arXiv:2304.07251v1 [math.FA] 14 Apr 2023

向量格中的一致可积性及其应用。

Youssef Azouzi代数、拓扑与算术研究实验室数学系突尼斯数学、物理与自然科学学院突尼斯埃尔马纳尔大学，突尼斯2092-El Manar

摘要

本文探讨向量格中一致可积性的一种抽象，并通过对 Kuo、Rodda 和 Watson 提出的一个未解决问题给出肯定解答，展示其应用。具体而言，我们证明，对于每个 $p \in (1, \infty)$，且当 T 为条件期望算子时，空间 $L^p(T)$ 是序列完备的。此外，我们证明，de La Vall´e Poussin 定理在一般的向量格框架下并不成立。

1 引言

一致可积性是分析和概率论中的一种有效工具，尤其在鞅论中更是如此，参见例如 [18, Chapers13,14] 和 [7]。Kuo、Vardy和Watson在Riesz空间的自由测度框架理论中引入了一个类似的概念，如 [15]中所述。在这一框架下，我们考虑一个戴德金完备黎斯空间 E，它具有弱序单位 e，并配备了一个条件期望算子T ，该算子固定 e. 。这一算子对于定义滤子、鞅、停时等各种数学概念至关重要。包括Kuo、Labushagne、Watson、Grobler、Azouzi、Ramdane等在内的多位研究者在这一领域取得了重要进展，详见[13, 14, 2, 5, 4, 10, 9]。这一框架使经典概率论中的许多

基础和高级结果得以推广。然而，完备性等某些基本概念仍然带来挑战。有些定理在出人意料地一般的情形下成立，且证明相对简单；另一些则难以恰当地表述和证明。叶戈罗夫定理就是后一类的一个典型例子。提出一个看似成立的“好”命题或许是很有希望的开端，但在许多情况下，证明该命题需要对主题有深入的理解。为了解决这一领域中的难题，往往需要引入新的概念和技术。本文着重研究空间 $L^p(T)$ 的强完备性。这一概念类似于黎斯-费舍尔定理，该定理断言空间 $L^p(\mu)$ 在范数意义下完备。在黎斯空间的背景下，我们的空间配备了向量值范数，而收敛则根据序来定义。因此，序列的完备性与网的完备性是不同的概念。本文采用的主要工具是 T-一致性，它是一致可积性的抽象。本文首先简要概述相关主题，随后介绍我们的新结果及其应用。具体而言，我们证明，若 E 是具有弱序单位 e的戴德金完备黎斯空间，且 T 是条件期望算子，那么黎斯空间 $L^p(T)$（定义见第2节）对于 $1 < p < \infty$. 是序列完备的。我们的结果解决了 [16]中提出的一个未解决问题。 [16] 的作者此前已证明空间 $L^1(T)$ 的强序列完备性。他们的证明并非对经典空间 $L^1(\mu)$ 证明的改写，因为强柯西序列 (x_n) 不再必然存在一个子序列 (y_n)，使得级数 $\sum y_n$ 按序收敛。我们的结果补全了他们的工作，并证明所有空间 $L^p(T)$ 对于 $p \in [1, \infty]$都是序列强完备的。然而，这些空间的完全完备性仍是一个未解决问题，目前仅对 p的两个取值证明了这一点。第一种情形$p = \infty$的证明相对直接，可见 [16], ；第二种情形（对于 $p = 2$）则复杂得多，Kalauch、Kuo和Watson最近在 [12]中给出了证明。他们的证明基于汉恩-若尔当型分解，该分解在另一篇论文 [11]中得到证明。关于空间 $L^p(T)$ 的信息，请参见 [5]。

本文将采用几种收敛形式，它们都不是拓扑意义上的收敛。我们主要关注四种收敛类型：序收敛、强收敛及其无界对应概念，它们分别类似于几乎处处收敛和依概率收敛。在全文中，我们将努力阐明这些推广背后的动机，以及它们如何有助于更深入地理解序在概率论中所发挥的关键作用，

以及更广泛地说，在测度论中的关键作用。

关于序收敛和无界序收敛的更多信息，请读者参阅 [8, 1]及其中的参考文献。此外，关于 T-条件概率中的收敛问题，请参阅 [2]。

本文结构如下。第2节介绍一些预备知识，包括 T-条件概率中收敛的基本性质。

第3节聚焦于 T-一致性，这是我们研究中的核心工具。我们证明，在 Riesz 空间的框架下，关于一致可积性的 de La Vall´ée–Poussin 判别准则不成立。此外，我们证明，对于$L^1(T)$中的一个族而言，该判别准则给出的条件仅为充分条件，不再是其具有 T-一致性的必要条件。我们还证明了适用于 $L^p(T)$的维塔利定理版本，这一结果对于证明空间 $L^p(T)$的强序列完备性至关重要。在最后一节中，我们应用前文的结果，在完备性方面取得了重大进展，证明所有空间 $L^p(T)$都是序列强完备的。正如前文所述，这一结果回答了 Kuo、Rodda 和 Watson 提出的问题 [16] 。

2 预备知识

在以下讨论中，我们将研究一个里斯条件三元组 (E, e, T)，其中 E 是一个戴德金完备黎斯空间（或向量格）， e 是一个弱序单位，而 T 是一个条件期望算子，即一个保序连续的严格正投影，其值域 $R(T)$ 是一个戴德金完备黎斯子空间，且 $Te = e$. 其万能完备化记为 E^u，而其上确界完备化记为 E^s.。文献 [13] 证明， E^u中存在一个最大的黎斯子空间，称为 T的自然定义域，记为 $L^1(T)$，在该空间上， T 可唯一延拓为一个条件期望。值得注意的是， $L^1(T)$ 具有一个理想特性，即它是 T-万能完备的。这意味着， $L^1(T)$ 中任意一个递增网 $(x_\alpha)^+$，只要它在 $L^1(T)$ 中序有界 $Tx_\alpha{}^u$，就按序收敛。因此，一旦我们将 E 上的条件期望 T 延拓到其自然定义域 $L^1(T)$，空间 E 便无关紧要了。这就没有理由再考虑定义在自然定义域之外的条件期望了。现在，众所周知，可以在万能完备化中定义一种乘法

$L^1(T)$ 的 $L^1(T)^u$，使得 $L^1(T)^u$ 成为一个以 e 为单位元的 f-代数（更多详情见 [17, 第 50] 节）。文献 [5] 引入了空间 $L^p(T)$，将其作为 Labuschagne 和 Watson 先前引入的 $L^2(T)$ 的推广。对于 $p \in (1, \infty)$，我们定义

$$L^p(T) = \{x \in L^1(T) : |x|^p \in L^1(T)\},$$

and

$$N_p(x) = T(|x|^p)^{1/p} \text{ for all } x \in L^p(T).$$

空间 $L^\infty(T)$ 定义为由 $R(T)$ 生成的 $L^1(T)^u$ 的理想，

$$L^\infty(T) = \left\{x \in L^1(T) : |f| \leq u \text{ for some } u \in R(T)\right\}.$$

它配备了由下式给出的 $R(T)$-向量值范数 $\|\cdot\|_{T,\infty}$

$$N_\infty(x) = \inf\{u \in R(T) : |x| \leq u\} \text{ for all } x \in L^\infty(T).$$

关于这些空间的更多细节，建议参阅 [5]。在 Riesz 空间中，几乎处处收敛的概念已推广为无界序收敛。有趣的是，在针对序列的 L^p-空间中，这两种收敛类型是一致的。此外，依概率收敛（或更一般地，依测度收敛）已推广为依 T-条件概率收敛。我们提醒读者注意 [2] 中的以下结果。

定义 1 若网 (f_α) 在 E 中满足 $TP_{(|f_\alpha - f| - \varepsilon e)^+ e}$ 按序收敛到 0，则称其依 T-条件概率收敛到 f，其中 ε 为任意正数。

回顾一下，若 θ 是 Riesz 空间中的任意一种收敛方式，那么它的无界版本可记为 $u\theta$，定义如下：称网 (x_α) 无界 θ 收敛到 x，记作 $x_\alpha \xrightarrow{\mathrm{u}\theta} x$，如果 $|x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{\theta} 0$. 在此背景下，已有三种收敛方式得到广泛研究：序收敛、范数收敛和绝对弱收敛。接下来我们记录一个引理 [3, 引理 4]，它将在本文主要结果的证明中用到。该引理指出，T-条件概率意义下的收敛是 T-强收敛的无界版本；换言之，T-条件概率意义下的收敛，恰好就是相对于 $R(T)$-向量值范数 $\|\cdot\|_{1,\,T}$ 的无界范数收敛。

引理 2 设 (E,e,T) 是一个条件 Riesz 三元组。对于网 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ in$E$，以下陈述等价。

1. $x_\alpha \to x$ 在 T-条件概率中；2. 对每个 $u \in E_+$，$T(|x_\alpha - x| \wedge u) \xrightarrow{o}$；3. $T(|x_\alpha - x| \wedge e) \xrightarrow{o} 0$。

在概率论中，已知若随机变量序列 (X_n) 依概率收敛到 X，则对于任意 $k \in \mathbb{N}.$，$X_n^k \longrightarrow X^k$ 依概率成立。这可由以下事实轻易推出：(X_n) 依概率收敛到 X，当且仅当 (X_n) 的每个子序列都有一个进一步的子序列几乎处处收敛到 X。虽然这一结果没有直接的 Riesz 空间版本，但可以给出另一种证明。下一个引理中的第三项将在主要结果的证明中用到。

引理 3 设 (E,e,T) 是一个条件 Riesz 三元组，且 (x_α) 是 E^u 中的一个网，它在 T-条件概率下收敛到 $x.$

1. 对所有 $u \in E$,

$$T(|x_\alpha| \wedge u) \xrightarrow{o} T(|x| \wedge u).$$

2. 若 $M \in E$，则 $Mx_\alpha \longrightarrow Mx$ 属于 T-条件概率。

3. 若 (x_α) 有界，则对每个 $p \geq 1$，$|x_\alpha|^p \longrightarrow |x|^p$ 属于 T-条件概率。

证明。(i) 所需结果可由以下不等式得出：

$$|T(|x_\alpha| \wedge u) - T(|x| \wedge u)| \leq T\,||x_\alpha| \wedge u - |x| \wedge u| \leq T(|x_\alpha - x| \wedge u).$$

(ii) 设 $A = M \vee e$ 和 $k \in \mathbb{N}.$，则

$$\begin{aligned} T(M|x_\alpha - x| \wedge e) &\leq T(A|x_\alpha - x| \wedge A) = TA(|x_\alpha - x| \wedge e) \\ &= T[(A - A \wedge ke)(|x_\alpha - x| \wedge e)]\,T[(A \wedge ke)(|x_\alpha - x| \wedge e)] \\ &\leq T(A - A \wedge ke) + kT(|x_\alpha - x| \wedge e) \end{aligned}$$

我们推导得出

$$\limsup_{\alpha} T\left(M\left|x_{\alpha}-x\right| \wedge e\right) \leq T\left(A-A \wedge k e\right).$$

由于这对每个 k 都成立，我们得到 limsup $T(M\left|x_{\alpha}-x\right| \wedge e) = 0$，这$_{\alpha}$便给出了所需结果。

(iii) 我们将使用以下不等式，它对所有 a、$b \in E_{+}$ 都成立，

$$\left|a^{p}-b^{p}\right| \leq p\left|a-b\right|(a \vee b)^{p-1}.$$

设 M 是满足以下条件的任意正元素：对所有 α，均有 $\left|x_{\alpha}\right| \leq M$，且 $|x| \leq M$。那么

$$\left|\left|x_{\alpha}\right|^{p}-|x|^{p}\right| \leq p\left|x_{\alpha}-x\right| M.$$

因此

$$T\left|\left|x_{\alpha}\right|^{p}-|x|^{p}\right| \wedge e \leq T p\left|x_{\alpha}-x\right| M \wedge e,$$

由 (ii) 可得 $T\left|\left|x_{\alpha}\right|^{p}-|x|^{p}\right| \wedge e \xrightarrow{o} 0$，从而得到 (iii)。 ■

3 向量格中的一致可积性

一致可积性的概念已扩展到向量格的情形，称为 T-一致性。以下定义取自 [15]。

定义4 称 $L^{1}(T)$ 中的一个族 A 为 T-一致的，如果

$$\sup_{x \in A}\{T P_{(|x|-ce)^{+}}|x| \rightarrow 0 \ \ as \ c \rightarrow \infty.$$

每个 T-一致族 A 在 $L^{1}(T)$ 中都是 T-有界的（见 [15, 引理 2.7]），这意味着 sup $T\left|x\right|$ 在 $L^{1}(T)$ 中存在。然而，反过来并不成立。$_{a \in A}$在经典概率论中，我们使用一致可积性的另一种定义，称为“ε-δ”定义。以下结果被广泛认为很有用。

命题5 设 $(\Omega\ \mathcal{F}, \lambda)$ 是一个概率三元组，且 $\mathcal{A}$ 是 $L_{1}=L_{1}(\Omega\ \mathcal{F}, \lambda)$ 中的一个随机变量族。那么，以下陈述等价。

(i) 族 $\mathcal{F}$ 一致可积，即，当 $n \longrightarrow \infty$ 时，sup

$$_{X \in \mathcal{A}} \mathbb{E}\left(|X| \mathbf{1}_{\{|X| \geq n\}}\right) \longrightarrow 0;$$

(ii) $\mathcal{A}$ 在 L_1 中范数有界，并且对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得

$$\lambda(A) < \delta \Longrightarrow \mathbb{E}(|X|\,\mathbf{1}_A) < \varepsilon \ \forall X \in \mathcal{A}.$$

在里斯空间理论的框架下，一致可积性没有对应的“ε-δ”版本。不过，这一概念仍可用另一种方式表述。值得注意的是，前面提到的性质 (ii) 可以改写并理解如下：

$$\sup \mathbb{E}(|X|\,\mathbf{1}_A) \longrightarrow 0 \text{ as } \mu(A) \longrightarrow 0,$$

或者，

$$\sup \mathbb{E}(|X|\,\mathbf{1}_A) \longrightarrow 0 \text{ as } \mathbf{1}_A \longrightarrow 0, \tag{1}$$

其中，后者表示几乎处处收敛。容易看出，若 (A_n) 是一个事件序列，那么对于序列 $(\mathbf{1}_{A_n})$，概率收敛、在 L^1-范数下收敛以及几乎处处收敛这三种收敛方式彼此等价。这意味着，用向量格的语言来说，作用于 $L_1(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的带投影序列 $P_n\colon\ Y \longmapsto Y\mathbf{1}_{A_n}$ 是序零的。因此，向量格语境下的一致可积性 ε-δ 定义可以方便地改写为关于带投影的表述，如 [2], 所示；以下结果对此作了总结。

命题6 设 (E, e, T) 是一个 Riesz 三元组，且 A 是 $E.$ 的子集。那么以下陈述等价。

(i) 族 $\mathcal{A}$ 是 T-一致的；

(ii) 对于每个网 (P_α)，若它是带投影的序零网，则 $\sup P_\alpha\,|x| \longrightarrow 0$ 按序收敛于 $_{x\in A}$。

在 [5], 中已证明， $L^p(T)$ 中的每个有界族（其中 $1 < p < \infty$）都是 T-一致的。这一结果对于建立 Vitali 定理的向量格变体至关重要，而该变体是证明下文定理 15 的关键。下一个定理给出了一个族为 T-一致的充分条件。

定理7 设 (E, e, T) 是一个里斯条件三元组，且 $\mathcal{F}$ 是一族条件期望算子，使得对于每个 $S \in \mathcal{F}$ 都有 $TS = T$，并且 $f \in E.$。那么族 $\{Sf\colon\ S \in \mathcal{F}\}$ 是 T-一致可积的。

证明。由马尔可夫不等式可得

$$P_{(|Sx|-\alpha e)^+}e \leq \alpha^{-1}|Sx| \leq \alpha^{-1}S|x|.$$

由此可得

$$TP_{(|Sx|-\alpha e)^+}e \leq \alpha^{-1}TS|x|\alpha^{-1} = T|x|.$$

因此

$$\sup_{S\in\mathcal{F}} TP_{(|Sx|-\alpha e)^+}e \leq \alpha^{-1}T|x|.$$

Now

$$\begin{aligned} TP_{(|Sx|-\alpha e)^+}|Sx| &\leq TP_{(|Sx|-\alpha e)^+}S|x| = TSP_{(|Sx|-\alpha e)^+}|x| = TP_{(|Sx|-\alpha e)^+}|x| \\ &= TP_{(|Sx|-\alpha e)^+}\left(P_{(|x|-Ke)^+}|x| + P^d_{(|x|-Ke)^+}|x|\right) \\ &\leq K^{-1}T|x| + KTP_{(|Sx|-\alpha e)^+}e \leq K^{-1}T|x| + \frac{KT|x|}{\alpha}. \end{aligned}$$

So

$$\limsup_{\alpha\longrightarrow\infty}\sup_{S\in\mathcal{F}} TP_{(|Sx|-\alpha e)^+}|Sx| \leq K^{-1}T|x|.$$

因此

$$\lim_{\alpha\longrightarrow\infty}\sup_{S\in\mathcal{F}} TP_{(|Sx|-\alpha e)^+}|Sx| = 0,$$

结果得证。 ■

德拉瓦莱·普桑的经典定理给出了统一可积性的一个刻画。

定理 8 设 $\mathcal{H}$ 是 $L^1(\mathbb{P})$ 中的一个族。则以下陈述等价：

(i) 族 $\mathcal{H}$ 一致可积。

(ii) 存在一个凸函数 $\varphi: [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$，使得

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\varphi(x)}{x} = \infty \ and \ \sup_{X\in\mathcal{H}}\mathbb{E}(\varphi(|X|)) < \infty.$$

下一个例子说明，在配备条件期望算子的 Riesz 空间中，蕴含关系 (i) ⇒ (ii) 并不成立。

例 9 设 E 为由所有满足 $f(x) = O(x)$（当 $x \longrightarrow \infty.$ 时）的函数 $f\colon [1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ 组成的 Riesz 空间。这意味着，当 x 趋于无穷时，E 中的函数至多线性增长。容易看出，E 是戴德金完备黎斯空间，其弱序单位为 e，其中 $e(t) = 1$ 对所有 $t \in [1,\infty$ 都成立。令 $T\colon E \longrightarrow E$ 为恒等映射，并令 $\mathcal{F} = \{u\}$ 满足 $u(x) = x.$。那么 T 是条件期望，且 $\mathcal{F}$ 是 T-一致的。若 φ 是测试函数，也就是说，φ 是 $[1,\infty$ 上的凸函数，且 $\lim \frac{\varphi(x)}{x} = \infty$，那么 $\varphi(u) \in E^s \diagdown E.$

值得注意的是，在前一个例子中，$\varphi(u) \in E^u$ 是 E 的万能完备化，更妙的是，$\varphi(u) \in L^1(T)$ 是 $T.$ 的自然定义域。这意味着，如果我们在空间 $L^1(T)$ 中工作，条件 (ii) 确实成立。因此，人们可能会预期，定理 8 对一般情形下的 T-一致族也成立。然而，下面这个更复杂的例子表明，这种预期的结果并不存在。

例 10 令 A 表示所有凸函数 $\varphi\colon [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ 的集合，这些函数满足 $\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty$，并考虑乘积空间 E^A，其中 $E = L^1[0,1].$。现在，对每个 $\varphi \in A$，都可以找到一个元素 $X_\varphi \in L^1[0,1]$，使得

$$\int_{\{|X_\varphi| \geq n\}} |X_\varphi|\, d\mu \leq \frac{1}{n} \text{ for all } n = 1, 2, ...$$

并且满足 $\int \varphi(|X_\varphi|)\, d\mu = \infty.$。现在，对每个 φ，令 $Y^\varphi \in L^1(T)$ 定义如下：$Y^\varphi(\psi) = X_\varphi$（当 $\psi = \varphi$ 时），以及 $Y^\varphi(\psi) = 0$（否则）。容易看出，族 $(Y^\varphi)_{\varphi\in A}$ 是 T-一致的。然而，在 A 中不存在函数 φ，使得 $\sup T\varphi(|Y|)$ 在 $L^1(T)$ 中存在。

在 Riesz 空间框架下，我们可以就定理 8 得到一个积极的结果，并可据此快速证明 [5, 推论 3.10]。

定理 11 设 $\mathcal{F}$ 是 $L^1(T)$中的一个族，且 $\varphi\colon [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$是一个凸函数，使得 $\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty$. 若 $\sup T\varphi(x)$存在于 $L^1(T)$中，则 $\mathcal{F}$ 是 T-一致的。

证明。取 $k > 0$，并选择 $\alpha > 0$，使得 $t > \alpha \implies \varphi(t) \geq kt.$。这意味着函数

$$t \longmapsto (\varphi(t) - kt)\, \chi_{[\alpha,\infty[}(t)$$

是正的。因此,

$$kP_{(x-\alpha e)^+}x \leq P_{(x-\alpha e)^+}\varphi(x) \leq \varphi(x).$$

利用这一点，我们得到

$$kTP_{(x-\alpha e)^+}x \leq P_{(x-\alpha e)^+}\varphi(x) \leq T\varphi(x).$$

因此，我们有

$$\sup_{\beta\geq\alpha}\sup_{x\in\mathcal{F}} TP_{(x-\alpha e)^+}x \leq k^{-1}y$$

其中 $y = \sup_{x\in} T\varphi(x)$。因此$_{\mathcal{F}}$

$$\lim_{\alpha\longrightarrow\infty}\sup_{x\in\mathcal{F}} TP_{(x-\alpha e)^+}x = 0,$$

这表明 $\mathcal{F}$ 是 T-一致可积的。 ■

推论 **12** *[5,* 推论 3.*10]*设 $\mathcal{F}$ 是 $L^1(T)$ 中的一个族，且 $1 < p < \infty$.若 $\mathcal{F}$ 在 $L^p(T)$ 中有界，即 $T|x|^p \leq y$ 对某个 $y \in L^p(T)$ 成立，对所有 $x \in \mathcal{F}$ 均成立，则 $\mathcal{F}$ 是 T-一致可积的。

4 强序列完备性

本节将考虑上述条件 Riesz 三元组 (E, e, T)。回顾一下， E 中的网 (x_α) 若满足 x_a 关于 $R(T)$-向量值范数收敛到x，也就是说， $T|x_\alpha - x| \longrightarrow 0$ 按序收敛，则称其 T-强收敛到 x。我们以类似的方式定义强柯西网的概念。若每个强柯西网都强收敛，则称 E 强完备。类似地，我们为序列定义序列强完备性。在[16] 中，作者证明了空间 $L^1(T)$ 是序列强完备的，也就是说， $L^1(T)$ 中的每个强柯西序列 (f_n) 都强收敛到某个 $f \in L^1(T)$。该证明并非对经典情形证明的简单改写，而且也无法将其推广到 $p \in (1, \infty)$ 的情形 $L^p(T)$。本节将展示，如何应用 T-一致性来证明空间 $L^p(T)$ 序列强完备。

对于网的完全完备性，目前仍缺乏完整的理解。不过，我们知道空间 $L^\infty(T)$ 是强完备的，而且在这个特殊情形下，分析相对直接（见 [?]）。

为证明关于 $L^p(T)$ 的结果，我们将结合 Kuo、Rodda 和 Watson 关于 $L^1(T)$ 的结果，以及 Riesz 空间中 Vitali 定理的一个推广。我们还需要另一种收敛，它是依概率收敛的推广。其定义及一些基本性质将在第二节介绍。由于每个序列显然都是局部有界的，以下结果可由 [2, 定理 5.5]立即得出。

定理 13 设 (E, e, T) 是一个条件 Riesz 三元组，且 (f_n) 是 $L^1(T)$ 中的一个序列。那么以下命题等价。

(i) 序列 (f_n) T-强收敛到 f;

(ii) 序列 (f_n) 是 T-一致的，并在 T-条件概率意义下收敛到 f 。

在 [5] 中，我们将 [2, 定理 5.5] 推广到 $L^p(T)$。这里给出一个关于序列的版本，并为完整起见提供证明（ [5] 中证明的一些细节也需要澄清）。

定理 14 设 (f_n) 是 $L^p(T)$ 中的一个序列，其中 $1 \leq p < \infty$，那么以下命题等价。

(i) 序列 (f_n) 在 $L^p(T)$ 中收敛到 f（关于范数$\|\cdot\|_{p,\,T}$）；(ii) 序列 $(|f_n|^p)$ 是 T-一致的，并在 T-条件概率意义下收敛到 f。

证明. (i) $\Longrightarrow$ (ii) 根据 Lyapunov 不等式 [5, 推论 3.8], $T|f_n - f| \leq (T|f_n - f|^p)^{1/p}$，因此 f_n 在 $L^1(T)$ 中强收敛到 f。根据定理 13，序列 (f_n) 在 T- 条件概率意义下收敛到 f。为证明 $(|f_n|^p)$ 是 T- 一致的，考虑一个带投影网 (P_α)，使得 $P_\alpha \xrightarrow{o} 0$；根据 [2, 定理 4.2]，只需证明 $\limsup_\alpha \limsup_n TP_\alpha |f_n|^p = 0$。首先注意到

$$TP_\alpha |f_n|^p \leq 2^{p-1} TP_\alpha |f_n - f|^p + 2^{p-1} TP_\alpha |f|^p .$$

因此，对每个 $k \in \mathbb{N}$，我们有

$$\sup_n TP_\alpha |f_n|^p \leq TP_\alpha \sup_{n \leq k} |f_k|^p + 2^{p-1} TP_\alpha |f|^p + 2^{p-1} \sup_{n \geq k} T|f_n - f_k|^p .$$

对 α 取上极限，我们得到

$$\limsup_{\alpha}\sup_{n} TP_{\alpha}\left|f_n\right|^p \leq 2^{p-1}\sup_{n\geq k} T\left|f_n-f_k\right|^p.$$

由于这对每个 k 都成立，我们得到上极限 $\sup_{n}^{\alpha} TP_{\alpha}\left|f_n\right|^p = 0$，于是得证。

(ii) $\Longrightarrow$ (i) 我们首先证明 f 属于 $L^p(T)$。由于 $f_n \longrightarrow f$ 在 T-条件概率下，我们有 $|f_n| \longrightarrow |f|$，并且 $|f_n|^p \longrightarrow |f|^p$ 在 T-条件概率下也成立。因此，对每个 k，$(T\left|f_n^p\right| \wedge ke)$ 按序收敛到 $T\left|f\right|^p \wedge ke$，因为 $n \longrightarrow \infty.$。由此可得 It follows that $T\left|f\right|^p \wedge ke \leq M :=$ 上确界 $T\left|f_n\right|^p.$。现在，由于 $L^1(T)$ 是 T普遍完备的 $|f|^p \in L^1(T)$，进而 $f \in L^p(T)$。现在这个不等式

$$\left|f_n-f\right|^p \leq 2^{p-1}\left(\left|f_n\right|^p+\left|f\right|^p\right)$$

表明 $(|f_n-f|^p)$ 是 T-一致的。此外，我们还使用以下对 $p \geq 1$ 显然成立的结果，

$$\left|f_n-f\right|^p \wedge e = \left(\left|f_n-f\right| \wedge e\right)^p \leq \left|f_n-f\right| \wedge e.$$

由 $[3,$引理 $4]$ 可知，$|f_n-f|^p$ 在 T-条件概率意义下收敛到 0。现在利用定理 13，我们推得 $T\left|f_n-f\right|^p \longrightarrow 0$，因此 $f_n \longrightarrow f$ 属于 $L^p(T)$，如所需。

■

现在我们可以证明本节的主要结果，它肯定地回答了 [16]中提出的一个未解决问题。

定理 15 设 (E,e,T) 是一个条件 Riesz 三元组。那么空间$L^p(T)$ 关于 $1 \leq p \leq \infty.$ 是序列强完备的

证明. (i) 假设 $1<p<\infty.$ Let (f_n) 是 $L^p(T)$ 中的一个柯西序列。那么根据 Lyapunov 不等式 $[5,$ 推论 $3.8]$, (f_n) 是 $L^1(T)$ 中的一个柯西序列。由 $L^1(T)$ 的强序列完备性以及 $[16,$定理 ??] 可知，(f_n) 在 $L^1(T)$ 中强收敛，也就是说，存在$f \in L^1(T)$，使得 $T\left|f_n-f\right| \longrightarrow 0$ 按序。根据定理 14，我们可推出 $f_n \longrightarrow f$ 在 T-条件概率下。根据引理 3，我们可推出 $|f_n|^p \longrightarrow |f|^p$ 在 T-条件概率下。由引理 2 可知，

$$T\left(\left|f_n\right|^p \wedge ke\right) \xrightarrow{o} T\left(\left|f\right|^p \wedge ke\right),$$

对每个整数 k.于是

$$T\left|f\right|^{p}\wedge ke\leq y:=\sup T\left|f_{n}\right|^{p}\in L^{1}\left(T\right).$$

这表明 $f\in L^{p}\left(T\right)$。为了完成证明，我们将使用定理 14；因此只需证明 $\left(\left|f_{n}\right|^{p}\right)$ 是 T-一致的。为此，考虑一个由带投影组成的网 $\left(P_{\alpha}\right)$，使得 $P_{\alpha}\overset{o}{\longrightarrow}0$，并固定 k 于 $\mathbb{N}$。于是

$$TP_{\alpha}\left|f_{n}\right|^{p}\leq 2^{p-1}TP_{\alpha}\left|f_{n}-f_{k}\right|^{p}+2^{p-1}TP_{\alpha}\left|f_{k}\right|^{p}.$$

Thus

$$\sup_{n}TP_{\alpha}\left|f_{n}\right|^{p}\leq TP_{\alpha}\sup_{k\leq n}\left|f_{k}\right|^{p}+2^{p-1}TP_{\alpha}\left|f_{k}\right|^{p}+2^{p-1}\sup_{n\geq k}T\left|f_{n}-f_{k}\right|^{p}.$$

由此可得

$$\limsup_{\alpha}\sup_{n}TP_{\alpha}\left|f_{n}\right|^{p}\leq 2^{p-1}\sup_{n\geq k}T\left|f_{n}-f_{k}\right|.$$

由于这对每个整数 k 都成立，我们得到

$$\limsup_{\alpha}\sup_{n}TP_{\alpha}\left|f_{n}\right|^{p}=0.$$

这表明序列 $\left(\left|f_{n}\right|^{p}\right)$ 是 T-一致的，并完成了这部分的证明。

(ii) 我们几乎已经完成，因为情形 $p=1$ 已在 [16] 中证明，而对于情形 $p=\infty$，我们在 [16] 中还得到了一个更强的结果，指出 $L^{\infty}\left(T\right)$ 是相当强完备的。不过，鉴于那里的证明似乎有些仓促，我们在此给出 $L^{\infty}\left(T\right)$ 强序列完备性的完整细节。回顾

$$\left\|f\right\|_{T,\infty}=\inf\left\{u\in R\left(T\right):\left|f\right|\leq u\right\}.$$

设 $\left(f_{n}\right)$ 是 $L^{\infty}\left(T\right)$ 中的一个柯西序列，并令

$$h_{n}=\sup_{r,s\geq n}\left\|f_{r}-f_{s}\right\|_{T,\infty}\in L^{\infty}\left(T\right).$$

于是 $h_{n}\downarrow 0$. 很容易由 $L^{1}\left(T\right)$ 的 T普遍完备性推出， $R\left(T\right)$ 是 $L^{1}\left(T\right)$ 的正则黎斯子空间（另见 [3]中的定理 6 及其后续注释）。此外， $L^{\infty}\left(T\right)$ 是正则的，因为它是一个理想

在 $L^1(T)$ 中 ([8])。设 (f_n) 是 $L^\infty(T)$ 中的一个柯西序列，并令 $v_n = \sup_{p,\ q\geq n} \|f_p - f_q\|_{\infty,\ T}$。于是 $v_n \downarrow 0$ 属于 $L^\infty(T)$，所以 $v_n \downarrow 0$ 属于 $L^1(T)$。现在，由于 $|f_p - f_q| \leq \|f_p - f_q\|_{\infty,\ T}$ 我们得到 $\sup_{p,\ q\geq n} |f_p - f_q| \downarrow 0$ 属于 $L^1(T)$。但 $L^1(T)$ 是序完备的，因此存在 $f \in L^1(T)$ 使得 $|f_n - f| \xrightarrow{o} 0$。现在令 $p \longrightarrow \infty$，在不等式中

$$|f_n - f_p| \leq \|f_n - f_p\|_{\infty,T} \leq v_n,$$

我们得到 $|f_n - f| \leq v_n \in R(T)$，因此 $\|f_n - f\|_{\infty,T} \xrightarrow{o} 0.$ 证明至此完成。

■

参考文献

[1] Y. Azouzi，向量格的完备性，数学分析与应用杂志 472 (2019) 216–230。

[2] Y. Azouzi, W.C. Kuo, K. Ramdane, B.A. Watson，《Riesz空间中带条件期望算子的收敛》，Positivity 19(2015) 647– 657.[3] Y. Azouzi, Y. Nasri，《Dedekind完备向量格的上确界完备化》，数学分析与应用杂志 506 (2022).[4] Y. Azouzi and K. Ramdane，Riesz空间中的Burkholder不等式，Indagationes Mathematicaes, Indag. Math. (N.S.) 28 (2017), no. 5, 1076–1094.[5] Y. Azouzi, M. Trabelsi，关于Riesz空间上的条件期望Lᵖ空间，数学分析与应用杂志 447 (2017) 798–816.[6] T.K. Chandra，de La Vall´ée Poussin定理、一致可积性、紧性与矩，统计与概率快报 107 (2015) 136–141[7] J. Diestel, J. J. Uhl, Jr.，《向量测度》，数学调查 15，美国数学会，普罗维登斯。197[8] N. Gao, V. Troitsky, F. Xanthos，Uo-cv及其在BLs中的Ces`aro均值的应用，Isr. J. Math. 220 (2017) 649–689。

[9] J.J. Grobler，Riesz空间中的Doob可选抽样定理，Posi- tivity 15, 617-637 (2011).[10] J.J. Grobler，Riesz空间中的Jensen不等式与鞅不等式，Indag. Math 25, 275–295 (2014).[11] A. Kalauch, W-C Kuo, B. Watson，Riesz空间中的Hahn-Jordan分解与Riesz-Frechet表示定理，arXiv:2209.00715[math.FA][12] A. Kalauch, W-C Kuo, B. Watson，一类L_2-型Riesz空间的强完备性，arXiv:2302.00969 [math.FA][13] W.-C. Kuo, C.C.A. Labuschagne, B.A. Watson，Riesz空间上的条件期望。数学分析与应用杂志 303 (2005) 509-521.[14] W.-C. Kuo, C.C.A. Labuschagne, B.A. Watson，Riesz空间鞅的收敛，Indag. Math., 17 (2006), 271–283.[15]W.-C Kuo, J.J. Vardy, B.A. Watson，Riesz空间上的混合鞅。数学分析与应用杂志 402, 731–738 (2013)[16] W.-C Kuo, D. F. Rodda, B. A. Watson，Riesz空间中条件期望算子自然定义域的强序列完备性，Proc. Amer. Math. Soc., 147 (4) (2019), 1597-1603.[17] W.A.J. Luxemburg and A.C. Zaanen，RS. Vol. I，North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London, 1971.[18] D. Williams，《带鞅的概率论》，剑桥大学出版社，1991。