另一种方法，我们将该问题转化为一个图论问题，从而得出一种更初等的方法。因此，我们给出了该问题的解答（见 1）。

一种关于保定向分歧自覆盖的 $\mathbb{S}^2$ 定理 $T$ 的推广也由$J.\ Tomasini$ [20,21] 在其博士论文中得出。

$Tomasini$ 没有使用 Thurston 引入的那些平面图。他考虑了一种星形映射，它由一组若尔当弧组成，这些弧将分歧覆盖中的一个选定正则点与每个临界值相连。他按照 Thurston 的设想，取该胞腔图的原像，从而得到与分歧覆盖相关联的组合对象。正如上文所述，他得到的组合模型是一个胞腔二部图。$Tomasine$ 将***Thurston*** 的平衡条件转化为他所考虑的胞腔二部平面图类别中的条件。在此基础上，他给出了定理A 的一个一般平面版本，并得出了一些关于平衡图分解的结果。他的手术操作遵循了 $Thurston$ 在 [8]中引入的分解操作。

一个实全局平衡实图是一种特殊的平面图，其特征是同伦于一个在复共轭下保持不变的全局平衡图，该图的所有顶点都在$\mathbb{RP}^1$ 中，并且 $\mathbb{RP}^1$ 是其上的一个圈。

本文对具有 $2d$ 个面的实全局平衡实图进行计数，并针对顶点的每一种可能价数剖面分别计算。价数剖面指的是在固定顶点枚举次序下，各顶点度数构成的列表。

因此，设 $\Gamma$ 是一个实全局平衡图，其角按逆时针方向的循环次序编号为 $C=\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}\subset\mathbb{RP}^1$。

形状为 $2\times(d-1)$、权为a的***Kostka***数($d$,a)，记作 $K(d-1)$，是形状为半标准杨表 $2\times$、权为a的总数。半标准杨表的定义参见第4.3.1节。

作者指出：

定理（*B*）。对于 $\mathbb{RP}^1$ 中的每个 $n\in\{2,3,\cdots,2d-2\}$ 点以及一个 $=(a_1、a_2、\cdots、a_n)\in\mathbb{N}^n$，满足 $_n\sum a_k=2d-2$，存在 $K$（$d$，$a$）个标准实全局平衡图，其价数剖面为整数向量 $2a_{k=1}+2$（见 *4*）。

当权重向量为 $=$（1，1，$\cdots$，1）$\in\mathbb{N}^{2d-2}$ 时，数目 $K$（$d$，a）为 $d$ 阶卡特兰数，$C$（$d$）：$=\frac{1}{d}\binom{2d-2}{d-1}$。由定理 B 从权重向量 a $=$（1，1，$\cdots$，1）$\in\mathbb{N}^{2d-2}$ 得到的实全局平衡图，其所有顶点的度均为四价。

然后，作为推论，我们得到了：

**推论** (B1)。 对于任意 $2d-2$ 个位于 $\mathbb{RP}^1$ 中的点，存在 $C(d) := \frac{1}{d}\binom{2d-2}{d-1}$ 个实全局平衡图，其顶点为这些点，且度为 4 (见 4)。

我们还证明了以下另一项相关结果：

**定理**(C)。每个实全局平衡图都是局部平衡的。

定理C 指出，每个实全局平衡图实际上都是平衡图。因此，在某种规范化下应用我们的定理A，我们构造出 $K(d,$一个)两两不等价的分歧覆盖，其中等价是指相差值域黎曼球面的自同构。因此，

**定理**(D)。给定一个整数 $d \geq 2$，对于 $n \in \{2, 3, \cdots, 2d-2\}$ 个点 $\mathbb{RP}^1$ 作为临界点$n$以及向量$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{N}^n$，使得$\sum a_k = 2d-2$，至少存在 $K(d, \mathbf{a})$个实有理$_{k=1}$函数，在值域黎曼球面的自同构意义下，具有指定的 $n$ 临界点。

在 [6], Eremenko、Gabrielov、Shapiro 和 Vainshtein 证明，前一定理中计数的等价类数量恰好等于我们给出的下界。

特别地，可以得出，

**推论**(D1). 对于任意 $2d-2$ 个给定点 $\mathbb{RP}^1$，至少存在 $C(d) := \frac{1}{d}\binom{2d-2}{d-1}$ 个实有理函数，其临界点为这些选定的点(见4)。

对于给定的一组临界点，计数 $\mathbb{CP}^1$ 有理函数等价类的问题，之前由*Eisenbud & Harris* 在 [4] 以及 *Lisa Goldberg* 在 [7]中进行了研究。两种处理都将该问题归结为格拉斯曼流形上的舒伯特演算问题。

*Goldberg* [7, 定理1.3。] 证明，对于 $2d-2$ 个点 $\mathbb{CP}^1$，以这些给定点为临界点（因此，它们的分歧指数均为 2）的度为 $d$ 的有理函数的等价类数量至多为第 $d$ 个卡特兰数， $C(d)$。

基于舒伯特演算、表示论、福克斯微分方程和 KZ 方程理论，I. Scherbak [14] 推导出了一个根据临界点重数计算有理函数等价类数量的组合公式。但该公式并没有期望的那么简单。此外，Osserman [13], 研究了在光滑曲线 $C$ （在特征零的代数闭域上）上具有指定分歧的线性级数模空间的可约性，确定了一个递归公式，用于计算从任意亏格的曲线映射到 $\mathbb{P}$且具有指定临界点和重数的映射等价类数量。该递归建立在仅具有三个分歧点的有理函数数量之上。

**注 1.** 为便于参考，我们想指出，通过考察 [13] *e* [14] 中推导的公式以及在 *[6]*中建立的枚举，我们可以得到形状为 *2(d-1)* 的 *Kostka* 数的递归公式。

一个相关问题是，确定对 $\mathbb{CP}^1$ 中预先指定的临界点集合施加何种约束，才能使每个具有这些临界点的有理函数等价类都含有一个实代表元，即一个可表示为两个无公共零点且具有实系数的多项式之商的元素。这对应于 B. & M. Shapiro 猜想的最简单情形。该猜想指出，给定 $m \geq 2$ 和 $d \geq 2$，若对于一组具有复系数、度为 $m+d-2$ 的 $m$ 个多项式， $R = (f_1(z)\ f_2(z) \ldots, f_m(z)) \in (\mathbb{C}[z])^m$ 线性无关，则它们的朗斯基行列式只有实零点时， $X_R = \langle f_1(z)\ f_2(z)\ \cdots, f_m(z)\rangle_{\mathbb{C}}$ 是 $\mathbb{C}_d[z]$的一个向量子空间；$\mathbb{C}_d[z]$是次数至多为 $d > 0$ 的复多项式线性空间，而该子空间在 $\mathbb{R}_d[z]$中有一组基。换言之，存在一个矩阵 $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$，将基 $(f_1(z)\ f_2(z)\ \cdots, f_m(z))$ 变换为基 $(A \cdot f_1(z)\ A \cdot f_2(z)\ \cdots, A \cdot f_m(z)) \in (R_d[z])^m$，后者由实系数多项式构成。

朗斯基行列式是多项式

$$\mathrm{W}(f_1, f_2, \cdots, f_m) := \det\left(\left(\frac{d}{dt}\right)^{i-1} f_j(t)\right)_{i,j=1,\cdots,m}$$

W($f_1$, $f_2$, $\cdots$, $f_m$) 的度至多为 $m(d-1)$。上文提到的较简单情形对应于情形 $m=2$. 。与黎曼球面上的有理函数之间的关系如下：每个非恒定有理函数 $R=\frac{f}{g}$，其中 $f$ 和 $g$ 互素，都可以自然地与 $\mathbb{C}_d[z]$ 中由 $f$ 和 $g$, $\langle f,g\rangle_{\mathbb{C}}$ 张成的向量子空间相关联。$\mathbb{C}[z]$ 中二维平面的基变换矩阵是 GL(2, $\mathbb{C}$) 的一个元素 $A=\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$，它确定了由 $\alpha(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ 给出的 $\mathbb{CP}^1$ 的自同构。GL(2, $\mathbb{C}$) 对 $\mathbb{C}_d[z]$ 中二维子空间空间（线性空间 $\mathbb{C}_d[z]$, $G(2,\ \mathbb{C}_d[z])$ 中二维平面的 Grassmannian）的左作用（通过乘法）对应于 $\mathbb{CP}^1$ 的自同构群通过复合对 $\mathbb{CP}^1$ 的（不可约）有理函数空间的左作用。

此外，朗斯基行列式的 $R$、$W_R=f'g-fg'$的零点是 $R$的临界点。因此，对于$m=2$，该猜想等价于断言：若有理函数 $R$ 的所有临界点均为实数，即它属于 $\mathbb{RP}^1$，那么经过线性分式变换的后复合，可将其化为两个互素且具有实系数的多项式之商。

对于一个全 面的论述，以及对Shapiro猜想的进一步推广形式和其他 er 相关的内容 计数几何问题，请参阅 [18]。

将我们的推论D1 与*Goldberg*的结果 [7, 定理1.3。] 结合起来，便为5中的情形 $m=2$ 给出了一个新的证明（见Shapiro猜想的*Eremenko-Gabrielov-Mukhin-Tarasov- Varchenko*定理 [5],[12]）。这里给出的证明比先前的证明更具构造性，也更为初等。

# 2 预备知识

本节将介绍一些基本概念和结果。

## 2.1 图论

**定义 1** (胞腔图)。 定向拓扑曲面 $S=|\Gamma|$ 中的胞腔图 $\Gamma$ 是曲面 $S$的胞腔分解的1-骨架（即0 维胞腔与1 维胞腔的并集）。相应地，我们将曲面胞腔分解中的顶点、边 和面分别称为0维、1 维和2 维胞腔。

若胞腔图的每个面的边界都是有向圈，则称该胞腔图为有向的。胞腔图 $\Gamma$ 的顶点集、边集和面集分别记为 $V(\Gamma)$、$E(\Gamma)$ 和 $F(\Gamma)$。

注意，我们用 $|\Gamma|$表示胞腔图的底层曲面。

另一种 个基本概念如下：胞腔图的面集的一种特殊划分 h.

**定义 2** (A-B 交替面着色)。 设 $A$ 和 $B$ 是两种颜色。胞腔图 $G$ 的 $A$ 和 $B$ 交替面着色，是指将颜色 $G$ 赋予其面的一种方式，并满足：

- 相邻的面所赋予的颜色不同；
- 其边界左侧的所有面均为 $A$。

**定义 3** (圈的正性)。 设 $\Gamma$ 是一个带有 $A$-$B$ 交替面着色的胞腔图。每个圈 $\Gamma$ (即由 $\Gamma$ 的边首尾连接而成的简单闭曲线) 且其左侧仅有 $A$ 色面的，称为 正圈，相对于 $\Gamma$ 的这一面着色而言。

现在我们介绍一种图论技术工具，它对于将平衡图（见24）实现为拉回图（见10）至关重要。

**定义 4** （多极值可充电图）。多极值可充电图 $C:=C[I,O]$ :=$C[I,X;\ O,Y]$ 是一个二分图 $G[X,Y]$（即 $C$的底层图），它具有两个指定的顶点集：输入集 $I\subset X$ 和输出集 $O\subset Y$，以及一个非负实值函数$c$：$V(G)-(I\sqcup O)\to\mathbb{R}_{>0}$。 $c$ 是 $C$ 的顶点容量函数，其在顶点 $v$ 处的取值是 $v$的容量。若需强调容量函数，我们称 $C$ 为容量为 $c$的多极值可充电图。

$V(G)-I\sqcup O$ 中的顶点称为内部顶点。我们用 $int.V(G):=V(G)-(I\sqcup O)$表示内部顶点的子集。端点位于 $int.V(G)$ 中的边称为内部边。

**定义 5** (图上的边权赋值)。 图 $G$ 上的边权赋值是一个实值函数 $w\colon E(G)\to\mathbb{R}$。带有边权赋值的图称为加权图。

**定义 6** （可行赋权）。 多极值可充电图 $G$ 上的边权赋值 $w$ *wi th* 容量 $c$ 若满足以下附加约束，则称其为可行：

(1) $w$ 是一个严格正的实值函数，即 $w(E(G))\subset\mathbb{R}_{>0}$;

(2) $\sum_{x\in N_G(v)} w(\{x,v\}) = c(v)\ for\ each\ interior\ vertex\ v\in int.V(G).$

这些和

$$|w|^{in} := \sum_{x\in N_G(I)} \sum_{\substack{v\in I;\\ \{v,x\}\in E(G)}} w(\{v,x\})$$

*and*

$$|w|^{out} := \sum_{x\in N_G(O)} \sum_{\substack{v\in O;\\ \{v,x\}\in E(G)}} w(\{v,x\})$$

分别是 $w$ 的输入值和输出值。

多 -极值可充电图 $G$，其具有可行赋权，称为多极值赋权图 *h.*

**命题 1** （电荷守恒）。 设 $N = N[I,X;\ O,Y]$ 是一个具有恒定容量 $M\in\mathbb{R}_{>0}$ 的多极值可充电图。那么对于 $N$ 上的任意可行赋权 $w$，输入值和输出值相等。

证明。 我们将通过对多极值可充电图的内部边数进行归纳法来给出证明。

让我们开始验证基础情形。

设 $N$ 是一个具有恒定容量 $M$、仅有一条内部边 $e\in E(N)$、$n$ 条初始边和 $m$ 条终端边的多极值可充电图。并设 $w\colon E(N)\to\mathbb{R}_{>0}$ 是 $N$ 上的一个可行赋权，其中将权 $k>0$ 赋给 $e\in E(N)$。那么，

$$|w|^{in} + k = M = k + |w|^{out}$$

因此，我们有

$$|w|^{in} = |w|^{out}$$

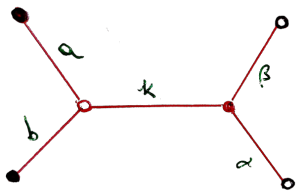



图 1: $a+b+k = k+\alpha+\beta$

给定 $k>1$，我们假设对于一个具有恒定容量 $M$ 且有 $1<l\le k$ 条内部边的任意多极值可充电图，下式成立

$$|w|^{in} = |w|^{out}$$

对于其上的任意可行赋权 $w\colon E(N)\to\mathbb{R}_{>0}$。

现在，设 $N'$ 是一个具有恒定容量 $M$、有 $k+1$ 条内部边且带有可行赋权 $w'\colon E(N')\to\mathbb{R}_{>0}$ 的多极值可充电图，赋权定义在 $N'$ 上。

设 $E_1$ 是 $N'$ 的一条内部边，它至少与 $N'$ 的一条终端边相邻，并且 $\epsilon_1 = w'(E_1) > 0$。设 $a_1 := w'(A_1)$ $a_2 := w'(A_2)\ \cdots$，$a_p := w'(A_p)$ 是 $w'$ 赋给与 $E_1$ 相邻且满足 $h\in\{1,2,\cdots,p\}$ 的每条终端边 $A_h$ 的权重列表。

$N'$ 中可能有多条内部边与终端边集合 $\{A_1, A_2,$ 相接 $\cdots,\ A_p\}$。因此，令 $E_1,\ E_2,\ \cdots,\ E_u$ 为这些可能存在的边，满足 $\epsilon_l = w'(E_l) > 0$；并令 $\{b_{ij}\}_{j=1}^{u_i}$ 为由 $w'$ 赋给与 $E_i$ 关联的 $N'$ 的内部边的权重列表。此外，令 $d_j > 0$ 为 $j \in 1、2,\ \cdots,\ r$ 赋给 $N'$ 中除已考虑的 $E_i$ 之外所有终端边的权重列表。

此外，令 $F$ 为由边 $\{A_1, A_2, \cdots, A_p\} \cup \{E_1, E_2, \cdots, E_u\}$ 构成的 $N'$ 的子图。那么，图 $N$：$= N' - F$ 是一个容量恒定为 $M$ 的二部多极可充电图，它有 $k+1-u \leq k$ 条内部边，并且在 $N$ 上有一个可行赋权 $w$：$w'|_{E(N)}$：$E(N) \to \mathbb{R}_{>0}$。因此，根据归纳假设，

$$\begin{aligned} |w'|^{in} = |w|^{in} &= |w|^{out} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{r} d_j\right) + \left(\sum_{i=1,j=1}^{u,u_i} b_{ij}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

但我们也有

$$\left(\sum_{l=1}^{u} \epsilon_l\right) + \left(\sum_{i=1,j=1}^{u,u_i} b_{ij}\right) = M = \left(\sum_{l=1}^{u} \epsilon_l\right) + \left(\sum_{l=1}^{p} a_l\right) \tag{2}$$

因此，

$$\sum_{i=1,j=1}^{u,u_i} b_{ij} = \sum_{l=1}^{p} a_l$$

因此，

$$\begin{aligned} |w'|^{out} &= \left(\sum_{j=1}^{r} d_j\right) + \left(\sum_{l=1}^{p} a_l\right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{r} d_j\right) + \left(\sum_{i=1,j=1}^{u,u_i} b_{ij}\right) \\ &= |w'|^{in} \end{aligned} \tag{3}$$

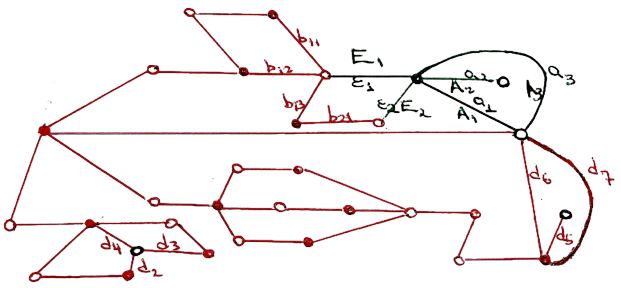



图 2：加权图（仅显示证明中提到的权重）

□

### 2.1.1 Machingson 图

Thurston 的关键思想是将实现问题?? 转化为图论中的匹配问题。以下是我们需要了解的该领域的基本概念和结果。

**定义 7 (匹配)。** 图 $G$ 上的匹配 是边 $\mathcal{M} \subset E(G)$ 的一个子集，这些边没有共同的顶点。当一个匹配覆盖了 $G$ 的所有顶点时，它称为完美匹配。

我们将二分图上的匹配寻找问题称为匹配问题</style】【。 .

注意，如果二分图 $G := G[X, Y]$，其划分为 $\{X, Y\}$，存在一个覆盖 $X$ 的匹配，那么对于 $X$, $S \subset X$ 的任意子集 S, 其相邻顶点集（来自 $Y$）必须至少包含与 S 所含顶点数量相同的顶点。霍尔定理 的关键在于，这样的条件就足够了。

**定义 8**（潜在配对点）。设 $G = G[X, Y]$ 为一个二分图。 $X$ 中一组顶点的潜在配对点集合为 $S \subset V$（$G$）$\cap X$，即 $S$ 在 $G$ 中的邻点集合，也就是说，

$$N_G(S) := \{x \in V(G); \exists\, e \in E(G), \psi_G(e) = \{x, v\}\}.$$

**定理 1**（霍尔婚姻定理-[2]）。 二分图 $G: = G[X, Y]$ 存在一个匹配，覆盖 $X$ 当且仅当

$$|N_G(S)| \geq |S|$$

适用于所有 $S \subset X$。

**推论 1**（完美匹配定理）。二分图 $G := G[X, Y]$ 存在完美匹配，当且仅当对所有 $S \subset X$, $|X| = |Y|$ 和 $|N_G$（$S$）$| \geq |S|$。

## 2.2 分支覆盖与胞腔图

设 $S_g$ 是一个亏格为 $g$ 的拓扑闭曲面（即紧致且无边界），并且 $f: S_g \to \mathbb{S}^2$ 是从 $\mathbb{S}^2$ 到 $m$ 个临界值的一个度 $d \geq 2$ 保定向分支覆盖。

设 $\Sigma$ 是一条有向若尔当曲线，它经过 $f$、 $R$（$f$）和 $\Gamma_f = \Gamma$（$f$, $\mathbb{R}$）的分歧点: $= f^{-1}$（$\Sigma$）是它们在 $f.\Gamma$ 下的原像，在 $S_g$ 中构成一个胞腔嵌入图。 $C$（$f$）表示 $f$ 的分歧点（临界点）集合。我们按照 $\Sigma$ 根据 $\mathbb{S}^2$ 的定向沿正向经过这些点的顺序，对 $f$ 的 $m = |R$（$f$）个临界值进行编号。临界值上方纤维中的点，以该临界值在 $R$（$f$）的编号标记。

除非另有说明，以下 $f: S_g \to \mathbb{S}^2$ 均如上所述。

**定义 9 (后临界曲线)。** $f$ 的后临界曲线 是相对于 $R(f)$的一个同伦类，其中的若尔当曲线 $\Sigma \subset \mathbb{S}^2$ 经过 $f$ 的临界值并映入 $\mathbb{S}^2$. 。这样的同伦类简记为 $\Sigma$，其代表元之一。

**定义 10**（拉回图（𝔊儿童画））。 给定一条后临界曲线 $\Sigma$，对于 $f: S_g \to \mathbb{S}^2$ . $f$ 关于 $\Sigma$的拉回图，或简称 $\Sigma$-拉回图 $f$，是相对于 $C_f$的$\Gamma$ 的同伦类: $= f^{-1}(\Sigma)$。

$\Gamma$ 的顶点集 是集合 $V(\Gamma) = f^{-1}(R_f)$。
$\Gamma$, $E$的边集 $(\Gamma)$，是连接 $V$中各点并通向 $\Gamma$ 的弧集 $(\Gamma)$.
给定一条若尔当曲线 $\Sigma \supset R(f)$，集合 $f_{-1}(\Sigma)$ 填满了 $S_g$，将 $S_g$ 分隔成有限个互不相交的2-胞腔（拓扑圆盘）的并集。

$X - \Gamma$ 的每个连通分支都是 $\Gamma$ 的面 （或者说边界分支）。它们都是拓扑圆盘。

**定义 11**（的分歧覆盖护照 $\mathbb{S}^2$)。 设 $f$: $S_g \to \mathbb{S}^2$ 是一个度为 $d$、分歧点集为 $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$的 $\mathbb{S}^2$ 分歧覆盖。 $f$ 的护照 $\pi = \pi(f)$ 是 $m$ 个 $d$的整数分拆列表， $\pi(f) = [\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m]$ 满足 $\pi_j = [d_{(j,1)}, d_{(j,2)} \cdots, d_{(j,l_j)}] \in \mathbb{Z}/\mathcal{S}_{l_j}$，用于编码分歧点上方各纤维的分歧轮廓。也就是说，数值 $d_{(j,k)}$ 是临界值 $w_j \in R(f)$上方的 $f$ 的纤维中各点的重数。

因此，对于每个 $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$，数据 $\pi_j = [d_{(j,1)}, d_{(j,2)} \cdots, d_{(j,l_j)}]$ 满足

- $d_{(j,k)} \in \{1, 2..., d\}$ 对所有 $k \in \{1, 2, \cdots, l_j\}$;
- 对于至少一个 $k \in \{1, 2, ..., l_j\}$, $d_{(j,\ k)} \neq 1$;
- $d = \sum_{k=1}^{l_j} d_{(j,k)}$

更方便地，我们通常将划分 $\pi_j$ 写成如下形式：

$$\pi_j^* = (a_1^{p^j(a_1)}, a_2^{p^j(a_2)}, 3^{p^j(a_3)}, ..., n_j^{p^j(a_{n_j})}) \tag{4}$$

与 $1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_{n_j} \le d$ 和 $p^j(a) = |\{k \in \mathbb{N};\ d_{(j,k)} = a\}|$。

$(Hence,\ d = \sum_{n=1}^{n_j} a_n p^j(a_n)\ and\ l_j = \sum_{n=1}^{n_j} p^j(a_n))$

给定一条若尔当曲线 $\Sigma \supset R(f)$，令 $\pi(f) = [\pi_1^*, \pi_2^*, ..., \pi_m^*]$ 为 $f$的护照。

对于每个点 $w_j \in R(f)$，都有 $l_j = \sum_{n=1} p^j(a_n)$ 个顶点位于 $\Gamma$中，并由 $f$投影到该点上。我们用数字 $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$. 标记这些顶点。其中，每个 $n \in \{1, 2, \cdots, n_j\}$对应 $p^j(a_n)$ 个$m$度为 $2 \cdot a_n$ 的顶点。而且 $|V(\Gamma)| = \sum l_j$.$_{j=1}$

度严格大于 2 的顶点是 $f$ 的临界点，其他顶点则是 $f$的临界值的正则原像。

$X - f^{-1}(\Sigma)$ 的每个连通分支在 $\Sigma \subset \mathbb{S}^2$ 左侧或右侧的 2-胞腔上，都由 $f$ 单射映射。因此，它们也是拓扑圆盘。每个面以有限条 若尔当弧 为边界，这些弧连接 $f^{-1}(R_f)$ 中的点。因此，拉回图 是胞腔图。

将 $\Sigma \subset \mathbb{S}^2$ 的左侧着为 A 色，右侧着为 B色，即可确定 A-B 交替着色，从而为 $\Gamma$的各面确定着色。

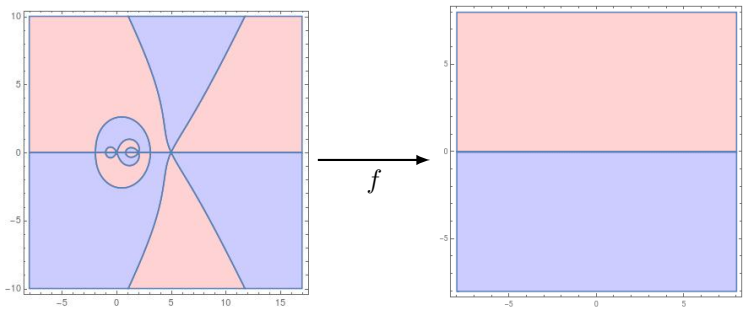



图 3：$f(z) = \dfrac{500 - 50z - 1215z^2 + 1388.5z^3 - 674.5z^4 + 166.5z^5 - 20.5z^6 + z^7}{-z^3 + z^4}$

**命题 2**（拉回图的结构）。设 $f\colon X \to \mathbb{S}^2$ 的护照为 $\pi_f = (\pi_1^*, \pi_2^*, ..., \pi_m^*)$。那么，$_m\Gamma = \Gamma_f(\Sigma) := f^{-1}(\Sigma)$ 是 $X$ 上的一个连通嵌入图，具有 $2d$ 个面和 $\sum l_j$ $_{j=1}$ 个顶点；其每个面都是一个若尔当区域，且其边界上仅包含一个与 $f$ 的每个临界值相对应的顶点，这些顶点的标号按绕该点的循环顺序排列。

此外，对于每个 $j \in \{1, 2, ..., m\}$ 和 $n \in \{1, 2, ..., n_j\}$.，都有 $p^j(a_n)$ 个 $V(\Gamma)$ 度为 $2a_n$ 、映射到临界值 $w_j$ 的顶点

证明。令 $\Sigma$ 为一条经过 $f$ 的临界值的 $Jordan$ 曲线。$f|_{X-\{f^{-1}(R(f))\}}$：$X-\{f^{-1}(R(f))\} \longrightarrow \mathbb{S}^2 - R(f)$ 是一个覆盖映射。令 $\Sigma[w_j, w_{j+1}]$ 为 $\Sigma$ 中连接 $w_j$ 与 $w_{j+1}$ 的 Jordan 弧，$\Sigma(w_j,\ w_{j+1}) = \Sigma[w_j, w_{j+1}] - \{w_j, w_{j+1}\}$ 和 $a \in \Sigma(w_j,\ w_{j+1})$。

$f$ 在 $a$ 上的纤维包含 $d$ 个不同点。对于每个点 $x_i \in f^{-1}(a)$，包含映射$Id_\Sigma(w_j, w_{j+1})$：$\Sigma(w_j, w_{j+1}) \hookrightarrow \mathbb{S}^2 - R(f)$ 可唯一地提升为映射 $S_i$：$\Sigma(w_j, w_{j+1}) \longrightarrow X - C(f)$，该映射定义在 $X - C(f)$ 中包含 $x_i$ 的连通分支上，因此给出了 $f$ 在 $\Sigma(w_j, w_{j+1}) - \{\}$ 上的截面。于是，由于它们在像上是同胚，$f^{-1}(\Sigma(w_j, w_{j+1}))$是一组若尔当弧，它们通过 $f$连接 $w_j$ 的原像与 $w_{j+1}$ 的原像。

类似地，我们可以证明 $f^{-1}(\mathbb{S}^2-\Sigma)$的连通分支是若尔当域，证明如下。

根据若尔当-肖¨恩弗利斯定理， $\mathbb{S}^2-\Sigma$ 是两个互不相交的若尔当区域的并，记为 $A$ 和 $B$。令$a\in A$ 和 $b\in B$。

$f|_{X-\{f^{-1}(\Sigma)\}}$： $X-\{f^{-1}(\Sigma)\}\longrightarrow\mathbb{S}^2-\Sigma$是一个覆盖映射。因此， $f$在 $a$和 $b$上方的纤维各包含 $d$ 个不同的点。对于每个点 $x_i\in f^{-1}(a)$和 $y_i\in f^{-1}(b)$，包含映射 $Id_A$： $A\hookrightarrow\mathbb{S}^2-\Sigma$和 $Id_B$： $B\hookrightarrow\mathbb{S}^2-\Sigma$ 分别唯一地提升为映射 $S_{1a}$： $A\longrightarrow X-\Gamma$ 和 $S_{1b}$： $B\longrightarrow X-\Gamma$，且这些映射分别定义在 $X-\Gamma$ 中包含 $x_1$ 和 $y_1$的连通分支上，从而在 $\Gamma$的每个面上为 $f$ 给出一个截面。因此，由于 $S_{1a}$和 $S_{1b}$在其像上是同胚， $X-\{f^{-1}(\Sigma)\}$ 是若干个与若尔当区域同胚的开集的并。于是，证明完毕。

命题上方的内容已作说明。 □

**定义 12.** $C_f\subset V(\Gamma)$ 中的一个顶点称为 $\Gamma$ 的角，而 $\Gamma$ 中连接两个角的一条路径称为 $\Gamma$的鞍连接。

由此，实现问题1 现在可以表述如下:

**Q 2.** 哪些胞腔图可以实现为拉回图？也就是说，哪些胞腔图可以作为嵌入图 $f^{-1}(\Sigma)\subset S_g$，对应于某个分歧覆盖 $f\colon S_g\to\mathbb{S}^2$ 和后临界曲线 $\Sigma$?

这个问题源于 Thurston 提出的以下问题:

**Q 3.** *What is the shape of a rational map?* (*see* [19])

根据命题2，Q 2中所讨论的嵌入图必须属于这样的胞腔图：它们允许一种由数量相等的 textcolordeep- pinkA 面和 B 面组成的 textcolordeeppinkA-B 交替面着色，且每个角只与同一个面关联一次。此外，这些图的顶点还必须能够适当地分组，使其与分支覆盖护照相容，如图4所示。后一条件将在下一节2.3中作适当介绍并加以考察。

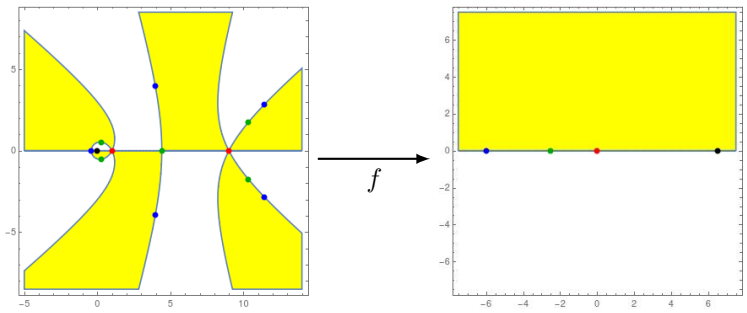
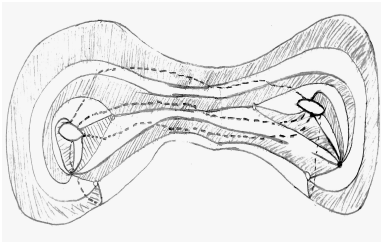



图 4

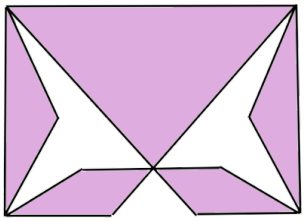
注意，根据命题 2，拉回图不会有连接某个角与其自身的鞍连接。本文讨论的胞腔图中，不会有顶点多次关联到图的同一个面。因此，我们不考虑含有环的胞腔图。事实上，这是平衡条件的推论。

接下来，我们将介绍全局平衡条件。

**定义 13** （全局平衡图）。 一个 全局平衡图 ， 类型为 $(g,d,m)$ 是亏格为 $g$, $S_g$ 的定向紧曲面上的胞腔图，具有 $2d$ 个面、 $m$ 个角，并且存在一种 $A$-$B$ 交替面着色，其中 $d$ 个面分别着为两种颜色。我们也称这样的嵌入图满足全局平衡条件。



(a) 类型为 (2，4，6) 的全局平衡图



(b) 偶图平衡　　非全局

图5:

现在注意，所有面都可以进行交替着色的图，其所有顶点的度都是偶数，也就是说，它是偶图（只有两种着色）。然而，正如图 5 所示，偶图并不一定是全局平衡图。

**定义14**。 全局平衡图的度为其面数的一半（也就是说，是相同颜色的面的数量）。

**引理1.** 度为 $d$ 、亏格为 $g$ 的全局平衡图上，角的最大数量为$2(g+d-1)$。

证明。根据欧拉公式，

$$2-2g=V(\Gamma)-E(\Gamma)+2d$$

由于每个角的度都大于或等于 4，因此 $E(\Gamma) \geq \frac{4V(\Gamma)}{2} = 2V(\Gamma)$。

因此，

$$V(\Gamma)=2V(\Gamma)-V(\Gamma)\leq E(\Gamma)-V(\Gamma)=2g+2d-2$$

□

## 2.3 根据图示构造分歧覆盖

现在我们将介绍一类嵌入图形，它们编码了据此构造分歧覆盖的方法。

**定义 15** （富化胞腔图）。*A* 富化胞腔图 是一个胞腔图，其中一些顶点的度为2（我们可以将它们视为图中的标记点）。

**定义 16** （顶点标记）。对于图 $\Gamma$，从顶点集到有限集 $J$ 的满射 $L:\ V(\Gamma) \longrightarrow J$ 称为图 $\Gamma$ 的一个顶点标记，其标记取自 $J$。对于满足 $L(v)=j$ 的顶点 $v \in V(\Gamma)$，我们记作 $v_j$.

**定义 17** （可容许顶点标记）。设 $\Gamma$ 是一个度为 $d>0$ 的富化全局平衡图，且每个面关联的顶点数均为同一个数 $m \geq 2$ （这里也将度为2的顶点计算在内）。从循环序集 $\{1<2<\cdots<m\}$ 到 $\Gamma$ 的顶点标记称为可容许标记，如果满足:

*(1)* 标记 $1<2<\cdots<m$ 在图 $\Gamma$ 的每个面周围按循环顺序出现。此外，沿着面边界圈按标记递增顺序遍历时，优选颜色始终保持在左侧;

*(2)* 对于每个标记 $j \in \{1<2<\cdots<m\}$，均成立

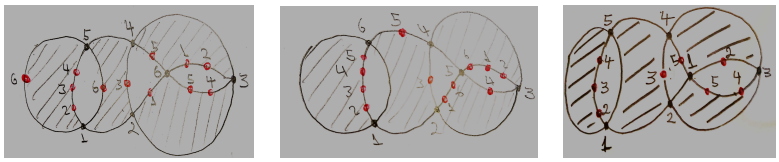
$$\sum_{k=1}^{l_j} \frac{deg(v_j^k)}{2} = d \tag{5}$$

其中，这些 $v_j^k$ 是 $\Gamma$ 中标记为 $j \in \{1<2<\cdots<m\}$ 的顶点，即 $\{v_j^1, v_j^2, \cdots, v_j^{l_j}\} = L^{-1}(j)$。

**定义 18**（可容许图）。可容许图是带有容许标记的增强型全局平衡图。可容许图的类型是其作为全局平衡图的类型。

可容许图若其所有角的度均为 $4$，且标记两两不同，则称其为一般的。

如下图所示，不同的可容许图可以具有相同的底层全局平衡图。



(a) (b) (c)

图 6：来自同一平面胞腔图的不同可容许图

### 2.3.1 从可容许图构造 $\mathbb{S}^2$ 的分支自覆盖

对 $\Gamma$ 的每个面，借助 Schoenflies 定理，我们将其闭包嵌入到 $\mathbb{S}^2$ 中，使得：

#### 2.3.1.1 粘合条件：

(g.1) 每个 A 面的闭包的像都等于一个闭二维胞腔，记作 $\Omega \subset \mathbb{S}^2$；每个 B 面的闭包的像都等于 $\mathbb{S}^2 - int(\Omega)$，其中 $int(\Omega)$ 是 $\Omega$ 的拓扑内部 $\subset \mathbb{S}^2$；

(g.2) 具有相同标签的顶点通过面嵌入映到同一点；

(g.3) 具有公共鞍连接的两个面的嵌入在这些公共鞍连接上相同。

因此，我们通过将所有这些嵌入粘合在一起，构造了一个有限度连续映射 $f$。由于 $\mathbb{S}^2$ 中的每个点上方恰有 d 个点，除了角被投影到的那些点。这些点就是分歧点。

令 $\Sigma := \partial\Omega$。

根据构造，$f\colon |\Gamma| - \Gamma \longrightarrow \mathbb{S}^2 - \Sigma$ 是局部同胚。令 $C \subset \mathbb{S}^2$ 为 $\Gamma$ 中度严格大于 2 的顶点集合，并令 $R := f(C) \subset \mathbb{S}^2$。由于 $f^{-1}(\Sigma) = \Gamma$，且嵌入在鞍连接上重合，$f$ 在 $\Gamma - C$中的每一点处都是局部同胚。

还要注意，$f$ 在纤维 $f$ 中，每个点 $v_j^k$ 上方对应的临界值$w_j := f(\{v_j^1, \cdots, v_j^{l_j}\})$ 的局部度等于 $deg(v_j^k)$ 2。由于在 $w_j$的任意去心邻域中的每个点，其上方在 $v_j^k$ 周围恰有那么多个点（参见图7）。

因此，$f$是一个护照为 $\pi = (\pi_1, \cdots, \pi_m)$ 的分歧覆盖，其中

$$\pi_j = \left( \frac{deg(v_j^1)}{2}, \frac{deg(v_j^2)}{2}, \cdots, \frac{deg(v_j^{l_j})}{2} \right) \quad \text{for each } j \in \{1, 2, \cdots, m\}.$$

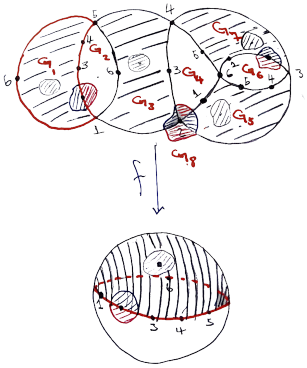


图 7：分歧覆盖的构造 $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$

**定义 19**。给定一个可容许图 $\Gamma$ 对于 $\Gamma$，一个面嵌入系统是指为 $\Gamma$ 的每个面指定一个在粘合条件 2.3.1.1下其闭包的嵌入。给定一个枚举 $\{F_i\}_{i=1}^{i=2d}$，属于 $F(\Gamma)$ 我们将 $\Gamma$ 的面嵌入系统记作 $\amalg g_i$，其中 $g_i : \overline{F_i} \to \mathbb{S}^2$ 是附属于 $F_i$的嵌入。

因此，我们得到了以下定理。

**定理 2.** 对于每个亏格为 $g$、带有面嵌入系统$(\Gamma, \amalg f_i)$ 的可容许图，都存在一个分歧覆盖映射 $S_g \to \mathbb{S}^2$，使得 $\Gamma$ 是一个拉回图。

现在，根据一致化定理，存在唯一的同胚

$$\mu : (\mathbb{S}^2, f(C)) \to (\mathbb{CP}^1, \{0, 1, \infty, v_1, \cdots, v_{m-3}\})$$

使得 $\mu(\alpha) = 1$, $\mu(\beta) = 0$且 $\mu(\gamma) = \infty$，从而为 $(\mathbb{S}^2, f(C))$ 定义一个复结构，其中选取$\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset f($ $C)$。由于 $f$在 $\mathbb{S}^2 - C$上是局部同胚，该复结构可以通过 $f$拉回到 $(|\Gamma|, C)$ 上，得到一个复结构，记作 $\nu := f^*\mu : (|\Gamma|, C) \to (X, \{c_1, c_2, \cdots, c_k\})$，其中$k = |V(\Gamma)| = C$。

因此，该映射

$$F = F_{\nu\,\mu} := \mu \circ f \circ \nu^{-1} : (X, \{c_1, c_2, \cdots, c_{2d-2}\}) \to (\mathbb{CP}^1, \{0, 1, \infty, v_1, \cdots, v_k\})$$

是一个全纯函数。

于是，我们得到了以下结果。

**推论 2.** 对于每个亏格为 $g$、配有一组面嵌入的可容许图$(\Gamma, \amalg f_i)$，都存在一个全纯分歧覆盖 $S_g \to \mathbb{CP}^1$ (即，一个亚纯函数)，使得 $\Gamma$ 是其拉回图。

注意，每一组可容许图的面嵌入都会给出一个分歧覆盖。那么，这些映射之间是否存在某种关系?

**命题 3.** 设 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ 是两个等价的可容许图，$\amalg g_i$ 和 $\amalg h_i$ 分别是它们的两组面嵌入。则存在保向同胚 $\phi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$和 $\psi : |\mathcal{G}| \to |\mathcal{H}|$，使得

$$\phi \circ g = h \circ \psi \tag{6}$$

其中，$g$ 和 $h$ 分别是由$(\mathcal{G}$、$\amalg g_i)$ 和$(\mathcal{H}$、$\amalg h_i)$构造的分歧覆盖。

证明。设 $\Sigma_g := g(\mathcal{G})$ 和 $\Sigma_h := h(\mathcal{H})$。由 Sch ¨oenflies 定理可得一个同胚 $\phi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$，使得 $\phi(\Sigma_g)$ $= \Sigma_h$，并且若 $V(\mathcal{G}) \subset \mathbb{S}^2 - \Sigma_g$ 和 $V(\mathcal{H}) \subset \mathbb{S}^2 - \Sigma_h$ 是 $\mathcal{G}$ 的 A 面在 $G$ 和 $H$ 作用下的胞腔像，则 $\phi$ $(V_G) = V_H$ （B 面在 $G$ 和 $H$ 作用下的像也同理）。此外，$\phi \circ G|_{V(\mathcal{G})} = H \circ I|_{V(\mathcal{G})}$。

因此，对于 $\mathcal{G}$ 的每个面 $F$，映射 $\psi(z) := H^{-1}|_{I(\overline{F})} \circ \phi \circ G$: $|\mathcal{G}| \to |\mathcal{G}|$，针对每个 $z \in F$，确定了一个从 $|\mathcal{G}|$ 到 $|\mathcal{H}|$ 的同胚，满足

$$\phi \circ G = H \circ \psi \tag{7}$$

□

**引理 2.** 设 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ 是两个等价的胞腔图。设 $g$: $|\mathcal{G}| \to \mathbb{S}^2$ 和 $h$: $|\mathcal{H}| \to \mathbb{S}^2$ 是两个连续满射，它们在每个面的拓扑闭包上限制为同胚，并且满足

$$g(\overline{F}) = h(I(\overline{F})) \tag{8}$$

对于 $\mathcal{G}$的每个面 $F$， $I$ 是证明这两个胞腔图等价的同胚。那么存在一个同胚 $\mathcal{I}$: $|\mathcal{G}| \to |\mathcal{H}|$ （实际上，$|\mathcal{G}| = |\mathcal{H}|$），使得

$$g = h \circ \mathcal{I}. \tag{9}$$

证明。 利用同胚 $I$ 和性质 (2) 定义

$$\mathcal{I}(z) := h^{-1}|_{h(I(\overline{F}))} \circ f(z) \tag{10}$$

对于 $\mathcal{G}$的每个面 $F$，对每个 $z \in F$。

因此，$\mathcal{I}$ 是一个同胚，这是基于假设 $f$ 和 $h$ 在每个.....上限制为同胚 ch
闭面 的 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ 并且根据构造，它满足（9）。 □

在下一节中，我们将全面推广 Thurston 的一条定理，该定理最初是针对二维球面上的一般分支自覆盖映射证明的。

# 3 Thurston 定理的一般版本

Thurston 局部平衡条件定义的一个重要依据是，在二维球面上，每条简单闭曲线都会将二维球面分成两个二维胞腔。这正是*Jordan* 曲线定理的内容。但这一事实对正亏格曲面并不成立。因此，如果我们想更广泛地运用 Thurston 的概念，就必须解决这一缺陷。

**定义 20**。若一条简单闭曲线 $\gamma$ 位于曲面 $S$ 中，且分离的，则 $S - \gamma$ 有两个连通分支。否则， $\gamma$ 是非分离的。

**定义 21** （协边多重环）。设 $\Gamma$ 是一个允许 $A$-$B$ 交替面着色的胞腔图。称一组不相交环 $L := \{\gamma_1, \cdots, \gamma_k\}$ 属于 $\Gamma$ 是 的协边多重环 $\Gamma$，如果:

*i.* $S - \{\gamma_1, \cdots, \gamma_k\}$ *is disconnected;*

*ii.* 存在 $S - \{\gamma_1, \cdots, \gamma_k\}$ 的一个连通分支 $R$，使得 $\partial R = \bigsqcup \gamma_n, n=1$

当每个圈 $\gamma_n \in L$ 都是正的时，我们称 $L$ 为 $\Gamma$ 的正协边多重环。并且，$R$ 是 $L$ 的内部。

现在我们可以介绍局部平衡条件了。

**定义 22** （局部平衡图）。设 $\Gamma$ 为一个带有交替 $A$-$B$ 面着色的胞腔图。若对于任意 $\Gamma$ 是局部平衡的，当且仅当对于任意 $A$-$B$ 交替面着色以及任意 正协边多重环 $\Gamma$，其内部的 $A$ 面的数量（即位于该多重环内部的面）严格多于 $B$ 面。

Thurston 为 4-正则平面胞腔图确立了以下定义。

**定义 23** (Thurston 的局部平衡条件 [8])。 一个 4-正则平面胞腔图 $\Gamma$ 是 局部平衡的，如果对于任意 $A$-$B$ 交替面着色，以及其中任意正圈， $\Gamma$ 圈内 $A$ 面的数量严格大于 $B$ 圈上的面数。

尽管在平面情形下，定义 22 似乎比 Thurston 给出的定义限制更多，但二者实际上等价。

**命题 4**（定义22的含义）。对于平面全局平衡图，这两个定义局部平衡性的定义是等价的。 *ns*

证明。由*Jordan* 曲线定理可立即得出，定义22 蕴含定义23。现在来证明反向蕴含。也就是说，我们将证明，若一个平面平衡图满足定义23 ，那么它也满足定义22。

设 $\Gamma$ 是一个带有交替A-B 面着色的平面全局平衡图，而 $\Lambda$ 是与 $\Gamma$余边界的正多重圈，其内部为 $R$。

令 $Y$ 为 $\mathbb{S}^2 - R$ 的一个连通分支。由于 $R$ 是连通的， $Y$ 的边界只有一个连通分支 $\gamma \in L$。

因此， $\gamma$ 包围了 $Y$，留下 A 个面位于其左侧。
因此，根据 局部平衡 条件，我们可以得出结论：$Y$ 外部粉色面比蓝色面多。

令 $Y_1$、$Y_2$、$\cdots$、$Y_n$ 为 $\mathbb{S}^2 - R$的连通分支，且 $a_k$ 和 $b_k$ 分别表示 A 面在 $Y_k$ 中的数量和 B 面在 $Y_k$中的数量。 $a_R$ 和 $b_R$ 分别是 A 面和 B 面在 $R$中的数量。
因此，根据上述论证

$$a_k < b_k \tag{11}$$

对于每个 $k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$
并且，由于，

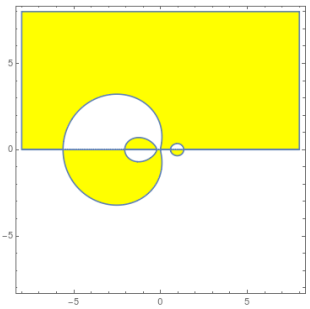
$$a_R + \sum_{k=1}^{n} a_k = b_R + \sum_{k=1}^{n} b_k \tag{12}$$

然后，

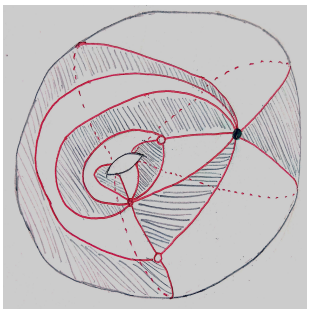
$$a_R > b_R \tag{13}$$

□

**定义 24**（平衡图）。 平衡图 是定义在定向紧曲面上的胞腔图，同时满足全局平衡和局部平衡。平衡图的类型 是其作为全局平衡图的类型。



（a）平衡 图，类型为 (0,4,6)



（b）平衡 类型为 (1,4,4)

**定理 A** (Thurston 的定理的一般版本)。 一个胞腔嵌入图 $\Gamma$ 进入一个属 $g$ 定向的紧致曲面 $S_g$ 是拉回图，当且仅当它是平衡图。 *us*

证明。 我们将紧密沿用 Thurston 给出的最初证明[8]。
将拉回图提升为平衡图的关键，在于认识到其组合结构源自相邻二分图上的完美匹配。

因此，设 $f: X \to \mathbb{S}^2$ 是一个度为 $d$、具有 $m$ 个临界值的分歧覆盖映射。考虑 $\Sigma$，它是 $f$的一条后临界曲线，并设 $\Gamma$ 为相应的拉回图。设 $A \subset \mathbb{S}^2$ 和 $B \subset \mathbb{S}^2$ 为 $\mathbb{S}^2 - \Sigma$的两个连通分支。

对于每个二价顶点，我们在与其相邻的 Γ两个面上各标记一个点。因此，每个二价顶点在其相邻的两个面中各对应一个标记点。由于每个面的边界上恰好包含 $m$ 个顶点，完成上述操作后， Γ的每个面上都将包含 $m - e$ 个点，其中 $e$ 是该面周围角的数量。每个点对应 $f$的一个不同临界值。

考虑来自 Γ 的图 $G := G(\Gamma) := (V = DA \sqcup DB,\ E)$，其中 $DX$ 是那些在 $f$ 下的像为 $X \in \{A, B\}$ 的面上的点集，而 $E$ 是 Γ的邻接关系。

那么，上文所述的二价顶点拆分过程会在图 $G$上给出一个完美匹配。

另一方面，若有一个平衡图 Γ，我们也可以通过在 Γ 的每个面 $F$ 中插入$m - e_F$ 个点来构造该邻接图 $G$，其中 $m$ 是 Γ 的角数， $e_f$ 是与 $F$相邻的角数。在这种情况下， $G$ 的顶点集根据平衡图 Γ的面着色划分为两个子集。

因此，为了 clu 将相邻面上位于其相邻鞍连接两侧的这些点两两聚在一起

s 随后变为一个图论匹配问题。

现在， $G$ 上存在完美匹配 Γ，这使我们能够通过为每一对匹配的点插入二价顶点，将其扩充为一个新图。我们仍用 Γ表示这个新图。经过扩充后， Γ 现在有 $m$ 个顶点与每个面相邻。

最后， 如果我们证明 Γ 支持可容许顶点标记，那么根据定理2我们就完成了 e.

**3.0.0.1 让我们证明 $if$ 部分：**

L设 Γ $\subset X$ 是紧致定向曲面 $X$ 上的一个拉回图，其后临界曲线为 Σ .

由命题2 可知，这些面都是若尔当区域。

将粉色涂在 $\Sigma \subset \mathbb{S}^2$ 的内部，并将其记为 $P$；将蓝色涂在$\mathbb{S}^2 - \Sigma$ 的另一个连通分支上，并将其记为 $B$。

点 $p \in P$ 和 $b \in B$ 在 $X - \Gamma$中各有恰好 $d$ 个不同的原像，因为所有临界值都位于 Σ上。由于 $f$ 的连续性，原像 $\tilde{p} \in f^{-1}(p)$和 $\tilde{b} \in f^{-1}(b)$不可能位于 Γ的同一个面中，设该面为 $F$；否则，我们可以用一条曲线 $\gamma$将 $\tilde{p}$和 $b$连接到 $F$中。这样， $f(\gamma)$将成为一个连通集，把 $p \in P$与 $b \in B$连接起来，却完全包含在 $f(F)$中，而后者等于 $P$或 $B$。这显然不可能，因为 $P$和 $B$ 是互不相交的开集。由于 $f: X - \Gamma \to \mathbb{S}^2 - \Sigma$ 是一个局部同胚，我们也不可能有 $\tilde{p_0}$， $\tilde{p_1} \in f^{-1}(p)$位于同一个面中（回想局部同胚的提升性质）。当然，对于 $b$上方的那些点，情况也一样。因此， Γ 中有 $d$ 个面涂成粉色， Γ中有 $d$ 个面涂成蓝色。这意味着 Γ 是全局平衡的。

令 $L = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_k\}$ 为 Γ 的一个余边界正多重圈，其内部为 $R$。
Let:

(1) 对每个 $n \in \{1, \cdots, k\}$，令 $E_n > 0$ 为 Γ 在 $\gamma_n$ 中的那些不与 $\gamma_n$内部蓝色面相邻的角的数量；

(2) 令 $a$ 为 $R$中的粉色面数量；

(3) 令 $b$ 为 $R$中的蓝色面数量；

(4) 令 $D_A$ 为 $R$中那些粉色面内的点数；

(5) 令 $D_B$ 为 $R$中那些蓝色面内的点数；

那么：

(1) 由于围绕面 $B_j$ 的边数 $e_j$ 等于其边界上的角数，因此

$$D_B = (m - e_1) + (m - e_2) + \cdots + (m - e_B) = mb - (\sum_{j=1}^{b} e_j) \tag{14}$$

(2) 并且

$$D_A = ma - (\sum_{j=1}^{b} e_j) - \sum_{n=1}^{k} E_n \tag{15}$$

假设 $E_n = 0$，对每个 $n \in \{1, \cdots, k\}$ 都成立。那么， $X - R$ 的每个连通分支都是一个单连通域。这源于以下事实： $\Gamma$ 连通，且 $E_n = 0$ 蕴含每个正圈 $\gamma_n$ 只与 $R$ 外部的一个蓝色面相邻。因此， $X - R$ 的每个连通分支都是一个蓝色面；又由于 $\Gamma$ 的蓝色面与粉色面数量相同，设为 $d > 0$，于是可得：

$$b = d - k < d = a \tag{16}$$

现在，假设 $E_n > 0$ 至少对一个 $n \in \{1 \cdots, k\}$成立。那么，根据婚姻定理 1 给出的必要条件，我们有：

$$mb - (\sum_{j=1}^{b} e_j) = D_B \leq D_A = ma - (\sum_{j=1}^{b} e_j) - \sum_{n=1}^{k} E_n$$

since $\sum_{n=1}^{k} E_n \geq 1$ ,

$$b < a \tag{17}$$

因此， $\Gamma$ 是局部平衡。

#### 3.0.0.2 现在，让我们证明 *only if* 部分：

设 $\Gamma$ 是一个具有 $m$ 个角的平衡图。
由于 e 每个面 $F$ of $\Gamma$ 都是一个若尔当区域，围绕 $F$ 的 $\Gamma$ 的鞍连接数量 is 等于 $\partial F \subset \Gamma$ 上角的数量。
回想 每个面 $F$ of $\Gamma$ 包含 $m - e_F$ 个点，其中 $e_F$ 是与 $F$ 相邻的角的数量 .
令 $S$ b .....从 $\Gamma$ 的蓝色面中任取一组点。
那么，我们的任务是：证明 $S$ 的潜在配对点至少与 $S$ 一样多。这就是霍尔婚姻定理 [2]的充分条件。

注意，对于蓝色面中的一个点，其潜在配对点恰好与同一面中任意其他点的潜在配对点相同。因此，我们可以修改 $S$ ，将某个面中其余所有点都加入其中，只要该面中至少有一个点已在 $S$ 中。此修改不会影响潜在配对点的数量；当然，扩大的集合 $S$ 中任意点子集都满足该条件，无论其本身是否满足该条件。因此，基于这一点，我们将 $S$ 视为 $\Gamma$ 的一组蓝色面 $U$ 中所有点构成的子集。

将集合 $U$ 连同其相邻的粉色面构成的拓扑闭包记为 $R$ ，也就是说，$R$ 是 $U$ 中的面、其相邻的粉色面以及这些面的所有边界的并集。
那么， $R$ 中粉色面内的点，恰好就是与 $S$中的点相对应的潜在配对点。 .
注意，除角处外， $R$ 的边界左侧都是粉色面。
如果 $R$ 的内部不连通，那么某个连通分支中指向蓝色面的点，只能与 $R$内部同一连通分支中粉色面内的点配对。因此，对于 $R$内部的每个连通分支，我们都应当有足够的配对点来匹配 $S$ 中的个体。这样，我们就能为 $R$ 中的所有个体找到足够的配对点。于是，只要确保每个连通分支都满足该条件，就可以将 $R$ 视为内部连通的情形。
Let:

(1) $D_A$ 表示 $R$内部粉色面中的点的数量；

(2) $D_B = |S|$ 表示 $R$内部蓝色面中的点数；

(3) $E_1$ 表示 $\partial R$ 上仅有一个来自 $R$ 的面与其相邻的角数（在上文证明拉回图的局部平衡条件时，该数为 $E_\gamma$ ）；

(4) $\mu_k$ 为 $\partial R$ 上从 $R$ 一侧有 $k$ 个蓝色面与之相邻的角的数量；

(5) $\nu_k$ 为 $R$ 内部度为 $k$的角的数量；

(6) $a$ 为 $R$中的粉色面数量；

(7) $b$ 为 $R$中的蓝色面数量。

因此，回到方程14 和15 ，我们有：

$$\begin{aligned} D_B = mb - \sum_{j=1}^{b} e_j &= mb - \frac{1}{2}\left(\sum_{j=2}^{d} 2\mu_j + \sum_{j=2}^{d} 2j\nu_{2j}\right) \\ &= mb - \left(\sum_{j=1}^{d} \mu_j + \sum_{j=2}^{d} j\nu_{2j}\right) \end{aligned} \tag{18}$$

and

$$\begin{aligned} D_A &= ma - \frac{1}{2}\left(2E_1 + \sum_{j=1}^{d} 2\mu_j + \sum_{j=2}^{d} 2j\nu_{2j}\right) \\ &= ma - \left(E_1 + \sum_{j=1}^{d} \mu_j + \sum_{j=2}^{d} j\nu_{2j}\right) \end{aligned} \tag{19}$$

$d$ $d$由局部平衡条件可得 $b \le a-1$，并且我们还有 $E_1 + \sum \mu_j + \sum \nu_{2j} \le m$，其中 $j=1$ $j=2m$ 是 Γ的角总数。

因此

$$\begin{aligned} D_A &= ma - \left(E_1 + \sum_{j=1}^{d} \mu_j + \sum_{j=2}^{d} j\nu_{2j}\right) && (20) \\ &\ge ma - \left(m + \sum_{j=1}^{d} \mu_j + \sum_{j=2}^{d} j\nu_{2j}\right) \\ &= m(a-1) - \left(\sum_{j=1}^{d} \mu_j + \sum_{j=2}^{d} j\nu_{2j}\right) \\ &\ge mb - \left(\sum_{j=1}^{d} \mu_j + \sum_{j=2}^{d} j\nu_{2j}\right) \\ &= D_B && (21) \end{aligned}$$

这就是所需的不等式。

因此，我们已经证明，对于任意一组 $S$ 来自 Γ的蓝色面中的点，将这些点映射到 $S$ 中的潜在配对点集合，其大小至少为 $S$。于是，霍尔婚姻定理 [3, 定理 2.1.2。] 结合全局平衡性，保证了存在一个完美匹配。

对于每一对匹配的点，我们都在包含这两个点的面之间的公共边上得到一个新顶点。对于来自同一对面的每一对匹配点，这些新顶点彼此不同。

随后， Γ 经过扩充，变成了一张新的图，其中插入了许多二价顶点；我们仍将其记作 Γ。

但是，除了每个面都与 $m$ 个顶点关联之外，这些顶点还必须按照图的定向循环编号，使得每个面标记在与其关联的角处给出的编号相同；此外，这种标记还必须符合可容许护照。所谓“符合护照”，是指对于每个标记 $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$，具有该标记的顶点的度的一半之和等于 $\Gamma$ 的度 $d$。

因此，我们必须确保总能对这样的增强平衡图按照这些规范进行顶点标记。也就是说，每个平衡图都是可容许图。因此，根据定理 2，证明就完成了！

**引理 3。** 上述得到的增强平衡图是可容许的。

引理 3 的证明。我们必须给出 $\Gamma$ （增强图）的一个可容许顶点标记。 $\Gamma$有$m$ 个角。我们可以如下归纳地构造可容许顶点标记 $N\colon\ V(\Gamma) \to \{1 < 2 < \cdots < m\}$。

首先，选取一个粉色面 $F_1 \in F(\Gamma)$，并将与其关联的 $m$ 个顶点按绕该面逆时针方向依次编号为 1，2，$\cdots$，$m$，同时使该面保持在左侧。

对于一个与 $F_1$ 相邻的（已标记）角，例如 $c_1$，我们考虑与它关联的所有粉色面。然后，在每个面上为左侧的 $m-1$ 个顶点补全标记，并遵循与其关联的、已标记的角 $c_1$，使标记递增的顺序与正向定向一致。设 $F_2$ 是与 $c_1$ 关联的一个面，同时也与另一个角（例如 $c_2 \in \partial F_1$）关联。由于每个顶点必须分配唯一的标记，我们必须确保：按照上述方法为与 $F_2$ 相邻的顶点标记时，分配给角 $c_2 \in \Gamma$ 的标记，必须与根据其作为与 $F_1$ 关联的顶点所分配的标记相同。我们将证明确实如此；不过，为了便于阅读，我们把这部分证明留到最后，接下来先假定这一点成立并继续论证。

由于面只有有限个，且每个面都只有一个与其相邻的 $m$顶点，因此这一过程会在某个时刻停止。这样，我们便构造出了一个满射 $N\colon\ V_\Gamma \to \{1, 2, \cdots, m\}$。并且，在每个蓝色面处，指标 1、2、$\cdots$、$m$ 依次出现，但顺序与边的定向相反（回想一下，边的定向使粉色面位于其左侧）。

但可能有某个指标 $k \in \{1, 2, \cdots, m\}$（实际上也可能不止一个）无法通过映射 $N$由某个角取到，也就是说，$N^{-1}(k)$仅由 $\Gamma$的二价顶点构成。

若情况并非如此，那么 $N$ 就定义了一个到 $\Gamma$ 的可容许顶点标记，因为根据构造，每个粉色面上只有一个顶点被赋予标记 $j$，而且我们有 $d$ 个面。此外，若 $e$ 是标记为 $j$ 的顶点的度，则恰有 $\frac{e}{2}$ 个粉色面与之关联。

另一方面，令 $M \subset \{1, 2, \cdots, m\}$ with $|M| = p < m$ 为满足 $N^{-1}(k)$ 仅由二价顶点组成的标记 $k \in \{1, 2, \cdots, m\}$ 的子集。然后，我们可以从增强图中删除所有标记属于 $M$ 的顶点，接着使用标签集 $\{1, 2, \cdots, m-p\}$，重复上述构造 $N$ 的过程。这样，我们就会得到一个顶点标记，使图中不止一个角被标记为同一个标签；至少有一个属于 $\{1, 2, \cdots, m-p\}$ 的标签如此。基于上述相同的理由，该标记是可容许的。

现在，让我们证明关于上述顶点标记构造过程的（整体）一致性这一剩余部分。

令 $\{e_j^1\}_{j=1}^x \subset E(\Gamma^*)$ 和 $\{e_j^2\}_{j=1}^y \subset E(\Gamma^*)$ 分别为二部对偶图 $\Gamma^*$ of $\Gamma$ 中的边集，它们由与 $F_1$ 和 $F_2$ 相邻的鞍连接所对应的对偶边组成，并且这些边形成 $\Gamma$ 中连接 $c_1$ 与 $c_2$ 的正向路径。

因此，我们考虑由通向 $\Gamma^*$ 的路径组成的子图 $G^* \subset \Gamma^*$；这些路径的起始边位于 $\{e_j^1\}_{j=1}^x \subset E(\Gamma^*)$ 中，终止边位于 $\{e_j^2\}_{j=1}^y \subset E(\Gamma^*)$ 中。$G^*$ 有两组特定顶点：一组是单元素集 $I\colon = \{F_1^*\}$；另一组是子集 $O \subset V(\Gamma^*)$，它由 $\Gamma^*$ 中与那些邻接于连接 $c_1$ 和 $c$ 的 $F_2$ 的正向路径相邻的蓝色面相对应的顶点组成。

注意，如果圈 $\gamma\colon = \prod_{j=1}^{x} e_j^1 \cdot \prod_{j=1}^{y} e_j^2$ 是底层曲面 $X$ 的一条分离曲线，并且不包含面 $F_1$ 的连通分支 $\Omega \subset X$ 是一个圆盘，那么 $G^* \subset \Gamma^*$ 的定义条件与将 $G^* \subset \Gamma^*$ 定义为 $\Gamma^*$ 的子图相同；该子图由 $\Omega$ 内的部分以及与通向 $\gamma$ 的鞍连接相对应的边组成。

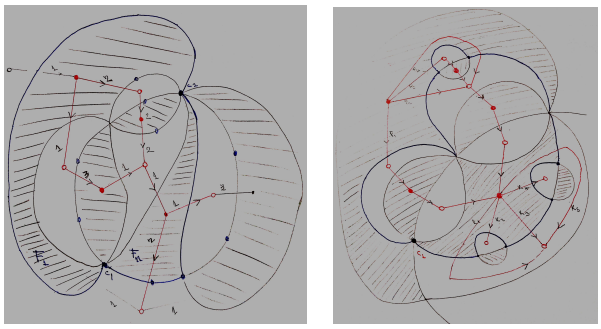
我们为 $G^* \subset \Gamma^*$ 的每条边 $e \in E(G^*)$ 赋予正整数 $n-1$，其中 $n$ 是其对偶鞍连接 $e^* \in E(\Gamma)$ 上顶点的数量。因此，对于 $G^*$ 中不属于 $I \subset V(G)$ 的每个顶点

或 $O \subset V$（$G$），与其关联的边上所赋数字之和等于 $m$。也就是说，赋予上述结构的 $G$ 是一个荷为 $m$ 的多极值加权图。

令 $\epsilon_j^1 \geq 1$ 为分配给 $j \in \{1, 2, \cdots, x\}$ 的边 $e_j^1$ 的编号，并令 $\epsilon_j^2 \geq 1$ 为分配给 $k \in \{1, 2, \cdots, y\}$ 的边 $e_k^2$ 的编号。

$x$ $y$ $x$ $y$如果 $\sum \epsilon_j^1 = \sum \epsilon_j^2$，从 $c_1$ 到 $c$ 的正向路径 $\prod (e_j^1)^*$ 和 $\prod (e_j^2)^*$ 上的顶点数相同，那么如前所述，根据与 $F_2$ 相邻的顶点的标记赋予 $c$ 的标记，将与根据关联于 $F_1$. 的顶点的标记所赋予的标记一致。

$x$ $y$但是，命题 1 保证了数值 $\sum_{j=1} \epsilon_j^1$ 和 $\sum_{j=1} \epsilon_j^2$ 之间预期的相等关系，因为它们是具有恒定容量 $m$ 的多极值加权图的输入值和输出值 $G$。



(c) (d)

图8

□

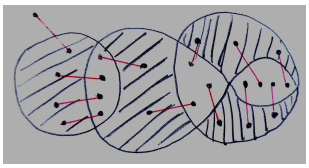
这样我们就完成了。 □

为便于参考，我们将在下面陈述该定理；它是前一个证明后半部分的一个关键特征。

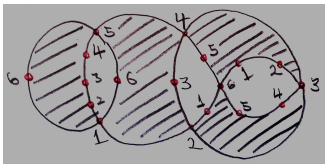
**定理3**。 每个平衡图都是可容许的。

现在请注意，可容许顶点标记取决于为丰富平衡图而实现的匹配。因此，一个平衡图（即不含二价顶点）可以是多个分歧覆盖的拉回图，但这些分歧覆盖的度都相同。请参见下面给出的示例：

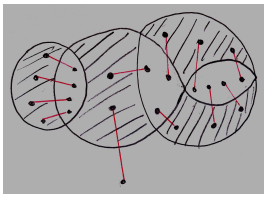
**例1.** 同一平衡图上的不同匹配：



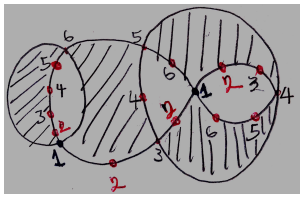
(a) 从完美匹配丰富平衡图来自完美匹配的



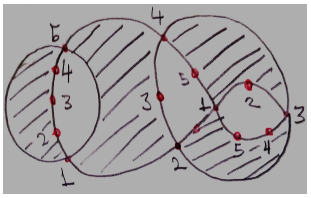
(b) 由 (a) 得到的可容许图



(c) 从完美匹配丰富平衡图所得



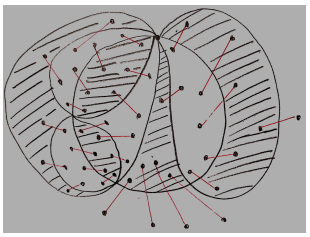
(d) “多余的”可容许标记



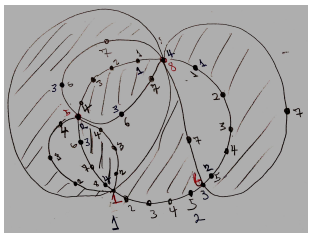
（e）由（b）得到的可容许图

图 9

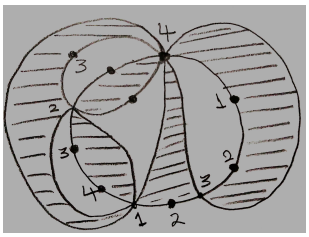
**例 2**（另一个例子）。



（a）利用完美匹配丰富平衡图



（b）“多余”的可容许标 belling



(c) 来自 (b) 的可容许图

图10

# 4 具有实临界点的有理函数

黎曼球面上的有理函数称为实函数，是指它可以表示为实系数多项式的商。

这类具有实临界点的实函数有一条典范后临界曲线，即实直线 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$，因为对于每个实有理函数，$f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$。

每个有理 有理函数 $f \in \mathbb{R}(z)$ 满足 $C(f) \subset \mathbb{R}$ $f(z) = f(z)$ 对所有 $z \in f^{-1}(\mathbb{R})$ 均成立。因此 re, 对于这类 函数，其拉回图 $\Gamma = f^{-1}(\mathbb{R})$ 关于 $\mathbb{R}$ 对称。

因此，根据对称性，每个拉回图 $\Gamma = f^{-1}(\mathbb{R})$ 都由其进入上半平面的非实边 $\mathbb{H}^u :=\{x+iy \in \mathbb{C};\ y>0\}$。$\Gamma$ 的任意两条边都不相交，除非它们在 $\mathbb{R}$ 中的终点处相交。我们的定理 A 蕴含此类图是平衡的。

**例3.** 某些度为3 的有理函数的实拉回图：

$f_1(z) = \dfrac{z^2\left(-\left(\sqrt{7}+2\right)z+2\sqrt{7}+1\right)}{\left(\sqrt{7}-4\right)z+3}$, $f_2(z) = \dfrac{z^2\left(\left(\sqrt{7}-2\right)(-z)+2\sqrt{7}-1\right)}{\left(\sqrt{7}+4\right)z-3}$ *and* $f_3(z) = \dfrac{z^3}{3z-2}$, *re-*

谱集*i* *l*

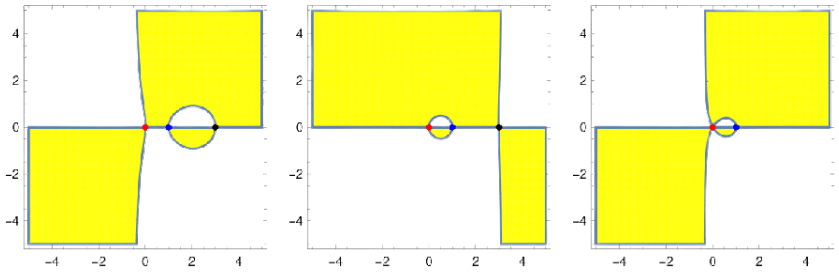


图 11：实拉回图

图 11 中的第一个和第二个拉回图分别对应于两个唯一的不等价三次一般实有理函数，它们固定点 0，1 和 $\infty$，且其临界点为 0，1，3，$\infty$。

对拉回图结构的这种分析，为如何构造具有给定分歧轮廓的真正的度为$d$ 的实有理函数提供了指导（见）。

首先，让我们介绍一些我们将要用到的基本概念和结果。

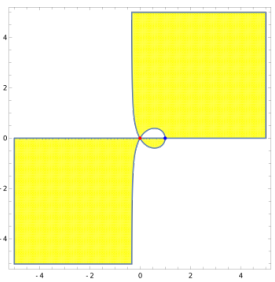
**定义 25**（实全局平衡图）。一个 标准实平衡图 是一个满足以下条件的平面全局平衡图 $\Gamma \subset \mathbb{S}^2$：

*(i)* $V(\Gamma) \subset \mathbb{RP}^1$;

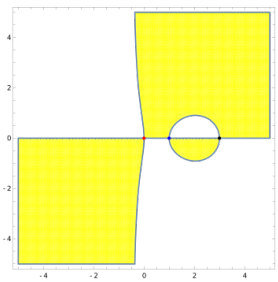
(*ii*) $\Gamma$ 的1-骨架包含 $\mathbb{RP}^1$，且在复共轭下不变，：$z = x + iy \mapsto \overline{z} := x - iy$。。

若一个度为 $d$ 的全局平衡图同伦于一个标准实全局平衡图，则称其为实 的。若它有 $2d-2$ 个顶点，且每个顶点的度（价）都等于4，则称其为简单 的。

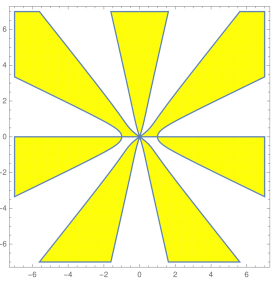
在实平衡图中，实圈 是每个证明其为实图的同伦都会将其变形到的那个圈。



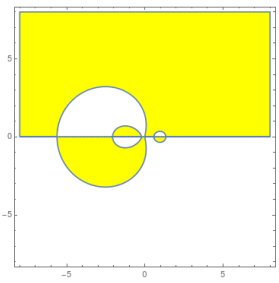
(a) 非单纯，度为3



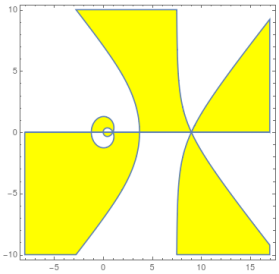
(b) 度为3，单纯



(c) 非单纯，度为7 (多项式)



(d) 单纯，度为4



(e) 度为6

图12：实全局平衡图

## 4.1 构造实有理函数

现在，我们将看看如何从给定的实可容许图构造具有实临界点的实有理函数。

设 $\Gamma \subset \mathbb{CP}^1$ 是一个度为 $d$ 的实可容许图。
若尔当-舍恩弗利斯定理¨给出一组面嵌入 $\amalg\iota_k$，使得对于 $\Gamma \subset \mathbb{CP}^1$：

(*i*) 对每个面 $G_k \in F(\Gamma)$，对于 $k = 1, 2, \cdots, 2d$，$\iota_k(\partial G_k) = \overline{\mathbb{R}}$;

(*ii*) $\overline{\iota_k(z)} = \iota_l(\bar{z})$，对所有 $z \in |\Gamma| = \mathbb{CP}^1$.

因此，由推论 2，$\amalg\iota_k$ 确定一个有理函数 $F: \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ 使得$F(z) = F(\bar{z})$。

因此，我们已经证明:

**定理 4**。对于每个实可容许图 $\Gamma$，都存在一个全纯分歧覆盖映射 $\mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$，以 $\Gamma$ 为拉回图，并满足恒等式

$$\overline{F(z)} = F(\bar{z})$$

对所有 $z \in \mathbb{C}$均成立。

**引理 4**。给定多项式 $A$、$B$、$C$、$D \in \mathbb{C}[z]$，使得

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \in \mathbb{C}(z) - \mathbb{C}$$

那么存在 $k \in \mathbb{C} - \{0\}$，使得

$$A = k \cdot C \quad and \quad B = k \cdot D.$$

证明。 $f(z) := \frac{A}{B}$ 和 $g(z) := \frac{C}{D}$ 的零点和极点相同，且重数也相同，因为它们是两个映射 $f$ 和 $g$ 的局部度。

因此， $A$ 和 $C$ 以及 $B$ 和 $D$ 具有相同的零点和重数，于是

$$A = k_1 \cdot C \quad \text{and} \quad B = k_2 \cdot D$$

对于某个 $k_1$, $k_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$。但是，$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$，因此 $k_1 = k_2$。

□

**命题5.** 亚纯函数 $F: \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ 若对所有 $z \in \mathbb{CP}^1$ 都满足恒等式 $F(z) = F(\bar{z})$，则它是一个实系数多项式的商。

证明。 设 $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$。首先，注意对于非恒定有理分式 $f \in \mathbb{C}(z)$，新得到的$F(z) = f(z)$只需取 $f$ 各系数的复共轭即可得到。

那么，关系式 $F(z) = F(\bar{z})$与引理4共同推出 $P(z)$和 $P(z)$的系数相等，因此 $P$ 是一个实系数多项式。我们对 $Q(z)$也得出相同结论。因此，Q的所有系数都是实数。

□

下面的推论可由定理 4 和命题 5直接得出。

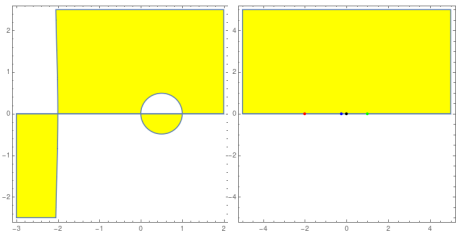
**推论 3.** 对于每个容许实图 $\Gamma$，都存在一个实有理函数，使 $\Gamma$ 成为相对于后临界曲线 $\mathbb{RP}^1$ 的拉回图。

现在，我们将注意力转向这样一个事实：给定的实有理函数可能具有非实拉回图。对于给定的有理函数，拉回图取决于所选后临界曲线的同伦类型。下面给出一些例子:

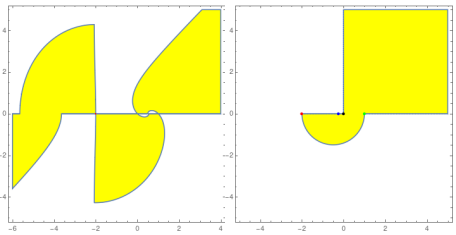
**例 4.** 若干不同的后临界曲线对应于

$$f(z)=\frac{\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{7}\right)z^3+\left(\sqrt{7}-2\right)z^2}{\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{7}-3\right)+2\right)z-1}$$

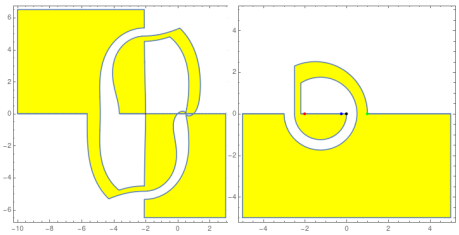
及其相应的拉回图。 $f$ 的临界点为 $-2$、$0$、$1$ 和 $\infty$。



(a) 拉回图 $\Gamma(f,\ \mathbb{R})$ / 后临界曲线 $\mathbb{R}$



(b) 拉回图 $\Gamma(f,\ \Sigma_1)$ / 后临界曲线 $\Sigma_1$



(c) 拉回图 $\Gamma(f,\ \Sigma_2)$ / 后临界曲线 $\Sigma_2$

图 13：实全局平衡图

**引理 5.** 每个简单实全局平衡图都至少允许一种一般可容许顶点标记。

证明。 设 $\Gamma\subset\mathbb{CP}^1$ 是简单实全局平衡图。根据定理 A， $\Gamma$ 在其上允许一种可容许顶点标记（每个完美匹配对应一种，如 **??**中所示，忽略循环置换）。完美匹配可能无法产生一般标记。在这种情况下，我们可以扰动该匹配，生成一个新的增强图，其标记应两两不同（见下图示例）。 □

**引理 6.** 对于两个给定的非同伦一般实可容许图，它们的顶点集均为 $\{c_1,c_2,\cdots,c_m\}\subset\mathbb{RP}^1$，推论 3 所对应的实有理函数并不等价。

证明。 设 $f$ 和 $g$ 为对应的实有理函数。根据假设，存在 $\sigma\in Aut(\mathbb{CP}^1)$ 使得 $g=\sigma\circ f$。由于 $\mathbb{RP}^1=f(\mathbb{RP}^1)$ $f^{-1}\ \sigma^{-1}\ \mathbb{RP}^1\ =f^{-1}\ \mathbb{RP}^1\ =\Gamma_f$ $\Gamma_g\qquad\Gamma_f$ $(\mathbb{RP}^1)$，因此 $(\mathbb{RP}^1)\ =\mathbb{RP}^1$。

所以， $\Gamma_g=g^{-1}(\mathbb{RP}^1)\ (\ (\ ))\ (\ )$。但这与二者不同伦相矛盾。 □

现在我们将看到，每个全局平衡图也都是局部平衡的。

## 4.2 实全局平衡图的局部平衡性

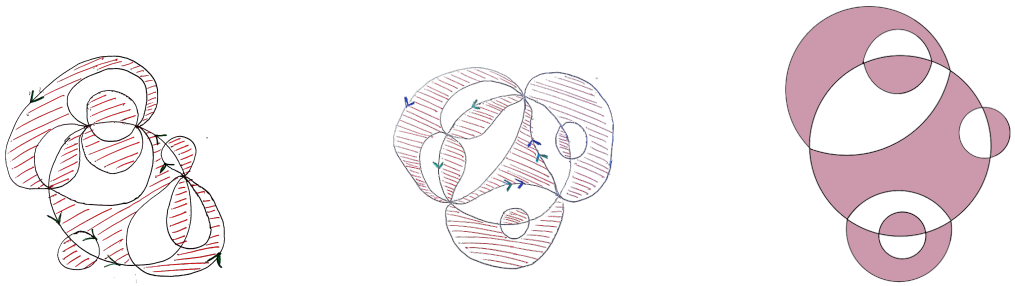
首先 ，我们将证明任意简单全局平衡图都满足局部平衡条件 n.

**定理 C.** 每个全局平衡实图都是局部平衡的。

证明。 设 $\Gamma\subset\mathbb{CP}^1$ 是一个简单标准全局平衡实图，具有一个A-B交替面着色，且 $\gamma$ 是一个正圈 $\Gamma$。 $A_\gamma$ 和 $B_\gamma$ 分别是A 面和B 在 $\gamma$内部的面数。

作为 $\Gamma$ 一个实的、简单的全局平衡图，它的每个面至少有一条边界边包含于 $\mathbb{R}$中，我们将这类边称为实边。根据面着色的交替性质，每个B面都有一个与其共享相同实边的对应A 面。由于 $\gamma$ 只保留其左侧相邻的A 面，因此，对于每个B 面 $F_B$ 位于 $\gamma$ 内部，其对应的 $A$ 面 $F_A$ 也位于 $\gamma$内。出于同样的原因，必定还存在至少一个 $A$ 面与位于B 内部的这些面的非实边相邻 $\gamma$。因此， $A_\gamma\geq B_\gamma+1$。

由此我们得出， $\Gamma$ 是局部平衡的。



(a) 9 次　　(b) 8 次　　(c) 6 次

图 14：实全局平衡图

如果 $\Gamma$ 是标准的非简单 $\gamma$，则一个正圈可能包含B 面，这些面不与实圈关联（但其所有角都在实圈上）。那么，每个这样的B 面都需要一个 $A$ 面将其与 $\gamma$分隔开。并且，由于面着色的交替性，必定还至少存在一个 $A$ 面将位于B 内部的这些面分隔开 $\gamma$，因此 $A_\gamma \geq B_\gamma + 1$。

该图　胞腔图的图结构和面着色不受同伦变形的影响，因此　　ce
这些结果　对任意实全局平衡图仍然成立，至此证明完毕。imagem

□

现在，定理A给出了以下推论。

**推论 4**。对于每个带有可容许标记的实全局平衡图 $\Gamma$，都存在一个具有实临界点的实有理函数，其相对于 $\mathbb{RP}^1$ 的拉回图为 $\Gamma$。

因此，利用引理6 我们推得

**命题 6.** 给定 $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \subset \mathbb{RP}^1$，以 $C \subset \mathbb{RP}^1$ 为临界点集合的实有理函数的等价类数量至少与标准实全局平衡图的数量相同。

## 4.3 一个组合问题

**问题 1.** 考虑两个整数 $d \geq 2$ 和 $2 \leq n \leq 2d-2$。给定 $n$ 个点，即 $\{c_1 < c_2 < \cdots < c_n\} \subset \mathbb{RP}^1$（其循环次序由 $\mathbb{R}$ 的标准次序诱导），位于 $\mathbb{RP}^1$ 中，以及一个由整数构成的列表 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$，满足 $1 \leq a_k \leq d-1$ 和 $\sum_{1 \leq k \leq n} a_k = 2d-2$。

在以下约束条件 4.3.0.1下，将这些点 $\{c_1 < c_2 < \cdots < c_n\} \subset \mathbb{RP}^1$ 用若尔当弧连接，有多少种方式?

**4.3.0.1 非交叉配对条件：**

$(p.1)$ 这些弧位于 $\mathbb{H}^u$ 中，端点在 $\mathbb{RP}^1 (p.2)$ 这些弧彼此没有交点，但端点处可能相交。；$(p.3)$ 有 $a_k$ 条弧到达 $c_k$，但没有一条弧连接 $c_k$ 与其自身。

**定义 26** (非交叉配对)。 一个 **类型为** $(d, \boldsymbol{a})$ 的非交叉配对，是该问题的每一种解，也就是说，是连接各点 $\{c_1 < c_2 < \cdots < c_n\} \subset \mathbb{RP}^1$ 并遵循约束条件 4。3。0。1。

我们将把这个问题与计数性组合学中的一个标准主题联系起来。该主题有广泛的应用，涉及数学的诸多领域，例如交换代数、表示论、交叉理论、退化和排列。

### 4.3.1 半标准杨表

给定一个整数 $d \geq 2$ 和一个由正整数组成的 $n$元组 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$，满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2d - 2$. 形状为 $2 \times (d-1)$、权为$\mathbf{a}$ 的半标准杨表是由两行 $d-1$ 个方格组成的杨表填充，填入集合 $\{1, 2, \cdots, n\} \subset \mathbb{Z}$ 中的整数，并满足：

- 整数 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 出现了 $a_i$ 次；
- 整数在每一行中从左到右弱递增，并在每一列中从上到下严格递增。

二元组 $(d,\mathbf{a})$ 是半标准杨表的类型。我们将使用简写 $SSYT(d, \boldsymbol{a})$，表示类型为 $(d,\mathbf{a})$ 的半标准杨表。

**例5**。

- SSYT（5；（2，1，1，2，1，1））：

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 4 | 4 |
| 2 | 3 | 5 | 6 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 4 |
| 2 | 4 | 5 | 6 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 4 | 5 | 6 |

- SSYT（8；（1，3，3，5，2））：

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| 2 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 |

如上所示，给定$(d,\ \mathbf{a}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^n$ 使得 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2d - 2$ 可能存在不止一个类型为$(d,\ \mathbf{a})$的SSYT。

**定义 27**。对于整数 $d \geq 2$ 和一个由正整数组成的 $n$-元组 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 1}$，满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2d - 2$，形状为 $2 \times (d-1)$ 且类型为$\boldsymbol{a}$的**Kostka数** $K(d, \boldsymbol{a})$，是形状为 $2 \times (d-1)$ 且类型为 $\boldsymbol{a}$的所有半标准杨表的数量。

**命题 7.** 在所有类型为1-到-1 的非交叉配对集合（$d$,$\boldsymbol{a}$）与所有形状为半标准杨表 $2 \times （d-1）$ 且类型为$\boldsymbol{a}$的集合之间，存在一一对应关系。

证明。给定一个类型为（$d, n$,$\mathbf{a}$）的非交叉配对，我们按如下方式构造一个半标准杨表，其形状为$2 \times （d-1）$，类型为$\mathbf{a}$：

1. 一个由两行组成、含有 $d-1$ 个方格的杨表；2. 从左到右，在第一行填入 $a_1$ 个数字 1；3. 对于 $k \in \{2, 3, \cdots, n\}$，若 $f_k$ 是连接 $a_k$ 与满足 $j > k$ 的点 $a_j$ 的弧数，而 $b_k$ 是连接 $a_k$ 与满足 $j < k$ 的点 $a_j$ 的弧数；4. 从左到右，在第一行填入 $f$ 个数字 $k$；5. 从左到右，在第一行填入 $b$ 个数字 $k$；6. 按递增顺序选取 $k \in \{2, 3, \cdots, n\}$ 进行填充，最终得到一个半标准杨表，其形状为 $2 \times (d-1)$。

可以反向进行这一构造。由此，我们得到这两个集合之间的一一对应。

□

**定义 28**。给定一个度为 $d$ 的平衡图 $\Gamma$，以及其角的一个枚举 $C = \{c_1, c_2, \cdots, c_n\} \subset \mathbb{RP}^1$，该枚举遵循逆时针方向的循环次序。相对于该枚举，$\Gamma$ 的价数剖面 是有序列表 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_C = (d_1, d_2, \cdots, d_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 1}$，其中 $d_i = deg(c_i)$。

现在我们将看到如何构造一个度为 $d$ 标准实平衡图 $\Gamma$，其价数剖面$\mathbf{2a} + \mathbf{2} = (2a_1 + 2, 2a_2 + 2, \cdots, 2a_n + 2) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 1}$ 由类型为 $(d, \mathbf{a})$ 的非交叉配对构造，适用于 $\mathbf{a} = \mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 1}$。

#### 4.3.1.1 由非交叉配对构造实平衡图

考虑一个类型为 $(d, \mathbf{a})$ 的非交叉配对，其中给定了 $n \in \mathbb{N}$ 个点，$C = \{c_1, c_2, \cdots, c_n\} \subset \mathbb{RP}^1$。将（射影）实直线、该非交叉配对的弧及其关于 $\mathbb{RP}^1$ 反射到下半平面 $\mathbb{H}^d := \{x + iy \in \mathbb{C}; y < 0\}$ 的并集确定为一个连通图，记作 $\Gamma$，其中每个点 $c_i$ 都是度为 $2a_i + 2 \in \mathbb{N}$ 的顶点。$\Gamma$ 将有 $2d$ 个面。

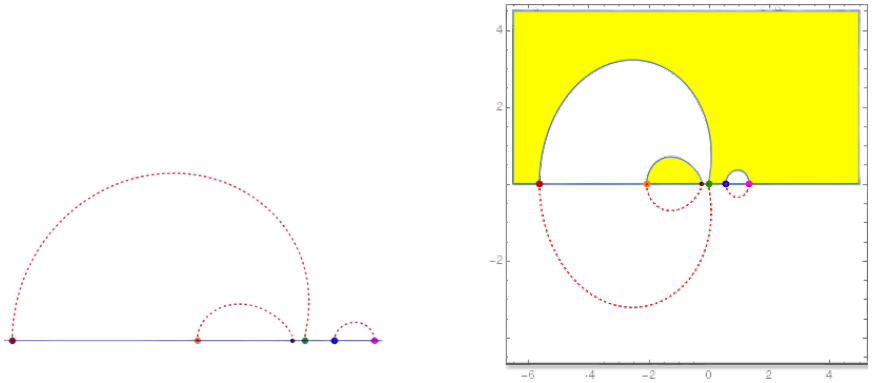



图 15：6 个实点的类型为 $(3,(1,1,1,1,1,1))$ 的非交叉配对 $\in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^6$

由于对称性，显然只需对其各面进行交替面着色，即可将其转化为全局平衡图。

因此，我们刚刚根据给定的类型为 $(d,\mathbf{a})$ 的非交叉配对构造出了一个度为 $d$ 的实全局平衡图，记作 $\Gamma$。显然，该实全局平衡图的价数剖面为 $(d, 2\mathbf{a} + (2, 2, \ldots, 2)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^n$。

**定理 B.** 给定 $d \geq 2$，对于 $\mathbb{RP}^1$ 中的每 $n \in \{2, 3, \cdots, 2d-2\}$ 个点，以及满足 $\sum a_k = 2d - 2$ 的 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{N}^n$，$n$，存在其价数剖面 $_{k=1}$为整数向量 $2\boldsymbol{a} + 2$ 的 $(,\mathbf{a})$ 标准实全局平衡图。

证明。这直接由命题 7得出，因为每个 类型为 $K(d,\mathbf{a})$ 的非交叉配对都对应一个唯一的、度为 $d$ 且分支数据为 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 1}$ 的带标记实平衡图（由 4.3.1.1中的构造得到）。 □

当权重向量为 $= (1, 1, \cdots, 1) \in \mathbb{N}^{2d-2}$ 时，数目 $K(d, \mathbf{a})$ 是第 $d$ 个卡特兰数，$C(d) := \frac{1}{d}\binom{2d-2}{d-1}$.

由权重向量 $\mathbf{a} = (1, 1, \cdots, 1) \in \mathbb{Z}^{2d-2}_{\geq 1}$ 通过定理 B 得到的实全局平衡图，其所有顶点的度均为 4。

于是，作为推论，我们得到了：

**推论 B1.** 对于 $\mathbb{RP}^1$ 中的每组 $2d-2$ 个点，都存在 $C(d) := \frac{1}{d}\binom{2d-2}{d-1}$ 个以这些点为顶点且度为 4 的标准实全局平衡图。

根据命题 6，我们得到

**定理 D.** 给定一个整数 $d \geq 2$，对于 $\mathbb{RP}^1$ 中的每组 $n \in \{2, 3, \cdots, 2d-2\}$ 个点、$\{c_1, c_2, \cdots, c_n\} \subset \mathbb{RP}^1{}_n$ 以及向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{N}^n$，若满足 $\sum a_k = 2d - 2$，则至少存在 $K(d、\mathbf{a})$ 个等价类，其中的实有理函数的度为 $d \geq 2$，并且在 $c_i$ 处有重数为 $a_i$ 的临界点。

特别地，由推论 B1可得，

**推论D1。** 对于 $2d-2$ 中给定的每组点，至少存在 $C(d) := \frac{1}{d}\binom{2d-2}{d-1}$ 个等价类的一般实有理函数，使所选的这些点都是其临界点。

### 4.3.2 证明B.与M. Shapiro猜想

本节将为$B.$ 与$M.\ Shapiro$的猜想给出一种新的证明。与 Eremenko 与 Gabrielov 得到的证明相比，这种新证明的复杂度更为自然、简单，对复杂的非离散数学工具的依赖也少得多， [5], [6], 因此更容易理解。尽管如此，我们仍须借助 Goldeberg 的结果 [7]。

**定理5** (Eremenko-Gabrielov-Mukhin-Tarasov-Varchenko定理)。 一般有理函数$R$： $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 若所有临界点均为实数，则等价于一个实有理函数。

证明。 给定 $C(R) \subset \mathbb{R}$，根据推论 $D1$ ，临界点集为 $C$ 的实有理函数的实非等价类数量至少为 $C_d = \frac{1}{d}\binom{2d-2}{d-1}$。

但是，根据Goldberg [7], ，具有指定临界点集的一般有理函数的等价类数量至多为 $C_d$。因此，得证。

□


**致谢**

作者谨向其博士导师Sylvain Bonnot致以谢意，感谢他富有启发性的讨论，并让作者关注到论文 [8]。作者还感谢纯粹与应用数学研究所（IMPA - 里约热内卢）在2023年博士后暑期项目期间提供的支持与热情款待。本文的一些初步结果已在作者的博士论文 [10] 中阐述，该论文部分获得了CNPq、巴西国家科学技术发展委员会的资助。


# 参考文献


[1] R. H. Bing, *The geometric topology of 3-manifolds*, 美国数学会专题论文集，第40卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1983年。MR728227[2] J. A. Bondy 和 U. S. R. Murty, *Graph theory*, 数学研究生教程，第244卷，施普林格，纽约，2008年。MR2368647[3] Reinhard Diestel, *Graph theory*, 第五版，数学研究生教程，第173卷，施普林格，柏林，2017年。MR3644391[4] D. Eisenbud 和 J. Harris, *Divisors on general curves and cuspidal rational curves* **74** 1983 3, , 371 418 724011

《Invent. Math.》（），第–期。MR[5] A. Eremenko 和 A. Gabrielov, *Rational functions with real critical points and the B. and M. Shapiro conjecture in real enumerative geometry* 2 **155** 2002 1, 105 129 ,

《Ann. of Math.》（） （），第–期。[6] A. Eremenko、A. Gabrielov、M. Shapiro 和 A. Vainshtein, *Rational functions and real Schubert calculus*, 《Proc. Amer. Math. Soc.》134（2006），第4期，949–957页。MR2196025[7] Lisa R. Goldberg, *Catalan numbers and branched coverings by the Riemann sphere* **85** 1991 2, , 129 144 1093002

《Adv. Math.》（），第–期。MR[8] Sarah Koch 和 Tan Lei, *On balanced planar graphs following W. Thurston*, 2015年。电子预印本 = arXiv:1502.04760，主要分类=math.GT。[9] S.K. Lando、R.V. Gamkrelidze、V.A. Vassiliev 和 A.K. Zvonkin, *Graphs on surfaces and their applications*, 《数学科学百科全书》，施普林格·海德堡，2003年。[10] Arcelino Lobato, *Branched coverings of the 2-sphere*, 2021年。博士论文，圣保罗大学，2021年，USP数字图书馆，https://doi.org/10.11606/T.45.2021.tde-11052021\OT1\textendash020459。[11] E. Mukhin、V. Tarasov 和 A. Varchenko, *Schubert calculus and representations of the general linear group*, 《J. Amer. Math. Soc.》22（2009），第4期，909–940页。MR2525775[12] Evgeny Mukhin、Vitaly Tarasov 和 Alexander Varchenko, *The B. and M. Shapiro conjecture in real algebraic geometry and the Bethe ansatz* 2 **170** 2009 881 2552110 ,

《Ann. of Math.》（） （），第2期，863–页。MR[13] Brian Osserman, *The number of linear series on curves with given ramification*, 《Int. Math. Res. Not.》2003（2003），第47期，2513–2527页。MR2007538[14] I. Scherbak, *Rational functions with prescribed critical points*, 《Geom. Funct. Anal.》12（2002），第6期，1365–1380页。MR1952932[15] Leila Schneps（编）， *The Grothendieck theory of dessins d'enfants*, 伦敦数学会讲义系列，第200卷，剑桥大学出版社，剑桥，1994年。收录了1993年4月19日至24日在吕米尼举行的儿童画会议论文。MR1305390[16] Jennifer Schultens, *Introduction to 3-manifolds*, 数学研究生教程，第151卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2014年。MR3203728

[17] G. B. Shabat, *Belyi pairs and fried families*, Steklov数学研究所论文集 **307** （2019），第。代数、数论与代数几何，306–318。英文版发表于 Steklov数学研究所论文集 **3**07（2019），第 1 期，281–293。MR4070072[18] Frank Sottile, *Real Schubert calculus: polynomial systems and a conjecture of Shapiro and Shapiro*，实验数学 **9** （2000），第 2 期，161–182。MR1780204[19] William Thurston, *What are the shapes of rational functions?* 10 09 2010 https://mathoverflow.net/questions/38274/what-are-the-shapes-of-rational-functions 31 03 2023

MathOverflow，....., （版本：.....）。[20] J. Tomasini, *Géométrie combinatoire des fractions rationnelles*，博士论文，2014年。[21] , *Realizations of branched self-coverings of the 2-sphere*，《拓扑学及其应用》 **196** （2015年），第 A 部分，31–53。MR3422731