arXiv:2304.07268v1 [cs.DS] 14 Apr 2023

平面及无小子图度量可嵌入多对数树宽度量，且期望乘法畸变可任意接近 1 *

Vincent Cohen-Addad† Hung Le‡ Marcin Pilipczuk§ Michał Pilipczuk¶

摘要

我们证明，存在一种随机多项式时间算法：给定一个带边权的图 G，它不含固定子式 Q，且有 n 个顶点，以及一个精度参数 $\varepsilon > 0$，该算法可构造一个带边权的图 H 和一个嵌入 $\eta\colon V(G) \to V(H)$，并具有以下性质：

- 对于任意常数规模的 Q，H 的树宽关于 ε^{-1}、$\log n$ 以及 G 中距离度量伸展的对数呈多项式增长。
- 期望乘法畸变为 $(1+\varepsilon)$：对于 G 中任意一对顶点 u、v，总有 $\mathrm{dist}_H(\eta(u)\ \eta(v)) \geqslant \mathrm{dist}_G(u, v)$，且 $\mathbb{E}[\mathrm{dist}_H(\eta(u)\ \eta(v))] \leqslant (1+\varepsilon)\mathrm{dist}_G(u, v)$。

我们的嵌入是首个使宿主图具有多对数树宽的嵌入，并接近 Carroll 和 Goel 给出的下界：他们证明，任何对平面图的嵌入若具有$\mathcal{O}(1)$期望畸变，就要求宿主图的树宽为 $\Omega(\log n)$。此外，该嵌入还提供了一个统一框架，可为子式自由度量中的多种问题构造随机准多项式时间近似方案，包括网络设计、聚类和路由问题，其中优化目标是所选距离之和。应用包括带容量限制的车辆路径问题和带容量聚类问题。

1 引言

树度量是算法设计者最容易处理的度量之一：树度量中的大量 NP难问题都能在多项式时间内求解，其中一些甚至能在线性时间内求解。遗憾的是，大多数现实问题都发生在复杂得多的度量空间中。因此，如何将复杂度量嵌入到更简单的度量（例如树度量）中，成为一个自然的问题，并于 20 世纪 90 年代出现。经过一系列研究 [6, 7, 25] 最终证明，任意 n点度量都可以随机嵌入到树度量中，使得任意一对点之间的距离在期望意义下保持在一个乘法因子以内，该因子即为畸变，为 $\mathcal{O}(\log n)$；并且这种嵌入可以在多项式时间内计算。该结果有许多算法应用，已成为算法设计标准工具箱的一部分。

Bartal [7] 证明，对于任意度量空间，最坏情况下畸变的 $\mathcal{O}(\log n)$ 界已是所能期望的最佳结果。若要改进这一界，就必须关注具有特殊结构的输入度量，例如平面及

*本工作是 CUTACOMBS（Ma. P.）和 BOBR（Mi. P.）项目的一部分，这些项目获得了欧洲研究委员会（ERC）通过欧盟 Horizon 2020 研究与创新计划提供的资助（资助协议编号分别为 714704 和 948057）。Hung Le 获得 NSF职业奖（编号 CCF-2237288）和 NSF资助（编号 CCF-2121952）的支持。Ma. P. 也是 BARC 的成员，该项目由 VILLUM基金会 16582 号资助支持。

†Google 研究院，法国（cohenaddad@google.com）

‡马萨诸塞大学阿默斯特分校，美国（hungle@cs.umass.edu）§信息学研究所，华沙大学，波兰；哥本哈根信息技术大学，丹麦（marcin.pilipczuk@mimuw.edu.pl）

¶信息学研究所，华沙大学，波兰（michal.pilipczuk@mimuw.edu.pl）

无小图图中的最短路径度量。平面及排除小图的度量已得到广泛研究，并出现在许多实际应用中，尤其是网络设计、路由或聚类应用。2000年代初，研究人员因此提出了这样一个问题：当输入度量为平面度量（而宿主度量为树）时，我们能否降低畸变？Caroll 和 Goel [9] 证明遗憾的是，$\Omega(\log n)$ 下界在输入度量为平面度量时同样成立。

尽管树度量在拓扑上很简单，但算法设计者的终极目标是高效地解决算法问题。在这方面，由有界树宽图诱导的度量几乎同样强大，同时又允许复杂得多的结构。具体来说，利用树分解上的动态规划，可以在有界树宽图上解决极其广泛的一类问题；参见 [18, 第 7]章。因此，接下来的问题是：如果改为将平面度量嵌入有界树宽图，从而绕过 [9] 给出的下界，我们能否突破将平面度量嵌入树时的 $\mathcal{O}(\log\ n)$ 畸变界?

问题 1. 我们能否将平面图嵌入低树宽图，并使畸变较小，理想情况下达到常数，或对任意固定的 $\varepsilon \in (0,1)$，达到 $(1+\varepsilon)$？

这里所说的低树宽，是指常数树宽，甚至多对数树宽——这足以为大量 NP难问题获得准多项式近似方案。正如我们稍后将指出的，如果坚持要求 $o(\log n)$ 畸变，常数树宽是不可能实现的。

然而，关于问题 1 的研究一直充斥着负面结果。具体而言，任何将平面图进行确定性嵌入且最坏情况下畸变为常数的方案，其宿主图的树宽必须为 $\Omega(\sqrt{n})$；这个下界几乎是显而易见的，因为每个 n 顶点的平面图都有树宽 $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ [9]。任何将平面图嵌入常数树宽图的随机化嵌入，其期望畸变都必须为 $\Omega(\log n)$ [9, 10]。而任何期望畸变为常数 c（对任意给定的常数 $c \geqslant 1$）的随机化嵌入，其树宽都必须为 $\Omega(\log\ n/c)$ [9]。鉴于这些下界，要想在问题 1 上取得任何实质性进展似乎都毫无希望。值得一提的是，近期在加性畸变嵌入方面取得了一些进展：输入度量受到进一步限制，要求其伸展为 2^{ℓ}（其中 $\ell > 0$[1]），且畸变为加性畸变 $+\varepsilon 2^{\ell}$ [23, 30, 14, 28]。加性畸变的保证远弱于乘法畸变，且与一般度量所获得的 $\mathcal{O}(\log n)$ 乘法畸变并不能真正相提并论 [2]。这些局限严重限制了加性畸变嵌入可用于算法应用的范围。

另一方面，前述下界仍留有一线希望：它们并未排除存在这样一种嵌入，其期望畸变为 $(1+\varepsilon)$，且树宽为 $\mathcal{O}_{\varepsilon}(\log n)$。先前提到的树宽下界 $\Omega(\log n/c)$，虽然对任意常数畸变 c都成立，却并未排除这样的可能性：对于期望畸变 $(1+\varepsilon)$，宿主图的树宽为 $\mathcal{O}(\log n/\varepsilon)$。然而，如何将一个 n顶点平面图以任意常数畸变嵌入到树宽显著优于平凡上界 $\mathcal{O}(\sqrt{n})$的图中，一直未有定论。值得注意的是，以上讨论同样适用于加权和平面无权图；换言之，让每条边具有相同权重似乎并不会使问题变得更简单。Caroll 和 Goel 的下界 [9] 适用于无权平面网格。

在这项工作中，我们证明，对于期望畸变 $(1+\varepsilon)$，可以实现树宽为多对数级的嵌入。我们的结果是问题 1取得的首个积极进展。

定理 1.1。 对于每个固定的图 K，都存在一种随机多项式时间算法：给定一个带边权的 K-子式无关图 G 和一个精度参数 $\varepsilon > 0$，该算法可构造 G 的概率度量嵌入，其期望畸变为 $(1+\varepsilon)$，并将其嵌入到树深度为[3]的图中

$$\mathcal{O}_K\left((\ell + \ln n)^6/\varepsilon \cdot \ln^2 n \cdot (\ln n + \ln \ell + \ln(1/\varepsilon))^5\right),$$

其中，n 是 G 的顶点数，而 ℓ 是由 G诱导的度量的伸展的对数。

[1]度量中的伸展 是最大两两距离与最小两两距离之比。[2]若令 $\varepsilon \approx 2^{-\ell}\log\ n$，则乘法畸变为 $\mathcal{O}(\log\ n)$，但此时树宽与 $2^{\ell}/\log\ n$成正比，在大多数情况下都过大。我们关注的是树宽为 ℓ的多项式级别的图。[3]图 G 的树深度，是其消去森林可能具有的最小深度（即根到叶路径上的顶点数）。图的树深度是其树宽的一个上界。

特别地，对于平面图——它们不包含 K_5 作为子式，且边权重取自 $[1, n^c]$，对任意常数 c，定理1.1 中的树宽上界为$\text{polylog}(n)$，因为 $\ell = \log(n^c) = \mathcal{O}(\log n)$。在本文中，我们不试图将树宽上界中多对数因子的次数降至最低。

应用。 定理 1.1 是更广泛研究计划的一部分，旨在为结构化度量中的优化问题设计近似方案。结构化度量的显著例子包括欧几里得度量和倍增度量。对于欧几里得度量，相关研究迅速取得了巨大进展；一系列后续工作提出了针对其他几何问题（包括 k-中位数）的拟多项式时间近似方案（QPTAS）和多项式时间近似方案 [5, 4]。Arora 和 Mitchell 的工作运用了四叉树分解这一概念，将欧几里得度量实例拆分为相互作用有限的问题子实例，并很快发展成为解决多种问题的通用框架。Talwar [50] 更进一步，证明任意倍增度量（欧几里得度量的一种推广，无需将点嵌入到某个空间中）都可以以 $(1+\varepsilon)$ 的期望畸变嵌入到树宽至多为 $\mathcal{O}_{d的\varepsilon}(\ell)$ 图中，其中 ℓ 是伸展的对数。这一结果立即带来了：(1) 对多种目标函数为一组边长度之和的问题，若这些问题在有界树宽图上已知存在拟多项式时间近似方案，则也可得到相应的拟多项式时间近似方案；以及 (2) 将旅行商问题的拟多项式时间近似方案推广到欧几里得空间之外。

遗憾的是，对于图的最短路径度量（例如由平面图或排除固定子式的图中的最短路径所诱导的度量），研究图景要复杂得多。事实上，在过去 25 年里，如何为旅行商问题以及 Steiner树等其他网络设计问题，或聚类问题求得多项式时间近似方案乃至准多项式时间近似方案，一直是亟待解决的挑战，其中部分问题已得到解决。一个能说明问题的例子是，直到去年才有人提出 k-MST 问题的多项式时间近似方案 k；而车辆路径问题（除非假设容量为绝对常数 [12] ），以及无小子图度量中的非均匀设施选址问题，目前都尚无准多项式时间近似方案。非均匀设施选址问题确实是一个典型例子：如何将平面图上的结果推广到更一般的图类（例如排除固定子式的图），一直是重要的研究方向。虽然 Grigni[14, 30]为无小图图上的旅行商问题提出了准多项式时间近似方案，但直到最近，Borradaile 等人 [32] 才将其改进为高效多项式时间近似方案 [8]。最近，Le[4]和 Cohen-Addad 等人 [43] 又对这些结果进行了改进（并将其扩展到子集版本 [14]）。Cohen-Addad [12] 的最新成果为建立一个框架迈出了一步，该框架可将平面情形下针对多种网络设计问题（例如 Steiner森林）的结果推广到无小子图度量。遗憾的是，这种方法不适用于车辆路径问题或聚类问题（设施选址或 k-中位数）等目标函数更复杂的问题。

一方面的平面（更一般地说，不含子式）度量与另一方面的欧几里得度量和倍增度量之间的差距，主要源于 Talwar 将其嵌入到树宽为$\mathcal{O}_{d,\ \varepsilon}(\ell)$ 的图 [50] 中，这为大多数度量优化问题提供了准多项式时间近似方案（但不包括 k均值或k中心问题；这类问题的目标是最小化平方距离之和或最大距离，因而采用了不同的技术 [15, 13, 31, 30]）。我们的定理1.1 克服了这一根本性的嵌入瓶颈。作为推论，我们为若干先前技术无法解决的问题获得了准多项式时间近似方案。

第一个问题是平面度量上的带容量限制的车辆路径问题（CVRP）。在该问题中，给定：(i) 度量空间中由一个点子集表示的一组客户，每位客户都有需求；(ii) 一辆容量为 Q的车辆；以及 (iii) 一个特殊点 r，称为车场。CVRP 的可行解是一组从车场出发并最终返回车场的巡回路线 r，在每条巡回路线中，车辆都可以收集各客户的需求，且收集的需求总量不超过容量 Q；所有巡回路线合计起来，则每位客户的需求都必须得到满足。目标是找到成本最低的一组可行巡回路线。CVRP 有三种不同变体：单位需求(每位客户的需求均为1)、可拆分需求(每位客户的需求可以在多条巡回路线中收集)，以及不可拆分需求(每位客户的需求只能在一条巡回路线中收集)。近期，该问题受到了广泛关注（例如 [14, 30]）；然而，所有已开发的技术都只适用于容量为 $o(\log\log n)$的特殊情形。这

[4]在子集版本中，问题是访问给定的输入顶点子集。

与 Das 和 Mathieu 的研究形成鲜明对比 [19]，他们于 2010 年针对固定维数欧几里得空间中的无约束问题给出了一个准多项式时间近似方案。

推论 1.2。对于任意 $1/2 > \varepsilon > 0$，在无小子图度量中，存在一个随机化的 $(1+\epsilon)$-近似方案，用于单位需求容量约束车辆路径问题，其运行时间为 $n^{\varepsilon^{-\mathcal{O}(1)}\log^{\mathcal{O}(1)} n}$。

证明可由定理 1.1 以及 Jayaprakash 和 Salavatipour 针对有界树宽图的准多项式时间近似方案 [35] 推出。更多细节请参阅第7 节。

我们还为无小子图度量中的经典设施选址问题获得了首个准多项式时间近似方案。在该问题中，输入由一个度量空间、两组点 C、F以及一个成本函数 f： $F \mapsto \mathbb{R}$组成。目标是确定一个集合 $S \subseteq F$，从而最小化 $\sum_{c\in C} \min_{q\in S} \mathrm{dist}(c,q) + \sum_{q\in S} f(q)$。早在 90 年代末，人们就已知固定维度欧几里得度量上该问题的准多项式时间近似方案 [5]，后来又有了多项式时间近似方案 [39, 13],，而针对平面度量的首个多项式时间近似方案直到 2019 [17] 才出现（关于统一成本的情形，另见 [15, 16]）。然而，直到现在，针对无小子图度量的近似方案仍是该领域未能解决的问题。

推论 1.3。对于任意 $1/2 > \varepsilon > 0$，都存在一个针对无小子图度量中的设施选址问题的随机$(1+\epsilon)$-近似方案，其运行时间为 $n^{\varepsilon^{-\mathcal{O}(1)}\log^{\mathcal{O}(1)} n}$。

在容量约束 k-中位数问题中，我们有两组点 C, F 和一个容量约束μ： $C \mapsto \mathbb{N}$。目标是从 F 中选出一组 k 个中心，并将 C 中的点分配给这些中心，使得每个中心 $i \in F$ 至多分配到 $\mu(i)$ 个点，且每个点到其所分配中心的距离总和最小。容量约束设施选址问题与此类似，但现在每个点 i 都关联一个开设成本 $f(i)$（即在该点开设设施的成本），与上述设施选址问题类似；目标是开设一组设施 F，并将其他点分配给各设施，使得：(a) $i \in S$ 中的每个设施至多分配到 $\mu(i)$ 个点；(b) 总成本 $\sum_{i\in S} f(i) + \sum_p d(p, S(p))$ 最小，其中 $S(p)$ 是 p 所分配到的设施，而$d(\cdot,\cdot)$ 是输入度量的距离函数。同样，已知这些问题在固定维度 [11]，的欧几里得度量中存在准多项式时间近似方案（QPTAS），但对于平面（因而也包括无小子图）度量，除一般度量的 $\mathcal{O}(\log k)$-近似算法外，尚无更好的结果。

推论 1.4。对于任意 $1/2 > \varepsilon > 0$，都存在一种用于在无小子图度量中求解容量约束 k-中位数问题和容量约束设施选址问题的随机$(1+\epsilon)$-近似方案，其运行时间为 $n^{\varepsilon^{-\mathcal{O}(1)}\log^{\mathcal{O}(1)} n}$。

推论 1.4 中的算法遵循与容量车辆路径问题算法相同的思路：将输入度量嵌入低树宽图，并在准多项式时间内求解低树宽实例。

在欧几里得度量和倍增度量中，许多问题最初已知存在准多项式时间近似方案，随后又针对各个问题引入额外思路，将其改进为多项式时间近似方案。遵循同样的模式，我们希望能提出额外思路，将我们的准多项式时间近似方案改进为多项式时间近似方案。

我们的方法。为简化表述，假设 $\ell = \mathcal{O}(\log n)$。Talwar [50] 针对倍增维数度量的嵌入中，一个基本思想是随机球切割：给定一个直径为 D 的图 C，其所在度量具有倍增维数，可以随机地将 C 划分（使用半径随机的球）为一组簇，例如 $\mathcal{P}$，使得每个簇的直径至多为 $D/2$，并且任意两点 x 和 y 被切分到不同簇中的概率不超过 $\mathcal{O}(\frac{\mathrm{dist}(u,v)}{D})$。接着，我们构造一个 $(\varepsilon D/\log n)$-网 N，将其指定为门户点：在输出的宿主图中，将每个 $x \in N$ 与 C 中的其他每个点用一条边相连，该边的长度等于 G中两端点之间的距离，然后对 $\mathcal{P}$中的每个簇递归处理。由于有界倍增维数这一假设， N 的大小以 $\log n/\varepsilon$ 的多项式为上界，最终得到多对数树宽。对于 G中的每条边 uv，递归的每个 $\mathcal{O}(\log n)$层都会带来 $\mathcal{O}(\varepsilon \log n)\mathrm{dist}(u,v)$ 的期望畸变：边uv以 $\mathcal{O}(\frac{\mathrm{dist}(u,v)}{D})$ 的概率被切割；而且，得益于所选网 N的性质，发生切割 uv时产生的绕行长度不超过 $\mathcal{O}(\varepsilon \log n D)$。

我们可以尝试将 Talwar 的技术应用于平面度量。对于将度量随机分解为簇，Klein、Plotkin 和 Rao 的分解 [38] 能够以相同的概率将任意两点切分到不同的簇中。然而，选择一个 $(\varepsilon D/\log n)$-网 N 这一步存在问题：现在我们无法再对 N的大小给出上界。事实上，即使在星形图这样简单的图中，也可能出现 $|N| = n$。因此，沿着这一思路获得任何非平凡的树宽上界似乎都非常困难。另一方面，星形图的树宽已经相当良好。

因此，我们旨在设计一种方法，能够隐式地区分网格状平面图（可应用 Talwar 的分解）与已经呈现“树状”的平面度量。由于在平面图中似乎不可能为 $r \ll D$ 找到一个小的 r-网，我们的目标是降低 uv 被切割的概率，从而避免产生 $\Omega(D)$ 的绕行。考虑以下例子。假设我们对图 C 应用了上述聚类方案，并得到一个划分 $\mathcal{P}$，将其划分为以“网格状”排列的簇：商图 $C/\mathcal{P}$（定义为顶点集为 $\mathcal{P}$ 的图，若 G 中存在连接 A 与 B 的边，则两个元素 A、$B \in \mathcal{P}$ 相邻）是一个网格。于是，我们不再切除 $\mathcal{P}$ 中的所有簇，而是希望采取以下做法：在网格 $C/\mathcal{P}$ 的中间 ξ 列中随机选取一列（参数 ξ 稍后确定），将该列上的簇作为子图切出以进行递归，并递归处理网格剩余的左、右两部分。我们不使用网，而是仅将网格所选列中每个簇的一个顶点指定为门户点。在递归过程中，所选列上各簇的递归调用的直径会按乘法缩小；而左、右两部分（只要整个网格的列数足够多）各自至多包含 $0.75|V(C)|$ 个顶点；因此，递归深度的上界为 $\mathcal{O}(\ell\log n) = \mathcal{O}(\log^2 n)$。关于绕行上界，注意到边 uv 位于簇边界上的概率为 $\mathcal{O}(\frac{\mathrm{dist}(u,v)}{D})$，而该簇恰好位于所选列中的概率为 $\frac{1}{\xi}$，因此边被选中的概率是两者之积。由于实际被切割的边会产生 $\mathcal{O}(D)$ 的绕行，整个过程中绕行导致的期望加性失真因此为 $\mathcal{O}(\log^2 n \cdot \frac{1}{\xi} \cdot \mathrm{dist}(u,v)_D \quad D) \sim \mathcal{O}(\frac{\log^2 n}{\xi}\mathrm{dist}(u,v))$；取 ξ 为 $\log^2 n/\varepsilon$（这可能使输出嵌入的最终树宽上界达到 $\mathcal{O}(\xi\log^2 n) = \mathcal{O}(\log^4 n/\varepsilon)$），即可得到所需上界。 ———

我们的方法的核心论证是证明：即使 $C/\mathcal{P}$ 看起来不像网格，也总能找到这样一组“ξ 可供随机选择的列”。为此，我们还需要聚类算法的另一项性质：以高概率，商图 $C/\mathcal{P}$ 的直径被 n 的某个多对数函数所界定，我们将该函数记为 ρ。于是，$C/\mathcal{P}$ 的树宽被 $\mathcal{O}(\rho)$所界定，这为我们提供了第一“列”：一组 $\mathcal{O}(\rho)$个簇 $\mathcal{A}_1$，删除这些簇后，剩下的连通分量规模会按乘法意义缩小。下文将这样的簇集合称为平衡割。

我们需要有更多平衡割可供选择，并希望这些平衡割大体上互不相交，也就是说，G 的同一条边不会多次出现在它们的边界上。然而，有许多星形示例表明这并不总是可能的；换言之，存在一个簇包含于每个平衡割中。我们按如下方式进行：选取前文所述的第一个平衡割 $\mathcal{A}_1$ 后，通过对每个簇 $C_1 \in \mathcal{A}_1$再次应用聚类方案，并使用直径 $D/2$，将 C_1 替换为所得结果，从而细化划分 $\mathcal{P}$。然后，我们在得到的划分 $\mathcal{P}_2$中找到一个平衡割 $\mathcal{A}_2$，并继续进行 $\mathcal{P}_3$，再次将 $\mathcal{A}_2$ 所用的簇替换为对这些簇应用聚类方案所得的结果。替换过程会一直进行到单顶点簇为止；此时进行切割不会造成任何绕行。

现在，每条边 uv 都包含在 $\mathcal{O}(\ell) = \mathcal{O}(\log n)$ 平衡割的、大小大于单个顶点的簇的边界上 $\mathcal{A}_i$。因此，如果我们生成 $\Omega(\frac{\log^3 n}{\varepsilon})$ 个平衡割，期望绕行分析仍会给出所需结果。但存在一个问题：随着我们扩展划分 $\mathcal{P}_i$，直径以及 $C/\mathcal{P}_i$ 的树宽上界都会增大，因此当i 增加时，我们对 $\mathcal{A}_i$ 大小的保证会变差。

此时，输入图的拓扑假设终于发挥了作用。直接来看，$C/\mathcal{P}_{i+1}$ 与 $C/\mathcal{P}_i$ 的直径之差可能达到 $\Omega(|\mathcal{A}_i| \cdot \rho)$，因为 $\mathcal{A}_i$ 的每个簇都会被替换为一组簇，而其商图的直径为 ρ。然而，如果

我们假设给定图不含某个固定顶点图[5] 作为子式，那么可以证明，经过 k 步后， $C/\mathcal{P}_k$ 的直径仅为 $\mathcal{O}(\sqrt{\sum_{i=1}^{k-1}|\mathcal{A}_i|}\cdot\ell\rho)$。这里用到的不含顶点图子式的图的关键图论性质如下：要用半径为 d的球覆盖一个不含顶点图子式、无权且树宽为 $\geqslant t$ 的图，至少需要选取 $\Omega((t/d)^2$ 个这样的球。这证明了，如果继续进行寻找并剖析 ξ 步割的过程，其中 ξ 是任意所需的大型多对数，那么所有生成的平衡割的大小都将受另一个仅依赖于 τ ξ 的多对数界所限制。进而，所得到的嵌入的树宽也就有了最终的多对数界。

至此，我们完成了在输入图排除某个固定顶点图作为子式这一假设下对定理 1.1 证明的概述；这尤其涵盖了平面图，因为它们排除 K_5。为将结果推广到排除任意固定图 K 的情形，我们首先应用罗伯逊–西摩结构定理 [49]，该定理基本上指出，输入图 G 存在一个树分解，其中每个袋的躯干由某个固定的排除顶点图子式图类中的图构成，并在其上添加常数个顶点。随后，我们谨慎地将该技术应用于该分解中质心袋的排除顶点图子式部分。

再简要介绍一些相关工作。 关于将平面及无小图度量嵌入欧几里得空间和赋范空间，已有大量研究。Rao [48] 构造了一个将平面度量嵌入欧几里得空间的嵌入，其畸变为 $\mathcal{O}(\sqrt{\log n})$。对于任意满足 $p\geqslant 1$ 的 ℓ_p 空间，Rao 得到了畸变为 $\mathcal{O}((\log\ n)^{1/p})$ 的嵌入。Rao 的结果后来推广到了无小图度量 [3, 40]；其畸变为 $\mathcal{O}(h^{1-1/p}(\log\ n)^{1/p})$，其中 h 是被排除子式的规模。对于路径宽度较小的图 [2, 45]，已有更好的嵌入结果。对于欧几里得情形，Newman 和 Rabinovich [47] 给出了与 Rao 的嵌入相匹配的下界，证明 Rao 达到的畸变 $\mathcal{O}(\sqrt{\log n})$ 已是最优。

特别值得关注的是 ℓ_1 的情形。著名的 ℓ_1 嵌入猜想 [33] 指出，平面度量可以嵌入到 ℓ_1 中，且 $\mathcal{O}$畸变为 (1)。人们相信，该猜想对一般的无小子图度量 [33, 44]也成立。尽管该猜想甚至对平面度量仍未得到解决，但针对各种特殊情形已取得进展： k外平面图、[33], 面覆盖较小的图，[41, 27],或每个需求对的两个端点都位于同一个面内的情形 [42]。关于更多嵌入结果，请读者参阅 [2] 及其中的参考文献。

组织结构。我们在第3节介绍聚类工具。第4 节和5 节证明定理1.1 适用于排除固定顶点图作为子式的图类。随后，我们在第6节讨论如何将证明推广到排除任意固定子式的图。第7 节详述上述定理1.1的应用。

2 预备知识

对于实数 t，我们有时记作 $\exp(t) := e^t$，其中 e 是自然对数的底。我们使用艾弗森括号记法：对于布尔断言 ψ， $[\psi]$ 在 ψ 成立时为 1，否则为 0。

图。 我们使用标准的图记号。本文讨论的大多数图都是边加权图，也就是说，我们为每条边 e 赋予一个正权重 $\mathsf{length}(e)$，将其视为 e的长度。因此，对于边加权图 G ，我们可以考虑其诱导的距离度量 G：对于顶点 u、 v， $\mathsf{dist}_G(u,v)$ 是连接 u 与 v的路径的最短长度；如果不存在这样的路径，则为 $+\infty$。路径 P的长度记为 $\mathsf{length}(P)$，等于 P中各边权重之和。该度量的伸展是 G中最大有限距离与任意两个不同顶点之间的最小距离之比。

[5]一种顶点图是指删除一个顶点后即可变为平面图的图。

边加权图 G 中的直径和半径概念，是根据其诱导的距离度量 G定义的。谈及无权图中的距离、直径或半径时，我们指标准的图论概念，即将每条边的长度都视为 1。

对于图 G 及其顶点集的划分 $\mathcal{C}$，我们将商图 $G/\mathcal{C}$ 定义为顶点集为 $\mathcal{C}$ 的无权图，其中当且仅当在 G 中存在一条边，其一个端点属于 C、另一个端点属于 C'时，部分 C与 $C' \in \mathcal{C}$ 相邻。注意，尽管 G 可以是带边权的，我们始终将 $G/\mathcal{C}$视为无权图。

分解。图 G 的树分解 是一个树 T 以及一个函数 $\mathsf{bag}(\cdot)$：该函数将 T 的每个节点 x 关联到其袋 $\mathsf{bag}(x) \subseteq V(G)$，并满足：(i) 对于 G的每个顶点 u，T 中包含 u 的节点构成 T的一个连通子树；(ii) 每当 u 和 v 在G中相邻时，T 中存在一个节点，其袋同时包含 u 和 v。树分解的宽度 是袋的最大大小减 1，而图 G 的树宽 是 G的树分解所能达到的最小宽度。

图 G 的消去森林 是一个根森林 F，其顶点集与 G 相同，并满足以下性质：当 u 和 v 在 G中相邻时，u 是 F中 v 的祖先，或反之。图 G 的树深度 是其消去森林 G可能达到的最小深度（根到叶路径上的顶点数）。

容易看出，图的树宽从不大于树深度减 1：要从深度为 d的消去森林 F 构造一个宽度为 $d-1$ 的树分解 $(T, \text{袋})$，令 T为 F，并将所有根连接成一条路径；对于每个顶点 u，令 袋(u) 为 u在 F中的祖先集合。另一方面，众所周知，一个含 n个顶点的图，其树深度从不大于其树宽乘以 $\log_2 n$ 再加上 1 [46, 推论 6。1]。因此，从构造嵌入到多对数树宽图中的度量嵌入这一角度来看，我们也可以等价地考虑嵌入到多对数树深度图中。

我们采用图的标准小图序。若图 K 存在一个顶点 u，使得 $K-u$ 是平面图，则称 K 为顶点图。以下引理源自先前的文献，是我们利用所考虑图的拓扑简单性的唯一论证。

引理 2.1. 对于每个顶点图 K，都存在一个正整数 α_K，使得以下结论成立。设 G 是一个无 K 子式的（无权）图，且 Z 是 G 的顶点子集，并且 G 中的每个顶点到 Z 中某个顶点的距离至多为 d。那么，G 的树宽上界为 $\alpha_K d\sqrt{|Z|}$。

Demaine 等人已针对平面图的情形明确证明了引理 2.1 [20, 定理 3.3]。在他们的证明中，只用到了平面图的两个性质：(a) 若平面图 G 的树宽为 t，则当 $s \in \Omega(t)$ 时，G 含有 $s \times s$ 网格作为子式；(b) 若平面图 G 含有 $s \times s$ 网格作为子式，则 G 中任意距离为 d 的支配集——即满足 G 中每个顶点到 Z 的距离至多为 d 的集合 Z——大小均为 $\Omega((s/d)^2)$（见 [20, 引理 3.1]）。要将这一证明推广到固定顶点图 K 的无 K 子式图情形，可以利用 Fomin 等人的结果 [29, 定理 3]：若无 K 子式图 G 的树宽为 t，则当 $s \in \Omega_K(t)$ 时，G 可通过收缩得到三角化的 $s \times s$ 网格 Γ_s（参见 [29] 关于 Γ_s 的定义）。容易看出，图中距离为 d 的最小支配集的大小在边收缩下不会增加，并且在 Γ_s 中为 $\Omega((s/d)^2)$ 阶。因此，树宽为 t 的无 K 子式图中的任意距离为 d 的支配集，其大小必为 $\Omega_K((t/d)^2)$；由此可直接推出引理 2.1 的结论。

度量嵌入。带边权图 G 的度量嵌入由宿主图——带边权图 H——以及嵌入 $\eta\colon V(G) \to V(H)$ 组成，并满足对于所有 $u, v \in V(G)$，$\mathrm{dist}_H(\eta(u), \eta(v)) \geqslant \mathrm{dist}_G(u, v)$。若对于所有 $u, v \in V(G)$，嵌入 η 满足 $\mathrm{dist}_H(\eta(u), \eta(v)) \leqslant c \cdot \mathrm{dist}_G(u, v)$，则称其具有（乘法）畸变 c。度量嵌入通常由随机化过程构造；此时，如果对于所有 $u, v \in V(G)$，$\mathbb{E}\,\mathrm{dist}_H(\eta(u), \eta(v)) \leqslant c \cdot \mathrm{dist}_G(u, v)$，则称 η 具有期望乘法失真 c。

3 划分工具

本节介绍我们所用的概率划分工具，这些工具深受相关研究的启发：填充分解[1, 25]。我们首先介绍一种过程，将给定图划分成直径显著更小的簇，使得对于任意路径 Q，被簇的边界割断的 Q 边的期望数量与 Q 的长度成正比。随后，我们以分层方式应用这一划分过程，对给定图进行多层分解。

3.1 概率预备知识

我们需要用到概率论中的一些标准工具。我们将使用下文陈述的标准切尔诺夫界，以及它的一个简单推论；为完整起见，该推论的证明见附录 A。

定理 3.1 (乘法切尔诺夫界)。 设 $X_1,\dots,X_n$ 是取值于 $\{0,1\}$ 的独立随机变量。设 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$，设 $\mu=\mathbb{E}[X]$，并设 $0\leqslant\delta$ 为一个实数。那么，

$$\mathbb{P}\left(X\geqslant\mu(1+\delta)\right)\leqslant\exp(-\delta^2\mu/(2+\delta)).$$

引理 3.2。 设 $k\geqslant 1$ 为一个整数，且 $X_1,X_2,\dots$ 为取值为$\{-1,1\}$ 的独立随机变量，使得对每个 $i\geqslant 1$，$\mathbb{P}(X_i=1)\leqslant 1/8$。设 Z 为一个随机变量，定义为满足 $k+\sum_{j=1}^{i}X_j<0$ 的最小i。那么

$$\mathbb{P}\left(Z>2k\right)\leqslant\exp\left(-\frac{k}{12}\right).$$

我们还会使用服从指数分布的随机变量。回顾一下，实值随机变量 X 服从参数为 $\lambda>0$ 的指数分布，记作 $X\sim\mathrm{Exp}(\lambda)$，是指其分布的密度为 $g(t)=\lambda\exp(-\lambda t)\cdot[t\geqslant 0]$。众所周知，服从指数分布的随机变量具有无记忆性，其含义见下述命题。

引理 3.3. 设 X 是一个随机变量，服从指数分布。那么，对于任意一对非负实数 $s\leqslant t$，有

$$\mathbb{P}(X\leqslant s+t\mid X\geqslant s)=\mathbb{P}(X\leqslant t).$$

在一项较为复杂的证明中，我们将以相当迂回的方式利用无记忆性。为避免后续论证过于繁杂，我们将其中的概率论部分抽象为下面的引理。尽管对于更熟悉一般概率论或指数时钟的读者而言，这个命题可能近乎显然，但为严谨起见，我们仍在附录 A 中给出证明。

引理 *3.4.* 设 n 为正整数，$X_1,X_2,\dots,X_{2n}$ 为独立随机变量，且各自服从参数为 *1* 的指数分布；设 $f_1,f_2,\dots,f_{2n}$ 为可测函数，其中 $f_i\colon\mathbb{R}^{i-1}\to\mathbb{R}_{\geqslant 0}\cup\{+\infty\}$ *for* $1\leqslant i\leqslant 2n$ *and* $f_i\equiv 0$ *for* $n<i\leqslant 2n$，并设 $p\geqslant 0$ 为实数。若指标 i 满足 $X_i\geqslant f_i(X_1,X_2,\dots,X_{i-1})$，则称其为优良指标；若还满足 $X_i>f_i(X_1,X_2,\dots,X_{i-1})+p$，则称其为优异指标。设 $N\in\{n,n+1,\dots,2n\}$ 为优良指标的数量（注意，几乎必然每个 $i>n$ 都是优良指标），并设 $(I_i)_{i=1}^{N}$ 为连续的优良指标所对应的随机变量。对于 $1\leqslant i\leqslant N$，令 $Y_i=X_{I_i}-f_{I_i}(X_1,\dots,X_{I_i-1})$。那么，$Y_1,Y_2,\dots,Y_n$ 是独立随机变量，且各自服从参数为 *1* 的指数分布。因此，若对 $1\leqslant i\leqslant n$，将事件“I_i 是优异指标”记为 A_i，则事件 $(A_i)_{i=1}^{n}$ 相互独立，且各自发生的概率为 e^{-p}。

3.2 单层级

我们首先定义一个简单的划分过程，用于创建层次分解中的一个层级。以下引理陈述了该过程的性质。

引理 3.5。 存在一种随机多项式时间算法，给定一个连通的 n 顶点加权边图 G，其直径为 D，以及一个实参数 $r > 0$，输出顶点集 G 的一个划分 $\mathcal{C}$，将其划分为满足以下性质的簇：

（*P1*）对于每个 $C \in \mathcal{C}$，$G[C]$ 是连通的。（*P2*）对于每个 $t \geqslant 0$，在 $\mathcal{C}$ 中存在一个簇所诱导的子图，其直径大于 $2r\,(t+1+\ln n)$ 的概率至多为 e^{-t}。（*P3*）对于每个 $t \geqslant 0$，$G/\mathcal{C}$ 的直径大于 $120 \cdot \frac{D}{r} \cdot (t+1+\ln n)$ 的概率至多为 e^{-t}。（*P4*）对于 G 中的每条路径 Q，其上端点属于不同簇的边的期望数量至多为 $\frac{\text{length}(Q)}{D} \cdot 4\ell$，其中 ℓ 是满足 G 中距离度量的伸展严格小于 2^ℓ 的最小整数。

本节剩余部分致力于证明引理 3.5。为处理平局，我们假设预先固定了一个 $\preceq$ 上的顶点 G 全序。通过缩放，不妨设 $D = 2^\ell$，并且 G 中任意一对不同顶点之间的距离严格大于 1。此外，不妨设 $r < D$，否则我们可以返回一个仅含一个部分的划分：整个 $V(G)$。

该过程。 开始时，该过程将 $\mathcal{C}$ 初始化为 $\emptyset$，并逐步将簇（$V(G)$的子集）逐个加入 $\mathcal{C}$，直到 $\mathcal{C}$ 成为 $V(G)$的一个划分。在每一步中，如果一个顶点不属于 $\mathcal{C}$中的任何元素，就称其为未分配顶点。

只要存在未分配顶点，该过程就会反复选取一个 $\preceq$-最小的未分配顶点 v，采样一个半径 $r_v := r(1 + X_v)$，其中 $X_v \sim$ 参数为 1 的指数分布是一个独立的随机变量，并创建一个新元素 C_v 于 $\mathcal{C}$ 中，该元素由图 $G - \bigcup \mathcal{C}$ 中距离 v 不超过 r_v 的所有顶点组成（即由未分配顶点诱导的 G 的子图）。顶点 v 称为 C_v的中心，集合 C_v 称为 v的簇，而 r_v 是 v的半径。

运行时间。 该过程显然能在（随机化）多项式时间内完成，并将 $V(G)$划分为若干簇$\mathcal{C}$。注意，每个簇 C_v 都是连通的，包含 v，且半径至多为r_v。

性质。现在我们验证性质(P1)–(P4)。令 k 为该过程所执行的步骤数，并令 $v_1, \ldots, v_k$为该过程构造出的连续各簇的中心。为简洁起见，我们记 $X_i := X_{v_i}, C_i := C_{v_i}$，并记 $r_i := r_{v_i}$，其中 $i \in \{1, \ldots, k\}$。此外，令 $G_i = G - \bigcup_{j<i} C_j$；也就是说，$G_i$ 是由 G 在 C_i创建时刻仍未被占用的顶点所诱导的子图。

性质(P1) 直接由构造得出。由于 $G[C_i]$ 的直径至多为 $2r_i$，性质(P2) 直接由以下陈述得出。

断言 3.1。对于每个 $t \geqslant 0$，存在 $i \in \{1, \ldots, k\}$ 使得 $r_i > r(t+1+\ln n)$ 的概率至多为 e^{-t}。

证明。 对于每个 $i \in \{1, \ldots, k\}$，我们都有

$$\mathbb{P}\left(r_i > r(t+1+\ln n)\right) = \mathbb{P}(X_i > t + \ln n) = e^{-(t+\ln n)} = e^{-t}/n.$$

由并集界可得该引理，因为簇的数量至多为 n。 □

在下一个断言中，我们验证关键性质 (P3)。为简洁起见，令 $H := G/\mathcal{C}$ 为商图。回顾一下，H 是无权的。

断言 3.2。 对于每个 $t \geqslant 0$，H 的直径大于 $120 \cdot \frac{D}{r} \cdot (t+1+\ln n)$的概率至多为 e^{-t}。

证明。 任取两个顶点 u_1 和 u_2。令 Q 为 G 中从 u_1 到 u_2 的任意一条最短路径（相对于边权重）。根据定义，我们有 $|Q| \leqslant D$。在下面的论证中，我们将Q 视为从 u_1 到 u_2定向。

令 $Z = \{v \in V(H) \mid C_v \cap V(Q) \neq \emptyset\}$ 为簇与 Q相交的那些中心组成的集合。我们按如下方式使用调色板 Z 为 Q 中的顶点着色。起初，所有顶点均未着色。我们按照聚类过程中的顺序依次考察顶点 $v \in Z$。考察顶点 v时，我们找到 $C_v \cap V(Q)$中截至目前仍未着色的第一个和最后一个顶点，分别记为 q_v^1和 q_v^2，然后用颜色v 为 q_v^1和 q_v^2之间位于 Q上的所有顶点着色。注意，这可能会导致重新为之前迭代中已着色的某些顶点着色。如果 $C_v \cap V(Q)$的所有顶点此前都已着色，则本轮迭代不为任何顶点着色，因此不会有顶点具有颜色 v。

注意，在任意时刻，所有被着色为任一颜色 $v \in Z$ 的顶点在 Q上都构成一个区间。此外，考察中心 v 时，如果我们将至少一个颜色为 v' 的顶点重新着色为 v，那么 q_v^1 和 q_v^2 之间位于 Q 上的区间包含此前所有颜色为 v' 的顶点，因此，所有颜色为 v' 的顶点都会被重新着色为 v。最后，注意在该过程结束时，每个顶点都会被赋予某种颜色。

令 $Z'' \subseteq Z$ 为由所有顶点 $v \in Z$ 组成的集合，其中当着色过程考虑 v 时， Q 中至少有一个顶点被着为颜色 v。此外，令 $Z' \subseteq Z''$ 为由所有满足以下条件的顶点 $v \in Z$ 组成的集合：在着色过程结束时， Q 中至少有一个顶点被着为颜色 v。令 $\widehat{u}_1$ 和 $\widehat{u}_2$ 为簇中心，使得 $u_1 \in C_{\widehat{u}_1}$ 和 $u_2 \in C_{\widehat{u}_2}$。注意，在 H 中存在一条从 $\widehat{u}_1$ 到 $\widehat{u}_2$ 的路径，且只经过 Z' 中的顶点，因为对于每个 $v \in Z'$， q_v^1 和 q_v^2 都在 H 中收缩到 v。因此，

$$\operatorname{dist}_H(\widehat{u}_1, \widehat{u}_2) \leqslant |Z'| - 1.$$

因此，要给出 $\operatorname{dist}_H(\widehat{u}_1, \widehat{u}_2)$ 较大的概率上界，只需给出 Z' 较大的概率上界。

考虑过程第 i 步开始时的情况，即此时已构造出 $j < i$ 对应的簇 C_j。线段是 Q 的一个极大子路径，其所有顶点均未着色；令 $\mathcal{S}_i$ 为第 i 步开始时的线段族。若簇 C_i 满足 C_i 包含至少一个线段的所有顶点，则称该簇为凿榫。

Let

$$\lambda := t + 1 + \ln n.$$

对于任意中心 v_i，令 R_i 为 G_i 中从 v_i 到最近的、在 G_i中未着色的顶点的距离。当且仅当 $r_i \geqslant R_i$时， $v_i \in Z''$成立。令 $p := \frac{1}{12\lambda}$；注意，因此 $p \leqslant \frac{1}{12} \leqslant \frac{1}{8}$。如果顶点 v_i 满足 $r_i > R_i + pr$，我们就称其为良好。关键观察如下：如果 v_i 良好，那么它要么是凿榫，要么存在 Q 的一条子路径 Q'，其长度至少为 pr，且 Q' 中的所有顶点在第 i步之前均未着色，并且除端点外，这些顶点都在第 i步被赋予颜色 v_i。在前一种情况下，我们有

$$|\mathcal{S}_{i+1}| < |\mathcal{S}_i|,$$

而在后一种情况下，我们有

$$\sum_{S \in \mathcal{S}_i} \operatorname{length}(S) - \sum_{S \in \mathcal{S}_{i+1}} \operatorname{length}(S) \geqslant pr.$$

这启发我们定义如下测量量。在第 i 步开始时的势能定义为：

$$\pi_i := |\mathcal{S}_i| + 2 \cdot \frac{\sum_{S \in \mathcal{S}_i} \operatorname{length}(S)}{pr}.$$

注意，

$$\pi_1 \leqslant 1 + \left\lceil \frac{2D}{pr} \right\rceil =: k.$$

显然，对于所有相关的 i， $|\mathcal{S}_{i+1}| \leqslant |\mathcal{S}_i| + 1$ 和 $\bigcup \mathcal{S}_{i+1} \subseteq \bigcup \mathcal{S}_i$。因此， $\pi_{i+1} \leqslant \pi_i + 1$。此外，如果 v_i 良好，那么 $\pi_{i+1} \leqslant \pi_i - 1$。注意，对于 $1 \leqslant i \leqslant |Z''|$， $\pi_i > 0$。

令 $I_1, I_2, \ldots, I_{|Z''|}$ 为 Z'' 中连续元素的索引（注意，这些都是随机变量，甚至该序列的长度也是一个随机变量）。对于 $j \geqslant 1$，令 $Y_j := (r_{I_j} - R_{I_j})/r$。对于 $j \geqslant 1$，令 A_j 为事件“v_{I_j} 是良好的”，这与“$Y_j > p$”相同。

现在，一个重要的观察是，引理 3.4 适用：变量 Y_j 相互独立，且各自服从参数为 1 的指数分布；事件 $(A_j)_{j \geqslant 1}$ 相互独立，并且每个事件发生的概率均为 e^{-p}。具体而言，为了正式应用引理 3.4，我们将序列 $X_1, X_2, X_3, \ldots = X_{v_1}, X_{v_2}, X_{v_3}, \ldots$ 中服从参数为 1 的指数分布的独立随机变量人为扩展至长度 $2n$，并在 i 仍是某个中心的索引时令 $f_i := R_i/r$，否则亦如此。

因此，由于 $1 - e^{-p} \leqslant p \leqslant \frac{1}{8}$ 且 $r < D$，根据引理3.2 我们推得

$$\mathbb{P}(|Z''| > 2k) \leqslant \exp\left(-\frac{k}{12}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{D}{6pr}\right) \leqslant \exp\left(-2\lambda\right) = \exp\left(-2(t + 1 + \ln n)\right).$$

另一方面，利用 $r < D$,

$$2k = 2 + 2\left\lceil \frac{2D}{pr} \right\rceil \leqslant \frac{D}{r} \cdot 10 \cdot 12\lambda = 120 \cdot \frac{D}{r} \cdot (t + 1 + \ln n).$$

记 $w := 120 \cdot \frac{D}{r} \cdot (t + 1 + \ln n)$。这意味着

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{dist}_H(\widehat{u}_1, \widehat{u}_2) > w) &\leqslant \mathbb{P}(|Z'| > w) \leqslant \mathbb{P}(|Z''| > w) \\ &\leqslant \mathbb{P}(|Z''| > 2k) \leqslant \exp\left(-2(t + 1 + \ln n)\right).\end{aligned}$$

对所有 u_1 和 u_2 的选择应用并集界，得到

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{diam}(H) > w\right) \leqslant \exp\left(-2(t + 1 + \ln n) + 2\ln n\right) \leqslant e^{-t}.$$

这就完成了证明。 □

最后，我们证明性质(P4)。

断言 3.3。设 Q 是 G 中的一条路径。那么，$\mathcal{C}$ 中端点属于不同簇的 Q 边的期望数量不超过 $\frac{\mathrm{length}(Q)}{r} \cdot 4\ell$。

证明。我们按如下方式用簇中心作为颜色给 Q 的边着色：对于 Q 上的一条边 xy，若 $x \in C_u$ 且 $y \in C_v$，则边 xy 被涂成 $\{u, v\}$ 中其簇较早构造的那个中心的颜色（因此，若 $u = v$，边 xy 被涂成 v）。线段 是 Q 中颜色相同的边所构成的极大子路径。Q 中端点属于不同簇的边会被计入 其所在的线段。注意，一条线段可能被计入 0、1 或 2 条边；若一条线段被计入至少一条边，则称其为正的。

现在我们提出一个关键观察：对于 Q 上的每条边 e 以及每个实数 $d > 0$,

$$\mathbb{P}(e \text{ lies in a positive segment of length } \leqslant d) \leqslant \frac{d}{r}. \tag{1}$$

事实上，对于一个指标 i，令 x_i 为 e 中距离 v_i 最近的端点（如果 e 的两个端点都已在簇中，则令其为 $x_i = \perp$），并令 R_i 为 v_i 与 x_i 在 G_i 中的距离（如果 $x_i = \perp$，则为 $R_i = +\infty$）。注意， R_i 是值 $(X_j)_{j<i}$ 的可测函数。令 I 为满足 e 的颜色为 v_I 的指标；等价地， I 是满足 $r_I \geqslant R_I$ 的最早指标。（注意， I 是一个随机变量。）接下来，令 S 为 e 的线段，并暂且假设 S 为正。令 yz 为 S 中计入 S 的一条边，其中 $y \in C_I$ 且 $z \notin C_I$。注意，在构造 C_I 时， y 和 z 都是空闲的。由于 $z \notin C_I$，我们有 $\mathrm{dist}_{G_I}(v_I, z) > r_I$；结合 $\mathrm{dist}_{G_I}(v_I, x_I) = R_I$，可推出

$$\mathrm{length}(S) \geqslant \mathrm{dist}_{G_I}(x_I, z) \geqslant r_I - R_I.$$

我们得出结论，事件“e 位于长度为 $\leqslant d$的正长度线段中”包含于事件$R_I \leqslant r_I \leqslant R_I + d$。现在可以利用引理 3.4 得出，该事件的概率至多为$1 - e^{-d/r} \leqslant d/r$；由此得到（1）。

对于Q的一条边e，令$S(e)$表示包含e的线段。我们如下界定正线段的数量。

$$\begin{aligned}
\#(\text{positive segments}) &\leqslant \sum_{e\in E(Q)} \frac{\text{length}(e)\cdot[S(e)\text{ is positive}]}{\text{length}(S(e))} \\
&\leqslant \sum_{e\in E(Q)} \sum_{i=1}^{\ell} \text{length}(e)\cdot[S(e)\text{ is positive}]\cdot[2^{i-1}\leqslant \text{length}(S(e))\leqslant 2^i]\cdot 2^{-i+1} \\
&\leqslant 2\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{e\in E(Q)} \text{length}(e)\cdot[S(e)\text{ is positive}]\cdot[\text{length}(S(e))\leqslant 2^i]\cdot 2^{-i}.
\end{aligned}$$

因此，根据（1），正线段的期望数量的上界为

$$2\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{e\in E(Q)} \text{length}(e)\cdot\frac{2^i}{r}\cdot 2^{-i} = \frac{2\ell}{r}\sum_{e\in E(Q)}\text{length}(e) = \frac{\text{length}(Q)}{r}\cdot 2\ell.$$

证明到此完成，因为 Q 中端点属于不同簇的边总数至多为正线段数量的两倍。

□

由于所有所需性质均已得到论证，引理 3.5 的证明完成。

3.3 层次分解

我们将递归地使用上一节所述的分解过程，将给定的图构造为输入图中越来越小的诱导子图的层次分解。为了表述层次分解的性质，我们需要先给出几个定义。

连通图 G（不一定是带边权的）的聚类链 是由 $V(G)$ 的划分组成的序列 $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$，满足

- $\mathcal{C}_k = \{V(G)\}$；
- $\mathcal{C}_0$ 是离散划分，其中每个顶点各自属于一个部分；并且

对于所有满足 $i < j$, $\mathcal{C}_i$ 细化 $\mathcal{C}_j$的 $i, j \in \{0, 1, \ldots, k\}$，含义如下：$\mathcal{C}_i$的每个部分都完全包含于 $\mathcal{C}_j$的某一个部分中；

对于所有 $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ 和每个 $C \in \mathcal{C}_i$，图 $G[C]$ 都是连通的。

对于 $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ 和一个部分 $C \in \mathcal{C}_{i+1}$，我们令 $\mathcal{C}_i[C]$ 表示 $\mathcal{C}_i$ 中完全包含于 C 的部分集合；注意，$\mathcal{C}_i[C]$ 是 C 的一个划分。对于 G 的一条边 e，e 的层级 是满足以下条件的最大索引 $i \in \{1, \ldots, k\}$：e 的端点属于 $\mathcal{C}_i$ 的不同部分。

有了这些定义，我们可以表述一个概括层次分解性质的命题。

引理 3.6. 存在一个随机多项式时间算法，给定参数 $\delta > 0$ 以及一个连通的带边权 n 顶点图 G，其中任意一对顶点之间的距离均位于区间 $(1, 2^\ell]$ 内；该算法要么报告失败，要么计算出 G 的一个聚类链 $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_\ell$，并具有以下性质：

(Q1) 对于每个 $i \in \{0, 1, \ldots, \ell\}$ 和每个簇 $C \in \mathcal{C}_i$，图 $G[C]$ 的直径至多为 2^i.

(Q2) 对于每个 $i \in \{0, \ldots, \ell-1\}$ 和每个簇 $C \in \mathcal{C}_{i+1}$，商图 $G[C]/\mathcal{C}_i[C]$ 的直径至多为 $480(\ln(2\ell n^2/\delta) + 1)^2$。

(Q3) 对于 G 和 $i \in \{0, \ldots, \ell-1\}$ 中的每条路径 Q，Q 中层级为 i 的边的期望数量上界为 $2^{-i} \cdot 8\ell(\ln(2\ell n^2/\delta) + 1) \cdot \text{length}(Q)$。

该算法以至多为 δ 的概率报告失败。

本节余下部分将用于证明引理 3.6。

构造链 $\mathcal{C}_0$，$\mathcal{C}_1$，……，$\mathcal{C}_\ell$的算法非常简单。首先，令 $\mathcal{C}_\ell := V(G)$。然后，对每个 $i = \ell-1$，……，1，迭代地考虑图 $G[C]$ 中的每个部分 $C \in \mathcal{C}_{i+1}$，并对其应用引理 3.5 中的算法，参数为 $G[C]$，

$$r_i := \frac{2^{i-1}}{\ln(2\ell n^2/\delta) + 1}.$$

因此，我们得到 C 的一个划分 $\mathcal{C}_i[C]$，并令 $\mathcal{C}_i := \bigcup_{C \in \mathcal{C}_{i+1}} \mathcal{C}_i[C]$。

将得到的划分序列 $\mathcal{L}$ 记为：$\mathcal{L} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots\ldots, \mathcal{C}_\ell)$ 良好当以下条件成立时：

- 对于每个 $i \in \{0, \ldots, \ell\}$ 和 $C \in \mathcal{C}_i$，图 $G[C]$ 的直径至多为 2^i。
- 对于每个 $i \in \{0, \ldots, \ell-1\}$ 以及每个簇 $C \in \mathcal{C}_{i+1}$，商图 $G[C]/\mathcal{C}_i[C]$ 的直径至多为$480(\ln(2\ell n^2/\delta) + 1)^2$。

注意，如果 $\mathcal{L}$ 是良好的，那么它就是一个聚类链。事实上，此时对于每个簇 $C \in \mathcal{C}_0$，$G[C]$ 的直径至多为1；因此，由于 G 中的距离始终严格大于1，C 至多只能有一个顶点。聚类链的其他所有性质都可直接由构造得出。

现在我们验证 $\mathcal{L}$ 以高概率是良好的。

命题 3.4。我们有

$$\mathbb{P}(\mathcal{L} \text{ is not good}) \leqslant \delta.$$

证明。注意到，$\mathcal{L}$ 是良好的，前提是每次应用引理 3.5中的算法时，所描述的事件，即性质 (P2) 和 (P3) 中的事件都不发生；在这两个性质中，我们均令

$$t := \ln(2\ell n/\delta).$$

事实上，当我们将算法应用于 $G[C]$ 中的某个簇 $C \in \mathcal{C}_{i+1}(i \in \{0, 1, \ldots, \ell-1\})$ 时，性质(P2) 和 (P3) 中描述的两个事件可以改述如下：

- 性质 (P2)：存在一个簇 $C' \in \mathcal{C}_i[C]$，使得 $G[C']$ 的直径大于

$$2r_i(t + 1 + \ln n) = 2^i.$$

- 性质 (P3)：商图 $G[C]/\mathcal{C}_i[C]$ 的直径大于

$$120 \cdot \frac{D}{r_i} \cdot (t + 1 + \ln n) = 120D \cdot \frac{(\ln(2\ell n^2/\delta) + 1)^2}{2^{i-1}},$$

其中 D 是 $G[C]$的直径。假设 $D \leqslant 2^{i+1}$（这由在构造 C的算法运行过程中，性质 (P2) 所述的事件未发生这一点推出），那么上述事件包含了 $G[C]/\mathcal{C}_i[C]$ 的直径大于 $480(\ln(2\ell n^2/\delta) + 1)^2$这一事件。

根据引理 3.5，上述每个事件发生的概率至多为 $e^{-t} = \frac{\delta}{2\ell n}$。由于相关事件至多有 $2\ell n$ 个，根据并集界可得 $\mathcal{C}_0$，$\mathcal{C}_1$，……，$\mathcal{C}_\ell$不是良好的概率至多为 δ。

□

因此，如果 $\mathcal{L}$ 不是良好的，算法只需报告失败。从现在起，我们可以假设 $\mathcal{L}$ 是良好的，因此是一个聚类链。性质(Q1) 和 (Q2) 由 $\mathcal{L}$的良好性直接推出，因此要完成证明，只需证明 $\mathcal{L}$ 也满足性质(Q3)。我们将在下一条断言中证明这一点。

命题 3.5。对于 Q *in* G *and* $i \in \{0, \ldots, \ell-1\}$ 中的每条路径，Q 中层级为 i 的边的期望数量上界为 $2^{-i} \cdot 8\ell(\ln(2\ell n^2/\delta) + 1) \cdot$长度$(Q)$。

证明。 移除层级大于 i 的边会将 Q 分解为子路径 Q_1、Q_2、.....、Q_k，其中每条路径Q_j完全包含在 $\mathcal{C}_{i+1}$的单个簇中。根据引理 (P4) 的性质 3.5，每条路径 i 上层级为 Q_j 的边的期望数量 $j \in \{1,\dots,k\}$ 上界为

$$\frac{\text{length}(Q_j)}{r_i} \cdot 4\ell = 2^{-i} \cdot 8\ell(\ln(2\ell n^2/\delta)+1) \cdot \text{length}(Q_j).$$

根据期望的线性性，层级为 i 的 Q 上边的总数的期望有如下上界

$$2^{-i} \cdot 8\ell(\ln(2\ell n^2/\delta+1) \cdot \sum_{j=1}^{k} \text{length}(Q_j) \leqslant 2^{-i} \cdot 8\ell(\ln(2\ell n^2/\delta)+1) \cdot \text{length}(Q). \qquad \square$$

这就完成了引理 3.6的证明。

4 树宽工具

本节将介绍与树宽相关的工具。我们首先给出一个关于顶点尖点无小图图的组合引理，可以将其视为引理 2.1的一种变体。先从定义开始。

对于连通无权图 G 和整数 a、b、$c \geqslant 0$，一个 (a,b,c)-收缩序列由以下部分组成

- 一个图的序列 G_0、G_1、.....、G_b，以及
- 对于每个 $1 \leqslant i \leqslant b$，$G_{i-1}$的一组两两不相交的子图 H_i^1，.....，$H_i^{a_i}$，

满足以下条件：

- $G_0 = G$ 且 G_b 是一个单顶点图。
- 每个 H_i^j 的半径至多为 c。
- G_i 由 G_{i-1} 收缩子图 H_i^j、$1 \leqslant j \leqslant a_i$，并将每个子图收缩为一个顶点而得到。
- 成立：$\sum_{i=1}^{b} a_i \leqslant a$。

有了这个定义，我们就可以陈述并证明先前承诺的引理。

引理 4.1. 对于每个顶点图 K，都存在一个常数 α_K，使得如果一个不含 K 子式的图 G 存在某个整数 $a,b,c \geqslant 1$ 所对应的 (a,b,c)-收缩序列，那么 G 的树宽有上界 $\alpha_K bc\sqrt{a}$。

证明。 令 α_K 为引理 2.1 给出的常数。

对于 $1 \leqslant i \leqslant b$ 和 $1 \leqslant j \leqslant a_i$，令 v_i^j 为 H_i^j 的一个顶点，使得 H_i^j 的所有顶点在 H_i^j 中到 v_i^j 的距离都不超过 c。在从 G_{i-1}构造 G_i 时，将 H_i^j 收缩为一个顶点的过程中，我们设想将 H_i^j 收缩到 v_i^j 上，并将得到的顶点仍记为 v_i^j。因此，我们有 $V(G_i) = \{v_i^j : 1 \leqslant i \leqslant a_i\} \cup (V(G_{i-1}) - \bigcup_{j=1}^{a_i} V(H_i^j))$。特别地，对于每个 $0 \leqslant i \leqslant b$，都有 $V(G_i) \subseteq V(G)$。

令 $Z = \{v_i^j : 1 \leqslant i \leqslant b, 1 \leqslant j \leqslant a_i\}$；因此，$Z$ 是 $V(G)$ 的一个子集，其大小至多为 a。关键观察如下：对于每个 $1 \leqslant i \leqslant b$ 和 $v \in V(G_i)$，我们有

$$\text{dist}_{G_i}(v, Z \cap V(G_i)) \geqslant \text{dist}_{G_{i-1}}(v, Z \cap V(G_{i-1})) - c. \tag{2}$$

事实上，考虑连接 v 与 G_i 中 $Z \cap V(G_i)$ 某个顶点的最短路径 Q。除最后一条边和端点 $z \in Z \cap V(G_i)$ 外，Q 的所有顶点和边都存在于 G_{i-1} 中。因此，Q 要么完全包含在 G_{i-1} 中，要么可以在 G_{i-1} 中延伸为一条从 v 到 $Z \cap V(G_{i-1})$ 的路径：只需在图 H_i^j 中追加一条长度至多为 c 的路径，而 z 属于该图。由此证明了 (2)。

由于 G_b 由单个顶点组成，根据（2）我们得到，$G_0 = G$ 中的每个顶点到 Z中的某个顶点的距离至多为 bc。由于 $|Z| \leqslant a$，该引理由引理 2.1得证。 $\square$

接下来，我们使用引理 4.1 来证明一个作为我们方法基石的陈述。直观地说，该陈述表明，在一个边加权顶点图子式无关图的聚类链中，可以找到许多由簇组成的互不相交的平衡分隔集。同样地，我们需要先给出几个定义。

对于一个（可能是带边权的）图 G，割 是 G 的一组两两不相交的顶点子集，其中每个子集都在 G 中诱导出一个连通子图。对于割 $\mathcal{A}$，令 $F(\mathcal{A})$ 表示 G 中满足以下条件的边 e 的集合：存在一个包含 e 恰好一个端点的 $A \in \mathcal{A}$。注意，由于每个部分 $A \in \mathcal{A}$ 都在 G 中诱导出一个连通子图，$G[A]$ 是 $G - F(\mathcal{A})$ 的一个连通分量。如果 $G - F(\mathcal{A})$ 的每个连通分量的顶点集都包含于 $\mathcal{A}$，或至多包含 $|V(G)|/2$ 个顶点，我们就称割 $\mathcal{A}$ 是平衡的 。如果 $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$ 中的每个集合都只包含一个顶点，则称一对割 $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ 是不冲突 的。

设 $\mathcal{L} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k)$ 是连通图 G 的一个聚类链。如果 $\mathcal{A} \subseteq \bigcup_{i=0}^{k} \mathcal{C}_i$，则称割 $\mathcal{A}$ 尊重 $\mathcal{L}$；换言之，每个部分 $A \in \mathcal{A}$ 都是属于划分 $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$ 之一的簇。$\mathcal{L}$ 中的一个割打包 是一组两两不冲突且尊重 $\mathcal{L}$ 的割。

引理 4.2。对于每个顶点图 K，都存在一个常数 $\gamma_K > 0$，使得以下结论成立。设G 是一个 K-子式自由图，并设 $\mathcal{L} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k)$ 是 G 的一个聚类链，且对于每个$i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ 和 $C \in \mathcal{C}_{i+1}$，商图 $G[C]/\mathcal{C}_i[C]$ 的半径至多为 c。设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{L}$ 中的一个割打包，且 $\mathcal{F}$ 中的每个割的大小至多为 τ，并且

$$|\mathcal{F}| \leqslant \gamma_K \cdot \frac{\tau}{k^2 c^2}.$$

那么，存在一个平衡割 $\mathcal{A}$，它尊重 $\mathcal{L}$ 且大小至多为 τ，使得 $\mathcal{F} \cup \{\mathcal{A}\}$ 也是 $\mathcal{L}$中的一个割打包。此外，给定 G、$\mathcal{L}$和 $\mathcal{F}$，可以在多项式时间内找到这样的平衡割 $\mathcal{A}$。

证明。令 $\widehat{\mathcal{C}} := \bigcup_{i=0}^{k} \mathcal{C}_i$；$\widehat{\mathcal{C}}$中的元素称为簇。若簇 $D \in \widehat{\mathcal{C}}$满足 D 由一个顶点构成，或不包含于 $\mathcal{F}$的任何成员中，则称其为自由的 。若 D 不是自由的，则称其为已使用的。若不存在自由簇 $D' \supseteq D$，使得D 是其子集，则自由簇D 称为极大的 。令 $\mathcal{D}$ 为由所有极大自由簇组成的族。注意，$\mathcal{D}$ 是 $V(G)$的一个划分。令 $H = G/\mathcal{D}$。换言之，H 是通过将每个极大自由簇收缩为一个单独的顶点而从G 得到的。

令 $\xi := |\mathcal{F}|$。关键观察如下：H存在一个 $(\tau\xi, k, c)$-收缩序列。事实上，我们可以依次处理层级 $i = 1$、2、...、k；在考察层级 i时，将包含于 $\mathcal{C}_i$ 中且尚未收缩的所有已使用簇收缩。由于已使用簇总数至多为 $\tau\xi$，并且每一步收缩的图的半径至多为 c（这归因于聚类链 $\mathcal{L}$中出现的商图所满足的假设），因此这就是一个 $(\tau\xi, k, c)$-收缩序列。

根据引理 4.1，H 的树宽至多为 $\alpha_K \cdot \sqrt{\tau\xi} \cdot kc$，其中常数 $\alpha_K > 0$ 仅取决于 K。使用 Feige 等人的算法 [26, 定理 6。4], 我们可以在多项式时间内计算出一个 $(T,$ 袋$)$ 分解 G，其中每个袋的大小至多为 $\beta_K \cdot \sqrt{\tau\xi} \cdot kc$，且 $\beta_K > 0$同样是一个仅取决于 K的常数。

现在我们使用关于树分解的以下标准结论，参见例如 [18, 引理 7.19]。

命题 4.1。设 $(T,$ 袋$)$ 是图 G 的一个树分解，且 ω：$V(G) \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 是定义在 G的顶点上的非负权重函数。那么存在 T 的一个节点 x，使得对于 $G -$ 袋(x)的每个连通分量 J，都有 $\omega(V(J)) \leqslant \omega(V(G))/2$。

令 $\omega(D) := |D|$ 对每个 $D \in \mathcal{D}$，我们发现存在 T 的一个节点 x，使得 $H -$ 袋(x) 的每个连通分量都由总大小至多为 $|V(G)|/2$ 的簇组成。注意，可以通过逐一检查 T 的节点，在多项式时间内找到这样的节点 x。记$\mathcal{A} :=$袋(x)。

由于$\mathcal{A}$是一个尊重$\mathcal{L}$的割。由于 $\mathcal{A}$ 仅由自由簇组成，因此它与 $\mathcal{F}$中的每个元素也都不冲突。因此，$\mathcal{F} \cup \{\mathcal{A}\}$ 是 $\mathcal{L}$中的一个割打包。此外，上一段所述的 $\mathcal{A}$ 性质保证了 $\mathcal{A}$ 是平衡的。最后，注意到

$$|\mathcal{A}| \leqslant \beta_K \cdot \sqrt{\tau\xi} \cdot kc \leqslant \frac{\beta_K}{\sqrt{\gamma_K}} \cdot \tau.$$

因此，若令 $\gamma_K := \beta_K^2$，则有 $|\mathcal{A}| \leqslant \tau$，且 $\mathcal{A}$ 满足所有所需性质 s. □

5 嵌入

本节中，我们将证明定理 1.1 在不含顶点图子式的图这一情形下成立。设 G 为输入的边加权图，且不含 K 子式，其中 K 是一个固定的顶点图。不妨设 G 是连通的；否则，我们分别处理 G 的每个连通分量。我们还可以假设对于每个 $uv \in E(G)$，都有 $\mathsf{length}(uv) = \mathsf{dist}_G(u,v)$。令 n 为 G 的顶点数，并令 ℓ为满足以下条件的最小整数：G 中所有边的权重之和与 G 的最小边权之比严格小于 $2^{\hat{\ell}}$。注意，$\hat{\ell} = \mathcal{O}_K(\ell + \ln\, n)$，其中 ℓ是 G的度量的伸展的对数。通过重新缩放，我们假设 G 中的所有距离都大于 1，且 G 中所有边的总长度至多为 2^{ℓ}。由此可知，G 中的任意简单路径长度至多为 2^{ℓ}，因此，特别地，G 的任意连通子图的直径至多为 2^{ℓ}。

我们还固定输入给定的精度参数 $\varepsilon > 0$。

过程 embed。我们首先描述一个递归嵌入过程 embed。该过程的输入是 G 的连通诱导子图 G'。输出是 G' 的度量嵌入 (H', η')，以及 H' 的消去森林 F'。过程 embed(G') 按如下方式进行：

- 如果 G' 只有一个顶点，则返回平凡嵌入：$H' = G'$，且 η' 是 $V(G')$ 上的恒等映射。
- 否则，应用子过程 split(G')，我们将在后文介绍该过程。该过程会找到边的子集 $F \subseteq E(G)$（称为割边）和顶点的子集 $Z \subseteq V(G)$（称为门户）。
- 令 $\mathcal{D}$ 为图 $G' - F$ 的连通分量集合。对于每个连通分量 $D \in \mathcal{D}$，在 D 上递归，以获得 D 的度量嵌入 (H_D, η_D) 和 H_D 的消去森林 F_D。
- 按如下方式构造 G' 的 (H', η') 嵌入。首先，通过对图 $\{H_D$ 的不交并 $D \in \mathcal{D}\}$ 进行操作，并为每个门户点 $z \in Z$ 添加一个 z 的副本 z'，得到 H'；该副本通过长度为 $\mathsf{dist}_G(z, u)$ 的边与 G' 的每个顶点 u 相邻。接下来，令 $\eta' := \bigcup_{D \in \mathcal{D}} \eta_D$。
- 最后，按如下方式构造 H' 的消去森林 F'：首先取森林$\{F_D :\ D \in \mathcal{D}\}$ 的不交并，然后以任意顺序迭代地添加所有顶点 $\{z' :\ z \in Z\}$。每次将 z' 添加到 F' 时，都将其设为新的根，并把原有的所有根作为 z' 的子节点。

直接归纳可知，embed 程序确实会输出输入图的度量嵌入。因此，剩下的工作是说明 split 程序。具体说明将确保满足以下两个条件：

- 嵌入的递归树深度有界于 $\hat{\ell} \cdot \lceil \log_2 n \rceil = \mathcal{O}((\ell + \ln n) \ln\, n)$.
- 在每次递归调用中，split 返回一个门户集合 Z，其大小关于 ℓ、$1/\varepsilon$ 和 $\ln n$ 为多项式级。

因此，最终构造的消去森林的深度关于 G 是多项式级，目标图的树深度。

过程 split。现在我们描述 split 过程。请回忆，该过程的输入是 G' 的一个连通子图，其中我们可以假设 G' 至少有两个顶点。因此，D（G' 的直径）严格大于 1。于是，令 $\ell' \in \{1, \ldots, \hat{\ell}\}$ 使得 $2^{\ell'-1} < D \leqslant 2^{\ell'}$。我们称 ℓ' 为子图 G' 的 层级。令

$$\delta := \frac{\varepsilon}{c\hat{\ell} n \ln^2 n}, \qquad \xi := 64\hat{\ell}^3 \lceil \log_2 n \rceil \left(\ln(2\hat{\ell} n^2/\delta) + 1 \right) \cdot (1/\varepsilon),$$
$$\sigma := 480(\ln(2\hat{\ell} n^2/\delta) + 1)^2, \qquad \tau := (\xi + 1) \cdot \gamma_K \hat{\ell}^2 \sigma^2,$$

其中 $c > 0$ 是一个稍后确定的常数，而 γ_K 是引理4.2给出的常数。注意，

$$\tau \in \mathcal{O}_K \left(\hat{\ell}^5/\varepsilon \cdot \ln n \cdot (\ln n + \ln \hat{\ell} + \ln(1/\varepsilon))^5 \right).$$

我们应用引理 3.6 中的算法处理 G'，参数为 δ，从而得到聚类链$\mathcal{L} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_{\ell'})$，其对象为 G'。该算法可能会报告失败；发生这种情况的概率至多为 δ。在这种情况下，我们终止整个工作，不再尝试计算

度量嵌入 G，而是应用 Fakcharoenphol、Rao 和 Talwar 的算法 [25]，该算法可以将 G 嵌入到一棵树中（因此是树深度为 $\mathcal{O}(\ln n)$ 的图），其期望乘法畸变为 $\mathcal{O}(\ln n)$。从现在起，我们假设引理 3.6 中的算法已成功找到聚类链 $\mathcal{L}$。

注意，根据引理 3.6，性质 (Q2)表明，对每个 $i \in \{0, \dots, \ell' - 1\}$ 和簇 $C \in \mathcal{C}_{i+1}$，商图 $G[C]/\mathcal{C}_i[C]$ 的直径有上界 σ。因此，从 $\mathcal{F} = \emptyset$开始，我们可以反复应用引理 4.2 中的算法，在 $\mathcal{F}$中找到一个割打包 $\mathcal{L}$，其中包含大小至多为 τ的平衡割，使得

$$|\mathcal{F}| \geqslant \frac{\tau}{\gamma_K \hat{\ell}^2 \sigma^2} = \xi + 1.$$

构造好 $\mathcal{F}$后，如果存在，我们就从 $\mathcal{F}$中删去割 $\{V(G')\}$；令 $\mathcal{F}'$ 为得到的大小至少为 ξ的打包。然后，我们均匀随机地选取一个割 $\mathcal{A} \in \mathcal{F}'$，并如下定义 split$(G')$ 的输出：

- 作为割边，我们设为 $F := F(\mathcal{A})$；并且
- 作为门户点，我们设一个集合 Z，其中包含从每个簇 $A \in \mathcal{A}$中任意选取的一个顶点。至此，split 程序的描述完毕。

性质。 我们首先注意到，在 embed 程序中，每次递归调用都会显著减小直径或顶点数。

断言 5.1。 假设一次调用 embed(G') 调用了embed(G'')的一次子调用，其中 G''是 G'的一个导出子图。那么 $|V(G'')| \leqslant |V(G')|/2$，或者 G'' 的层级严格小于 G'的层级。

证明。令 ℓ' 为 G'的层级。回忆一下，过程 embed(G') 会调用 split(G')，以找到合适的割边 F和门户点 Z，用于递归。令 $\mathcal{A}$为 split(G') 用来找到并定义 F和 Z的割。回忆一下，$\mathcal{A}$ 是平衡的，这意味着 $G' - F(\mathcal{A})$ 中不属于 $\mathcal{A}$的每个连通分量至多包含 $|V(G')|/2$ 个顶点。另一方面，若 $\mathcal{L} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{\ell'})$ 是过程 split(G') 中考虑的层次聚类，则 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_{\ell'-1}$，因为割 $\mathcal{C}_{\ell'} = \{V(G')\}$ 已被明确排除在抽样之外。由于划分 $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{\ell'-1}$中的每个簇都导出一个直径至多为 $2^{\ell'-1}$ 的子图（引理 3.6，性质 (Q1)），因此对于每个$A \in \mathcal{A}$，$G[A]$ 的层级都严格小于 ℓ'。断言得证。 □

命题 5.1 的一个直接推论如下。

命题 5.2。 embed(G) 的递归树深度不超过 $\ell\lceil \log_2 n \rceil$。

证明。考虑 embed(G) 的递归树中的任意一条根到叶路径 P。根据命题 5.1，我们可以为 P 的每条边着色：若其父调用为 embed(G')、子调用为 embed(G'')，且 $|V(G'')| \leqslant |V(G')|/2$，则将其染成蓝色；若 G'' 的层级严格小于 G'，则将其染成红色。显然，P 中连续的红边不超过 $\hat{}\,\ell$ 条，并且在第 $\lceil \log_2 n \rceil$ 条蓝边之后，P 上不再有边。结论得证。 □

注意到，过程 split 每次调用都会返回一个门户集合 Z，其大小至多为 τ。因此，根据命题 5.2 可知，若 embed(G) 返回一个度量嵌入 (H, η) 以及一个消去森林 F，其 H，则 F的深度不超过

$$1 + \tau\hat{\ell}\lceil \log_2 n \rceil = \mathcal{O}_K\left((\ell + \ln n)^6/\varepsilon \cdot \ln^2 n \cdot (\ln n + \ln \ell + \ln(1/\varepsilon))^5\right).$$

因此，如所希望的，上述表达式也是 H 的树深度上界。

接下来需要界定期望畸变。

首先考虑这样一种边界情况：过程 split 的一次调用失败。此时，我们调用了 [25], 的算法，该算法计算出一个到树的度量嵌入，其期望乘法畸变为 $\mathcal{O}(\ln n)$。过程 split 的每次调用失败的概率至多为 δ，并且根据命题 5.2，

ˆ split 的调用总次数不超过 $n\ell\lceil\log_2 n\rceil$。因此，这种情况下对期望乘法畸变的总贡献为

$$\delta \cdot n\hat{\ell}\lceil\log_2 n\rceil \cdot \mathcal{O}(\ln n),$$

其上界为 $\varepsilon/2$，前提是我们选择的 c 足够大。

从现在起，我们假设所有对 split 的调用均成功，且我们的算法确实构造出了 G 的度量嵌入 (H,η)。固定一对顶点 $u_1,u_2 \in V(G)$，令 Q 为在 G 中连接 u_1 和 u_2 的最短路径。注意，在 embed(G) 的递归树中，存在唯一一次调用 embed(G')，使得整条路径 Q 都包含在 G' 中；但对于在 embed(G') 内调用的任何 embed(G'')，则不能这么说。这意味着 Q 至少包含一条属于 $F(\mathcal{A})$ 的割边，其中 $\mathcal{A}$ 是调用 split(G') 时所考虑的割。等价地，存在一个簇$A \in \mathcal{A}$，使得 Q 包含一条恰有一个端点位于 A 中的边。令 z 为 split(G') 从 A 中选出并加入门户集合 Z 的顶点，令 $z' \in V(H)$ 为在 embed(G') 中创建的 z 的副本。根据三角不等式，我们有

$$\mathrm{dist}_H(\eta(u_1),\eta(u_2)) \leqslant \mathrm{dist}_H(\eta(u_1),z') + \mathrm{dist}_H(\eta(u_2),z') = \mathrm{dist}_G(u_1,z) + \mathrm{dist}_G(u_2,z).$$

由于 Q 与 A 相交，设交于顶点 q，我们有

$$\mathrm{dist}_G(u_1,z) \leqslant \mathrm{dist}_G(u_1,q) + \mathrm{dist}_G(q,z) \leqslant \mathrm{dist}_G(u_1,q) + D,$$

wh其中 D 是 $G[A]$ 的直径。类似地，dist$_G$(u_2, z) 6 dist$_G$(u_2, q) $+ D$，这意味着 t

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}_H(\eta(u_1),\eta(u_2)) &\leqslant \mathrm{dist}_G(u_1,z) + \mathrm{dist}_G(u_2,z) \leqslant \mathrm{dist}_G(u_1,q) + \mathrm{dist}_G(u_2,q) + 2D\\ &= \mathrm{length}(Q) + 2D = \mathrm{dist}_G(u_1,u_2) + 2D.\end{aligned}$$

ˆ 对于一个满足 $\log_2 n\rceil - 1\}$ 的指标 $h \in \{0,1,\ldots,\ell\lceil$，我们引入一个随机变量 X_h，定义如下：

- 如果在嵌入 G 的递归树深度 h 处，没有调用 embed(G') 使得 Q 完全包含于 G' 中，那么 $X_h = 0$。
- 否则，考虑深度为 h 且 Q 完全包含于 G' 中的唯一一次调用 embed(G')。然后我们令

$$X_h \coloneqq \sum_{A\in\mathcal{A}} 2\mathrm{diam}(G[A]) \cdot |E(Q) \cap F(A)|, \tag{3}$$

其中 $\mathcal{A}$ 是 split 程序 split(G') 中考虑的割，$F(A)$ 是恰有一个端点位于 A 中的边集，而 diam($G[A]$) 是 $G[A]$ 的直径。

结合前一段的论证与断言 5.2 可得

$$\mathrm{dist}_H(\eta(u_1),\eta(u_2)) \leqslant \mathrm{dist}_G(u_1,u_2) + \sum_{h=0}^{\hat{\ell}\lceil\log_2 n\rceil-1} X_h.$$

ˆ 接下来考虑一个固定的 $h \in \{0,1,\ldots,\ell\lceil\log_2 n\rceil - 1\}$，使得在深度 h 处存在一次 embed(G') 调用，并且 Q 完全包含在 G' 中。回想一下，在 split(G') 中，我们构造了一个聚类链 $\mathcal{L} =$($\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$, . . . , $\mathcal{C}_{\ell'}$) 和一个割打包 $\mathcal{F}'$，并从 $\mathcal{F}'$ 中采样了一个平衡割 $\mathcal{A}$。由于 $\mathcal{F}'$ 中的成员两两不冲突，对于每个直径为正的固定簇 $C \in \bigcup_{i=1}^{\ell'-1}\mathcal{C}_i$，$C$ 属于 $\mathcal{A}$ 的概率至多为 $\frac{1}{|\mathcal{F}'|} \leqslant \frac{1}{\xi}$。此外，若 $C \in \mathcal{C}_i$，则 $G[A]$ 的直径至多为 2^i （引理 3.6，性质 (Q1)）。根据引理 3.6 的性质 (Q3),

我们可以推得：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X_h &\leqslant \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\ell'-1}\sum_{C\in\mathcal{C}_i}|E(Q)\cap F(C)|\cdot[C\in\mathcal{A}]\cdot 2^{i+1}\right)\\
&\leqslant \frac{1}{\xi}\cdot\sum_{i=1}^{\ell'-1}2^{i+2}\cdot\mathbb{E}\left(\sum_{e\in E(Q)}[e\text{ is of level }i\text{ in }\mathcal{L}]\right)\\
&\leqslant \frac{1}{\xi}\cdot\sum_{i=1}^{\ell'-1}2^{i+2}\cdot 2^{-i}\cdot 8\hat{\ell}(\ln(2\hat{\ell}n^2/\delta)+1)\cdot\mathrm{length}(Q)\\
&\leqslant \frac{1}{\xi}\cdot 32\ell^2(\ln(2\hat{\ell}n^2/\delta)+1)\cdot\mathrm{length}(Q)\\
&= \frac{\varepsilon}{2\hat{\ell}\lceil\log_2 n\rceil}\cdot\mathrm{length}(Q).
\end{aligned}$$

由（3），我们得出

$$\mathbb{E}\,\mathrm{dist}_H(\eta(u_1),\eta(u_2))\leqslant(1+\varepsilon/2)\mathrm{dist}_G(u_1,u_2).$$

考虑到$(\varepsilon/2)\cdot\mathrm{dist}_G(u_1,u_2)$在某次`split`调用报告失败的情况下所产生的额外项后，我们得出该嵌入的期望乘法畸变为$(1+\varepsilon)$，正如所期望的那样。定理 1.1的证明至此结束。

6 推广到真小闭图类

在本节中，我们将主要结果推广到 K-子式自由图，其中固定图 K 不一定是顶点图。第4 节中的论证关键依赖于图类排除一个顶点图。在这里，我们利用 Robertson 和 Seymour [49]的结构定理设计了一种变通方法。

图子式理论中的工具。关于树分解，我们需要补充一些记号。设 $(T,$ 袋$)$ 是图 G 的树分解。对于一条边 $st\in E(T)$，st 的粘合记作 $\mathsf{adh}(st)$，等于 $\mathsf{bag}(s)\cap\mathsf{bag}(t)$。对于一个顶点 $t\in V(T)$，t 的躯干记作 $\mathsf{torso}(t)$，它是从 $G[\mathsf{bag}(t)]$ 得到的图：对于每个 $s\in N_T(t)$，将粘合 $\mathsf{adh}(st)$ 变成一个团。如果 G 是边加权图，则 $\mathsf{adh}(st)$ 中的每条新边 uv 的长度设为 $\mathsf{dist}_G(u,v)$。

我们需要以下关于排除固定子式的图的结构定理的推论。不幸的是，我们没有在文献中找到类似的表述；我们将在附录中讨论如何从现有结果推出这一推论 B。

定理 6.1。 对于每个图 K_0，都存在一个常数 c_{apices}、一个顶点图 K，以及一个多项式时间算法：该算法给定一个 K_0-子式自由图 G，计算出一个树分解 $(T,$ 袋$)$，并且对于每个 $t\in V(T)$，都有一个集合 顶点$(t)\subseteq$ 袋(t)，其大小至多为 c_{apices}；使得对于每个 $t\in V(T)$，图躯干(t) $-$顶点(t) 都不包含 K 作为子式。

注意，在定理 $(T,$ 袋$)$ 返回的分解中，6.1，每个粘合的大小都必须严格小于 $c_{\mathsf{apices}}+|V(K)|$：粘合会在躯干中变成一个团，而 躯干$(t)$ $-$顶点(t) 的团数严格小于 $|V(K)|$，因为该图是 K-子式自由的。

我们还需要以下观察（附录中给出了形式化证明 B）。

引理 6.2。 对于每个顶点图 K，都存在一个顶点图 K'，使得：如果 G 是 K-子式无关的，并且 G' 是通过对 G 中的每个非空团 A 添加一个邻域为 $N_{G'}(v_A)=A$ 的新顶点 v_A 而构造的，那么 G' 是 K'- 子式无关的。

初始步骤。 有了定理 6.1，现在我们描述对 `split` 过程的修改。回顾一下，输入是输入图 G' 的一个导出子图 G，它是连通的，并且至少有ˆ两个顶点。我们用 D 表示 G' 的直径，用 $\ell' \in \{1,\dots,\ell\}$ 表示满足 $D \leqslant 2^{\ell'}$ 的最小整数。还要回顾的是，在 G 中，我们假设对于每个 $uv \in E(G)$，uv 的长度等于 $\mathsf{dist}_G(u, v)$。

我们不直接对 G' 应用引理 3.6，而是按以下方式进行。我们对 G' 应用定理 6.1 中的算法，得到一个树分解 $(T, \text{袋})$ 和针对所有 $t \in V(T)$ 的子集 $\mathsf{apices}(t)$。我们找到一个节点 $t \in V(T)$，使得 $G' - \mathsf{bag}(t)$ 的每个连通分量都至多包含 $|V(G')|/2$ 个顶点（见命题 4.1）。我们记 $G^1 := G' - \mathsf{apices}(t)$，并记 $G^2 := \mathsf{torso}(t) - \mathsf{apices}(t)$。我们将 $\mathsf{apices}(t)$ 指定为门户点，并将其从 G' 中删除；因此，接下来我们将重点关注 G^1 和 G^2。

修改聚类步骤。我们对 G^1 应用聚类步骤（引理 3.6），并作如下修改：在打破平局顺序 $\preceq$ 中，我们将 $V(G^2)$ 的所有顶点排在 $V(G^1) - V(G^2)$ 的其余顶点之前。换言之，当算法选择一个簇的下一个中心时，我们优先选择位于袋 $t - \mathsf{apices}(t)$ 中的中心。由此得到一条聚类链 $\mathcal{L}^1 = (\mathcal{C}^1_0, \mathcal{C}^1_1, \dots, \mathcal{C}^1_{\ell'})$。

回想一下，在 $\mathsf{torso}(t)$ 中，粘合内新增的每条边，其长度都等于 G' 中两个端点之间的距离。因此，在 G^1 和 G^2 中，我们都有这样的性质：边的长度等于其端点之间的距离。这意味着，对于 $\mathcal{L}$ 中的每个簇 C，如果 C 与 $V(G^2)$ 相交，那么 $G^2[C \cap V(G^2)]$ 就是 G^2 的一个连通子图，其直径不大于 $G^1[C]$ 的直径。因此，我们可以将 $\mathcal{L}^1$ 中的聚类链 $\mathcal{L}^2 = (\mathcal{C}^2_0, \dots, \mathcal{C}^2_{\ell'})$ 限制为 G^2 的聚类链：将每个簇C 限制到 $C \cap V(G^2)$，并删除与 $V(G^2)$ 不相交的簇。注意，由于在躯干中粘合被转化为团，对于每个 $1 \leqslant i < \ell'$ 和 $C \in \mathcal{C}^1_{i+1}$，若 $C \cap V(G^2) \neq \emptyset$，则 $G^2[C \cap V(G^2)]/\mathcal{C}^2_i[C \cap V(G^2)]$ 的直径不大于 $G^1[C]/\mathcal{C}^1_i[C]$ 的直径。

此外，我们作出以下关键观察：所得到的聚类链分布 $\mathcal{L}^2$ 的 G^2 与直接对3.6 引理中的算法 G^2 应用于 G^2 时得到的结果相同，且不作任何修改（并采用相同的顺序 $\preceq$，但仅限于 G^2的顶点）。

构造割打包。得到 $\mathcal{L}^1$ 和 $\mathcal{L}^2$后，我们按如下方式继续。令 G^3 为由 G^2 得到的无权图：对每个 $s \in N_T(t)$，添加一个与 $\mathsf{adh}(st)$ 中所有顶点相邻的顶点 v_s。定理 6.1 表明，对于一个仅取决于K_0的顶点图 K，G^2 是 K-子式自由的。现在，引理 6.2 表明，对于另一个仅取决于K的顶点图 K'，G^3 是 K'-子式自由的。我们通过在每个层级添加单点簇 $(\{v_s\})_{s \in N_T(t)}$，将 $\mathcal{L}^3$ 扩展为 G^3 的聚类链；但在顶层，我们现在只有 $V(G^3)$ 这一个簇。请注意，性质（Q2）中讨论的每个商图的直径至多增加了 2。这一增幅可以忽略不计，后续论证中将不再考虑。

我们在反复应用引理 4.2 时使用图 G^3 和聚类链 $\mathcal{L}^3$，以获得一个大的割打包 $\mathcal{F}$。我们对这一过程做一处修改：在平衡分隔集的定义中，对 $V(G^2)$ 的每个顶点赋予权重 1；但对于每个 $s \in N_T(t)$，将 v_s 的权重定义为 $|V_s|$，其中 V_s 是 $V(G^1) - V(G^2)$ 中属于包含 s 的 $T - \{st\}$ 连通分量的某个袋的顶点集合。因此，G^3 中所有顶点的总权重为 $|V(G^1)|$，且每个 $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$ 都具有这样的性质：$G^3 - F(\mathcal{A})$ 的每个连通分量要么是 $\mathcal{A}$ 的一个元素，要么权重至多为 $|V(G^1)|/2$。

为了从 $\mathcal{F}$ 得到 $\mathcal{F}'$，我们不仅要舍弃割 $\{V(G^3)\}$（如果存在），还要对每个 $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$，每当 $\mathcal{A}$ 包含某个 $s \in N_T(t)$ 对应的簇 $\{v_s\}$ 时，就在 $\mathcal{A}$ 中将其替换为单顶点簇 $\{\{v\} : v \in \text{粘合}(st)\}$。由于我们将 $\{v_s\}$ 替换为单顶点簇，割打包 $\mathcal{F}'$ 中的成员仍然两两不冲突。由于每个粘合的大小都小于 $c_{\mathsf{apices}} + |V(K)|$，我们将 $\mathcal{F}'$ 中每个元素的大小至多增加一个常数倍。由于每个 v_s 的权重至多为 $|V(G^1)|/2$，$\mathcal{F}'$ 中的每个割仍然是平衡的。由此可知，每个割 $\mathcal{A} \in \mathcal{F}'$ 只包含 $\mathcal{L}^2$ 的簇。

切割。聚类链 $\mathcal{L}^2$ 中的割打包 $\mathcal{F}'$ 按如下方式投影为聚类链$\mathcal{L}^1$ 中的割打包 $\mathcal{F}^1$：对于每个 $\mathcal{A} \in \mathcal{F}'$ 和 $C \in \mathcal{A}$，我们将 $\mathcal{L}^1$ 中满足 $C' \cap V(G^2) = C$ 的、按包含关系最小的唯一簇C' 放入 $\mathcal{A}^1$，而 $\mathcal{F}^1$ 由以此方式构造的所有割 $\mathcal{A}^1$ 组成。注意，因此若 C 是单顶点簇，则 $C' = C$。

我们提出两个观察。首先，由上述构造以及 $\mathcal{F}'$ 中的元素两两不冲突这一事实可直接得出，$\mathcal{F}^1$ 中的元素也彼此不冲突。其次，得益于 G^3 中使用的权重，$\mathcal{F}^1$ 中的割在图 G^1 中按通常方式保持平衡：对于每个 $\mathcal{A}^1 \in \mathcal{F}^1$，$G^1 - F(\mathcal{A}^1)$ 的每个连通分量要么是 $\mathcal{A}^1$ 中的一个元素，要么至多包含 $|V(G^1)|/2$ 个顶点。为此，注意对于 $G^1 - F(\mathcal{A}^1)$ 中不属于 $\mathcal{A}^1$ 的每个连通分量 D^1，若 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{F}'$ 中与 $\mathcal{A}^1$ 对应的元素，则 $G^3 - F(\mathcal{A})$ 中存在一个不属于 $\mathcal{A}$ 的连通分量 D'，$D' \cap V(G^2) = D^1 \cap V(G^2)$，并且对于每个 $s \in N_T(t)$，我们有 $D^1 \cap V_s \neq \emptyset$ 蕴含 $v_s \in D'$。于是，$|D^1|$ 有上界，即 D' 的权重；而该权重又不超过 $|V(G^1)|/2$，因为 $\mathcal{F}'$ 中的每个割都是平衡的。

因此，我们可以像原始算法中那样处理 G^1和 $\mathcal{F}^1$：随机选择 $\mathcal{A}^1 \in \mathcal{F}^1$并沿其进行切割。

由于最终我们在 G^1 中得到了一族两两不冲突的平衡割，因此对递归深度和期望畸变的分析保持不变。所得宿主图消除森林的深度增加了一个常数因子：我们在开始时添加了常数个顶点（apices，t），随后在从 $\mathcal{F}$构造 $\mathcal{F}'$的过程中，割的大小可能增加了一个常数因子。至此，对任意固定图 K，关于扩展到无 K子式图的证明就完成了。

7 算法应用

本节将介绍定理 1.1 中我们所构造嵌入的一些算法应用，具体来说，是将其用于求解 CVRP 和容量约束聚类/设施选址问题。

这些问题的算法都遵循同一框架。假设给定一个问题 Π 的实例 Π_G，需要在输入平面图 G上求解，且 OPT_G 表示 Π_G的最优解。我们用 $|\text{OPT}_G|$ 表示 OPT_G的值。求解 Π_G 的算法分为三个步骤。

- **步骤 1.** 对 G 的边权重进行归一化，使得 $w(e) \in [1, n^{\mathcal{O}(1)}]$ 对每条边 $e \in E(G)$均成立。然后根据定理 1.1 通过嵌入 η，将 G 嵌入到一个树宽为 H 的图中 $k_H = \text{polylog}(n)$。
- **步骤 2.** 令 Π_H 为要在图 H上求解的问题 Π 的实例。我们在 H 中求解 Π_H，得到 Π_H的最优解 OPT_H。
- **步骤 3.** 将 OPT_H 提升为输入图 G中问题 Π_G 的一个解 OPT_G。

请注意，如果我们跳过步骤 1 中的归一化，算法的运行时间将增加一个因子 $2^{\text{poly}(\ell)}$。我们将在下文考虑的所有问题中证明，可以执行归一化步骤，并且该框架可以给出一个 $(1+\varepsilon)$ 近似算法。

带容量限制的车辆路径问题。这里我们展示 CVRP 各步骤的具体实现。在步骤 1 中，我们首先在多项式时间 [34]内计算一个常数近似解，记为 A，用于 CVRP 问题。（事实上，任何 $\text{poly}(n)$-近似解都足以满足我们的目的。）然后，我们将权重不超过 $\varepsilon|A|/(\alpha n^3)$ 的每条边 $\varepsilon|A|/(\alpha n^3)$ 舍入到某个较大的常数 α，并从图中删除所有权重大于 $|A|$ 的边。接着对每条边进行缩放，使最小边权为 1。最大边权将为 $\mathcal{O}(n^3/\varepsilon)$。在步骤 2 中，我们使用 Jayaprakash 和 Salavatipour 针对小树宽图的算法 [36]:

定理 7.1 (Jayaprakash 和 Salavatipour [36])。给定参数 $\varepsilon > 0$ 和树宽至多为 k 的图 G，可以为以下问题找到一个 $(1+\epsilon)$-近似解：

- 带有 单位需求 的容量车辆路径问题，运行时间为 $n^{\mathcal{O}(k^2\log^3 n/\varepsilon)}$

- 容量车辆路径问题（*CVRP*）在车辆容量为 $Q = n^{\mathcal{O}(\log^c n)}$ 时，可在时间 $n^{\mathcal{O}(k^2\log^{2c+3} n/\varepsilon^2)}$ 内处理可拆分需求/不可拆分需求，其中 $c > 0$ 为某个常数。

令 OPT_H 为算法在定理 $(1+\varepsilon)$中返回的近似解，近似比为 7.1。那么在步骤 3 中，我们只需查看同一条巡回路线上的每两个相邻顶点 $\hat{}u$ 和 $\hat{}v$，它们分别对应于 u 和 v 中的两个顶点 G，并将巡回路线中 $\hat{}u$ 与 $\hat{}v$ 之间的部分替换为 $\widehat{\ }$从 u 到 v 的最短路径，位于 G 中。令 OPT_G 为所得巡回路线。现在我们证明：

$$E[|\widehat{\mathsf{OPT}}_G|] \leqslant (1+4\varepsilon)|\mathsf{OPT}_G| \tag{4}$$

并通过缩放 ε，我们得到一个 $(1+\varepsilon)$ 近似。

首先请注意，由于每条边最多属于 n 条巡回路线，且在一条巡回路线中最多出现 n 次，因此步骤 1 中的归一化引入的总误差为 $|E(G)|n^2\varepsilon|A|/(\alpha n^3) = \varepsilon|\mathsf{OPT}_G|$，其中 α 为足够大的常数。

我们滥用记号，用 OPT_G 表示 CVPR 的一个最优解（需求为单位需求/可拆分需求/不可拆分需求），该解位于 G 归一化步骤之后。令 OPT_H 为 H 中的 CVPR 解，该解通过将 OPT_G 中的每条边 $(x,y) \in$ 替换为 H中连接 $\eta(x)$ 与 $\eta(y)$ 的最短路径得到。令 $\alpha_{x,y}$ 表示边 (x,y) 在 OPT_G的所有巡回路线中出现的次数。我们有：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|\widehat{\mathsf{OPT}}_H|] &= \sum_{(x,y)\in\mathsf{OPT}_G} \alpha_{(x,y)}\mathbb{E}[d_H(\eta(x),\eta(y))] \\ &\leqslant (1+\varepsilon)\sum_{(x,y)\in\mathsf{OPT}_G} \alpha_{x,y}d_G(x,y) = (1+\varepsilon)|\mathsf{OPT}_G|\end{aligned} \tag{5}$$

$\widehat{\ }$由于 OPT_H是 H中 CVPR 的一个 $(1+\varepsilon)$-近似解，$|\mathsf{OPT}_H| \leqslant (1+\varepsilon)|\mathsf{OPT}_H|$。因此，公式（5）给出 $\mathbb{E}[|\mathsf{OPT}_H|] \leqslant (1+\varepsilon)^2|\mathsf{OPT}_G| \leqslant (1+3\varepsilon)|\mathsf{OPT}_G|$，当 $\varepsilon \leqslant 1$时。于是，公式（4）$\widehat{\ }$由 $|\mathsf{OPT}_G| \leqslant |\mathsf{OPT}_H|$ 以及归一化步骤引入了 $\varepsilon|\mathsf{OPT}_G|$的误差可得。

为完成推论 1.2 的证明，还需分析运行时间。嵌入步骤（步骤 1）和提升步骤（步骤 3）均可在多项式时间内完成。耗时最多的是第二步。推论 1.2 中的运行时间直接由定理7.1 得出，因为根据定理 $k = 1.1$，树宽为 $\mathrm{poly}(\log\ n, 1/\varepsilon)$。.

我们指出，对于 CVRP 的不可拆分/可拆分版本，我们也可以得到准多项式时间近似方案。不过，由于定理 $Q = n^{\log^{\mathcal{O}(1)}(n)}$ 中的限制，车辆的容量现在被限制为 7.1。未来工作中，一个有趣的开放问题是如何消除这一限制。

容量约束 k-中位数问题以及容量约束/无容量限制的设施选址问题。这些问题的算法采用了我们上文建立的相同框架。对于归一化步骤，我们也使用通过树嵌入 $\mathcal{O}(\log n)$ 获得的一个简单近似 [25]。对于动态规划步骤，我们可以在时间 $n^{\mathcal{O}(k)}$ 内解决这两个问题，其中 k 是树宽。通过将距离离散化为 $(\log n/\varepsilon)^{\mathcal{O}(k)}n^{\mathcal{O}(1)}$ 的幂，可以将运行时间改进为 $(1+\varepsilon)$，但这不会改变算法的最终运行时间。算法的最终运行时间由动态规划步骤的运行时间主导，即 $2^{\mathrm{poly}(1/\varepsilon,\log(n))}$。近似因子的分析与 CVRP 的分析相同，由此得到推论1.3 和推论 1.4。

致谢

在过去几年中，我们围绕将平面图嵌入低树宽度量开展了各种讨论。感谢 Christian Wulff-Nilsen 在过去几个月参与其中的一些讨论，并提出了棘手的问题。Marcin 和 Michał 谨此致谢 François Dross 曾就这一主题与我们进行讨论；那时他于 2020年 前后在华沙担任博士后。正是在那段时间，我们尤其认识到了当前下界技术和 Talwar方案的局限性。

参考文献

[1]Ittai Abraham、Yair Bartal 和 Ofer Neiman。《度量嵌入理论的进展》。载于 Jon M. Kleinberg（编），第*38*届 *ACM*计算理论研讨会年会论文集，西雅图，美国，*2006*年*5*月*21*日至*23*日，第271–286页。ACM，2006年。全文参见 https://www.cs.bgu.ac.il/~neimano/j37.pdf。doi:10.1145/1132516.1132557。

[2]Ittai Abraham、Arnold Filtser、Anupam Gupta 和 Ofer Neiman。通过最短路径分解进行度量嵌入。*SIAM*计算杂志，51(2):290–314，2022年。doi:10.1137/19m1296021。

[3] IttaiAbraham、Cyril Gavoille、Anupam Gupta、Ofer Neiman 和 Kunal Talwar。警察、强盗与威胁骨架：无小图图的填充分解。*SIAM*计算杂志，48(3):1120–1145，2019年1月。doi:10.1137/17m1112406。

[4] Sanjeev Arora. 欧几里得旅行商问题及其他几何度量问题的近线性时间近似方案。载于《第38届计算机科学基础年度研讨会》，FOCS '97，美国佛罗里达州迈阿密海滩，1997年10月19日至22日，第554–563页。IEEE计算机学会，1997年。doi:10.1109/SFCS.1997.646145。[5] Sanjeev Arora、Prabhakar Raghavan和Satish Rao。欧几里得 k-中位数及相关问题的近似方案。载于Jeffrey Scott Vitter编，《第三十届ACM计算理论研讨会论文集》，美国得克萨斯州达拉斯，1998年5月23日至26日，第106–113页。ACM，1998年。doi:10.1145/276698.276718。[6]Yair Bartal。度量空间的概率近似及其算法应用。载于《第37届计算机科学基础年度研讨会》，FOCS '96，美国佛蒙特州伯灵顿，1996年10月14日至16日，第184–193页，1996年。网址：https://doi.org/10.1109/SFCS.1996.548477。[7] Yair Bartal。用树度量近似任意度量。载于《第三十届ACM计算理论研讨会论文集》，美国得克萨斯州达拉斯，1998年5月23日至26日，第161–168页，1998年。doi:10.1145/276698.276725。[8] G. Borradaile、H. Le和C. Wulff-Nilsen。无小图图具有轻量生成器。载于《2017年IEEE第58届计算机科学基础年度研讨会》，FOCS '17，第767–778页，2017年。doi:10.1109/FOCS.2017.76。[9]Douglas E. Carroll和Ashish Goel。嵌入到排除子式图族上的分布中的下界。载于《算法——ESA 2004：第12届欧洲年度研讨会论文集》，挪威卑尔根，2004年9月14日至17日，第146–156页，2004年。doi:10.1007/978-3-540-30140-0_15。[10]Amit Chakrabarti、Alexander Jaffe、James R. Lee和Justin Vincent。拓扑图的嵌入：有损不变量、线性化与2-和。载于《IEEE第49届计算机科学基础年度研讨会论文集》，FOCS' 08.，2008年。doi:10.1109/focs.2008.79。[11] Vincent Cohen-Addad。倍增度量空间中容量约束聚类的近似方案。载于Shuchi Chawla编，《2020年ACM-SIAM离散算法研讨会论文集》，SODA 2020，美国犹他州盐湖城，2020年1月5日至8日，第2241–2259页。SIAM，2020年。doi:10.1137/1.9781611975994.138。

[12] Vincent Cohen-Addad。绕过曲面嵌入：无小图图中网络设计的近似方案。载于Stefano Leonardi和Anupam Gupta编，*STOC '22*：第*54*届*ACM SIGACT*计算理论研讨会，意大利罗马，*2022*年*6*月*20*日至*24*日，第343–356页。ACM，2022年。doi:10.1145/3519935.3520049。

[13] Vincent Cohen-Addad、Andreas Emil Feldmann 和 David Saulpic。倍增度量中聚类的近线性时间近似方案。《*ACM*会刊》，68(6):44:1–44:34，2021年。doi:10.1145/3477541。

[14] Vincent Cohen-Addad、Arnold Filtser、Philip N. Klein 和 Hung Le。关于轻量生成器、低树宽嵌入以及无小图图中的高效遍历。载于第*61*届 *IEEE* 计算机科学基础年度研讨会（*FOCS 2020*），美国北卡罗来纳州达勒姆，*2020*年*11*月*16*日至*19*日，第589–600页。IEEE，2020年。doi:10.1109/FOCS46700.2020.00061。

[15] Vincent Cohen-Addad、Philip N. Klein 和 Claire Mathieu。局部搜索为 k-均值和 k-中位数在欧几里得度量和无小子图度量中带来近似方案。*SIAM J. Comput.*，48(2):644–667，2019年。doi:10.1137/17M112717X。

[16] Vincent Cohen-Addad、Marcin Pilipczuk 和 Michal Pilipczuk。平面图中统一成本聚类问题的高效近似方案。载于 Michael A. Bender、Ola Svensson 和 Grzegorz Herman（编），第*27*届欧洲算法年会，*ESA 2019*，*2019*年*9*月*9*日至*11*日，德国慕尼黑/加兴，第*LIPIcs*卷144，页码33:1–33:14。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，2019年。doi:10.4230/LIPIcs.ESA.2019.33。

[17]Vincent Cohen-Addad、Michal Pilipczuk 和 Marcin Pilipczuk。平面图设施选址的多项式时间近似方案。载于 David Zuckerman（编），第*60*届*IEEE*计算机科学基础年会，*FOCS 2019*，巴尔的摩，马里兰州，美国，*2019*年*11*月*9*日至*12*日，页码560–581。IEEE计算机学会，2019年。doi:10.1109/FOCS.2019.00042。

[18] Marek Cygan、Fedor V. Fomin、Łukasz Kowalik、Daniel Lokshtanov、Dániel Marx、Marcin Pilipczuk、MichałPilipczuk 和 Saket Saurabh。参数化算法。施普林格，2015年。doi:10.1007/978-3-319-21275-3。

[19] Aparna Das 和 Claire Mathieu。欧几里得容量约束车辆路径问题的准多项式时间近似方案。载于 Moses Charikar 编，第二十一届*ACM-SIAM*离散算法年会论文集，*SODA 2010*，美国得克萨斯州奥斯汀，*2010*年*1*月*17*日至*19*日，第390–403页。SIAM，2010年。doi:10.1137/1.9781611973075.33。

[20] Erik D. Demaine、Fedor V. Fomin、Mohammad Taghi Hajiaghayi 和 DimitriosM. Thilikos。针对平面图和地图图中$(k,\ r)$-中心的固定参数算法。*ACM Trans. Algorithms*，1(1):33–47，2005年。doi:10.1145/1077464.1077468。

[21] Erik D. Demaine、Mohammad Taghi Hajiaghayi 和 Ken-ichi Kawarabayashi。《算法图子式理论：分解、近似与着色》。载于第*46*届*IEEE*计算机科学基础年会（*FOCS 2005*），*2005*年*10*月*23*日至*25*日，美国宾夕法尼亚州匹兹堡，会议论文集，第637–646页。IEEE计算机学会，2005年。doi:10.1109/SFCS.2005.14。

[22] Reinhard Diestel、Ken-ichi Kawarabayashi、Theodor Müller 和 Paul Wollan。《关于大树宽图的禁子式结构定理》。*J. Comb. Theory, Ser. B*，102(6):1189–1210，2012年。doi:10.1016/j.jctb.2012.07.001。

[23] DavidEisenstat、Philip N. Klein 和 Claire Mathieu。在平面图中近似 k-中心。载于第 *25* 届年度*ACM-SIAM*离散算法研讨会论文集，*SODA' 05*。工业与应用数学学会。doi:10.1137/1.9781611973402.47。

[24] David Eppstein。小闭图族中的直径与树宽。*Algorithmica*，27(3):275– 291，2000。doi:10.1007/s004530010020。

[25]Jittat Fakcharoenphol、Satish Rao 和 Kunal Talwar。用树度量近似任意度量的紧确界。*J. Comput. Syst. Sci.*，69(3)：485–497，2004。doi:10.1016/j.jcss.2004.04.011。

[26] Uriel Feige、MohammadTaghi Hajiaghayi 和 James R. Lee。改进的最小权顶点分隔集近似算法。*SIAM J. Comput.*，38(2)：629–657，2008。doi:10.1137/05064299X。

[27] Arnold Filtser。平面图嵌入的 ℓ_1 面覆盖视角。载于第十四届 *ACM-SIAM* 离散算法年度研讨会论文集，第 1945–1954 页。2020年。doi:10.1137/1.9781611975994.120。

[28] Arnold Filtser 和 Hung Le。《平面及排除小图度量的低树宽嵌入》。载于第*63*届计算机科学基础年会，*FOCS' 22*，2022年。doi:10.1109/focs54457.2022.00105。

[29]Fedor V. Fomin、Petr A. Golovach 和 Dimitrios M. Thilikos。树宽的收缩障碍。《J. Comb. Theory, Ser. B》，101(5):302–314，2011年。doi:10.1016/j.jctb.2011.02.008。[30] E. Fox-Epstein、P. N. Klein 和 A. Schild。将平面图嵌入低树宽图及其在度量问题高效近似方案中的应用。载于第30届 ACM-SIAM 离散算法年会论文集，SODA '19，第1069–1088页，2019年。doi:10.1137/1.9781611975482.66。[31]Zachary Friggstad、Mohsen Rezapour 和 Mohammad R. Salavatipour。局部搜索为倍增度量中的 k- 均值问题给出一个多项式时间近似方案。SIAM J. Comput.，48(2):452–480，2019年。doi:10.1137/17M1127181。[32] Michelangelo Grigni。具有禁用子图的图上的近似旅行商问题。载于《自动机、语言与编程》，第27届国际研讨会，ICALP 2000，日内瓦，瑞士，2000年7月9日至15日，论文集，第869–877页，2000年。doi:10.1007/3-540-45022-X_73。[33]Anupam Gupta、Ilan Newman、Yuri Rabinovich 和 Alistair Sinclair。图的割、树与ℓ_1-嵌入。《Combinatorica》，24(2):233–269，2004年。doi:10.1007/s00493-004-0015-x。[34] M. Haimovich 和 A. H. G. Rinnooy Kan。容量约束路径规划问题的界与启发式方法。《Mathematics of Operations Research》，10(4):527–542，1985年。doi:10.1287/moor.10.4.527。[35] Aditya Jayaprakash 和 Mohammad R. Salavatipour。具有有界树宽、有界倍增维数或高速公路维数的图上的容量约束车辆路径问题的近似方案。《ACM Trans. Algorithms》，19(2)，2023年3月。doi:10.1145/3582500。[36] Aditya Jayaprakash 和 Mohammad R. Salavatipour。具有有界树宽、有界倍增维数或高速公路维数的图上的容量约束车辆路径问题的近似方案。《ACM Transactions on Algorithms》，19(2):1–36，2023年。doi:10.1145/3582500。[37] Ken-ichi Kawarabayashi 和 Paul Wollan。图 minor 分解的更简单算法与更短证明。载于 Lance Fortnow 和 Salil P. Vadhan 编，《第43届 ACM 计算理论研讨会论文集》，STOC 2011，美国加利福尼亚州圣何塞，2011年6月6日至8日，第451–458页。ACM，2011年。doi:10.1145/1993636.1993697。

[38] Philip Klein、Serge A. Plotkin 和 Satish Rao。排除子图、网络分解与多商品流。载于第25届 ACM 计算理论研讨会论文集，STOC' 93，1993年。doi:10.1145/167088.167261。[39] Stavros G. Kolliopoulos 和 Satish Rao。欧几里得 k-中位数问题的近线性时间近似方案。《SIAM计算杂志》，37(3):757–782，2007年。arXiv:https://doi.org/10.1137/S0097539702404055，doi:10.1137/S0097539702404055。[40]Robert Krauthgamer、James R. Lee、Manor Mendel 和 Assaf Naor。测量下降：一种有限度量的新嵌入方法。《《几何与泛函分析》》，15(4):839–858，2005年。URL: http://dx.doi.org/10.1007/s00039-005-0527-6，doi:10.1007/s00039-005-0527-6。[41] Robert Krauthgamer、James R. Lee 和 Havana (Inbal) Rika。平面图中的流割间隙与面覆盖。载于第30届 ACM-SIAM 离散算法年会论文集，第525–534页，2019年。doi:10.1137/1.9781611975482.33。[42] Nikhil Kumar。冈村–西摩定理的一个近似推广。载于第63届计算机科学基础年会论文集，FOCS' 22，2022年10月。doi:10.1109/focs54457.2022.00106。[43] Hung Le。无小图图上子集旅行商问题的多项式时间近似方案。载于2020年 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集，SODA 2020，美国犹他州盐湖城，2020年1月5日至8日，第2279–2298页，2020年。完整版本：arxiv:1804.01588。doi:10.1137/1.9781611975994.140。[44] James R. Lee 和 Anastasios Sidiropoulos。关于具有禁用子式的图的几何。载于第41届 ACM 计算理论研讨会论文集，STOC' 09，2009年。doi:10.1145/1536414.1536450。[45] James R. Lee 和 Anastasios Sidiropoulos。路径宽度、树与随机嵌入。《Combinatorica》，33(3):349–374，2013年。doi:10.1007/s00493-013-2685-8。[46] Jaroslav Nešetřil 和 Patrice Ossona de Mendez。稀疏性——图、结构与算法，《算法与组合学》第28卷。施普林格，2012年。[47] Ilan Newman 和 Yuri Rabinovich。将平面度量嵌入欧几里得空间的畸变下界。《《离散与计算几何》》，29(1):77–81，2002年。doi:10.1007/s00454-002-2813-5。[48] Satish Rao。平面度量与欧几里得度量的小畸变及保体积嵌入。载于第15届计算几何年会论文集，1999年。doi:10.1145/304893.304983。[49] Neil Robertson 和 Paul D. Seymour。图子式XVI。排除一个非平面图。《J. Comb. Theory, Ser. B》，89(1):43–76，2003年。[50] Kunal Talwar。绕过嵌入：低维度量的算法。载于第36届 ACM 计算理论研讨会论文集，美国伊利诺伊州芝加哥，2004年6月13日至16日，第281–290页，2004年。doi:10.1145/1007352.1007399。

A 概率论工具的省略证明

A.1 引理的证明 3.2

对于每个 X_i，定义一个随机变量 $X_i' \in \{1,-1\}$，使得 $\mathbb{P}(X_i'=1) = \frac{1}{8}$，$X_i' \geqslant X_i$ 几乎必然成立，并且 X_1'、X_2'、.....相互独立。于是，对于每个 i，$\sum_{j=1}^{i} X_j \leqslant \sum_{j=1}^{i} X_j'$ 也如此，因此对于变量

Z'，以类似方式为 X'_1、X'_2、.....定义，我们有 $Z' \geqslant Z$ 几乎必然成立。因此，只需针对序列 X'_1、X'_2、.....和变量 Z'证明该引理。稍微滥用一下记号，我们将X'_i重命名为 X_i，并将 Z' 重命名为 Z，也就是说，我们假设对于每个 $i \geqslant 1$，都有 $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{8}$。

令 $Y = \sum_{j=1}^{2k} X_j$。那么条件 $k + Y \geqslant 0$ 等价于以下条件：至少有$\frac{k}{2}$个指标 $i \in \{1, \ldots, 2k\}$ 满足 $X_i = 1$。由于这类指标的期望数量为 $\frac{k}{4}$，对 3.1 应用定理 $\delta = 1$，可得

$$\mathbb{P}\left(k + Y \geqslant 0\right) \leqslant \exp\left(-\frac{k}{12}\right).$$

由于事件“$k + Y \geqslant 0$”包含事件“$Z > 2k$”，证明完毕。

A.2 引理 3.4 的证明

固定可测集 S_1、S_2、...、$S_n \subseteq \mathbb{R}_{\geqslant 0}$，并对 $1 \leqslant j \leqslant n$，令 p_j 表示一个服从参数为 1 的指数分布的随机变量取值落在 S_j 中的概率。要证明该引理，只需证明

$$\mathbb{P}\left(Y_1 \in S_1 \wedge \ldots \wedge Y_n \in S_n\right) = \prod_{j=1}^{n} p_j. \tag{6}$$

我们将 需要进行如下计算。固定 $1 \leqslant a \leqslant 2n$、 $1 \leqslant j \leqslant n$ 和 x_1、x_2、.....、$x_{a-1} \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{b=a+1}^{2n} \int_0^{f_{a+1}(x_1,\ldots,x_a)} e^{-x_{a+1}} \mathrm{d}x_{a+1} \ldots \int_0^{f_{b-1}(x_1,\ldots,x_{b-2})} e^{-x_{b-1}} \mathrm{d}x_{b-1} \\
&\qquad \int_{f_b(x_1,\ldots,x_{b-1})}^{+\infty} e^{-x_b} [x_b - f_b(x_1,\ldots,x_{b-1}) \in S_j] \mathrm{d}x_b \\
&= \sum_{b=a+1}^{2n} \int_0^{f_{a+1}(x_1,\ldots,x_a)} e^{-x_{a+1}} \mathrm{d}x_{a+1} \ldots \int_0^{f_{b-1}(x_1,\ldots,x_{b-2})} e^{-x_{b-1}} \mathrm{d}x_{b-1} \\
&\qquad e^{-f_b(x_1,\ldots,x_{b-1})} \int_0^{+\infty} e^{-y} [y \in S_j] \mathrm{d}y \\
&= \sum_{b=a+1}^{2n} \int_0^{f_{a+1}(x_1,\ldots,x_a)} e^{-x_{a+1}} \mathrm{d}x_{a+1} \ldots \int_0^{f_{b-1}(x_1,\ldots,x_{b-2})} e^{-x_{b-1}} \mathrm{d}x_{b-1} \\
&\qquad e^{-f_b(x_1,\ldots,x_{b-1})} p_j \\
&= p_j \Big(e^{-f_{a+1}(x_1,\ldots,x_a)} + \int_0^{f_{a+1}(x_1,\ldots,x_a)} e^{-x_{a+1}} \mathrm{d}x_{a+1} \\
&\qquad \Big(e^{-f_{a+2}(x_1,\ldots,x_{a+1})} + \int_0^{f_{a+2}(x_1,\ldots,x_{a+1})} e^{-x_{a+2}} \mathrm{d}x_{a+2} \\
&\qquad\qquad \ldots \\
&\qquad\qquad \Big(e^{-f_{2n-1}(x_1,\ldots,x_{2n-2})} + \int_0^{f_{2n-1}(x_1,\ldots,x_{2n-2})} e^{-x_{2n-1}} \mathrm{d}x_{2n-1} \\
&\qquad\qquad\quad e^{-f_{2n}(x_1,\ldots,x_{2n-1})} \Big) \Big) \ldots \Big) \\
&= p_j \Big(e^{-f_{a+1}(x_1,\ldots,x_a)} + \int_0^{f_{a+1}(x_1,\ldots,x_a)} e^{-x_{a+1}} \mathrm{d}x_{a+1} \\
&\qquad \Big(e^{-f_{a+2}(x_1,\ldots,x_{a+1})} + \int_0^{f_{a+2}(x_1,\ldots,x_{a+1})} e^{-x_{a+2}} \mathrm{d}x_{a+2} \\
&\qquad\qquad \ldots \\
&\qquad\qquad \Big(e^{-f_{2n-1}(x_1,\ldots,x_{2n-2})} + \int_0^{f_{2n-1}(x_1,\ldots,x_{2n-2})} e^{-x_{2n-1}} \mathrm{d}x_{2n-1} \Big) \Big) \ldots \Big) \\
&= p_j \Big(e^{-f_{a+1}(x_1,\ldots,x_a)} + \int_0^{f_{a+1}(x_1,\ldots,x_a)} e^{-x_{a+1}} \mathrm{d}x_{a+1} \\
&\qquad \Big(e^{-f_{a+2}(x_1,\ldots,x_{a+1})} + \int_0^{f_{a+2}(x_1,\ldots,x_{a+1})} e^{-x_{a+2}} \mathrm{d}x_{a+2} \\
&\qquad\qquad \ldots \\
&\qquad\qquad \Big(e^{-f_{2n-2}(x_1,\ldots,x_{2n-3})} + \int_0^{f_{2n-2}(x_1,\ldots,x_{2n-3})} e^{-x_{2n-2}} \mathrm{d}x_{2n-2} \Big) \Big) \ldots \Big) \\
&= \ldots = p_j. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

这里，我们首先利用了 $f_{2n} \equiv 0$，因此

$$e^{-f_{2n}(x_1,\ldots,x_{2n-1})} = 1.$$

然后，对于 $i = 2n-1, 2n-2, \ldots$，我们使用了

$$e^{-f_i(x_1,\ldots,x_{i-1})} + \int_0^{f_i(x_1,\ldots,x_{i-1})} e^{-x_i} \mathrm{d}x_i = e^{-f_i(x_1,\ldots,x_{i-1})} + 1 - e^{-f_i(x_1,\ldots,x_{i-1})} = 1.$$

我们对（6）的左侧进行展开，并以 I_1、……、I_n 的取值为条件，然后反复使用（7）来处理 $a = i_{n-1}$、i_{n-2}、……、i_1、1。

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\forall_{j=1}^{n} Y_j \in S_j\right) &= \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots i_n \leqslant 2n} \mathbb{P}\left(\forall_{j=1}^{n} I_j = i_j \wedge X_{i_j} - f_{i_j}(X_1, \ldots) \in S_j\right) \\
&= \sum_{i_1=1}^{2n} \int_0^{f_1} e^{-x_1} \mathrm{d}x_1 \int_0^{f_2(x_1)} e^{-x_2} \mathrm{d}x_2 \ldots \int_0^{f_{i_1-1}(x_1,\ldots,x_{i_1-2})} e^{-x_{i_1-1}} \mathrm{d}x_{i_1-1} \\
&\qquad \int_{f_{i_1}(x_1,\ldots,x_{i_1-1})}^{+\infty} e^{-x_{i_1}} [x_{i_1} - f_{i_1}(x_1, \ldots, x_{i_1-1}) \in S_1] \mathrm{d}x_{i_1} \\
&\quad \sum_{i_2=i_1+1}^{2n} \int_0^{f_{i_1+1}(x_1,\ldots,x_{i_1})} e^{-x_{i_1+1}} \mathrm{d}x_{i_1+1} \ldots \int_0^{f_{i_2-1}(x_1,\ldots,x_{i_2-2})} e^{-x_{i_2-1}} \mathrm{d}x_{i_2-1} \\
&\qquad \int_{f_{i_2}(x_1,\ldots,x_{i_2-1})}^{+\infty} e^{-x_{i_2}} [x_{i_2} - f_{i_2}(x_1, \ldots, x_{i_2-1}) \in S_2] \mathrm{d}x_{i_2} \\
&\qquad\qquad \ldots \\
&\quad \sum_{i_n=i_{n-1}+1}^{2n} \int_0^{f_{i_{n-1}+1}(x_1,\ldots,x_{i_{n-1}})} e^{-x_{i_{n-1}+1}} \mathrm{d}x_{i_{n-1}+1} \ldots \int_0^{f_{i_n-1}(x_1,\ldots,x_{i_n-2})} e^{-x_{i_n-1}} \mathrm{d}x_{i_n-1} \\
&\qquad \int_{f_{i_n}(x_1,\ldots,x_{i_n-1})}^{+\infty} e^{-x_{i_n}} [x_{i_n} - f_{i_n}(x_1, \ldots, x_{i_n-1}) \in S_n] \mathrm{d}x_{i_n} \\
&= p_n \sum_{i_1=1}^{2n} \int_0^{f_1} e^{-x_1} \mathrm{d}x_1 \int_0^{f_2(x_1)} e^{-x_2} \mathrm{d}x_2 \ldots \int_0^{f_{i_1-1}(x_1,\ldots,x_{i_1-2})} e^{-x_{i_1-1}} \mathrm{d}x_{i_1-1} \\
&\qquad \int_{f_{i_1}(x_1,\ldots,x_{i_1-1})}^{+\infty} e^{-x_{i_1}} [x_{i_1} - f_{i_1}(x_1, \ldots, x_{i_1-1}) \in S_1] \mathrm{d}x_{i_1} \\
&\quad \sum_{i_2=i_1+1}^{2n} \int_0^{f_{i_1+1}(x_1,\ldots,x_{i_1})} e^{-x_{i_1+1}} \mathrm{d}x_{i_1+1} \ldots \int_0^{f_{i_2-1}(x_1,\ldots,x_{i_2-2})} e^{-x_{i_2-1}} \mathrm{d}x_{i_2-1} \\
&\qquad \int_{f_{i_2}(x_1,\ldots,x_{i_2-1})}^{+\infty} e^{-x_{i_2}} [x_{i_2} - f_{i_2}(x_1, \ldots, x_{i_2-1}) \in S_2] \mathrm{d}x_{i_2} \\
&\qquad\qquad \ldots \\
&\quad \sum_{i_{n-1}=i_{n-2}+1}^{2n} \int_0^{f_{i_{n-2}+1}(x_1,\ldots,x_{i_{n-2}})} e^{-x_{i_{n-2}+1}} \mathrm{d}x_{i_{n-2}+1} \ldots \int_0^{f_{i_{n-1}-1}(x_1,\ldots,x_{i_{n-1}-2})} e^{-x_{i_{n-1}-1}} \mathrm{d}x_{i_{n-1}-1} \\
&\qquad \int_{f_{i_{n-1}}(x_1,\ldots,x_{i_{n-1}-1})}^{+\infty} e^{-x_{i_{n-1}}} [x_{i_{n-1}} - f_{i_{n-1}}(x_1, \ldots, x_{i_{n-1}-1}) \in S_{n-1}] \mathrm{d}x_{i_{n-1}} \\
&= \ldots = \prod_{j=1}^{n} p_j.
\end{aligned}
$$

Thi补充证明th f

B 排除子式图上的省略证明

B.1 定理的证明6.1

本节概述如何根据已知结果推导定理 6.1 。我们假设读者熟悉涡旋、近似嵌入以及 Robertson 和 Seymour 的结构定理 [49]。下文将使用 Diestel 等人的记号 [22]。

关键在于以下观察。

引理 B.1. 对于每个曲面 Σ 和常数 a，b 都存在一个顶点图 K，使得任何在 Σ 上近似可嵌入、至多含有 a 个深度至多为 b 的涡旋（且没有顶点）的图，都不含以子式形式出现的图 K。

证明。对于整数 t，令 W_t 为 $t \times t$ 网格，并令 W_t 为图 W_t，它是在该图中添加一个新顶点，并使其与网格的所有顶点相邻得到的。我们将证明，存在某个 t，它仅取决于 Σ、a、$\widehat{\ }$ 和 b，使得 W_t 不可能是一个图 G 的子式，而该图满足引理陈述中的近似嵌入条件。

设 G 是一个图，其具有引理陈述中的近似嵌入，并假设其中存在一个 $\widehat{\ }$ 的次式模型 W_t，且 G 足够大。我们暂且聚焦于 t的网格 W_t 部分。根据[22, 引理 22] 可知，$W_{t'}$ 中存在一个大子网格 W_t，其次式模型与涡旋不相交，具体而言：对于该子网格 $W_{t'}$的每个顶点，其在 $W_{t'}$的次式模型中的分支集，是其在 W_t 的次式模型中的分支集的子图，并且与该 $\widehat{\ }$ 近似嵌入中的涡旋顶点不相交。通过适当扩大 W_t中顶点顶点的分支集，我们得到一个 $\widehat{\ }$ 在 $W_{t'}$ 中的次式模型，使得网格部分的分支集与涡旋顶点不相交。G

如果现在将 G 的每个涡旋都收缩为一个顶点，我们便得到一个嵌入在 Σ 中的图（按 $\widehat{\ }$ 的经典意义）。$W_{t'}$ 在 G 中的次式模型会投影为所得图中 $W_{t'}$ 的一个次式模型。$\widehat{\ }$ 然而，随着 W_s 的欧拉亏格随 s 趋于无穷而增长，这意味着 t' 有一个由 Σ 决定的上界，进而意味着 t 有一个由 Σ、a 和 b 决定的上界。证明至此完成。□

定理 6.1 现在可由 Robertson 和 Seymour 的结构定理推出 [49]（采用其针对 [21, 37] 的算法版本），其中我们将每个袋中的近似嵌入的顶点指定为集合 顶点（t）。

B.2 引理 6.2 的证明

令 $\mathcal{G}$ 为 K-子式自由图的类。令 $\mathcal{G}'$ 为这样一类图：从某个属于 $G \in \mathcal{G}$ 的图出发，对 G 中的某些团，各添加一个与该团相邻的新顶点，便可构造出这类图。我们注意到，$\mathcal{G}'$ 是收缩封闭的。因此，将 $\mathcal{G}'$ 中所有图的子图组成的类 $\mathcal{G}''$ 是小闭的。

回顾一下，如果存在一个函数 $\mathcal{H}$，使得对于每个 f，$H \in \mathcal{H}$，$v \in V(H)$以及整数 $r \geqslant 0$，由 r 中 v 周围半径为 H 的球所诱导的子图，其树宽有界于 $f(r)$，那么一个图类 $\mathcal{H}$ 就具有局部有界树宽。Eppstein [24] 证明了，对于小闭图类，具有局部有界树宽这一性质等价于排除某个顶点图作为子式。

因此，$\mathcal{G}$ 具有局部有界树宽，设其对应函数为 f。于是，$\mathcal{G}'$ 具有局部有界树宽，其对应函数为 $f'(r) := f(r) + 1$。注意，对于任意 $G' \in \mathcal{G}', r \geqslant 0$、$G'$的子图 G''以及顶点 $v \in V(G'')$，在 G'' 中以 v 为中心、半径为 r 的球是以 v为中心、半径为 r的 G'中的球的子图。因此，$\mathcal{G}''$ 具有相同函数 f'所对应的局部有界树宽。由此，由于 $\mathcal{G}''$ 是小闭的，根据 [24]，它排除了某个顶点图作为子式。证明完毕。