arXiv:2304.07285v1 [math.FA] 14 Apr 2023

周期分布卷积代数中的理想

AMOL SASANE

Abstract. 本文研究了 $\mathbb{R}^d$ 上的周期分布环，其加法取通常加法，乘法取卷积。通过傅里叶级数展开，该环同构于环 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$，其元素是所有满足至多多项式增长的映射 $f:\mathbb{Z}^d!\ \mathbb{C}$（即存在实数 $M>0$ 和非负整数 m，使得对所有 $n=(n_1,\cdots,n_d)\in\mathbb{Z}^d$,$|f(n)|\le M(1+|n_1|+\cdots+|n_d|)^m$），运算按点进行。本文证明了 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$ 中的有限生成理想都是主理想，并从解析角度刻画了理想成员关系。若 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$ 中的一个理想存在一个公共指标 $n\in\mathbb{Z}^d$，使得其中每个元素在该指标处都为零，则称该理想为固定理想。本文描述了固定极大理想，并证明并非所有极大理想都是固定的。本文还证明，$\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$ 中的有限生成真素理想都是固定极大理想。最后，本文证明 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$ 的克鲁尔维数为无限，而其弱 Krull 维数为 1。

1. Introduction

本文旨在研究调和分析和分布理论中自然出现的一个环中的理想，即由周期分布构成的环 $\mathcal{D}'_V(\mathbb{R}^d)$，其加法采用通常的分布加法 $+$，乘法则采用卷积 $*$。通过傅里叶级数展开，环 $(\mathcal{D}'_V(\mathbb{R}^d)\ +,*)$ 同构于环 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$，后者由所有$f:\mathbb{Z}^d!\ \mathbb{C}$ 至多呈多项式增长的对象构成，运算为逐点运算；下文将对此作简要回顾。

2010年数学主题分类。主要分类：54C40；次要分类：13A15、15A24、13J99。
关键词和短语：克鲁尔维数、素理想、极大理想、周期分布环、卷积、至多多项式增长的序列。1

1.1. 周期分布环。关于周期分布及其傅里叶级数理论的背景知识，读者可参阅[2, 第 16] 章和 [7, 第 527-529] 页。

令 $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$ 为自然数集合， $\mathbb{Z}$ 为整数集合。考虑空间 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$，它由定义在$\mathbb{Z}^{\mathtt{d}}$ 上的所有复值映射组成，且这些映射至多呈多项式增长，即

$$\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}}):=\left\{f:\mathbb{Z}^{\mathtt{d}}\to\mathbb{C}\;\middle|\;\begin{array}{l}\exists\text{ a real }M>0\,\exists\mathtt{m}\in\mathbb{N}\cup\{0\}\text{ such that}\\ \forall\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^{\mathtt{d}},\ |f(\boldsymbol{n})|\leq M(1+|\boldsymbol{n}|)^{\mathtt{m}}\end{array}\right\},$$

其中，对于所有 $\boldsymbol{n}=(\mathtt{n}_1,\cdots,\mathtt{n}_{\mathtt{d}})\in\mathbb{Z}^{\mathtt{d}}$，有 $|\boldsymbol{n}|:=|\mathtt{n}_1|+\cdots+|\mathtt{n}_{\mathtt{d}}|$。那么$\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$在逐点运算下构成一个含幺交换环，乘法单位元 $1_{\mathbb{Z}^{\mathtt{d}}}$ 是常值函数 $\mathbb{Z}^{\mathtt{d}}\ni\boldsymbol{n}\mapsto 1$。集合 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$在逐点运算下构成一个交换含幺环。此外，$(\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})\ +,\cdot)$与环 $(\mathcal{D}'_{\mathbf{V}}(\mathbb{R}^{\mathtt{d}})\ +,*)$同构，其中 $\mathcal{D}'_{\mathbf{V}}(\mathbb{R}^{\mathtt{d}})$是所有周期分布的集合（周期由 $\mathbf{V}$ 描述，见下文定义），其运算为通常的分布逐点加法，以及分布卷积乘法。

令 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathbb{R}^{\mathtt{d}}$ 上紧支撑无穷次可微复值函数的空间， $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{\mathtt{d}})$ 表示 $\mathbb{R}^{\mathtt{d}}$ 上分布的空间。对于 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^{\mathtt{d}}$，平移算子 $\mathsf{S}_{\boldsymbol{v}}:\ \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{\mathtt{d}})\to\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{\mathtt{d}})$ 定义为 $\langle\mathsf{S}_{\boldsymbol{v}}(T)\ \varphi\rangle=\langle T,\varphi(\cdot+\boldsymbol{v})\rangle$，对所有 $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{\mathtt{d}})$ 均成立。若分布 $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{\mathtt{d}})$ 具有周期 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^{\mathtt{d}}\setminus\{\mathbf{0}\}$，即满足 $T=\mathsf{S}_{\boldsymbol{v}}(T)$，则称其为周期分布。设 $\mathbf{V}:=\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{\mathtt{d}}\}$ 是 $\mathbb{R}^{\mathtt{d}}$ 中一个由 $\mathtt{d}$ 个线性无关向量组成的集合。令 $\mathcal{D}'_{\mathbf{V}}(\mathbb{R}^{\mathtt{d}})$ 表示所有满足 $\mathsf{S}_{\boldsymbol{v}_{\mathtt{k}}}(T)=T$（对所有 $\mathtt{k}\in\{1,\cdots,\mathtt{d}\}$ 均成立）的分布 T 构成的集合。由 [1, §34]可知， T 是缓增分布；由上述定义，通过取傅里叶变换可得 $(1-e^{2\pi i\boldsymbol{v}_{\mathtt{k}}\cdot\boldsymbol{y}})\widehat{T}=0$，其中 $\mathtt{k}\in\{1,\cdots,\mathtt{d}\}$, $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d$。于是，对于某些标量 $\alpha_{\boldsymbol{v}}(T)\in\mathbb{C}$，有 $\widehat{T}=\sum_{\boldsymbol{v}\in V^{-1}\mathbb{Z}^{\mathtt{d}}}\alpha_{\boldsymbol{v}}(T)\delta_{\boldsymbol{v}}$；其中 V 是一个矩阵，其各行分别为列向量 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{\mathtt{d}}$ 的转置： $V\mathtt{t}:=\begin{bmatrix}v_1&\cdots&v_{\mathtt{d}}\end{bmatrix}$，其中 $V\mathtt{t}$ 表示矩阵 V 的转置。此外，上文中的 $\delta_{\boldsymbol{v}}$ 表示支撑在 $\boldsymbol{v}$ 上的通常狄拉克测度，即对所有 $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{\mathtt{d}})$，有 $\langle\delta_{\boldsymbol{v}},\varphi\rangle=\varphi(\boldsymbol{v})$。那么，傅里叶系数 $\alpha_{\boldsymbol{v}}(T)$ 确定了 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$ 中的一个元素；反过来， $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$ 中的每个元素都是某个周期分布的傅里叶系数集合

。事实上， $\mathbb{R}^d$ 上周期分布的环 $(\mathcal{D}'_V(\mathbb{R}^d)\ +, *)$ 与环 $(\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)\ +, \cdot)$ 同构。

在 [5], 中，已经确立了$(\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)\ +, \cdot)$的一些代数分析性质；另请参见 [4]。本文研究该环中理想的结构，类似于 [8] 中对整函数环所作的研究。

1.2. 主要结果与文章结构。

- 在§2中，我们证明 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$中的有限生成理想都是主理想，并从解析角度刻画理想成员关系。
- 在§3中，我们描述 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$中的固定极大理想，并证明并非所有极大理想都是固定的。
- 在§4中，我们证明$\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$中的有限生成真素理想都是固定极大理想。此外，我们证明$\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$的克鲁尔维数是无限的，而弱 Krull 维数等于 1。

2. Finitely generated ideals

命题 2.1. g 是 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$中的 f 的因子，当且仅当存在一个实数 $M > 0$ 和一个非负整数 m，使得对于所有 $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d$，$|f(\boldsymbol{n})| \le M(1 + |\boldsymbol{n}|)^m |g(\boldsymbol{n})|$。

证明。（“如果”部分：）定义 $d\colon\ \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$，为

$$d(\boldsymbol{n}) = \begin{cases} \frac{f(\boldsymbol{n})}{g(\boldsymbol{n})} & \text{if } g(\boldsymbol{n}) \neq 0, \\ 0 & \text{if } g(\boldsymbol{n}) = 0. \end{cases}$$

因此，对于 $g(\boldsymbol{n}) \neq 0$，有 $|d(\boldsymbol{n})| \le M(1 + |\boldsymbol{n}|)^m$；当 $g(\boldsymbol{n}) = 0$时，这也显然成立，因为左端为 0。因此，$d \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$。此外，对于 $g(\boldsymbol{n}) \neq 0$，有 $d(\boldsymbol{n})g(\boldsymbol{n}) = f(\boldsymbol{n})$；而当 $g(\boldsymbol{n}) = 0$时，不等式 $|f(\boldsymbol{n})| \le M(1+|\boldsymbol{n}|)^m |g(\boldsymbol{n})|$给出 $f(\boldsymbol{n}) = 0$也成立，从而表明 $d(\boldsymbol{n})g(\boldsymbol{n}) = d(\boldsymbol{n})0 = 0 = f(\boldsymbol{n})$。因此，$dg = f$，如所要证明的。

（“仅当”部分：）假设 $d \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$ 满足 $dg = f$。由于$d \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$，存在 $M > 0$ 和一个非负整数 m，使得$|d(\boldsymbol{n})| \le M(1 + |\boldsymbol{n}|)^m$。因此，对于所有 $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d$, $|f(\boldsymbol{n})| \le |d(\boldsymbol{n})||g(\boldsymbol{n})| \le M(1+|\boldsymbol{n}|)^m |g(\boldsymbol{n})|$。□

特别地， f 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$ 中可逆，当且仅当存在一个实数 $\delta>0$ 和一个非负整数 $\mathtt{m}$，使得对于所有 $\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^{\mathtt{d}}$，$|f(\boldsymbol{n})|\geq\delta(1+|\boldsymbol{n}|)^{-\mathtt{m}}$。

命题 2.2. 任意有限个元素 f_1、$\cdots$、$f_{\mathtt{K}}\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$（$\mathtt{K}\in\mathbb{N}$）都有一个最大公约数 d。元素 d 在可逆元素意义下由 $d(\boldsymbol{n})=\max\{|f_1(\boldsymbol{n})|$、$\cdots$、$|f_{\mathtt{K}}(\boldsymbol{n})|\}$ $(\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$ 给出。

证明。设对所有 $\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^{\mathtt{d}}$，$d(\boldsymbol{n})=\max\{|f_1(\boldsymbol{n})|$、$\cdots$、$|f_{\mathtt{K}}(\boldsymbol{n})|\}$。显然，$d\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$。由于对所有 $\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^{\mathtt{d}}$ 和所有 $\mathtt{k}\in\{1,\cdots,\mathtt{K}\}$，$|f_{\mathtt{k}}(\boldsymbol{n})|\leq|d(\boldsymbol{n})|$，命题 2.1 蕴含 d 是 f_1、$\cdots$、$f_{\mathtt{K}}$ 的一个公因子。

如果 $d\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$ 是 f_1、$\cdots$、$f_{\mathtt{K}}$ 的一个公因子，那么由命题 2.1 再次可知，存在实数 $M_{\mathtt{k}}>0$ 和正整数 $\mathtt{m}_{\mathtt{k}}$，对于每个 $\mathtt{k}\in\{1,\cdots,\mathtt{K}\}$，使得对所有 $\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^{\mathtt{d}}$，$|f_{\mathtt{k}}(\boldsymbol{n})|\leq M_{\mathtt{k}}(1+|\boldsymbol{n}|)^{\mathtt{m}_{\mathtt{k}}}|d(\boldsymbol{n})|$。令 $M:=\max\{M_1,\cdots,M_{\mathtt{K}}\}$ 和 $m:=\max\{\mathtt{m}_1,\cdots,\mathtt{m}_{\mathtt{K}}\}$，$\widetilde{\ }$，则对于所有 $\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^{\mathtt{d}}$，有 $|d(\boldsymbol{n})|\leq M(1+|\boldsymbol{n}|)^{\mathtt{m}}|d(\boldsymbol{n})|$。由命题 2.1，$\sim d$ 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$ 中整除 d。□

命题 2.3. 设 $\langle f_1,\cdots,f_{\mathtt{K}}\rangle$ 表示由 $\mathtt{K}\in\mathbb{N}$个元素 $f_1,\cdots,f_{\mathtt{K}}\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$生成的理想。那么 $f\in\langle f_1,\cdots,f_{\mathtt{K}}\rangle$ 当且仅当存在一个 $M>0$ 和一个非负整数 $\mathtt{m}$，使得

$$|f(\boldsymbol{n})|\leq M(1+|\boldsymbol{n}|)^{\mathtt{m}}\sum_{\mathtt{k}=1}^{\mathtt{K}}|f_{\mathtt{k}}(\boldsymbol{n})|\ \textit{for all}\ \boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^{\mathtt{d}}.$$

证明.（“若”部分：）对于 $\mathtt{k}\in\{1,\cdots,\mathtt{N}\}$，定义 $g_{\mathtt{k}}\colon\mathbb{Z}^{\mathtt{d}}!\,\mathbb{C}$ 为

$$g_{\mathtt{k}}(\boldsymbol{n})=\begin{cases}\dfrac{\overline{f_{\mathtt{k}}(\boldsymbol{n})}}{\sum\limits_{\mathtt{j}=1}^{\mathtt{K}}|f_{\mathtt{j}}(\boldsymbol{n})|^2}f(\boldsymbol{n}) & \text{if }\sum\limits_{\mathtt{j}=1}^{\mathtt{K}}|f_{\mathtt{j}}(\boldsymbol{n})|^2\neq0,\\ 0 & \text{if }\sum\limits_{\mathtt{j}=1}^{\mathtt{K}}|f_{\mathtt{j}}(\boldsymbol{n})|^2=0.\end{cases}$$

如果 $Q(\boldsymbol{n})\colon=\sum\limits_{\mathtt{j}=1}^{\mathtt{K}}|f_{\mathtt{j}}(\boldsymbol{n})|^2\neq0$，那么（最后一步应用柯西-施瓦茨不等式），

$$\begin{aligned}|g_{\mathtt{k}}(\boldsymbol{n})|=\frac{|\overline{f_{\mathtt{k}}(\boldsymbol{n})}|}{\sum\limits_{\mathtt{j}=1}^{\mathtt{K}}|f_{\mathtt{j}}(\boldsymbol{n})|^2}|f(\boldsymbol{n})|&\leq\frac{\sum\limits_{\mathtt{j}=1}^{\mathtt{K}}|f_{\mathtt{j}}(\boldsymbol{n})|}{\sum\limits_{\mathtt{j}=1}^{\mathtt{K}}|f_{\mathtt{j}}(\boldsymbol{n})|^2}M(1+|\boldsymbol{n}|)^{\mathtt{m}}\sum_{\mathtt{k}=1}^{\mathtt{K}}|f_{\mathtt{k}}(\boldsymbol{n})|\\&\leq\frac{(\sum\limits_{\mathtt{j}=1}^{\mathtt{K}}|f_{\mathtt{j}}(\boldsymbol{n})|)^2}{\sum\limits_{\mathtt{j}=1}^{\mathtt{K}}|f_{\mathtt{j}}(\boldsymbol{n})|^2}M(1+|\boldsymbol{n}|)^{\mathtt{m}}\leq KM(1+|\boldsymbol{n}|)^{\mathtt{m}}.\end{aligned}$$

因此 $g_1, \cdots, g_K \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$。我们断言 $f_1g_1 + \cdots + f_Kg_K = f$。根据 g_1、$\cdots$、g_K 的定义，容易看出，将左侧在满足 $Q(\boldsymbol{n}) \neq 0$ 的 $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d$ 处求值，结果为 $f(\boldsymbol{n})$。另一方面，如果 $Q(\boldsymbol{n}) = 0$，那么每个 $f_k(\boldsymbol{n}) = 0$，根据命题陈述中的给定不等式，$f(\boldsymbol{n}) = 0$ 也成立。因此，在这种情况下，$f_1g_1 + \cdots + f_Kg_K = f$ 两侧在 $\boldsymbol{n}$ 处的取值都为零。

（“仅当”部分：）若 $f \in \langle f_1, \cdots, f_K \rangle$，则存在 $g_1, \cdots, g_K \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$，使得 $f = f_1g_1 + \cdots + f_Kg_K$。令 $M_k > 0$ 和 $m_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k \in \{1, \cdots, K\}$ 满足 $|g_k(\boldsymbol{n})| \leq M_k(1 + |\boldsymbol{n}|)^{m_k} (\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d)$。于是令 $M := \max\{M_1, \cdots, M_K\}$，且 $m := \max\{m_1, \cdots, m_K\}$，得到

$$|f(\boldsymbol{n})| \leq \sum_{k=1}^{K} |f_k(\boldsymbol{n})||g_k(\boldsymbol{n})| \leq M(1 + |\boldsymbol{n}|)^m \sum_{k=1}^{K} |f_k(\boldsymbol{n})|. \qquad \square$$

由命题 2.2 和 2.3 可知，每个有限生成理想都是主理想。（事实上，$\langle f_1, \cdots, f_K \rangle = \langle d \rangle$：对每个 k，$f_k \subset \langle d \rangle$ 显然成立，因为 d 整除 f_k，进而说明 $\langle f_1, \cdots, f_K \rangle \subset \langle d \rangle$。对于反向包含，$|d(\boldsymbol{n})| = \max\{|f_1(\boldsymbol{n})|, \cdots, |f_K(\boldsymbol{n})|\} \leq \sum_{k=1}^{K} |f_k(\boldsymbol{n})| (\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d)$，因此由命题 2.3，$d \in \langle f_1, \cdots, f_K \rangle$。于是得到 $\langle d \rangle \subset \langle f_1, \cdots, f_K \rangle$。）

3. Maximal ideals

定义 3.1. 一个 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$ 的理想是固定的，如果存在一个 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d$，使得对于所有 $f \in \mathfrak{i}$，$f(\boldsymbol{k}) = 0$。

定理 3.2. 对于 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d$，设 $\mathfrak{m}_{\boldsymbol{k}} := \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d) : f(\boldsymbol{k}) = 0\}$。那么 $\mathfrak{m}_{\boldsymbol{k}}$ 是 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$ 的固定极大理想。$\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$ 的每个固定极大理想都等于某个 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d$ 对应的 $\mathfrak{m}_{\boldsymbol{k}}$。

证明. $\mathfrak{m}_{\boldsymbol{k}}$ 的固定性显然。现在证明其极大性。由于 $1_{\mathbb{Z}^d} \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d) \setminus \mathfrak{m}_{\boldsymbol{k}}$，$\mathfrak{m}_{\boldsymbol{k}} \subsetneq \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$。设 $\mathfrak{i}$ 是一个满足 $\mathfrak{m}_{\boldsymbol{k}} \subsetneq \mathfrak{i}$ 的理想。假设 $f \in \mathfrak{i} \setminus \mathfrak{m}_{\boldsymbol{k}}$。那么 $f(\boldsymbol{k}) \neq 0$。定义 $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$ 如下：$g = 1_{\mathbb{Z}^d} - \frac{f}{f(\boldsymbol{k})}$。由于 $g(\boldsymbol{k}) = 0$，我们有 $g \in \mathfrak{m}_{\boldsymbol{k}} \subset \mathfrak{i}$。此外，$\frac{f}{f(\boldsymbol{k})} \in \mathfrak{i}$。因此 $1_{\mathbb{Z}^d} = g + \frac{f}{f(\boldsymbol{k})} \in \mathfrak{i}$，即 $\mathfrak{i} = \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$。

接下来，令 $\mathfrak{m}$ 为 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$ 的一个固定极大理想。由于 $\mathfrak{m}$ 是固定的，存在一个 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d$ 使得 $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_{\boldsymbol{k}} \subsetneq \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$。由 $\mathfrak{m}$ 的极大性，我们得出 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{\boldsymbol{k}}$。 $\square$

例3.3（非固定极大理想）。令 $(\mathtt{k}_\mathtt{j})_{\mathtt{j}\in\mathbb{N}}$ 为自然数序列的任意子序列。设 $\boldsymbol{k}_\mathtt{j}=(\mathtt{k}_\mathtt{j},\cdots,\mathtt{k}_\mathtt{j})\in\mathbb{Z}^\mathtt{d}$。定义 $\mathfrak{i}:=\{f\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^\mathtt{d}):\lim_{\mathtt{j}\to\infty}e^{\mathtt{k}_\mathtt{j}}f(\boldsymbol{k}_\mathtt{j})=0\}$.那么 $\mathfrak{i}$是$\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^\mathtt{d})$的一个理想。（显然，如果 $f,g\in\mathfrak{i}$，那么 $f+g\in\mathfrak{i}$。如果 $f\in\mathfrak{i}$ 且$g\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^\mathtt{d})$，那么存在一个实数 $M>0$和一个 $\mathtt{m}\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 使得$|g(\boldsymbol{n})|\le M(1+|\boldsymbol{n}|)^\mathtt{m}$ 对所有 $\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^\mathtt{d}$均成立，因此

$$|(fg)(\boldsymbol{k}_\mathtt{j})|\le|f(\boldsymbol{k}_\mathtt{j})|M(1+\mathtt{dk}_\mathtt{j})^\mathtt{m}=e^{\mathtt{k}_\mathtt{j}}|f(\boldsymbol{k}_\mathtt{j})|e^{-\mathtt{k}_\mathtt{j}}M(1+\mathtt{dk}_\mathtt{j})^\mathtt{m}\overset{\mathtt{j}\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

这表明 $fg\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^\mathtt{d})$。）此外，由于 $1_{\mathbb{Z}^\mathtt{d}}\notin\mathfrak{i}$:$e^{\mathtt{k}_\mathtt{j}}|1_{\mathbb{Z}^\mathtt{d}}(\boldsymbol{k}_\mathtt{j})|=e^{\mathtt{k}_\mathtt{j}}1>1$ 对所有 $n\in\mathbb{N}$均成立，因此 $\mathfrak{i}\neq\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^\mathtt{d})$。所以，在 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^\mathtt{d})$中存在一个极大理想 $\mathfrak{m}$，使得 $\mathfrak{i}\subset\mathfrak{m}$。我们注意到，对于每个 $\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^\mathtt{d}$，$\mathfrak{m}\neq\mathfrak{m}_{\boldsymbol{k}}$:定义 $1_{\{\boldsymbol{k}\}}:\ \mathbb{Z}^\mathtt{d}\ !\ \mathbb{C}$ 由 $1_{\{\boldsymbol{k}\}}(\boldsymbol{n})=0$ 对所有 $\boldsymbol{n}\neq\boldsymbol{k}$ 以及$1_{\{\boldsymbol{k}\}}(\boldsymbol{k})=1$ 成立。于是 $1_{\{\boldsymbol{k}\}}\in\mathfrak{i}\subset\mathfrak{m}$，但由于 $1_{\{\boldsymbol{k}\}}(\boldsymbol{k})=1\neq0$，$1_{\{\boldsymbol{k}\}}\notin\mathfrak{m}_{\boldsymbol{k}}$。 3

4. Prime ideals

4.1. 有限生成真素理想。

定理**4.1.** 设 $\mathfrak{p}$ 是$\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^\mathtt{d})$的有限生成真素理想。则存在一个 $\boldsymbol{n}_*\in\mathbb{Z}^\mathtt{d}$，使得

$$\mathfrak{p}=\{f\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^\mathtt{d}):f(\boldsymbol{n}_*)=0\}.$$

证明。我们分几个步骤完成证明。

步骤 1. $\mathfrak{p}$是主的。若 $\mathfrak{p}=\langle d\rangle$，则 d至多有一个零点。由于 $\mathfrak{p}$ 是有限生成的，它是主的。令 $d\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^\mathtt{d})$满足$\mathfrak{p}=\langle d\rangle$。取互不相同的 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^\mathtt{d}$，且 $d(\boldsymbol{n})=0=d(\boldsymbol{m})$。定义$a:\ \mathbb{Z}^\mathtt{d}\,!\,\mathbb{C}$，使得对所有 $\boldsymbol{k}\neq\boldsymbol{n}$，$a(\boldsymbol{k})=1$，并且 $a(\boldsymbol{n})=0$。于是 $a\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^\mathtt{d})$。另外，定义 $b:\ \mathbb{Z}^\mathtt{d}\ !\ \mathbb{C}$，使得对所有 $\boldsymbol{k}\notin\{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\}$，$b(\boldsymbol{k})=d(\boldsymbol{k})$，$b(\boldsymbol{m})=0$ 且 $b(\boldsymbol{n})=1$。显然，$b\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^\mathtt{d})$也成立（因为除单个指标 $\boldsymbol{n}$外，它处处与 d 一致）。现在，对所有 $\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^\mathtt{d}$，$(ab)(\boldsymbol{k})=d(\boldsymbol{k})$：若 $\boldsymbol{k}\notin\{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\}$，则根据定义显然成立，因为左边是 $1\cdot d(\boldsymbol{k})$；若 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{m}$ 或 $\boldsymbol{n}$，则两边均为 0。因此 $ab=d\in\langle d\rangle=\mathfrak{p}$。但是 $a\notin\langle d\rangle$，否则对某个 $\tilde{a}\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^\mathtt{d})$有 $a=d\tilde{a}$，于是 $1=a(\boldsymbol{m})=d(\boldsymbol{m})\tilde{a}(\boldsymbol{m})=0\tilde{a}(\boldsymbol{m})=0$，这与 ˜ ˜矛盾。此外，$b\notin\langle d\rangle$，否则对某个 $b\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^\mathtt{d})$˜ ˜有 $b=db$，于是 $1=b(\boldsymbol{n})=d(\boldsymbol{n})b(\boldsymbol{n})=0b(\boldsymbol{m})=0$，矛盾。因此 a 和 b 都不属于 $\langle d\rangle=\mathfrak{p}$，这与 $\mathfrak{p}$的素性矛盾。

步骤 2. 令 $\mathfrak{p}=\langle d\rangle$（同步骤 1）。对每个 $\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^{\mathtt{d}}$，令 $d(\boldsymbol{n})=|d(\boldsymbol{n})|e^{i\theta(\boldsymbol{n})}$，其中某个 $\theta(\boldsymbol{n})\in(-\pi,\pi]$。定义 $h\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$，使得对所有 $\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^{\mathtt{d}}$，$h(\boldsymbol{n})=\sqrt{|d(\boldsymbol{n})|}e^{i\theta(\boldsymbol{n})/2}$。于是 $h^2=d\in\mathfrak{p}$，又因 $\mathfrak{p}$ 是素数，故 $h\in\mathfrak{p}$。

步骤 3。 d 恰有一个零点。现在我们将证明存在一个 $\boldsymbol{n}_*\in\mathbb{Z}^{\mathtt{d}}$，使得 $d(\boldsymbol{n}_*)=0$。假设此结论不成立。那么根据步骤 1，对于所有 $\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^{\mathtt{d}}$，都有 $d(\boldsymbol{n})\neq 0$。若 $h\in\mathfrak{p}$ 如步骤 2 中所述，则存在一个 $k\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$，使得 $h=kd$，即 $\sqrt{|d(\boldsymbol{n})|}e^{i\theta(\boldsymbol{n})/2}=|d(\boldsymbol{n})|e^{i\theta(\boldsymbol{n})}\overline{k(\boldsymbol{n})}$，从而得到 $1=d(\boldsymbol{n})(k(\boldsymbol{n}))^2$ $(\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$。因此 $dk^2=1_{\mathbb{Z}^{\mathtt{d}}}$，这表明$d$ 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$ 中可逆，与理想 $\mathfrak{p}$ 是真理想相矛盾。

步骤 4。现在我们证明 $\mathfrak{p}=\{f\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}}):\ f(\boldsymbol{n}_*)=0\}$。显然，$\mathfrak{p}\subset\{f\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}}):\ f(\boldsymbol{n}_*)=0\}$。设 $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$ 满足$f(\boldsymbol{n}_*)=0$。定义 $g:\mathbb{Z}^{\mathtt{d}}!\mathbb{C}$，如下:

$$g(\boldsymbol{n})=\begin{cases}\frac{f(\boldsymbol{n})}{d(\boldsymbol{n})} & \text{if } \boldsymbol{n}\neq\boldsymbol{n}_*,\\ 0 & \text{if } \boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_*.\end{cases}$$

那么 $f=dg$（注意，对于 $\boldsymbol{n}\neq\boldsymbol{n}_*$，根据 g 的定义可得 $f(\boldsymbol{n})=d(\boldsymbol{n})g(\boldsymbol{n})$；此外，由于两边均为 0，$f(\boldsymbol{n}_*)=d(\boldsymbol{n}_*)g(\boldsymbol{n}_*)$ 也成立）。由于步骤 2 中的 h 属于 $\mathfrak{p}$，因此存在一个 $k\in\mathcal{S}'(Z^{\mathtt{d}})$，使得 $h=kd$；于是对所有 $\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^{\mathtt{d}}$，都有 $\sqrt{|d(\boldsymbol{n})|}e^{i\theta(\boldsymbol{n})/2}=\overline{|d(\boldsymbol{n})|e^{i\theta(\boldsymbol{n})}k(\boldsymbol{n})}$，从而得到$1=|d(\boldsymbol{n})||k(\boldsymbol{n})|^2$。因此，对于 $\boldsymbol{n}\neq\boldsymbol{n}_*$，$\frac{1}{|d(\boldsymbol{n})|}=\overline{|k(\boldsymbol{n})|^2}\leq M(1+|\boldsymbol{n}|)^{\mathtt{m}}$，其中某个 $M>0$ 和一个非负整数 $\mathtt{m}$。这个估计表明$g\in\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$，因此 $f=gd\in d\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})=\langle d\rangle=\mathfrak{p}$。□

4.2. 克鲁尔维数。

定义 4.2. 交换环 R 的克鲁尔维数是 R 中互不相同的真素理想链的长度上确界。

回顾一下，Hardy 代数 H^∞ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的有界全纯函数构成的巴拿赫代数 $=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$，其运算为逐点运算，范数为上确界范数 $\|\cdot\|_\infty$。在 [9], 中，von Renteln 证明了 H^∞ 的克鲁尔维数是无限的。我们改进 [9], 中的思路，证明 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$的克鲁尔维数也同样是无限的。[9] 中证明的一个关键环节，是利用 H^∞ 元素的典范分解，构造在指定位置具有零点的理想

且零点具有指定的重数。相反，我们将考察$\mathbb{Z}^{\mathtt{d}}$ 中 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$的零点集，并使用下文引入的“零阶”概念。

若 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$ 和 $\boldsymbol{n} = (\mathtt{n}_1, \cdots, \mathtt{n}_{\mathtt{d}}) \in \mathbb{Z}^{\mathtt{d}}$ 满足 $f(\boldsymbol{n}) = 0$，则我们将零阶 $m(f, \boldsymbol{n})$ 定义为

$$m(f,\boldsymbol{n}) = \min_{1\leq \mathtt{k}\leq \mathtt{d}} \max \left\{ \mathtt{i} \in \mathbb{N} : \begin{matrix} f(\mathtt{n}_1, \cdots, \mathtt{n}_{\mathtt{k}-1}, \mathtt{n}_{\mathtt{k}}+\mathtt{j}, \mathtt{n}_{\mathtt{k}+1}, \cdots, \mathtt{n}_{\mathtt{d}}) = 0 \\ \text{whenever } 0 \leq \mathtt{j} \leq \mathtt{i}-1 \end{matrix} \right\}.$$

若 $f(\mathtt{n}_1, \cdots, \mathtt{n}_{\mathtt{k}-1}, \mathtt{n}_{\mathtt{k}} + \mathtt{j}, \mathtt{n}_{\mathtt{k}+1}, \cdots, \mathtt{n}_{\mathtt{d}}) = 0$ 对所有 $\mathtt{j} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 以及所有 $\mathtt{k} \in \{1, \cdots, \mathtt{d}\}$ 均成立，则我们令 $m(f, \boldsymbol{n}) = \infty$。若 $f(\boldsymbol{n}) \neq 0$，则我们令 $m(f, \boldsymbol{n}) = 0$。与（不恒为零的）全纯函数零点的重数类似，零阶满足以下性质。

(P1): If $f, g \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$ and $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^{\mathtt{d}}$,
then $m(f+g, \boldsymbol{n}) \geq \min\{m(f, \boldsymbol{n}), m(g, \boldsymbol{n})\}$.

两个全纯函数逐点乘积的零点 ζ 的重数，等于 ζ 作为这两个全纯函数各自零点时的重数之和。对于零阶，则有以下结论：

(P2): If $f, g \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$ and $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^{\mathtt{d}}$,
then $m(fg, \boldsymbol{n}) \geq \max\{m(f, \boldsymbol{n}), m(g, \boldsymbol{n})\}$.

我们将使用以下已知结果；参见 [3, 定理，§0.16，第 6] 页。

命题 4.3. 若 $\mathfrak{i}$ 是环 R 中的一个理想，$M \subset R$ 是一个对乘法封闭的集合，且 $M \cap \mathfrak{i} = \emptyset$，则存在一个理想 $\mathfrak{p}$，使得 $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{p}$ 且 $\mathfrak{p} \cap M = \emptyset$，并且 $\mathfrak{p}$ 在满足这些性质的理想中是极大的。此外，这样的理想 $\mathfrak{p}$ 必为素理想。

定理 4.4. $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$ 的克鲁尔维数是无限的。

证明。对于 $\mathtt{i} \in \{1, \cdots, \mathtt{d}\}$，令 $\boldsymbol{e}_{\mathtt{i}} \in \mathbb{Z}^{\mathtt{d}}$ 为一个向量，除第 $\mathtt{i}^{\text{th}}$ 个分量定义为 1 外，其余所有分量均为 0。对于 $\mathtt{n} \in \mathbb{N}$，定义 $f_{\mathtt{n}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$ 为

$f_{\mathtt{n}}(2^{\mathtt{k}}\boldsymbol{e}_1 + \mathtt{j}\boldsymbol{e}_{\mathtt{i}}) = 0$ if $\mathtt{k} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \leq \mathtt{i} \leq \mathtt{d}$, $0 \leq \mathtt{j} \leq \mathtt{k}^{\mathtt{n}+1}$,

$f_{\mathtt{n}}(\boldsymbol{m}) = 1$ if $\boldsymbol{m} \notin \{2^{\mathtt{k}}\boldsymbol{e}_1 + \mathtt{j}\boldsymbol{e}_{\mathtt{i}} : \mathtt{k} \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 1 \leq \mathtt{i} \leq \mathtt{d}, 0 \leq \mathtt{j} \leq \mathtt{k}^{\mathtt{n}+1}\}$.

注意， $m(f_{\mathtt{n}}, 2^{\mathtt{k}}\boldsymbol{e}_1) \geq \mathtt{k}^{\mathtt{n}+1}$，但对于每个固定的 $\mathtt{n} \in \mathbb{N}$，存在一个 $\mathtt{K}_{\mathtt{n}} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，使得指标之间的间隔，

$$2^{\mathtt{k}+1} - 2^{\mathtt{k}} = 2^{\mathtt{k}} > \mathtt{k}^{\mathtt{n}+1} \text{ for all } \mathtt{k} > \mathtt{K}_{\mathtt{n}},$$

因此，对于所有 $\mathtt{k} > \mathtt{K}_{\mathtt{n}}$， $m(f_{\mathtt{n}}, 2^{\mathtt{k}}\boldsymbol{e}_1) = \mathtt{k}^{\mathtt{n}+1}$。于是

$$\lim_{\mathtt{k}\to\infty} \frac{m(f_{\mathtt{n}}, 2^{\mathtt{k}}\boldsymbol{e}_1)}{\mathtt{k}^{\mathtt{n}}} = \infty \quad \text{and} \quad \lim_{\mathtt{k}\to\infty} \frac{m(f_{\mathtt{n}}, 2^{\mathtt{k}}\boldsymbol{e}_1)}{\mathtt{k}^{\mathtt{n}+1}} = 1 < \infty. \tag{1}$$

Let

$$\mathfrak{i}_* := \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}}) : \ \exists\, \mathtt{k}_0(f) \in \mathbb{N}_0 \text{使得 } \forall\, \mathtt{k} > \mathtt{k}_0(f) \ \ f(2^{\mathtt{k}}\boldsymbol{e}_1) = 0\}.$$

集合 $\mathfrak{i}_*$ 非空，因为 $0 \in \mathfrak{i}_*$。显然， $\mathfrak{i}_*$ 对加法封闭，并且当 $f \in \mathfrak{i}_*$ 且 $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$ 时， $fg \in \mathfrak{i}_*$。因此， $\mathfrak{i}_*$ 是 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$ 的一个理想。对于 $\mathtt{n} \in \mathbb{N}$，定义

$$\mathfrak{i}_{\mathtt{n}} = \Big\{f \in \mathfrak{i}_* : \lim_{\mathtt{k}\to\infty} \frac{m(f, 2^{\mathtt{k}}\boldsymbol{e}_1)}{\mathtt{k}^{\mathtt{n}}} = \infty\Big\},$$
$$M_{\mathtt{n}} = \Big\{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}}) : \sup_{\mathtt{k}\in\mathbb{N}} \frac{m(f, 2^{\mathtt{k}}\boldsymbol{e}_1)}{\mathtt{k}^{\mathtt{n}}} < \infty\Big\}.$$

显然， $f_{\mathtt{n}} \in \mathfrak{i}_{\mathtt{n}}$，因此 $\mathfrak{i}_{\mathtt{n}}$ 非空。利用 **(P1)**，我们看到，若f、 $g \in \mathfrak{i}_{\mathtt{n}}$，则 $f + g \in \mathfrak{i}_{\mathtt{n}}$。若 $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$ 且 $f \in \mathfrak{i}_{\mathtt{n}}$，则由 **(P2)** 可知 $fg \in \mathfrak{i}_{\mathtt{n}}$。因此， $\mathfrak{i}_{\mathtt{n}}$ 是 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$ 的一个理想。

单位元 $1_{\mathbb{Z}^{\mathtt{d}}} \in M_{\mathtt{n}}$ 对所有 $\mathtt{n} \in \mathbb{N}$均成立。若 f、 $g \in M_{\mathtt{n}}$，则由 **(P2)** 可推出 $fg \in M_{\mathtt{n}}$。因此， $M_{\mathtt{n}}$ 是 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$ 的一个非空乘法闭集合。

容易验证，对于所有 $\mathtt{n} \in \mathbb{N}$、 $\mathfrak{i}_{\mathtt{n}+1} \subset \mathfrak{i}_{\mathtt{n}}$ 和 $M_{\mathtt{n}} \subset M_{\mathtt{n}+1}$，均成立。现在我们证明，对于每个 $\mathtt{n} \in \mathbb{N}$，这些包含关系都是严格的。由 **(1)** 可知， $f_{\mathtt{n}} \in \mathfrak{i}_{\mathtt{n}}$，但 $f_{\mathtt{n}} \notin \mathfrak{i}_{\mathtt{n}+1}$。此外， $f_{\mathtt{n}} \in M_{\mathtt{n}+1}$ 且 $f_{\mathtt{n}} \notin M_{\mathtt{n}}$。

接下来我们证明 $\mathfrak{i}_{\mathtt{n}} \cap M_{\mathtt{n}} = \emptyset$。事实上，若 $f \in \mathfrak{i}_{\mathtt{n}} \cap M_{\mathtt{n}}$，则

$$\infty = \lim_{\mathtt{k}\to\infty} \frac{m(f, 2^{\mathtt{k}}\boldsymbol{e}_1)}{\mathtt{k}^{\mathtt{n}}} = \limsup_{\mathtt{k}\to\infty} \frac{m(f, 2^{\mathtt{k}}\boldsymbol{e}_1)}{\mathtt{k}^{\mathtt{n}}} \leq \sup_{\mathtt{k}\in\mathbb{N}} \frac{m(f, 2^{\mathtt{k}}\boldsymbol{e}_1)}{\mathtt{k}^{\mathtt{n}}} < \infty,$$

矛盾。但 $\mathfrak{i}_{\mathtt{n}} \cap M_{\mathtt{n}+1} \neq \emptyset$，因为 $f_{\mathtt{n}} \in \mathfrak{i}_{\mathtt{n}}$ 且 $f_{\mathtt{n}} \in M_{\mathtt{n}+1}$。

现在，我们将证明 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$ 的克鲁尔维数是无限的，方法是证明对于所有 $\mathtt{N} \in \mathbb{N}$，我们都可以在 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$ 中构造一个严格递减的素理想链 $\mathfrak{p}_{\mathtt{N}+1} \subsetneq \mathfrak{p}_{\mathtt{N}} \subset \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_2 \subsetneq \mathfrak{p}_1$。

固定一个 $\mathtt{N} \in \mathbb{N}_{\circ}$ 取 $\mathfrak{i} = \mathfrak{i}_{\mathtt{N}+1}$ 和$M = M_{\mathtt{N}+1}$应用命题 4.3, 我们可以得到 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$ 中存在一个素理想 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\mathtt{N}+1}$，它满足 $\mathfrak{i}_{\mathtt{N}+1} \subset \mathfrak{p}_{\mathtt{N}+1}$ 和 $\mathfrak{p}_{\mathtt{N}+1} \cap M_{\mathtt{N}+1} = \emptyset_{\circ}$

我们断言， $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$ 的理想 $\mathfrak{i}_{\mathtt{N}} + \mathfrak{p}_{\mathtt{N}+1}$ 满足 $(\mathfrak{i}_{\mathtt{N}} + \mathfrak{p}_{\mathtt{N}+1}) \cap M_{\mathtt{N}} = \emptyset_{\circ}$ 令 $h = f + g \in \mathfrak{i}_{\mathtt{N}} + \mathfrak{p}_{\mathtt{N}+1}$，其中 $f \in \mathfrak{i}_{\mathtt{N}}$ 且 $g \in \mathfrak{p}_{\mathtt{N}+1\circ}$ 由于 $g \in \mathfrak{p}_{\mathtt{N}+1}$, 根据 $\mathfrak{p}_{\mathtt{N}+1}$ 的构造可得 $g \notin M_{\mathtt{N}+1\circ}$ 但是 $M_{\mathtt{N}} \subset M_{\mathtt{N}+1}$，因此 $g \notin M_{\mathtt{N}}$ 也成立。于是存在 $(\mathtt{k})_{\mathtt{k}\in\mathbb{N}}$ 的一个子序列 $(\mathtt{k}_{\mathtt{j}})_{\mathtt{j}\in\mathbb{N}}$ ，使得

$$\lim_{\mathtt{j}\to\infty} \frac{m(g, 2^{\mathtt{k}_{\mathtt{j}}}\boldsymbol{e}_1)}{\mathtt{k}_{\mathtt{j}}^{\mathtt{N}}} = \infty.$$

由 (P1)，我们得到

$$\frac{m(h, 2^{\mathtt{k}_{\mathtt{j}}}\boldsymbol{e}_1)}{\mathtt{k}_{\mathtt{j}}^{\mathtt{N}}} \geq \min\left\{\frac{m(f, 2^{\mathtt{k}_{\mathtt{j}}}\boldsymbol{e}_1)}{\mathtt{k}_{\mathtt{j}}^{\mathtt{N}}}, \frac{m(g, 2^{\mathtt{k}_{\mathtt{j}}}\boldsymbol{e}_1)}{\mathtt{k}_{\mathtt{j}}^{\mathtt{N}}}\right\}.$$

由于 $f \in \mathfrak{i}_{\mathtt{N}}$，可得

$$\sup_{\mathtt{j}\in\mathbb{N}} \frac{m(h, 2^{\mathtt{k}_{\mathtt{j}}}\boldsymbol{e}_1)}{\mathtt{k}_{\mathtt{j}}^{\mathtt{N}}} \geq \min\left\{\limsup_{\mathtt{j}\to\infty} \frac{m(f, 2^{\mathtt{k}_{\mathtt{j}}}\boldsymbol{e}_1)}{\mathtt{k}_{\mathtt{j}}^{\mathtt{N}}}, \limsup_{\mathtt{j}\to\infty} \frac{m(g, 2^{\mathtt{k}_{\mathtt{j}}}\boldsymbol{e}_1)}{\mathtt{k}_{\mathtt{j}}^{\mathtt{N}}}\right\} \geq \infty.$$

因此 $h \notin M_{\mathtt{N}\circ}$ 于是，$(\mathfrak{i}_{\mathtt{N}} + \mathfrak{p}_{\mathtt{N}+1}) \cap M_{\mathtt{N}} = \emptyset_{\circ}$

显然 $\mathfrak{i}_{\mathtt{N}} \subset \mathfrak{i}_{\mathtt{N}} + \mathfrak{p}_{\mathtt{N}+1\circ}$ 再次应用命题 4.3，此时取 $\mathfrak{i} = \mathfrak{i}_{\mathtt{N}} + \mathfrak{p}_{\mathtt{N}+1}$ 和 $M = M_{\mathtt{N}}$，可得 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$ 中存在一个素理想 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\mathtt{N}}$，使得 $\mathfrak{i}_{\mathtt{N}} + \mathfrak{p}_{\mathtt{N}+1} \subset \mathfrak{p}_{\mathtt{N}}$ 且 $\mathfrak{p}_{\mathtt{N}} \cap M_{\mathtt{N}} = \emptyset_{\circ}$ 因此 $\mathfrak{p}_{\mathtt{N}+1} \subset \mathfrak{i}_{\mathtt{N}} + \mathfrak{p}_{\mathtt{N}+1} \subset \mathfrak{p}_{\mathtt{N}\circ}$ 第一个包含是严格的，因为 $f_{\mathtt{N}} \in \mathfrak{i}_{\mathtt{N}} \subset \mathfrak{i}_{\mathtt{N}} + \mathfrak{p}_{\mathtt{N}+1\circ}$ 但是 $f_{\mathtt{N}} \notin \mathfrak{p}_{\mathtt{N}+1}$ （因为 $f_{\mathtt{N}} \in M_{\mathtt{N}+1}$ 且 $\mathfrak{p}_{\mathtt{N}+1} \cap M_{\mathtt{N}+1} = \emptyset$，根据 $\mathfrak{p}_{\mathtt{N}+1}$ 的构造）。因此 $\mathfrak{p}_{\mathtt{N}+1} \subsetneq \mathfrak{p}_{\mathtt{N}\circ}$

现在考虑 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$ 的理想 $\mathfrak{i} := \mathfrak{i}_{\mathtt{N}-1} + \mathfrak{p}_{\mathtt{N}} \supset \mathfrak{i}_{\mathtt{N}-1}$ 和 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^{\mathtt{d}})$ 的乘法封闭集合 $M := M_{\mathtt{N}-1}$。与上面的论证类似，我们将在下文证明 $\mathfrak{i} \cap M = (\mathfrak{i}_{\mathtt{N}-1} + \mathfrak{p}_{\mathtt{N}}) \cap M_{\mathtt{N}-1} = \emptyset_{\circ}$

设 $h = f + g \in \mathfrak{i}_{\mathtt{N}-1} + \mathfrak{p}_{\mathtt{N}}$，其中 $f \in \mathfrak{i}_{\mathtt{N}-1}$ 且 $g \in \mathfrak{p}_{\mathtt{N}\circ}$ 由于 $g \in \mathfrak{p}_{\mathtt{N}}$，根据 $\mathfrak{p}_{\mathtt{N}}$ 的构造， $g \notin M_{\mathtt{N}} \supset M_{\mathtt{N}-1}$，因此 $g \notin M_{\mathtt{N}-1\circ}$ 于是存在 $(\mathtt{k}_{\mathtt{j}})_{\mathtt{j}\in\mathbb{N}}$，它是 $(\mathtt{k})_{\mathtt{k}\in\mathbb{N}}$ 的一个子序列，使得

$$\lim_{\mathtt{j}\to\infty} \frac{m(g, 2^{\mathtt{k}_{\mathtt{j}}}\boldsymbol{e}_1)}{\mathtt{k}_{\mathtt{j}}^{\mathtt{N}-1}} = \infty.$$

由于 $f \in \mathfrak{i}_{N-1}$,

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{m(h, 2^{k_j}\boldsymbol{e}_1)}{k_j^{N-1}} \geq \min\left\{ \limsup_{j\to\infty} \frac{m(f, 2^{k_j}\boldsymbol{e}_1)}{k_j^{N-1}}, \limsup_{j\to\infty} \frac{m(g, 2^{k_j}\boldsymbol{e}_1)}{k_j^{N-1}} \right\} \geq \infty.$$

因此 $h \notin M_{N-1}$。所以 $(\mathfrak{i}_{N-1} + \mathfrak{p}_N) \cap M_{N-1} = \emptyset$。

根据命题 4.3，取 $\mathfrak{i} = \mathfrak{i}_{N-1} + \mathfrak{p}_N \supset \mathfrak{i}_{N-1}$ 和 $M = M_{N-1}$，存在一个素理想 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{N-1}$，属于 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$，使得 $\mathfrak{i}_{N-1} + \mathfrak{p}_N \subset \mathfrak{p}_{N-1}$ 和 $\mathfrak{p}_{N-1} \cap M_{N-1} = \emptyset$。因此 $\mathfrak{p}_N \subset \mathfrak{i}_{N-1} + \mathfrak{p}_N \subset \mathfrak{p}_{N-1}$，并且第一个包含关系仍然是严格的（因为 $f_{N-1} \in \mathfrak{i}_{N-1} \subset \mathfrak{i}_{N-1} + \mathfrak{p}_N$, $f_{N-1} \in M_N$ 和 $M_N \cap \mathfrak{p}_N = \emptyset$）。

以此方式继续，我们得到 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$ 中互不相同的素理想链 $\mathfrak{p}_{N+1} \subsetneq \mathfrak{p}_N \subsetneq \mathfrak{p}_{N-1} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_1$.。由于 $N \in \mathbb{N}$ 是任意的，因此 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$ 的克鲁尔维数是无穷大。□

4.3. 弱 Krull 维数。回顾 [6]中的以下定义：

定义 4.5。交换环 R的弱 Krull 维数，是其不同真有限生成素理想链长度的上确界 R。

定理 4.6。 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$ 的弱 Krull 维数为 1。

证明。设 $\mathfrak{p}_1$ 和 $\mathfrak{p}_2$ 是 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$ 中的有限生成真素理想，且满足 $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$。对每个 $i \in \{1, 2\}$，由命题 2.2，存在一个 $\boldsymbol{n}_i \in \mathbb{Z}^d$ 使得 $\mathfrak{p}_i = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d) : f(\boldsymbol{n}_i) = 0\}$。但由于 $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$，可得 $\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{n}_2$（考虑一个在所有 $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\boldsymbol{n}_2\}$ 处取值为 0、在 $\boldsymbol{n}_2$处取值为 1 的函数），因此 $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$。所以 $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^d)$ 的弱 Krull 维数为 1。□

References

[1] W. Donoghue, Jr.，《分布与傅里叶变换》。纯粹与应用数学第32卷，学术出版社，纽约和伦敦，1969年。[2]J. Duistermaat 和 J. Kolk。《分布：理论与应用》。Birkh¨auser，波士顿，马萨诸塞州，2010年。[3] L. Gillman 和 M. Jerison。《连续函数环》。D. Van Nostrand 公司，新泽西州普林斯顿，1960年。[4] M. Roitman 和 A. Sasane。关于结合代数的 Gleason-Kahane-Zelazko 定理。《数学研究成果》，78:26，第1期，2023年。

[5] A. Sasane。周期分布环的代数性质杂谈。《比利时数学学会通报：西蒙·斯蒂文》，25:755-776，第5期，2018年。[6] G. Tang。交换环上的弱 Krull 维数。载于《环论进展》，215-224，第4届中日韩环论研讨会论文集，会议于南京举行，2004年6月24日至28日，由 J. Chen、N. Ding 和 H. Marubayashi 编，世界科学出版社，2005年。[7] F. Tr`eves。《拓扑向量空间、分布与核》。1967年原版的完整再版。多佛出版社，纽约州米尼奥拉，2006年。[8] M. von Renteln。带权 Hadamard 乘法下的整函数环。《数学论证》，10:807-813，第3-4期，1977年。[9] M. von Renteln。拓扑代数中的素理想 $H^{\infty}(\beta)$。《数学杂志》，157:79-82，1977年。

Department of Mathematics, London School of Economics, HoughtonStreet, London WC2A 2AE, United Kingdom

电子邮箱地址：A.J.Sasane@lse.ac.uk