arXiv:2304.07211v1 [math.GT] 14 Apr 2023

将高效测地线限制到非分离曲线复形

Seth Hovland 和 Greg Vinal

摘要

在亏格为 g,$\mathcal{C}(S_g)$，的闭可定向曲面的曲线复形中，由 Birman、Margalit 和 Menasco 于 [1]引入的、称为高效测地线的高效测地线，为任意两个顶点之间的一组优选有限测地线。用于确立高效测地线存在性的主要工具是点图，它记录了参考弧与一条测地路径所对应的简单闭曲线之间的交点模式。其构造背后的思想是，一条起初并不高效的测地线在其对应的点图中包含某些形状。这些形状随后对应于能够减少其与参考弧交点数的手术。在本文中，我们证明高效测地线算法可以限制在非分离曲线复形上；证明过程将涉及对点图及其对应手术的分析。此外，我们证明，对于曲线复形中的任意测地线，都可以得到一条高效测地线，使得其顶点（端点可能除外）全部为非分离曲线。

关键词：曲线复形、高效测地线、非分离曲线。

1 引言

1.1 曲线复形与测地线

紧曲面 S 的曲线复形 $\mathcal{C}(S)$ 是一个单纯复形，其顶点对应于 S 中本质简单闭曲线的同痕类，边则连接代表元互不相交的顶点。我们可以通过将两个顶点 u，v 之间的距离定义为连接它们的任意路径中边数的最小值，为 $\mathcal{C}(S)$ 的 0-骨架赋予度量。本文与 [1], 一样，假设我们讨论的曲面是闭曲面，且亏格至少为二。一个基本结果表明，在这种情况下，$\mathcal{C}(S)$ 是连通的。因此，$\mathcal{C}(S)$ 中任意一对顶点之间的距离都有定义。问题在于，曲线复形实际上连通性过强。事实证明，$\mathcal{C}(S)$ 是局部无限的（对于任意顶点 v，都存在无限多个与之相邻的顶点 w），并且大多数顶点对之间都存在无限多条测地线。因此，我们需要选取一组优先考虑的有限测地线子集。引入紧测地线的想法正是源于此，在 [3]中。

[1], Birman、Margalit 和 Menasco 提出了一种不同的优先有限测地线集合，称为高效测地线。这组测地线的独特之处在于生成它们所用的算法。该算法可以（并且已经在 [2]）实现于计算机上，以寻找距离较小的高效测地线。

我们用 $\mathcal{N}(S)$ 表示由对应于非分离简单闭曲线的顶点张成的 $\mathcal{C}(S)$ 子复形。这个复形称为非分离曲线复形。同样，若 S 的亏格至少为二，则 $\mathcal{N}(S)$ 连通，这是一个标准结果。下面我们将证明，给定曲线复形中的一条测地线，总能找到一条限制在非分离曲线子复形中的测地线。因此，自然会问，高效测地线是否也能限制在这个子复形中。

1.2 高效测地线

构造 $v_0, \ldots, v_n$ 在 $\mathcal{C}(S)$ 中的高效测地线，其思路是在沿路径前进时，逐步减少与一条弧的交点。我们将在下文进一步说明。以下构造和结果最初由 [1], 提出；熟悉这些结果的读者可参见第 2 节。

设 γ 是 S 中的一条弧，且 α 是 $S.$ 中的一条简单闭曲线。那么，如果 α 与 γ 的端点不相交，并且在所有与 α 同伦的简单闭曲线中， α 与 γ 的交点数最少（其中同伦过程不经过 $\gamma.$ 的端点），则称 γ 和 α 处于极小位置 。

设 $v_0, \ldots, v_n$ 是曲线复形中长度至少为三的测地线，并设 $\alpha_0, \alpha_1,$ 和 α_n 是 $v_0, v_1,$ 和 v_n 的代表元，且它们两两处于极小位置。三元组 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_n$ 的参考弧 是这样一条弧 γ ： 它与 α_1 处于极小位置，且其内部与 $\alpha_0 \cup \alpha_n.$ 不相交。我们称定向测地线 $v_0, \ldots, v_n$ 是初始高效的 ，如果

$$|\alpha_1 \cap \gamma| \leq n-1$$

对于参考弧 $\gamma.$ 的所有取法。最后，我们称 $v = v_0, \ldots, v_n = w$ 是高效的 ，如果对每个 $0 \leq k \leq n-3$，定向测地线 $v_k, \ldots, v_n$ 都是初始高效的，并且定向测地线 $v_n, v_{n-1}, v_{n-2}, v_{n-3}$ 也初始高效。因此，要检验一条测地线是否高效，我们需要考察所有三元组 v_k, v_{k+1}, v_n ，并计算 v_{k+1} 与任意参考弧的交点。虽然检查它与所有 参考弧的交点似乎不可能，但事实证明，这样的参考弧只有有限条。此外，在特殊情况下，只需检查 $\alpha_i \cap \alpha_n$ 与 $1 \leq i \leq n-1$ [1] 的交点。

给定一条顶点路径 v_0、.....、v_n，它位于 $\mathcal{C}(S)$ 中，代表曲线为 α_0、.....、α_n，并给定一条定向参考弧 γ，我们可以沿其定向遍历 γ，并记录曲线 α_0、.....、α_n 与 $\gamma.$ 相交的顺序。所得结果

是一个自然数序列 $\sigma \in \{1,\dots,n-1\}^N.$，其中 N是 $\gamma \cap (\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_{n-1})$ 的最小基数。序列 σ称为 α_i 沿 γ.的交序列

定向路径 $v_0,\dots,v_n \in \mathcal{C}(S)$ 的复杂度 定义为

$$\sum_{k=1}^{n-1}(i(v_0,v_k)+i(v_k,v_n)).$$

若满足以下情况，我们称自然数序列 σ 为可约：每当 σ 是路径 $v_0,\dots,v_n$ 在 $\mathcal{C}(S)$ 中的交序列时，都存在另一条复杂度更小的路径 $v_0',\dots,v_n'$。这样，我们便可以用这个复杂度度量来重新表述初始高效路径的存在性。

命题 1.1. 设 σ 是 $\{1,\dots,n-1\}.$ 的元素序列。如果 σ 中等于 *1* 的项超过 $n-1$ 个，那么 σ 可约。

由上述命题，我们可以推得初始高效测地线的存在性。

命题 1.2. 设 $g \geq 2.$。若 v 和 w 是 $\mathcal{C}(S)$ 的顶点，且 $d(v,w) \geq 3$，则存在一条从 v 到 $w.$ 的初始高效测地线。

我们注意到，上述定义和命题在限制到非分离曲线复形时均仍然成立。

1.3 锯齿形与点图

命题 1.1 的证明分为三个阶段。首先，将交序列化为标准形，这称为锯齿形。然后，与该序列的锯齿形相对应的是一个称为点图的图示。交序列的可约性随后对应于点图中的某些几何特征。下面我们将对此进行回顾。

我们可以通过执行 [1] 中所述的交换，来交换交序列中相邻两条曲线的交点顺序。所得序列即为锯齿形。也就是说，若一个自然数序列 (j_1，j_2，.....，j_k) 满足以下条件，我们就称其为锯齿形：

$$j_i < j_{i+1} \Rightarrow j_{i+1} = j_i + 1$$

锯齿形序列的一个例子是 (1，2，2，3，4，3，4，2，3，4，5)。给定一个锯齿形自然数序列，我们还考虑它的上升序列，它们是形如 k，$k+1$，. . . ，$k+m.$ 的极大子序列。在上面的例子中，上升序列为 (1，2)，(2，3，4)，(3，4)，(3，4)，(2，3，4，5)。显然，如果我们有一个交序列，并进行有限次交换，就可以将交序列变为锯齿形，同时

保持 α_i与 γ 的交点数不变。

接下来，给定一个呈锯齿形的交序列 σ ，我们可以将其视为函数 $1,\ldots,$ $N \to \mathbb{N}$，并将其绘制在 $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$.。序列图像上的点称为点。我们通过连接位于某条给定斜率为 1 的直线上的点来装饰该图；这些线段称为上升线段。由此得到的装饰图称为 σ 的点图，记作 $G(\sigma)$。见图 1。构造这一图形的思路同样是：给定一条非高效测地线，我们可以在其对应的点图中看到一些形状，这些形状对应着能够减少与参考弧交点的手术。

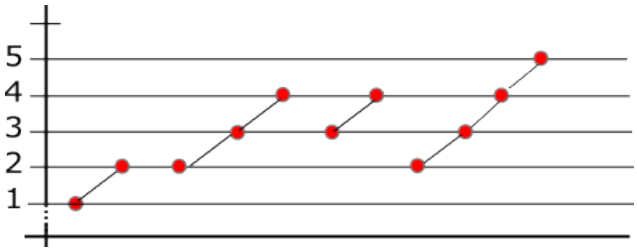


图 1：$(1,2,2,3,4,3,4,2,3,4,5)$ 的点图

1.4 点图多边形与手术

本节概述 [1] 中第 3.3 节的内容。我们先回顾所述的手术，然后在下一节讨论将这些手术限制于 $\mathcal{N}(S)$。时的结果。

将交序列化为锯齿形并构造其点图后，研究表明，如果点图中包含某些几何形状，则该点图对应的序列是可约的。这些形状称为点图多边形。具体而言，点图中存在盒子、*I*型六边形或*II*型六边形 （分别见图 2），意味着序列 σ 是可约的。为从点图中移除这些形状，人们引入了对与这些形状对应的交点模式中的曲线进行手术的方法。

我们对一条曲线 α 进行手术，该曲线与我们的交弧 γ 至少有两个交点。我们画出 γ 的一个邻域，使其水平且朝右定向。接着从 α 中去掉其与 γ的交点周围的小邻域，这样会得到一对曲线。然后，我们将其中两个端点重新连接，形成一条新的简单闭曲线，并舍弃另一条曲线。根据连接端点对的方式，我们称 α' 是通过沿 γ.进行 $++$、 $+-$、 $-+$，或 $--$ 手术从 α 得到的。第一个符号是

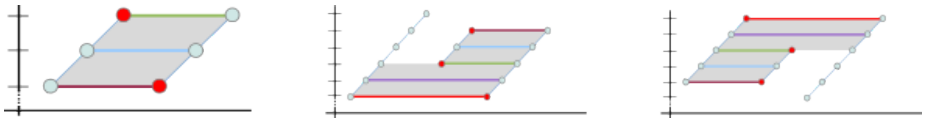


图 2：点图多边形（盒子、类型1六边形和类型2六边形）

$+$ 或 $-$，分别取决于 α 的第一个端点位于γ的左侧还是右侧。第二个符号也同理。考虑任意一条简单闭曲线时，四种可能的手术中恰有两种会得到一条简单闭曲线。如果给 α 指定一个定向，那么 α 与 γ 的两个交点的定向要么一致，要么相反。如果定向一致，则$+-$ 和 $-+$ 手术（称为奇手术）会得到一条简单闭曲线。否则， $++$ 和 $--$ 手术（称为偶手术）会得到一条简单闭曲线。

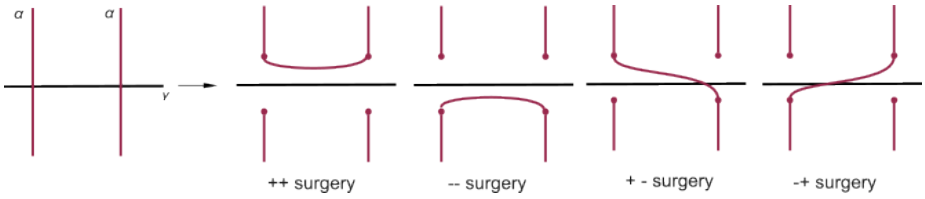


图 3：对一条曲线进行手术

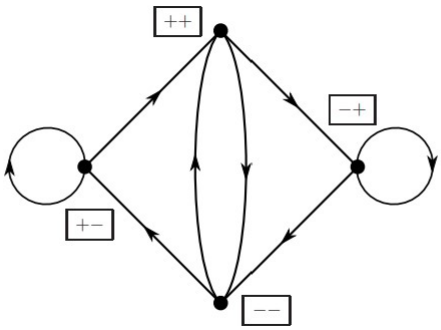
假设我们在 $\mathcal{C}(S)$ 中有一条测地线，其中包含某个顶点 v_i. 的代表元 α。如果要对 α 进行手术，那么它必须至少与我们的交弧 γ 相交两次（否则它会保留在测地线中，不会被替换）。因此， α 要么与 γ 连续相交，要么在这些交点之间， γ 至少与另一条曲线 β. 相交。在曲线复形中，对于第一种情况，即 α 与 γ 连续相交的情形，我们可以立即通过执行上述手术将其排除。在非分离曲线子复形中，情况并非如此简单（见命题 2.6）。然而，如果 α 不与 γ 连续相交，就像我们在点图中看到盒子和六边形时的情形一样，我们将看到与之前相同的手术选择。

利用上述手术， [1] 中已证明，具有空的未穿刺方框或类型 1 或 2 的空的未穿刺六边形的点图对应于一个可约序列。具体做法是指定一系列手术，用新的 α_i' 替换 α_i 曲线，从而得到复杂度更低的路径。下面给出与点图多边形类型相对应的所需手术序列。

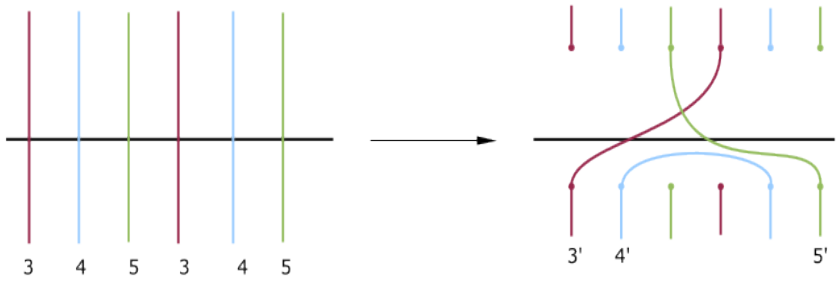
假设点图 G（σ）有一个空的未穿刺方框 P. 那么沿着 γ 的相应交点序列形式如下：

$$\alpha_k, \ldots, \alpha_{k+m}, \alpha_k, \ldots, \alpha_{k+m}$$

其中 $1 \leq k \leq k+m \leq n-1$. 对于不在 $\{k, \ldots, k+m\}$ 中的顶点，它们保持不变。我们通过归纳定义 α'_k、.....、α'_{k+m}：对于 $i = k$、.....、$k+m$，曲线 α'_i 是在 $\alpha_i \cap \gamma$ 中对应于 P 的点之间沿着 γ 进行手术得到的；这些手术的选择方式使其在下方的有向图中构成一条路径。该图的顶点对应于这四个



对于上述类型的手术，规则是：有向边起点的第二个符号与终点的第一个符号相反。从图中可以清楚看出，所需的手术序列存在。下面演示这一过程：我们对 α_3 进行 $-+$ 手术，然后对 α_4 进行 $--$ 手术，最后对 α_5. 进行 $+-$ 手术。很容易验证，用这些新曲线替换曲线 α_i 后，会得到一个缩短的交序列 σ.



假设点图 $G(\sigma)$ 中有一个空的未穿刺六边形 P，且其类型为 1。类型 2 六边形的情形几乎完全相同，因此这里省略。根据锯齿形和 1型六边形的定义，在 P 的最左侧与中间上升边之间的垂直带内，$G(\sigma)$ 没有上升线段；而位于 $G(\sigma)$ 的中间与最右侧上升线段之间的垂直带内的任何上升线段，其最高点都严格低于 $P.$ 的右下水平边。见下方图4:

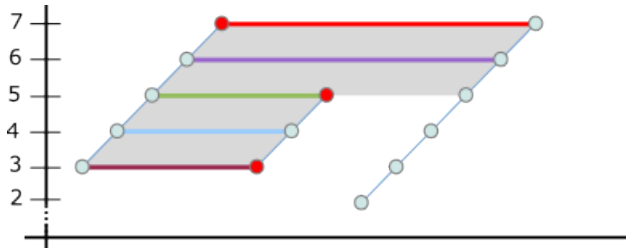


图4：1型六边形

由此可知，P 上的点对应于沿γ 的一列交点，其形式如下

$$\alpha_k, \ldots, \alpha_{k+m}, \alpha_k, \ldots, \alpha_{k+l}, \alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_p}, \alpha_{k+l}, \ldots, \alpha_{k+m}$$

其中 $1 \le k \le k+l \le k+m \le n-1, p \ge 0,$ 且每个 $j_i < \alpha_{k+l}.$ 参见上图，其中 $k = 3,$ $l = 2, m = 4,$ 且 $p = 0.$

与盒子的情形一样，每当我们有带有 $i \notin \{k, \ldots, k+m\}$ 的 α_i 时，就令 $\alpha'_i = \alpha_i.$。其余每个 α_i 都对应于 P 上的两个点，除了 α_{k+l}，它对应于三个点。令 α'_{k+l} 为通过沿 γ 对 α_{k+l} 进行手术所得的曲线，手术位置位于 $\alpha_{k+l} \cap \gamma$ 上对应于 P 上的点的前两个（最左侧）点之间，并满足以下性质：α'_{k+l} 不包含 α_{k+l} 的那段弧，该弧包含 $\alpha_{k+l} \cap \gamma$ 上对应于 $P.$ 上一点的第三个（最右侧）点。然后，像之前一样利用上方的有向图归纳定义 $\alpha'_{k+l-1}, \ldots, \alpha'_k$；最后，像之前一样归纳定义 $\alpha'_{k+l+1}, \ldots, \alpha'_{k+m}$。容易验证，这一过程会减少 $\sigma.$

利用这些手术从点图中移除上述多边形，便可得到一条初始有效测地线。最后一步是对每个 $0 \le k \le n-3$ 和定向测地线 $v_n, v_{n-1}, v_{n-2}, v_{n-3}.$，归纳构造三元组 $v_k, \ldots, v_n$ 对应的初始有效测地线。这一工作已在 [1] 的第 3.5 节中完成。当限制到 $\mathcal{N}(S),$ 时，完全相同的归纳论证仍然成立，因此我们的工作仅在于证明初始有效测地线的构造限制到 $\mathcal{N}(S)$。

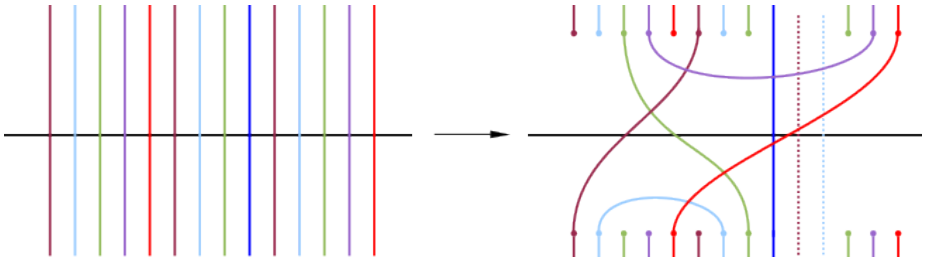


图 5：上述对 1 型六边形所描述的手术

2 非分离曲线复形中高效测地线的存在性

我们的主要结果是，非分离曲线复形中存在高效测地线。由于它是曲线复形的子复形，根据 [1] 中的定理 1.1 可知，这类测地线只有有限条。

定理 2.1。设 $g \geq 2$. 若 v 和 w 是 $\mathcal{N}(S_g)$ 的顶点，且 $d(v, w) \geq 3$，则在 $\mathcal{N}(S_g)$ 中存在一条从 v 到 w 的高效测地线。此外，从 v 到 w.的高效测地线只有有限条

2.1 定理 2.1 的证明

这一结果完全遵循文献[1]中曲线复形的证明框架。我们证明 $\mathcal{N}(S)$ 中存在初始有效测地线（见下文的命题）。然后，额外的归纳步骤将完全按照文献 [1]第 3.5 节所述进行。本文的关键观察是，下面的引理 2.2 在限制到 $\mathcal{N}(S)$ 时仍然成立：

引理 2.2。设 σ 是一个呈锯齿形的自然数序列，并且 $G(\sigma)$ 具有一个空的未穿孔方框，或一个空的未穿孔 *1* 型或 *2* 型六边形。那么 σ 是可约的（在 $\mathcal{N}(S)$ 中）。。

这将使我们能够证明：

命题 2.3. 设 $g \geq 2$. 若 v 和 w 是 $\mathcal{N}(S)$ 的顶点，且满足 $d(v, w) \geq 3$，则在 $\mathcal{N}(S)$ 中存在一条从 v 到 w 的初始高效测地线。

在 [1] 中，点图中上述多边形的存在，是通过对给定测地线中代表顶点的曲线进行手术实现的，这些手术消除了点图中的这些形状。通常，可以将每条新曲线替换为非分离曲线，论证也完全相同。我们只需证明这一点，并处理少数几个例外情况。

我们首先回顾一个众所周知的事实：分离曲线与任意其他曲线的交点数必为偶数。

命题 2.4. 设 α 是 $S.$ 中的一条简单闭曲线。如果 α 将 S 分离为两个分支，那么对于任意简单闭曲线 β ，其几何交数 $i(\alpha,\beta)$ 为偶数。

证明。令 S_α 为沿着 $\alpha.$ 切开 S 后得到的曲面。在 S_α，曲线 β 要么保持不变（ β 全部位于 S_α的某个连通分支中），要么 β 是一组端点位于 α.上的弧。这些弧各有两个端点。因此，若存在交点，它们必成对出现。无论哪种情况，与 α.的交点数都是偶数 □

判断通过手术得到的曲线是否为非分离曲线时，我们将采用一个简便的检验方法：查看对于某条曲线 β，是否有 $i(\alpha',\ \beta)\ =1$ 。接下来，我们必须证明，给定曲线复形中的一条测地线，可以使路径上的所有顶点都成为非分离曲线。这样，我们便可以从 $\mathcal{N}(S)$中的一条测地线出发，并尝试使其有效。

命题 2.5。 给定 $\mathcal{C}(S)$ 中的一条测地线，其端点为 $v,w\in\mathcal{N}(S)$，则存在一条从 v 到 w 的测地线，且其每个顶点都是非分离曲线。

证明。设 $v\ =\ v_0,\ldots,v_n\ =\ w$ 是 $\mathcal{C}(S)$ 中的一条测地线。如果这条测地线上的所有顶点都是非分离曲线，那么结论成立。假设上述测地线中， v_i 是一条分离曲线，且其下标最小，为 i。接下来考虑子路径 v_{i-1},v_i,v_{i+1} 。由于 v_i 是分离曲线，它将曲面 S 分成两个连通分支。 v_{i-1} 和 v_{i+1} 都与 v_i 不相交；然而，由于它们之间没有边，它们彼此相交。因此，它们都位于 $S_v.$ 的某一个连通分支中。在另一个连通分支中，选取一条非分离简单闭曲线 $v_i'.$ 。这样的曲线确实存在，否则 v_i 就是非本质的。这条曲线与 v_{i-1} 和 v_{i+1} 均不相交，并可在测地线中取代 v_i 。如此继续下去，就得到一条位于非分离曲线子复形中的测地线。 □

推论 2.5.1。 $\mathcal{N}$（S）是连通的。

证明。由于 $\mathcal{C}(S)$ 是连通的。将每条分离曲线替换为一条非分离曲线，即可得到 $\mathcal{N}(S)$ 中的一条路径。 □

2.2 平凡手术

上述命题使我们现在可以从 $\mathcal{N}(S)$ 开始考虑一条测地线；我们希望对其进行简化手术。我们先考察参考弧 γ 连续遇到曲线 α 的情形。在 $\mathcal{C}(S)$ 中，我们根据 α 的定向进行了偶手术或奇手术，并且可以保证每次手术的结果都是简单闭曲线。然而，当我们将范围限制在非分离曲线子复形时，便无法再保证两条曲线都是非分离的。例如，将一条分离曲线与一条非分离曲线作连通和。然后沿一条弧进行手术，会将该曲线分成一条分离曲线和一条非分离曲线。不过，该命题

但下文将表明，对一条与参考弧 γ 连续相交的非分离曲线进行手术，至少总会得到一条非分离曲线。

命题 2.6。 设 γ 为一条参考弧， α 为一条非分离的简单闭曲线。假设 $i(\alpha, \gamma) \geq 2$. 那么，存在一条简单闭曲线α'，它由非分离的简单闭曲线 α 沿γ 经过某种手术得到，并且仍然是非分离的。

证明。 给 γ 和 α. 定向。考虑沿 γ.相邻的两个交点。 γ 和 α 的定向使我们能够为每个交点赋予一个指标，取值为 $+1$ 或 -1. 。如果两个交点的指标相同，我们就进行奇手术。所得曲线 α' 与 γ 相交一次，并且与 α 恰好相交一次。（ $+$-手术见下方图 6。）我们强调，构造α' 时，须确保在下方局部图示之外， α' 恰好位于 α. 的右侧。由于$i(\alpha,\ \alpha') = 1,\ \alpha'$ 是非分离的。

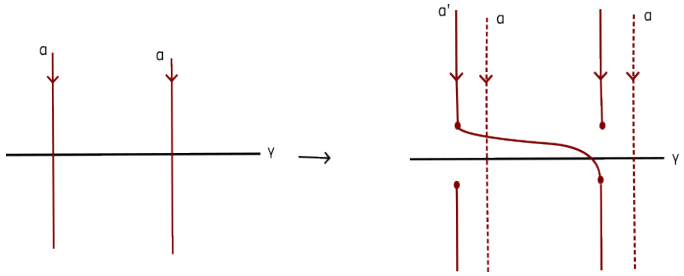


图 6：奇手术总会得到一条非分离曲线

如果两个交点的指标相反，我们进行偶手术。在这种情况下，我们可能需要选择一条曲线来替换 α ，因为其中一种手术可能会得到一条非分离曲线。其中一条曲线保持在 γ 上方，另一条保持在 γ下方。我们论证这两条曲线中至少有一条是非分离的。

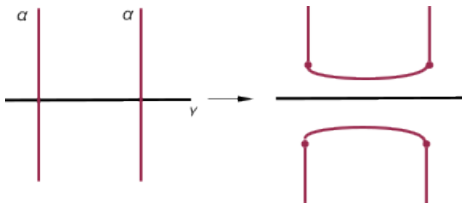


图 7：对 α进行 $++$和 $--$ 手术

反设两条曲线都是分离曲线，这会将S 分成三个连通分支。然后，将两条曲线重新连接起来，就会得到原来的曲线 α ，然而 α 仍会分离我们的曲面。

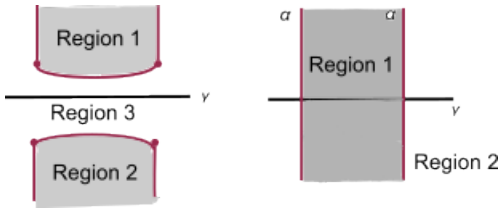


图 8：命题 2.6 的证明示意图

因此，进行偶手术总会得到至少一条非分离曲线。

□

2.3 非平凡手术

我们使用与 [1] 中完全相同的点图，来确定如何约化交点序列。在限制到非分离曲线复形时，我们需要证明每个点图多边形都存在一种手术，使该多边形被移除，且产生的新曲线全部都是非分离曲线。这将证明引理 2.2。

在全文中，我们假设 σ 是一个呈锯齿形的非分离曲线交点序列。

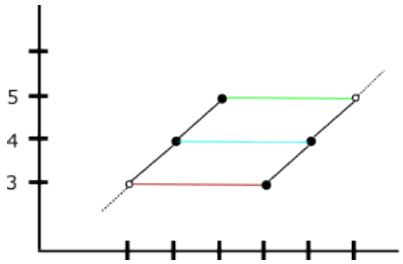


图 9：一个空的未穿孔方框

情形 1： 设 σ 是一个呈锯齿形的自然数序列，且 $G(\sigma)$ 有一个空的未穿孔方框。那么 σ 是可约的。

这是简单的情形。完全按照 $\mathcal{C}(S)$. 中的方式进行手术。逐一进行手术时，请注意，无论手术类型如何，所得曲线都恰好与一条相邻曲线相交一次。下图展示了盒子中涉及三条曲线时的情形。一般情形完全相同。关于包含曲线 3、4 和 5 的盒子的手术序列，请参见图 10 和图 11 所示的前两步。

继续以这种方式操作，从点图中移除盒子，并将所有曲线替换为其他非分离曲线。

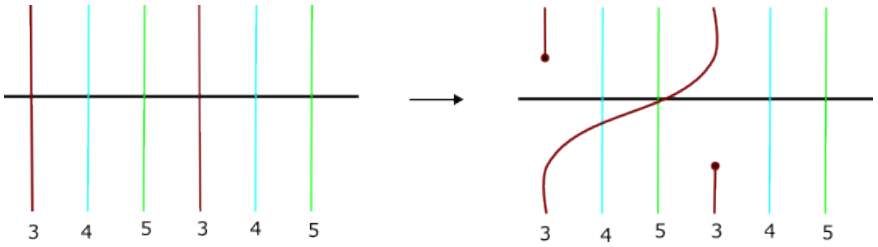


图 10：点图中与上方盒子对应的交序列。对曲线 3 进行奇手术，它恰好与曲线 4 相交一次，因此它是非分离的。显然，偶手术也会达到相同效果，因此曲线 3 与之前一样有两种手术选择。

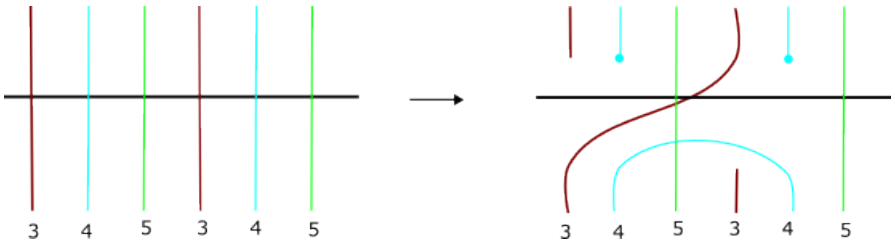


图 11：现在对曲线 4 进行手术。如上所示，这次采用偶手术；该曲线与曲线 5 恰好相交一次，因此它是非分离的。奇手术也会达到相同效果。

情形 2： 假设 σ 是锯齿形的自然数序列，并且 $G(\sigma)$ 有一个类型 1 或类型 2 的空的未穿刺六边形。那么 σ 是可约的。

我们将讨论类型 1 的空的未穿刺六边形这一情形。另一种情形完全遵循相同的步骤。此情形的手术指示与 $\mathcal{C}(S)$ 的指示相似，但需要引入一个新概念。为了简化讨论，我们引入一些新术语。给定点图中一个类型 1 的空的未穿刺六边形，其顶点形式如下：

$$\alpha_k, \ldots, \alpha_{k+m}, \alpha_k, \ldots, \alpha_{k+l}, \alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_p}, \alpha_{k+l}, \ldots, \alpha_{k+m}$$

其中 $1 \leq k \leq k+l \leq k+m \leq n-1$，$p \geq 0$，且每个 $j_i < \alpha_{k+l}$. 我们称整数 l 为该六边形的步长，将 α_{j_1}、……、α_{j_p}中的顶点数称为该六边形的尾长，并称整数 m 为该六边形的总长度。这些值很容易从点图中看出。例如，4 中的六边形步长为 2，尾长为 4。我们称曲线 α_{k+l} 为步长 l 处的曲线。

注意，我们总可以假设六边形的尾长非零。若尾长为零，则步长为 l 的曲线会在

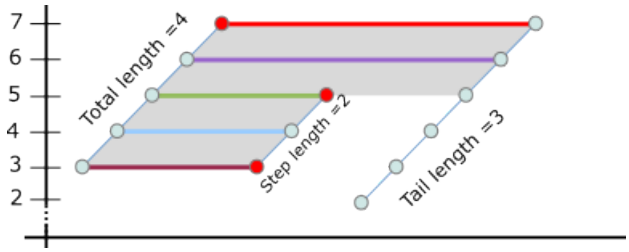


图12：这三个数与所示的起始顶点一起，完全确定了一个1型六边形

点图中连续出现，而对这条曲线进行一次平凡手术即可将六边形从点图中移除。我们以同样的方式开始六边形手术。考虑步长为 l的曲线，这是六边形中唯一出现三次的曲线。存在一种针对前两个交点的手术，可以移除第三个交点。该手术由前两个交点的定向决定。然而，无论需要进行哪种手术，它与紧邻其上下方的曲线都恰好相交一次，因此结果是非分离的。见下方图13：

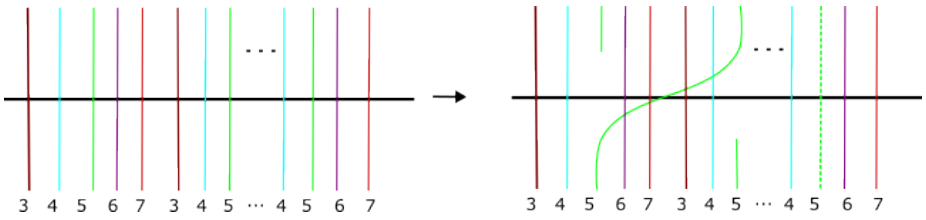


图13：点图中与上述六边形对应的交序列。对曲线5进行奇手术时，它与曲线6（以及曲线4）恰好相交一次，因此它是非分离的。偶手术也会产生相同结果，因此，任何所需的手术都能删除点图中最后一个顶点5。省略号表示六边形尾部中的曲线；由于我们假设尾长非零，交序列中会出现曲线4

现在，我们尝试对步长为 l. 的曲线下方出现的曲线进行手术。与盒子的情形一样，这些曲线都可以进行任一种手术，因为所有可能的手术都会与其紧邻的曲线（点图中位于其上方的曲线）恰好相交一次。

现在，我们可以对步长为 l. 的曲线之后出现的曲线进行手术了。与步长为 l 的曲线紧邻的曲线（点图中位于其上方的曲线）可能会造成问题。我们将其分为两种情况：

子情形2.1： 令 m表示六边形的总长度，并令 l 表示

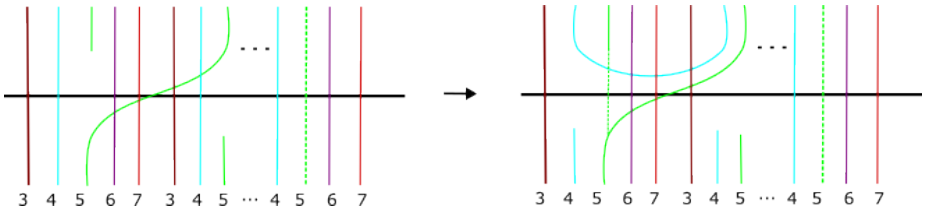


图14：现在对曲线 4 进行手术。这次展示的是偶手术；与上面一样，这条曲线恰好与旧曲线 5 相交一次，因此它是非分离的。奇手术也会有相同的效果。曲线 3 的情况也同理。

步长。如果 $m > l + 1$，那么手术过程与 $\mathcal{C}(S)$ 中完全相同。这一点显然，因为在步长为l 处的曲线上方进行手术得到的所有曲线，都会恰好与一条相邻曲线（点图中上方或下方的曲线）相交一次。注意，对于位于步长为 l处曲线正上方的曲线，，α_{k+l+1} 我们利用它与其上方曲线的交点 α_{k+l+2} 来证明它是非分离的。对于点图中位于 α_{k+l+1} 上方的曲线，例如 α_j，我们考察它与 α_{j-1} 的交点，以证明它是非分离的。见下方图15：

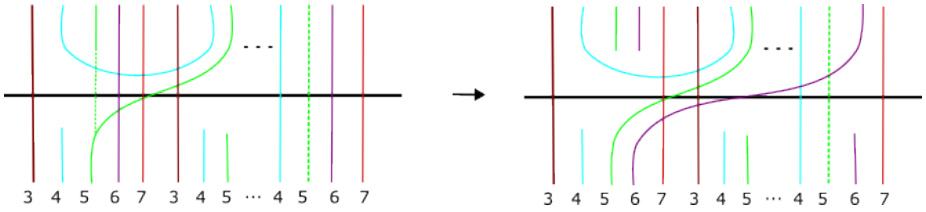


图15：对曲线 6 进行手术。这条曲线恰好与曲线 7 相交一次，因此它是非分离的。奇手术也会有相同的效果。注意，这次手术会与旧曲线 5 相交两次，因此无法据此论证它相对于曲线 5 是非分离的。

子情形2.2： 令 m表示六边形的总长度，令 l 表示步长。如果 $m = l + 1$，那么我们就在曲线α_{k+l+1}上引入一个新的手术

步长为 l 的曲线以下的所有曲线都像之前一样进行了手术，每条曲线都是非分离的。现在我们需要对曲线 α_{k+l+1} 进行手术，并论证它是非分离的。

如果曲线 α_{k+l+1} 需要奇手术，那么它就是非分离的，因为正如命题 2.6 所示，它与自身原来的位置恰好相交一次。在 α_{k+l+1}需要偶手术的情况下，结果发现所需的偶手术会使新曲线 α'_{k+l+1} 成为分离曲线。我们考察 α_{k+l} （步长为 l时的曲线）位于曲线 α'_{k+l+1} “内部”的部分（我们将 α'_{k+l+1} 的“内部”称为

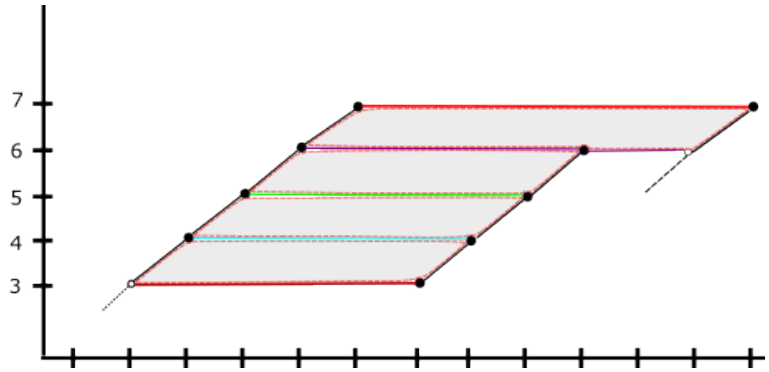


图 16：对曲线 3 至 5 进行手术都没有问题，因为无论采用哪种手术方式，都会与其正上方的曲线恰好相交一次。但对 7 进行手术会与 6 相交两次。

α'_{k+l}与该曲线不相交的曲面部分）。由于我们假设这个六边形有一个尾部，因此也能看到曲线 α_{k+l-1} 在该区域内出现一次。如果我们能够对 α_{k+l}的这两个部分进行偶手术，所得曲线就是非分离的，因为它与 α_{k+l-1} 恰好相交一次。根据 α'_{k+l+1} 是分离曲线这一假设， α_{k+l} 在 α'_{k+l+1} 内部的定向必须与偶手术一致，否则 α_{k+l} 就会与 α_{k+l+1}相交。见下方图 17：

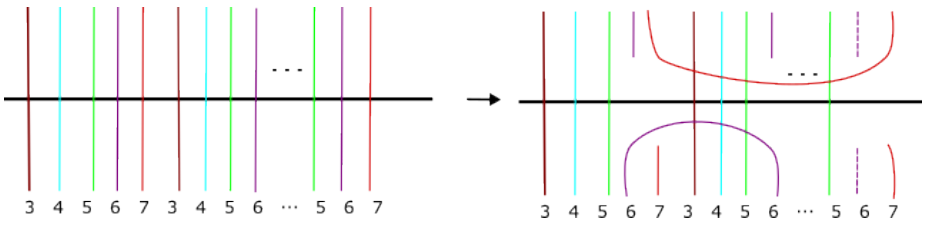


图 17：对曲线 6 进行手术，并对曲线 7 进行所需的偶手术后（图中为 $++$），注意曲线 6 被新曲线 7’ 分隔出的两部分。假设 7’ 是分离的，那么 7’ 内部的 6 的两部分必须定向，以便进行 $++$ 手术。

将曲线 α_{k+l}的两端连接后得到的新非分离曲线记作 β. 。我们希望 β 成为曲线 α_{k+l+1} 的替换曲线，因此它必须与 α'_{k+l} 和 α_{k+l+2}. 不相交。显然， β 与 α'_{k+l} 不相交，因为α'_{k+l+1} 与 α'_{k+l}不相交， β 与 α'_{k+l+1} 不相交，而且 β 位于 α'_{k+l+1} 的另一侧，那么 α'_{k+l}. 。图18展示了这一点。

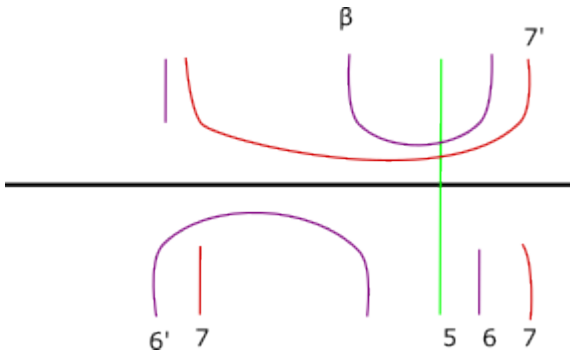


图18：曲线 β 与曲线 6’不相交，因为 7’与 6’不相交，且β 和 β 位于 $7'$ 相对于 6’的另一侧。

现在我们需要论证曲线 β 与曲线 α_{k+l+2}.不相交。然而，由于我们在六边形中看不到这条曲线，这意味着α_{k+l+2} 与 α'_{k+l+1} 不相交，因为我们知道它与 α_{k+l+1}不相交，而且添加到 α_{k+l+1} 上的曲线与 α_{k+l+2} 不相交；否则，我们就会在六边形中看到这条曲线。因此，如果 α_{k+l+2} 与 β 相交，那么它就完全包含在 α'_{k+l+1} 内，从而与 α'_{k+l} 不相交。这就产生了矛盾，因为这样一来，测地线中就不需要曲线 α_{k+l+1} 了。因此， β 是一条与 α_{k+l+2} 和 α'_{k+l}. 不相交的非分离曲线。因此， β 适合作为 α_{k+l+1}.的替换曲线。

类型 2 六边形的情形遵循完全相同的论证。这涵盖了所有情形，从而证明了引理 2.2。

3 结论

我们证明了非分离曲线复形中存在高效测地线。此外，我们还证明，对于曲线复形中的任意测地线，都可以得到一条高效测地线，其顶点除了端点可能例外，均为非分离曲线。

3.1 问题

下面列出几个问题，供感兴趣的读者思考。

问题 1：当我们将范围限制在 $\mathcal{N}(S)$ 时， n^{6g-6} 界能否降低?

问题 2. 在一条路径中用非分离曲线替换分离曲线，是否会增加复杂度度量?

问题 3. 找出一个包含分离曲线的高效测地线示例。高效测地线中分离曲线的数量是否受到任何限制?

4 致谢

感谢 William Menasco 提出这个问题，也感谢他与我们进行了许多关于高效测地线算法的讨论，指出了本文早期草稿中的一些错误，并就所需的新手术展开讨论。

参考文献

[1] J. Birman、D. Margalit 和 W. Menasco。高效测地线以及曲线复形距离的有效算法。《数学年鉴》，366(3-4)：1253–1279，2016 年。doi:10.1007/s00208-015-1357-y。

[2]P. Glenn、W. W. Menasco、K. Morrell 和 M. J. Morse。Micc：一种用于计算曲线复形中短距离的工具。《符号计算杂志》，78：115–132，2017。ISSN 0747-7171。doi：https://doi.org/10.1016/j.jsc.2016.03.010。URL：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0747717116300116。计算拓扑算法与软件。

[3] H. Masur 和 Y. Minsky。曲线复形的几何 II：层级结构。《几何与泛函分析》，10(4)：902–974，2000。doi：10.1007/pl00001643。

Seth Hovland，数学系，纽约州立大学布法罗分校，布法罗，纽约州 14260-2900，美国电子邮件地址：sethhovl@buffalo.edu

Greg Vinal，纽约州立大学布法罗分校数学系，美国纽约州布法罗，邮编 14260-2900电子邮件地址：gregoryv@buffalo.edu