通过随机降维和主成分分析模拟高斯向量

纳比勒·卡哈尔´e *

2023年4月18日

arXiv:2304.07377v1 [math.ST] 14 Apr 2023

摘要

我们研究估计 $E(g(X))$ 的问题，其中 g 是一个关于 d 个变量的实值函数，而 X 是一个具有给定协方差矩阵的 d 维高斯向量。我们提出了一种新的 $E(g(X))$ 无偏估计量，它结合了随机降维技术与主成分分析。在适当条件下，我们证明该算法的表现优于标准蒙特卡洛方法，优势可达 d 阶。

关键词：乔列斯基分解、高斯向量、主成分分析、蒙特卡罗模拟、方差缩减、降维

1 引言

高斯向量的蒙特卡罗模拟广泛应用于多个领域，例如天气和空间预测（Gel、Raftery 和 Gneiting 2004，Diggle 和 Ribeiro Jr 2007）、金融（Glasserman 2004，Hull 2014）以及机器学习（Russo 和 Van Roy 2014，Russo 和 Van Roy 2016）。设 M 为一个 $d\times d$ 半正定矩阵，X 为一个均值为 0、协方差矩阵为 M 的 d维高斯向量。模拟 X的一种标准方法是乔列斯基分解（Glasserman 2004，第 2.3.3 小节），该方法使用一个 $d\times d$ 矩阵 A，使得

$$AA^T = M. \tag{1}$$

这样的矩阵 A 可在 $O(d^3)$ 时间内计算得到（Golub 和 Van Loan 2013，第 4.2.5 和 4.2.8 小节）。在某些特殊情况下，有更高效的方法来模拟高斯向量。特别是，快速傅里叶变换技术可以精确模拟具有平稳协方差矩阵的高斯过程（Wood 和 Chan 1994，Dietrich 和 Newsam 1997）以及分数布朗曲面（Stein 2002）。稀疏乔列斯基分解（Rue 2001）和迭代技术（Aune、Eidsvik 和 Pokern 2013）能够高效生成具有稀疏精度矩阵 M^{-1} 的高斯向量。对于一般协方差矩阵 M，X 可通过马尔可夫链算法（Kahal´e 2019）进行近似模拟；该算法渐近收敛至 $N(0,M)$，且无需任何预先计算。Kahal´e（2022）介绍了该算法的一个无偏版本。

在各种场景下，人们已经开发出能够提升蒙特卡洛模拟性能的方差缩减技术（Glasserman 2004、Asmussen 和 Glynn 2007、Giles 2015）。拟蒙特卡罗方法（QMC）是一种与蒙特卡洛模拟相关的技术，在许多应用中优于标准蒙特卡罗（Glasserman 2004，第 5 章）。在金融衍生品定价中，布朗桥和主成分分析（PCA）通常能够提高 QMC 的效率（Glasserman 2004，第 5.5.2 小节）。随机降维

*ESCP Business School, 75011 Paris, France; e-mail: nkahale@escp.eu.

约化方法（RDR）是一种新近的方差缩减技术，在某些高维场景下已被证明优于标准蒙特卡罗（Kahal´e 2020）。RDR 估计 $E(f(U))$，其中向量 U 由 d 个独立随机变量组成，而 f 是 d 个变量的函数。当 f 对其所有自变量的依赖程度不同时，RDR 会对 $E(f(U))$ 提供一个无偏估计量；在适当条件下，其性能比标准蒙特卡罗高出约 d 倍（Kahal´e 2020）。RDR 背后的基本思想是更频繁地模拟 f 的重要自变量。RDR 与以往的方差缩减技术有关，例如 Glasserman 和 Staum（2003）提出的算法：通过提前停止序列来估计一系列随机变量之和的期望。

本文研究估计 $E(g(X))$ 的问题，其中 g 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的实值函数，且 $g(X)$ 平方可积。设 A 为满足条件 (1) 的 $d \times d$ 矩阵，U 为由 d 个相互独立的标准高斯随机变量组成的向量。由于 AU 与 X 具有相同的分布（Glasserman 2004，第 2.3.3 小节），我们有 $E(g(X)) = E(f(U))$，其中 $f(z) := g(Az)$，对 $z \in \mathbb{R}^d$ 成立。换言之，$E(g(X))$ 等于一个关于 d 个相互独立的标准高斯随机变量的泛函的期望。标准蒙特卡罗方法通过对 n 个相互独立的 U 副本中的 f 取平均，来估计 $E(f(U))$。计算出 A 后，可在 $O(d^2)$ 时间内模拟 AU。本文采用 RDR 和主成分分析，为 $E(g(X))$ 提供更高效的估计。我们方法的基本思想是选择一个满足条件 (1) 的矩阵 A，使得 f 的第 i 个自变量的重要性随 i 增大而降低。这样，RDR 就能比标准蒙特卡罗更高效地估计 $E(f(U))$。主成分分析为这类矩阵 A 提供了一种自然的选择。在一定条件下，我们证明，在相同计算成本下，我们的估计量的方差比标准蒙特卡罗估计量的方差低一个 d 阶的因子。

主成分分析广泛应用于金融领域（Jamshidian 和 Zhu 1996、Glasserman 2004）、统计学和机器学习（Hastie、Tibshirani 和 Friedman 2009、Huang、Jiang、Li、Tong 和 Zhou 2022）。实证分析表明，金融领域中出现的若干高斯向量，其变动大多可由少数几个因子解释（Jamshidian 和 Zhu 1996、Hull 2014）。本文后文所说的运行时间均指算术运算的次数。

2 RDR 回顾

本节假设向量 $U = (U_1, \ldots, U_d)$ 的分量是取值于可测空间 F 的 d 独立随机变量，$f: F^d \to \mathbb{R}$ 是博雷尔可测的，并且 $f(U)$ 是平方可积的。一个非正式的假设是，U_i的重要性随 i 递减。在马尔可夫链等某些应用中，会对 f 的参数重新排序，以满足这一假设（Kahal´e 2020）。RDR 算法通过更频繁地对 U的前几个分量进行抽样，生成 U 的副本。它通过对 U 的副本取平均，估计 $E(f(U))$。更准确地说，通用 RDR 算法以函数 f、正整数n 和向量 $q = (q_0, \ldots, q_{d-1}) \in \mathbb{R}^d$ 作为参数，其中

$$1 = q_0 \geq q_1 \geq \cdots \geq q_{d-1} > 0. \tag{2}$$

令 (N_k)，$k \geq 1$ 为 $\{1, \ldots, d\}$ 中的独立随机整数序列，使得对于 $k \geq 1$ 和 $i \in \{1, \ldots, d\}$，$\Pr(N_k > i) = q_i$。该算法按以下步骤模拟 n 个副本 $V_{(1)} \ldots, V_{(n)}$：

1. 第一次迭代。生成 U 的一个副本 $V_{(1)}$，并计算 $f(V_{(1)})$。

2. 循环。在第 $k+1$ 次迭代中，其中 $1 \leq k \leq n-1$，令 $V^{(k+1)}$ 为通过重新模拟 $V^{(k)}$ 的前 N_k 个分量而得到的向量，不改变其余分量。计算 $f(V_{(k+1)})$。

3. 输出

$$f_n := \frac{f(V^{(1)}) + \cdots + f(V^{(n)})}{n}.$$

正如 Kahal´e（2020）中所述，我们有

$$E(f_n) = E(f(U)). \tag{3}$$

对于 $0 \le i \le d$，令

$$C(i) = \mathrm{Cov}(f(U), f(U')),$$

其中 $U' = (U'_1, \ldots, U'_i, U_{i+1}, \ldots, U_d)$，且 $U'_1, \ldots, U'_i$ 是随机变量，满足 $U'_j \sim U_j$（对任意 $1 \le j \le i$），并且 $U'_1, \ldots, U'_i, U$ 相互独立。换言之，$U \sim U'$，U' 的前 i 个分量与 U 相互独立，而 U 和 U' 的最后 $d-i$ 个分量相同。注意，$C(0) =$方差$(f(U))$，且 $C(d) = 0$。直观地说（Kahal´e，2020），如果 f 的最后 $d-i$ 个自变量并不重要，那么 $C(i)$ 应该很小。此外，Kahal´e（2020）证明，$C(i)$ 是 i 的递减函数，并且

$$n\mathrm{Variance}(f_n) \le 2\sum_{i=0}^{d-1} \frac{C(i) - C(i+1)}{q_i}. \tag{4}$$

RDR 算法的期望运行时间也取决于 q。Kahal´e（2020）提出了一种数值算法，用于计算能够优化 RDR 算法渐近效率的向量 q。命题 2.1 给出了 $C(i)$ 的一个界，该界根据一个函数对 f 的近似而得，此函数仅依赖其前 i 个自变量。

命题 2.1（Kahal´e（2020））。对于 $1 \le i \le d$，若 $f_i : F^i \to \mathbb{R}$ 是博雷尔可测函数，且 $f_i(U_1, \ldots, U_i)$ 平方可积，则

$$C(i) \le \mathrm{Variance}(f(U) - f_i(U_1, \ldots, U_i)).$$

3 用于高斯模拟的 RDR 算法

在本文余下部分中，假设 $U = (U_1, \ldots, U_d)$ 是一个由相互独立的标准高斯随机变量组成的 d 维向量，M 是一个 $d \times d$ 半正定矩阵，且 A 是满足（1）的 $d \times d$ 矩阵。设 g 是 d 个变量的实值函数，且 $E(g(X)^2)$ 有限，其中 $X \sim N(0, M)$。我们假设，对于 $z \in \mathbb{R}^d$，计算 $g(z)$ 所需的时间为 $O(d)$。令 $\mu := E(g(X))$，$\Sigma :=$ Variance$(g(X))$，以及 $f(z) := g(Az)$（$z \in \mathbb{R}^d$）。因此，$\mu = E(f(U))$ 且 $\Sigma =$Variance$(f(U))$。我们的目标是估计 μ。

3.1 算法描述

算法 1 详细给出了应用于 $f(U)$ 的 RDR 算法的实现。在此情况下，$F = \mathbb{R}$。算法 1 的参数包括函数 g、矩阵 M 和 A，以及满足 (2) 的向量 $q \in \mathbb{R}^d$。为简单起见，迭代次数 n 在算法 1 的步骤 2 中通过以下方程计算：

$$n = \left\lceil \frac{d}{\sum_{i=0}^{d-1} q_i} \right\rceil. \tag{5}$$

对于 $k \ge 1$，I_k 表示 $k \times k$ 单位矩阵。

算法 1 GRDR 算法

函数 $\mathrm{GRDR}(g, M, A, q)$
  $n \leftarrow \left\lceil \frac{d}{\sum_{i=0}^{d-1} q_i} \right\rceil$
  模拟 $U = (U_1, \ldots, U_d) \sim N(0, I_d)$
  $X \leftarrow AU$
  $S \leftarrow g(X)$
  对于 $k \leftarrow 1, n-1$ 执行
    模拟 $N \in \{1, \ldots, d\}$，其中 $\Pr(N > i) = q_i$，对于 $0 \le i \le d-1$
    模拟 $(U'_1, \ldots, U'_N) \sim N(0, I_N)$
    $U' \leftarrow (U'_1, \ldots, U'_N U_{N+1}, \ldots, U_d)$
    $X \leftarrow X + A(U' - U)$
    $S \leftarrow S + g(X)$
    $U \leftarrow U'$
  结束循环
  返回 $f_n \leftarrow S/n$
结束函数

由 (3) 可得 $E(f_n) = \mu$。现在我们估算算法 1 的期望运行时间 T。步骤 2 至 5 的执行时间为 $O(d^2)$。在循环的每次迭代中，$U' - U$的最后 $d - N$ 个分量均为零。因此，$A(U' - U)$ 的计算以及步骤 10 可在 $O(dN)$ 时间内完成。循环中其余步骤的运行时间为 $O(d+N)$。由于 $N = \sum_{i=0}^{d-1} 1\{N > i\}$，我们有

$$E(N) = \sum_{i=0}^{d-1} q_i.$$

Thus

$$\begin{aligned} T &\le c(d^2 + (n-1)E(dN)) \\ &= c(d^2 + (n-1)d(\sum_{i=0}^{d-1} q_i)), \end{aligned}$$

对于某个常数 c。由 (5) 可知，$T \le 2cd^2$。因此，对于一般的矩阵 A，模拟 f_n 并计算 $g(AU)$ 所需的预期时间，与模拟 U 所需的时间处于同一数量级。

3.2 标准蒙特卡罗与 GRDR

给定 $\epsilon > 0$，需要 $n' = \lceil \Sigma^2/\epsilon^2 \rceil$ 个 $X \sim N(0, M)$ 的独立样本，使得 n' 个 $g(X)$ 独立副本的平均值的方差至多为 ϵ^2。计算乔列斯基分解并模拟这些 n' 个副本需要

$$\tau_{MC}(\epsilon) = \Theta(d^3 + \frac{\Sigma^2}{\epsilon^2} d^2)$$

时间如（Kahal´e 2019）中所示。同样，通过对 f_n 的独立副本取平均，以精度 ϵ 估计 μ 所需的预期时间为

$$\tau_{GRDR}(\epsilon) = \Theta(d^3 + \frac{\mathrm{Variance}(f_n)}{\epsilon^2} d^2).$$

因此，随着 ϵ 趋于 0，GRDR 相对于标准蒙特卡罗的表现取决于比值 $\mathrm{Variance}(f_n)/\Sigma$。结合 (4) 和 (5) 可得

$$\mathrm{Variance}(f_n) \le \frac{2}{d} \left(\sum_{i=0}^{d-1} q_i \right) \left(\sum_{i=0}^{d-1} \frac{C(i) - C(i+1)}{q_i} \right). \tag{6}$$

给定 M 和 g，(6) 的右端取决于 A 和 q的选择。这是因为$C(i)$' 取决于 f，而根据定义，f 取决于 A。给定 q，(6) 的右端是 $C(i)$' 的线性组合，且权重非负，因此对于 $0 \le i \le d$，它是$C(i)$的增函数。

受（Kahal´e 2020，命题 6）的启发，我们考察 $0 \le i \le d-1$ 时 $q_i = 1/(i+1)$ 的情形。根据（6）和不等式 $\sum_{i=2}^{d} 1/i \le \ln d$，

$$\begin{aligned} \text{Variance}(f_n) &\le \frac{2(1+\ln d)}{d} \sum_{i=0}^{d-1} (i+1)(C(i) - C(i+1)) \\ &= \frac{2(1+\ln d)}{d} \sum_{i=0}^{d-1} C(i). \end{aligned} \tag{7}$$

由于 $C(0) = \Sigma$，且 $C(i)$ 随着 i 增大而减小，因此

$$\text{Variance}(f_n) \le 2(1+\ln d)\Sigma.$$

换言之，f_n 的方差始终有上界 Σ，相差至多一个对数因子。另一方面，如果 $C(i)$ 随着 i 快速减小，那么 Variance(f_n) 可能远小于 Σ。例如，若对某个常数 c' 和 $1 \le i \le d-1$，有 $C(i) \le c'\Sigma/i$，则（7）意味着 Variance(f_n) 比 Σ 小一个约为 $d/\ln^2(d)$ 的因子。在对 g 作出额外假设的条件下，第 4 节给出了 $C(i)$ 的显式界以及 Variance(f_n) 的显式界，并研究了 q 的另一种选择。

4 方差(f_n)的显式界

对于 $d \times d$ 矩阵 B 和 B'，若 $B' - B$ 为半正定，我们称 $B \preccurlyeq B'$。令 $\kappa > 0$。沿用 Kahal´e（2019）的定义，若对于任意 ($2d$) 维中心高斯向量 (Y, Y')，其 Cov(Y) $\preccurlyeq M$ 且 Cov(Y') $\preccurlyeq M$，则称 g 为 (κ, M)-Lipschitz。

$$E((g(Y) - g(Y'))^2) \le \kappa^2 E(||Y - Y'||^2).$$

特别地，任何 κ-Lipschitz 函数也是 (κ, M)-Lipschitz。第 4.3 小节给出了一个 (κ, M)-Lipschitz 函数的例子，但该函数不是 Lipschitz 函数。本节假设 g 为 (κ, M)-Lipschitz，并为简便起见，假设 M 为正定。下面的引理 4.1 给出了在这些假设下 $C(i)$ 的界。

引理 4.1。对于 $0 \le i \le d-1$，我们有

$$C(i) \le \kappa^2 \sum_{j=i+1}^{d} (A^T A)_{jj}.$$

证明。令 P 为一个 $d \times d$ 对角矩阵，其前 i 个 $U' = PU$对角元素为 1，其余元素为 0。令 $Y = AU$、$Y' = AU'$ 和 $Y \sim N$。于是 $M(0, Y' = APU)$。由于 Y，(Y',) 是一个中心高斯向量，并且

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y') &= E(Y'Y'^T) \\ &= APE(UU^T)PA^T \\ &= APA^T \\ &\preccurlyeq AA^T, \end{aligned}$$

其中，第三个方程由等式 $E(UU^T) = I_d$ 和 $P^2 = P$ 推出，最后一个方程由等式 $AA^T - APA^T = A(I_d - P)A^T$ 以及不等式 $P \preccurlyeq I_d$ 推出。因此，$\mathrm{Cov}(Y') \preccurlyeq M$。此外，$Y - Y' = A\Gamma$，其中 $\Gamma := U - U'$。因此

$$\begin{aligned} C(i) &\leq E((f(U) - f(U'))^2) \\ &= E((g(Y) - g(Y'))^2) \\ &\leq \kappa^2 E(||A\Gamma||^2) \\ &= \kappa^2 E(\Gamma^T A^T A\Gamma) \\ &= \kappa^2 \sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}(A^TA)_{jk}E(\Gamma_j\Gamma_k) \\ &= \kappa^2 \sum_{j=i+1}^{d}(A^TA)_{jj}. \end{aligned}$$

第一个方程由命题 2.1 得出，最后一个则由 Γ 服从协方差矩阵为 $I_d - P$的正态分布这一事实得出。□

当 $i = 0$时，引理 4.1 表明

$$\begin{aligned} \Sigma &\leq \kappa^2 \mathrm{tr}(A^TA) \\ &= \kappa^2 \mathrm{tr}(AA^T) \\ &= \kappa^2 \mathrm{tr}(M). \end{aligned} \tag{8}$$

4.1 根据 A选择 q

我们首先证明，不失一般性，可以假设序列 $(A^TA)_{ii}, 1 \leq i \leq d$ 是递减的。考虑 $\{1, \ldots, d\}$ 的一个排列 π，使得序列 $(A^TA)_{\pi(i)\pi(i)}, 1 \leq i \leq d$ 是递减的。令 B 为由 $B_{ij} = A_{i\pi(j)}$定义的 $d \times d$ 矩阵，其中 $1 \leq i, j \leq d$。接下来，通过标准计算可得 $BB^T = AA^T = M$，且当$1 \leq i \leq d$时，$(B^TB)_{ii} = (A^TA)_{\pi(i)\pi(i)}$。因此，$B$ 满足 (1)，且序列 $(B^TB)_{ii}, 1 \leq i \leq d$ 是递减的。

现在假设 A 满足 (1)，且序列 $(A^TA)_{ii}, 1 \leq i \leq d$ 单调递减。(6) 后面的讨论表明，如果将 $C(i)$ 替换为引理 4.1 所给出的上界，(6) 仍然成立。因此，

$$\mathrm{Variance}(f_n) \leq \frac{2\kappa^2}{d}\left(\sum_{i=1}^{d} q_{i-1}\right)\sum_{i=1}^{d}\frac{(A^TA)_{ii}}{q_{i-1}}.$$

另一方面，由 (1) 可知，$\det(A^TA) = \det M$。因此，由于 M 可逆，A^TA 也可逆。于是，A^TA 为正定矩阵，且 $(A^TA)_{ii} > 0$ 对于 $1 \leq i \leq d$ 成立。标准计算可知，当以下条件成立时，右端取最小值：

$$q_{i-1} = \sqrt{\frac{(A^TA)_{ii}}{(A^TA)_{11}}}, \tag{9}$$

对于 $1 \leq i \leq d$。关于 (9) 的另一种论证见 (Kahal´e 2020，命题 4)。对于这一 q 的选取，我们有

$$\mathrm{Variance}(f_n) \leq \frac{2\kappa^2}{d}\left(\sum_{i=1}^{d}\sqrt{(A^TA)_{ii}}\right)^2. \tag{10}$$

由此得到下面的定理 4.1。

定理 4.1。假设 M 是正定的，A 满足 (1)，序列 $(A^TA)_{ii}$、$1 \le i \le d$ 是递减的，并且 g 是 (κ, M)-Lipschitz 的。若 q 由 (9) 给出，则 $T \le 2cd^2$ 对某个常数 c 成立，且 Variance(f_n) 满足 (10)。

根据柯西-施瓦茨不等式，

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{d}\sqrt{(A^TA)_{ii}}\right)^2 &\le d\sum_{i=1}^{d}(A^TA)_{ii}\\ &= d\mathrm{tr}(A^TA)\\ &= d\mathrm{tr}(M).\end{aligned}$$

因此，式 (10) 给出的 Variance(f_n) 上界，至多比式 (8) 给出的 Σ 上界大 2 倍。另一方面，如果 $(A^TA)_{ii}$ 随着 i 增大而迅速减小，那么式 (10) 给出的 Variance(f_n) 上界可能远小于式 (8) 给出的 Σ 上界。特别地，如果对于某个与 d 和 $1 \le i \le d$ 无关的常数 c'，有 $(A^TA)_{ii} \le c'i^{-2}(A^TA)_{11}$，那么式 (10) 的右端比式 (8) 的右端小一个 $d/\ln^2 d$ 量级的因子。类似地，如果对于某些与 d 和 $1 \le i \le d$ 无关的常数 c' 和 $\gamma < -2$，有 $(A^TA)_{ii} \le c'i^{\gamma}(A^TA)_{11}$，那么式 (10) 的右端比式 (8) 的右端小一个 d 量级的因子。

4.2 结合 RDR 和主成分分析

设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ 是 M 的特征值，按降序排列。记 Λ 为 $d \times d$ 矩阵对角矩阵，其第 i 个对角元素为 λ_i。因此，存在一个正交 $d \times d$ 矩阵 Q，使得 $M = Q\Lambda Q^T$。矩阵 Q 和 Λ 可以在 $O(d^3)$ 时间内近似计算（Golub 和 Van Loan 2013，第 8 章）。定理 4.2 将 RDR 方法与主成分分析结合起来。

定理 4.2. 假设 g 是 (κ, M)-Lipschitz。令 $A = Q\sqrt{\Lambda}$ 和 $q_i = \sqrt{\lambda_{i+1}/\lambda_1}$，其中 $0 \le i \le d-1$。那么，对于某个常数 c，有 $T \le 2cd^2$，并且

$$\mathrm{Variance}(f_n) \le \frac{2\kappa^2}{d}\left(\sum_{i=1}^{d}\sqrt{\lambda_i}\right)^2. \tag{11}$$

证明。注意，A 满足 (1)。另一方面，由于 $A^TA = \Lambda$，我们有 $(A^TA)_{ii} = \lambda_i$，其中 $1 \le i \le d$。因此，序列 $(A^TA)_{ii}$, $1 \le i \le d$，是递减的。应用定理 4.1 即得证。

□

定理 4.1 后的讨论表明，如果 $\lambda_i \le c'i^{-2}\lambda_1$ 对于某个与 d 和 $1 \le i \le d$ 无关的常数 c'，则（11）的右端比（8）的右端小一个数量级为 $d/\ln^2(d)$ 的因子。类似地，如果 $\lambda_i \le c'i^{\gamma}d$ 对于某些与 d 和 $1 \le i \le d$ 无关的常数 c' 和 $\gamma < -2$，则（11）的右端比（8）的右端小一个数量级为 d 的因子。

4.3 A篮子期权

考虑 d 只股票 S_1，…，S_d，它们遵循标准对数正态模型（Glasserman 2004，第 3.2.3 小节）且不支付股息。假设 $S_1(0) = S_2(0) = \cdots = S_d(0) = 1$，其中 $S_i(t)$ 表示 S_i 在时刻 t 的价格。令 r 为无风险利率，并令 σ_i 表示 S_i 的波动率。假设 σ_i 的取值有界于一个与 d 无关的常数。行权价为 K、到期日为 t 的篮子看涨期权，其在时刻 t 的收益为 $((S_1(t) + \cdots + S_d(t))/d - K)^+$。该期权的价格等于 $E(g(X))$，其中，对于 $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$，

$$g(x) = \left(\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}\exp\left(-\frac{\sigma_i^2}{2}t + \sigma_i\sqrt{t}x_i\right) - Ke^{-rT}\right)^+.$$

X的协方差矩阵 M由 M_{ij} =Correl(ln(S_i(t)), ln(S_j(t))) 给出，其中 $1 \leq i \leq j \leq$$d$。Kahal´e（2019）在不使用矩阵分解的高斯向量近似模拟背景下研究了这一例子，并证明 $\kappa = O(d^{-1/2})$, 其中 O 记号后的常数与 d无关。由于 $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i$ =tr(M) $= d$，我们有 $\lambda_1 \leq$$d$. 。若 $\lambda_i \leq c' i^{-2} \lambda_1$ ，且存在与 d 和 $1 \leq i \leq d$无关的常数 c' ，则由（11）可得 Variance(f_n) $= O(\ln^2(d)/d)$，且当 $\epsilon > 0$时， $\tau_{GRDR}(\epsilon) = \Theta(d^3 + \ln^2(d) d\epsilon^{-2})$。类似地，若 $\lambda_i \leq c' i^{\gamma} \lambda_1$ ，且存在与 d 和 $1 \leq i \leq d$无关的常数 c' 和 $\gamma < -2$ ，则 Variance(f_n) $= O(1/d)$，且 $\tau_{GRDR}(\epsilon) = \Theta(d^3 + d\epsilon^{-2})$。相反，若 Σ 为 1 阶，则$\tau_{MC}(\epsilon) = \Theta(d^3 + d^2\epsilon^{-2})$。

参考文献

Asmussen, S. 和 Glynn, P. W.（2007）。《随机模拟：算法与分析》，第57卷，Springer Science & Business Media。Aune, E.、Eidsvik, J. 和 Pokern, Y.（2013）。高维高斯分布抽样的迭代数值方法，《Statistics and Computing》23(4)：501–521。Dietrich, C. 和 Newsam, G. N.（1997）。通过协方差矩阵的循环嵌入快速且精确地模拟平稳高斯过程，《SIAM Journal on Scientific Computing》18(4)：1088–1107。Diggle, P. J. 和 Ribeiro Jr, P. J.（2007）。《基于模型的地质统计学》，Springer统计学丛书，Springer，纽约。Gel, Y.、Raftery, A. E. 和 Gneiting, T.（2004）。经过校准的概率中尺度天气场预报：地质统计输出扰动法，《Journal of the American Statistical Association》99(467)：575–583。
Giles, M. B.（2015）。多层蒙特卡罗方法，《Acta Numerica》24：259–328。
Glasserman, P.（2004）。《金融工程中的蒙特卡罗方法》，Springer，纽约。
Glasserman, P. 和 Staum, J.（2003）。模拟时间步之间的资源分配，《Operations Research》51(6)：908–921。Golub, G. H. 和 Van Loan, C. F.（2013）。《矩阵计算》，第四版，JHU Press，巴尔的摩。Hastie, T.、Tibshirani, R. 和 Friedman, J.（2009）。《统计学习要素：数据挖掘、推断与预测》，Springer Science & Business Media，纽约。
Huang, D.、Jiang, F.、Li, K.、Tong, G. 和 Zhou, G.（2022）。尺度化主成分分析：一种新的降维方法，《Management Science》68(3)：1678–1695。Hull, J.（2014）。《期权、期货及其他衍生品》，第9版，Prentice-Hall，Upper Saddle River, NJ。Jamshidian, F. 和 Zhu, Y.（1996）。情景模拟：理论与方法，《Finance and Stochastics》1(1)：43–67。
Kahal´e, N.（2019）。高维高斯向量的高效模拟，《Mathematics of Operations Research》44(1)：58–73。Kahal´e, N.（2020）。蒙特卡罗模拟的随机降维，《Management Science》66(3)：1421–1439。

Kahal´e, N.（2022）。马尔可夫链的无偏时间平均估计量，arXiv预印本 arXiv:2209.09581。Rue, H.（2001）。高斯马尔可夫随机场的快速抽样，《皇家统计学会杂志：B辑（统计方法学）》63(2)：325–338。Russo, D. 和 Van Roy, B.（2014）。通过后验抽样学习优化，《运筹学数学》39(4)：1221–1243。Russo, D. 和 Van Roy, B.（2016）。汤普森抽样的信息论分析，《机器学习研究杂志》17(68)：1–30。Stein, M. L.（2002）。分数布朗曲面的快速且精确模拟，《计算与图形统计学杂志》11(3)：587–599。Wood, A. T. 和 Chan, G.（1994）。$[0,1]^d$ 中的平稳高斯过程模拟，《计算与图形统计学杂志》3(4)：409–432。