arXiv:2304.07416v1 [math.FA] 14 Apr 2023

绝对弱拓扑下的格罗滕迪克紧性原理

Geraldo Botelho*、Jos´e Lucas P. Luiz 和 Vin´ıcius C. C. Miranda†

摘要

我们证明以下结果：(i) 巴拿赫格中的每个绝对弱紧集都是绝对弱序列紧的。(ii) 若 E 可分，或 $B_{E^{**}}$ 绝对弱* 紧，则 (i) 的逆命题成立。(iii) 巴拿赫格中的每个绝对弱紧子集都包含于某个绝对弱零序列的闭凸包中，当且仅当该巴拿赫格具有正 Schur 性质。文中还给出了例子及其应用。

1 引言与背景

格罗滕迪克在 [18, p.112]中证明的紧性原理指出，巴拿赫空间中的每个范数紧子集都包含于某个范数零序列的闭凸包中。在 [13], 中，作者研究了这一原理关于弱拓扑的一个版本，并证明了以下重要结果：巴拿赫空间中的每个弱紧子集都包含于某个弱零序列的闭凸包中，当且仅当该巴拿赫空间具有舒尔性质（即弱零序列都是范数零序列）。他们证明中困难的部分使用了基本序列技巧。后来， [19] 中又出现了采用算子论方法的另一种证明。正如预期，针对不同拓扑的格罗滕迪克型紧性原理也得到了研究。例如，P. N. Dowling 和 D. Mupasiri [15] 证明了关于 Mackey 对偶拓扑的格罗滕迪克紧性原理。关于格罗滕迪克紧性原理的不同视角，还可参见 [7] 和 [14]。

在巴拿赫格理论中，与序结构相关的拓扑起着核心作用。其中最广为人知的或许是巴拿赫格 E 上的绝对弱拓扑 $|\sigma|(E, E^*)$，它介于弱拓扑与范数拓扑之间。众所周知，弱拓扑与绝对弱拓扑仅在有限维巴拿赫格上重合。这些拓扑下的紧集（以及序列紧集）通常也各不相同（参见例 2.5）。本文的主要目的是证明一条格罗滕迪克紧性

*本研究由 Fapemig 项目 PPM-00450-17 资助。

†本研究由 CNPq 项目 150894/2022-8 资助。2020年数学主题分类：46B42、46B40、46A50。关键词：巴拿赫格、绝对弱紧性、绝对弱序列紧性、正 Schur 性质。

原理，适用于弱绝对拓扑。舒尔性质的格对应概念是正 Schur 性质（即正的弱零序列都是范数零序列）。因此，考虑到 [13, Theorem 1], 中证明的弱紧性原理，若将其中的弱拓扑替换为绝对弱拓扑，那么自然也应将舒尔性质替换为正 Schur 性质。因此，我们从一开始就尝试证明：巴拿赫格具有正 Schur 性质，当且仅当它的每个绝对弱紧子集都包含于某个绝对弱零序列的闭凸包中。

在证明主要结果的过程中，我们发现，关于巴拿赫空间弱拓扑的一些广为人知的结果，常用于证明紧性原理，但对于巴拿赫格上的绝对弱拓扑，却没有已知的对应结果。因此，我们不得不为绝对弱拓扑证明弱拓扑下已知结果的格版本。正如该领域的专家所知，埃伯莱因–施穆利安定理的两个推论（巴拿赫空间中的弱紧性与弱序列紧性等价）便是这类结果。人们已在巴拿赫格的不同拓扑下研究了埃伯莱因–施穆利安型结果；一项非常近期的进展见于 [20, 第 8]节。但我们未能找到有关绝对弱拓扑的这方面研究。在第2节中，我们证明施穆利安定理在一般情形下成立：巴拿赫格中的绝对弱紧子集是绝对弱序列紧的（参见定理 2.4）。由于埃伯莱因定理通常通过应用 Alaoglu 定理来证明，我们考察了绝对弱拓扑下 Alaoglu 定理的类似结果是否成立。最终我们证明情况并非如此（参见命题 2.6 和例 2.7）。因此，我们证明了一个部分埃伯莱因定理：如果 E 可分，或者 E^{**} 的闭单位球是绝对弱 *- 紧的，那么巴拿赫格 E 中的绝对弱序列紧子集就是绝对弱紧的（参见定理 2.9）。文中还给出了若干非可分巴拿赫格的例子，其中 E^{**} 的闭单位球是绝对弱*-紧的。

虽然定理 2.9 只是埃伯莱因定理的一个部分版本，但我们在第3节中设法克服了这一缺陷。最终，我们按照一开始的设想，证明了绝对弱拓扑下的格罗滕迪克紧性原理（参见定理 3.5）。值得一提的是，我们在引理 3.4 中单独提取出的 [13, 定理1], 证明中的一个关键部分，在我们的证明中也发挥了重要作用。作为应用，我们得到了对偶正舒尔性质的两种刻画，将其与绝对弱* 拓扑联系起来。

关于巴拿赫格的背景知识，读者可参阅 [3, 24]；关于巴拿赫空间理论，可参阅 [16]。本文中，X、Y表示巴拿赫空间，E、F表示巴拿赫格。我们用 B_X 表示 X 的闭单位球，用 $\underline{X}^*$ 表示其拓扑对偶。对于子集 $A \subset X$，co(A) 表示 A的闭凸包。按照惯例，巴拿赫空间 X 上的弱拓扑记为 $\sigma(X, X^*)$ 或 ω，而 X^*上的弱* 拓扑记为 $\sigma(X^*, X)$ 或 ω^*。

ˇ 2 Eberlein–Šmulian 定理

对于巴拿赫格 E 及其拓扑对偶 E^* 中的非空子集 A，绝对弱拓扑 $|\sigma|(E,A)$ 是 E 上的局部凸实拓扑，由格半范数族 $\{p_{x^*}: x^* \in A\}$ 生成，其中 $p_{x^*}(x) = |x^*|(|x|)$ 对所有 $x \in E$ 和$x^* \in A$均成立。对于所有 $\varepsilon > 0$和 x_1^*，.....，$x_n^* \in A$，令

$$V(0; |x_1^*|, \ldots, |x_n^*|; \varepsilon) := \{x \in E : |x_i^*|(|x|) < \varepsilon, i = 1, \ldots, n\}.$$

所有此类集合构成了 $|\sigma|(E,A)$ 的零邻域基。此外，由属于 A 的泛函所确定的 E 上的弱拓扑 $\sigma(E,A)$ 包含于 $|\sigma|(E,A)$ 中。本文关注的情形是 $A = E^*$。由 [2, 定理 2.36 和 2.38] 可知，弱拓扑 $\sigma(E,E^*)$ 与绝对弱拓扑 $|\sigma|(E,E^*)$ 仅在有限维巴拿赫格上重合。自然，这一显著事实引出了一个问题：巴拿赫空间中弱拓扑的已知结果是否也有类似结论适用于巴拿赫格上的绝对弱拓扑？本节将针对 Eberlein–Šmulian 定理探讨这一问题。

我们首先证明，巴拿赫子格上的绝对弱拓扑与相应的诱导拓扑重合。用 $\tau|_Y$ 表示拓扑空间 X 中子集 Y 上由 X 的拓扑 τ 诱导的拓扑。

引理 2.1. 对于巴拿赫格 E 的巴拿赫子格 F， F 上的绝对弱拓扑与 E 的绝对弱拓扑所诱导的拓扑一致，也就是说，$(F, |\sigma|(F,F^*)) = (F, |\sigma|(E,E^*)|_F)$。

证明。只需验证其中一个拓扑的零点基本邻域也属于另一个拓扑。一方面，应用正泛函的哈恩-巴拿赫型延拓定理（见 [22, 推论 1.3]）；另一方面，只需利用正泛函在子格上的限制仍是正泛函这一事实。 □

通常，若巴拿赫格 E 中的网 $(x_\alpha)_\alpha$ 关于绝对弱拓扑收敛，即存在 $x \in E$ 使得 $x_\alpha \overset{|\sigma|(E,\ E^*)}{\longrightarrow} x$，则称该网绝对弱收敛。特别地，若 $x_\alpha \overset{|\sigma|(E,\ E^*)}{\longrightarrow} 0$，则称 $(x_\alpha)_\alpha$ 绝对弱零。以下事实将不再特别说明而直接使用。

注 2.2. (i) $x_\alpha \overset{|\sigma|(E,\ E^*)}{\longrightarrow} x$ 属于 E，当且仅当对于每个 $0 \le x^* \in E^*$，都有 $x^*(|x_\alpha - x|) \longrightarrow 0$。因此，每个绝对弱收敛序列都弱收敛到同一个元素。

(ii) 巴拿赫格中的网 $(x_\alpha)_\alpha$ 是绝对弱零，当且仅当 $(|x_\alpha|)_\alpha$ 是弱零。特别地，巴拿赫格中的正网是绝对弱零，当且仅当它是弱零。

(iii) 巴拿赫格中的不交序列是绝对弱零，当且仅当它是弱零。

(i) 和 (ii) 由绝对弱拓扑的定义直接得出。对于 (iii)，若 $(x_n)_n$ 是巴拿赫格 E 中一个不相交的弱零序列，那么 $|x_n| \xrightarrow{\omega} 0$ 根据 [29, 命题 1, 3], 因此 $(x_n)_n$ 是绝对弱零序列。

若巴拿赫格 E 的子集 K 在拓扑 $|\sigma|(E,E^*)$ 下是紧的（分别为序列紧的），则称其为绝对弱紧（分别为绝对弱序列紧）；或者简言之，称其为 $|\sigma|(E,E^*)$-紧的（分别称其为 $|\sigma|(E,E^*)$-序列紧的），也就是说， K 中的每个序列都有一个子列绝对弱收敛到 K 中的某个元素。显然，巴拿赫格的每个绝对弱紧子集都是弱紧的。此外，作为 Eberlein–Šmulian 定理的推论，巴拿赫格的每个绝对弱序列紧子集也都是弱紧的。

引理 2.3. 若可分巴拿赫格 E 的子集 K 是绝对弱紧或绝对弱序列紧的，则绝对弱拓扑 $|\sigma|(E,E^*)$ 在 K 上可度量化。

证明. 令 $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ 是 E 的稠密子集。由哈恩–巴拿赫定理，我们可以取 $D=\{x_n^* : n\in\mathbb{N}\}\subset E^*$，使得 $\|x_n^*\|=1$ 且对于每个 $n\in\mathbb{N}$，都有 $x_n^*(x_n)=\|x_n\|$。结合集合 $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ 的稠密性以及泛函 $(x_n^*)_n$ 的这些性质，容易验证有界线性算子

$$T\colon E\longrightarrow \ell_\infty\ ,\ T(x)=(x_n^*(x))_n,$$

是等距嵌入。考虑由半范数序列 $\{p_{x_n^*} : n\in\mathbb{N}\}$ 生成的局部凸实拓扑 $|\sigma|(E,D)$，其中对于每个 $x\in E$，半范数由 $p_{x_n^*}(x)=|x_n^*|(|x|)$ 给出。若 $x\in E$ 满足对于每个 $n\in\mathbb{N}$，都有 $p_{x_n^*}(x)=0$，则

$$|x_n^*(x)|\le |x_n^*|(|x|)=p_{x_n^*}(x)=0$$

对每个 $n\in\mathbb{N}$，因此 $\|x\|=\|T(x)\|=0$。由 [1, 引理 5.76] 可知，$|\sigma|(E,D)$ 是 E 上由半范数序列 $\{p_{x_n^*} : n\in\mathbb{N}\}$ 生成的豪斯多夫局部凸拓扑。因此，根据 [1, 引理 5.75]，我们得出 $|\sigma|(E,D)$ 是可度量化的。此外，由于 $D\subset E^*$，显然 $|\sigma|(E,D)\subset|\sigma|(E,E^*)$，故恒等映射 $Id\colon (K,|\sigma|(E,E^*))\longrightarrow (K,|\sigma|(E,D))$ 是连续的。

假设 K 是绝对弱紧的，由 [1, 定理 2.36] 可知，Id 是一个同胚，因为 $(K,|\sigma|(E,E^*))$ 是紧的，而 $(K,|\sigma|(E,D))$ 是豪斯多夫的。因此， $|\sigma|(E,D)$ 和 $|\sigma|(E,E^*)$ 在 K 上重合，由此可知 $(K,|\sigma|(E,E^*))$ 是可度量化的。

现在假设 K 是绝对弱序列紧的。为了证明 Id 是同胚，令 F 为 K 的 $|\sigma|(E,E^*)|_K$-闭子集，并令 $(x_n)_n\subset F$ 满足：对某个 $x\in K$，有 $x_n \overset{|\sigma|(E,E^*)}{\longrightarrow} x$。由于 $F\subset K$，该假设推出存在 $(x_n)_n$ 的子列 $(x_{n_k})_k$ 以及 $y\in K$，使得 $x_{n_k}\overset{|\sigma|(E,E^*)}{\longrightarrow} y$。由于 F 是 $|\sigma|(E,E^*)$- 闭的， $y\in F$。此外，由于 $D\subset E^*$， $x_{n_k}\overset{|\sigma|(E,D)}{\longrightarrow} y$，从而得到 $x=y$。这证明了 $Id(F)=F$ 是序列 $|\sigma|(E,D)$-闭的；又由于 $|\sigma|(E,D)$ 是可度量化的，我们得到 F 是 $|\sigma|(E,D)$-闭的。因此， Id 是同胚。由此可知， $|\sigma|(E,D)|_K$ 和 $|\sigma|(E,E^*)|_K$ 在 K 上重合，从而我们得出 $(K,|\sigma|(E,E^*))$ 是可度量化的。 □

˘˘ 现在我们可以证明 Eberlein–Šmulian 定理中关于绝对弱拓扑的施穆利安部分了。

定理 2.4. 巴拿赫格的绝对弱紧子集是绝对弱序列紧的。

证明。设 K 是巴拿赫格 E 中的一个绝对弱紧子集。给定 K 中的一个序列 $(x_n)_n$，令 $X = \overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$。由 [3, 习题 9，第 204] 页可知，存在一个包含 X 的可分巴拿赫子格 $F \subset E$。由于 F 上的绝对弱拓扑 $|\sigma|(F, F^*)$ 与 E 在 F 上诱导的绝对弱拓扑 $|\sigma|(E, E^*)$ 一致（命题 2.1），因此 $K \cap F$ 是 $|\sigma|(F, F^*)$-紧的，所以由引理 2.3 可知，$(K \cap F, |\sigma|(F, F^*))$ 可度量化。由于 $(x_n)_n$ 包含于 $K \cap F$，存在 $(x_n)_k$ 的一个子列 $(x_{n_k})_k$ 和一个元素 $x \in K \cap F$，使得 $x_{n_k} \longrightarrow x$ 关于拓扑 $|\sigma|(F, F^*)$ 收敛。再次运用命题 2.1，可得在 $\tau(E^*)$ 下 $x_{n_k} \overset{|\sigma|}{\longrightarrow} x$ 收敛，从而完成证明。

□

作为第一个应用，我们给出一个弱紧集的例子，它既不是绝对弱紧的，也不是绝对弱序列紧的。

例 2.5. 众所周知，由拉德马赫函数构成的序列 $(r_n)_n$ 在 $L_1[0,1]$ 中是弱零的。因此，$K := \{r_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ 是 $L_1[0,1]$ 的一个弱紧子集。假设 K 是绝对弱序列紧的。在这种情况下，存在 $(r_n)_n$ 的一个子列 $(r_{n_j})_j$ 以及 $f \in L_1[0,1]$，使得 $r_{n_j} \overset{|\sigma|(E,E^*)}{\longrightarrow} f$。由于弱拓扑包含于 $|\sigma|(E, E^*)$，子列 $(r_{n_j})_j$ 弱收敛到 f。但是，$(r_{n_j})_j$ 作为弱零序列的子列仍是弱零的，因此 $f = 0$，也就是说 $r_{n_j} \overset{|\sigma|(E,E^*)}{\longrightarrow} 0$。由注 2.2(ii) 可知，$(|r_{n_j}|)_j$ 是弱零的。然而，对每个 $j \in \mathbb{N}$，$|r_{n_j}|$ 都是恒等于 1 的常值函数，所以 $(|r_{n_j}|)_j$ 弱收敛到恒等于 1 的常值函数。这一矛盾表明，$(r_n)_n$ 不存在 $|\sigma|(E, E^*)$-收敛子列，从而证明 K 不是绝对弱序列紧的。定理 2.4 保证 K 不是绝对弱紧的。

˘ Eberlein–Šmulian 定理中 Eberlein 部分的通常证明，会用到任意巴拿赫空间的对偶的闭单位球在弱*拓扑下的紧性（Alaoglu 定理）。这促使我们考虑巴拿赫格的对偶 E^* 上的绝对弱* 拓扑 $|\sigma|(E^*, E)$；显然，它是由格半范数族 $\{q_x : x \in E\}$ 在 E^* 上生成的局部凸实拓扑，其中对于所有 $x^* \in E^*$ 和 $x \in E$，$q_x(x^*) = |x^*|(|x|)$。特别地，我们有

$$\sigma(E^*, E) \subset |\sigma|(E^*, E) \subset |\sigma|(E^*, E^{**}).$$

恰好 相反，绝对弱* 拓扑并不存在 Alaoglu 定理：

命题 2.6。设 E 是一个巴拿赫格。若 B_{E^*} 在绝对弱* 拓扑下紧，则 E 具有序连续范数。

证明。由于 $\sigma(E^*, E) \subset |\sigma|(E^*, E)$，恒等算子

$$Id : (B_{E^*}, |\sigma|(E^*, E)) \longrightarrow (B_{E^*}, \sigma(E^*, E))$$

是连续的。由于假设 B_{E^*} 是 $|\sigma|(E^*, E)$-紧的，且弱* 拓扑 $\sigma(E^*, E)$ 是豪斯多夫的，由 [1, 定理 2.36] 可得，Id 是一个同胚。我们

现在断言 $(E^*, |\sigma|(E^*, E))^* = E$。事实上，一方面，给定一个弱* 连续线性泛函 $x^{**}\colon E^* \longrightarrow \mathbb{R}$，对于 $\mathbb{R}$ 的每个开子集 U，我们有

$$(x^{**})^{-1}(U) \in \sigma(E^*, E) \subset |\sigma|(E^*, E),$$

这表明 x^{**} 是 $|\sigma|(E^*, E)$-连续的。另一方面，如果 $x^{**}\colon E^* \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个 $|\sigma|(E^*, E)$-连续线性泛函，那么 x^{**} 在 B_{E^*} 上的限制也同样是 $|\sigma|(E^*, E)$-连续的。再次利用包含关系 $\sigma(E^*, E) \subset |\sigma|(E^*, E)$，可得 $x^{**}|_{B_{E^*}}$ 是弱*连续的。根据 [16, 推论 3.94]，x^{**} 是弱*连续的。这就证明了

$$(E^*, |\sigma|(E^*, E))^* = (E^*, \sigma(E^*, E))^* = E,$$

最后一个等式对于巴拿赫空间是众所周知的。因此，$|\sigma|(E^*, E)$是E^* 上与对偶对 $< E, E^* >$相容的拓扑，因此 E 具有序连续范数（见 [1,定理 8.60 和 9.22]）。

□

继续之前，我们先来看一下：具有序连续范数的巴拿赫格 E，并不足以使 B_{E^*} 成为 E^* 的绝对弱*紧子集：

例 2.7。设 $1 < p < \infty$。由于 $L_p[0, 1]$ 是自反的，因此它具有序连续范数。利用拉德马赫序列 $(r_n)_n$ 在 $L_p[0, 1]$ 中是弱零的这一事实，我们采用例 2.5 中使用的相同论证，得到 $(r_n)_n$ 没有绝对弱零子列。因此，$B_{L_p[0,1]}$ 不是绝对弱序列紧的。由定理 2.4 可知，$B_{L_p[0,1]}$ 不是绝对弱紧的。由于在自反巴拿赫格上，绝对弱拓扑与绝对弱* 拓扑一致，我们得出结论：$B_{L_p[0,1]}$ 不是绝对弱* 紧的。

我们将证明定理 2.4 的一个部分逆命题，也就是 Eberlein–Šmulian 定理的一个部分 Eberlein 结论。我们还需要一个工具。

引理 2.8. 设 $J\colon E \longrightarrow E^{**}$ 是从一个巴拿赫格到其双对偶的典范嵌入。那么

$$J\colon (E, |\sigma|(E, E^*)) \longrightarrow (J(E), |\sigma|(E^{**}, E^*))$$

是一个同胚。

证明. 由于 J 是两个拓扑向量空间之间的线性映射，只需证明 J及其逆映射 $J^{-1}\colon J(E) \longrightarrow E$在给定拓扑下于零点连续。对于 E中的一个网 $(x_\alpha)_\alpha$，我们有

$$x_\alpha \overset{|\sigma|(E,E^*)}{\longrightarrow} 0 \iff J(|x_\alpha|)(|x^*|) = |x^*|(|x_\alpha|) \longrightarrow 0 \text{ for every } x^* \in E^*.$$

由典范嵌入是格同态这一事实（见 [24, 命题 1.4.5]），我们得到

$$x_\alpha \overset{|\sigma|(E,E^*)}{\longrightarrow} 0 \iff |J(x_\alpha)|(|x^*|) \longrightarrow 0 \text{ for every } x^* \in E^* \iff J(x_\alpha) \overset{|\sigma|(E^{**},E^*)}{\longrightarrow} 0,$$

至此，证明完成。

□

定理 2.9. 设 K 是巴拿赫格 E 的一个绝对弱序列紧子集。如果 E 可分，或者 $B_{E^{**}}$ 是绝对弱 * 紧的，那么 K 是绝对弱紧的。

证明。若 E 是可分巴拿赫格，则由引理 2.3以及紧性与序列紧性在可度量化空间上等价这一事实可得结论。

假设 $B_{E^{**}}$ 是一个 $|\sigma|(E^{**},E^*)$-紧集。首先强调， K 是范数有界的。事实上，若 K 不是范数有界的，则存在一个序列$(x_n)_n$ 属于 K，使得对每个 $n\in\mathbb{N}$都有 $\|x_n\|\geq n$ 。由 K的绝对弱序列紧性，存在$(x_{n_k})_k$ ，它是$(x_n)_n$ 的一个子列，且存在 $x\in K$ 使得 $x_{n_k}\overset{|\sigma|(E,E^*)}{\longrightarrow} x$，即 $|x_{n_k}|\overset{\omega}{\longrightarrow}|x|$。这意味着$(|x_{n_k}|)_k$是有界序列，这与对每个 $k\in\mathbb{N}$都有 $\||x_{n_k}|\|=\|x_{n_k}\|\geq k$ 矛盾。由此可知 K 是范数有界的。现在，若 $J\colon E\longrightarrow E^{**}$ 表示典范嵌入，则 $J(K)$是E^{**}的范数有界子集，因此存在 $C>0$ 使得 $J(K)\subset C\cdot B_{E^{**}}$。另一方面， $B_{E^{**}}$ 的 $|\sigma|(E^{**},E^*)$紧性表明， $C\cdot B_{E^{**}}$ 同样是 $|\sigma|(E^{**},E^*)$-紧的。因此，$J(K)$ $\underline{|\sigma|(E^{**},E^*}$)是 $|\sigma|(E^{**},E^*)$-紧的。设给定 $x^{**}\in J(K)_{\underline{|\sigma|(E^{**},E^*}})$。由 $\sigma(E^{**},E^*)\subset|\sigma|(E^{**},E^*)$ 这一事实，我们知道 $x^{**}\in J(K)_{\sigma(E^{**},E^*)}$。令$(x_n)_n\subset \underline{K\text{为与}}$ x^{**}相关联、由Whitley引理（见引理 3.39]）给出的序列。由于 K是绝对弱序列紧的，存在$(x_{n_k})_k$ ，它是$(x_n)_n$ 的一个子列，且存在$x\in K$ 使得 $x_{n_k}\overset{|\sigma|(E,E^*)}{\longrightarrow} x$。这意味着 x 是$\{x_n$ 的弱聚点：$n\in\mathbb{N}\}$；因此，由Whitley引理可得， $x^{**}=J(x)\in J(K)$。我们刚刚证明了 $J(K)=J(K)_{|\sigma|(E^{**},E^*)}$，由此可知 $J(K)$是 $|\sigma|(E^{**},E^*)$-紧的。由引理 2.8，我们得出 K 是绝对弱紧的。 ——

□

为了说明上述定理在不可分情形下的实用性，我们应举出一些非可分巴拿赫格的例子，使得 E 它们 $B_{E^{**}}$ 是绝对弱* 紧的。

命题 2.10. 设 E 是一个巴拿赫格，且 E^* 和 E^{**} 具有序连续范数， E^{**} 是原子的。那么 $B_{E^{**}}$ 是绝对弱* 紧的。特别地，对于每个自反原子巴拿赫格， $B_{E^{**}}=B_E$ 都是绝对弱* 紧的。

证明. 设（x_α^{**}）$_\alpha$ 是 $B_{E^{**}}$中的一个网。由 Alaoglu 定理，存在（x_β^{**}）$_\beta$，它是（x_α^{**}）$_\alpha$ 的一个子网，并存在一个元素 $x^{**}\in B_{E^{**}}$ ，使得 $x_\beta^{**}\overset{\omega^*}{\longrightarrow}x^{**}$ 属于 E^{**}。特别地，（$x_\beta^{**}-x^{**}$）$\overset{\omega^*}{\longrightarrow}0$ 属于 E^{**}。关于 E^* 和 E^{**} 的假设，根据 [20, 定理 8.4 和 8.1]，可推出（$x_\beta^{**}-x^{**}$）$\overset{|\sigma|(E^{**},E^*)}{\longrightarrow}0$，也就是说， $x_\beta^{**}\overset{|\sigma|(E^{**},E^*)}{\longrightarrow}x^{**}$。因此， $B_{E^{**}}$ 中的每个网都有一个绝对弱*收敛子网，其极限属于 $B_{E^{**}}$，这意味着 $B_{E^{**}}$ 是$|\sigma|$（E^{**}， E^*）-紧的。第二个断言由自反巴拿赫格具有序连续范数这一事实得出。

□

例 2.11. 设 Γ 是一个不可数集，且 $1<p<\infty$。那么 $\ell_p(\Gamma)$ 是一个不可分的自反原子巴拿赫格（关于不可分性，参见 [16, p. 23]）。由上面的命题可知，

$$\{\ell_p(\Gamma):1<p<\infty\text{ and }\Gamma\text{ is uncountable}\}$$

这是一大类非可分巴拿赫格 E，其中 $B_E=B_{E^{**}}$ 在绝对弱* 意义下是紧的。

3 格罗滕迪克紧性原理

正如引言中所述，本节旨在证明：将舒尔性质替换为正 Schur 性质后，巴拿赫空间弱拓扑下的格罗滕迪克紧性原理的一个类似结果，也适用于巴拿赫格上的绝对弱拓扑。我们将运用上一节的两个主要定理。作为应用，我们通过绝对弱* 拓扑，给出对偶正舒尔性质的一种新刻画。

回顾一下，若巴拿赫格 E 中的正（或等价地，不交或正不交）弱零序列在范数下趋于零，则称其具有正 Schur 性质。这一性质由 W. Wnuk [27, 28] 和 F. R¨abiger [25] 提出，并已得到众多专家的广泛研究；近期进展可见例如 [5, 6, 8, 9, 10, 26]。

正 Schur 性质与绝对弱拓扑之间的以下联系将会用到。证明可由备注 2.2 中陈述的事实直接得出。

命题 3.1. 对于巴拿赫格 E，以下条件等价：
(a) E 具有正 Schur 性质。(b) E 中的绝对弱零序列在范数下趋于零。
(c) E 中的正绝对弱零序列在范数下趋于零。(d) E 中的正不交绝对弱零序列在范数下趋于零。(e) E 中的不交绝对弱零序列在范数下趋于零。

现在我们需要一些预备引理。

引理 3.2. 对于巴拿赫格 E 中的每个绝对弱零序列 $(x_n)_n$，集合

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n : a_n \in \mathbb{R} \text{ for every } n \in \mathbb{N} \text{ and } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq 1\right\}$$

是绝对弱序列紧的，因此是范数闭的。

证明。称 K 为我们需要证明具有绝对弱序列紧性的集合。设 $(z_k)_k$ 是 K中的一个序列。对每个 $k \in \mathbb{N}$，存在一个实数序列 $(a_{k,n})_{n\infty}$ ∞，使得 $\sum |a_{k,n}| \leq 1$ 且 $z_k = \sum a_{k,n}x_{n_0}$ 根据标准的对角线论证（参见，$n=1$ $n=1$例如 [4, 第 325], [12, 页、 621] 第 [21, 页或第 233]页），我们可以找到 $\mathbb{N}$ 的一个子列 $(k_j)_j$ 以及一个∞序列 $(a_n)_n$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$，$\lim_{j\to\infty} a_{k_j,n} = a_n$，且 $\sum_{n=1} |a_n| \leq 1$。我们断言，$z_{k_j} \xrightarrow{|\sigma|(E,E^*)} z = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$。给定 $\varepsilon > 0$ 和 $0 \leq x^* \in E^*$，由于 $x_n \xrightarrow{|\sigma|(E,E^*)} 0$，存在$N_0 \in \mathbb{N}$，使得对每个 $n \geq N_0$，$x^*(|x_n|) < \varepsilon/4$。另一方面，由于对每个 $n \in \mathbb{N}$，$a_{k_j,n} \xrightarrow{j} a_n$，对每个 $n = 1, \dots N_0$，存在 $j_n \in \mathbb{N}$，使得对每个 $j \geq j_n$，$|a_{k_j,n} - a_n| < \varepsilon/(2N_0L)$，其中 $L = \sup_{n\in\mathbb{N}} x^*(|x_n|)$。因此，当 $j \geq \max\{j_1, \dots, j_{N_0}\}$时，我们有

$$x^*(|z_{k_j} - z|) = x^*\left(\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_j,n}x_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right|\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{n=1}^{N_0} |a_{k_j,n} - a_n|\, x^*(|x_n|) + \sum_{n=N_0+1}^{\infty} |a_{k_j,n} - a_n|\, x^*(|x_n|) \\
&< \sum_{n=1}^{N_0} \frac{\varepsilon}{2N_0 L} x^*(|x_n|) + \frac{\varepsilon}{4}\left(\sum_{n=N_0+1}^{\infty} |a_{k_j,n}| + \sum_{n=N_0+1}^{\infty} |a_n|\right) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

这表明 $z_{k_j} - z \overset{|\sigma|}{\underset{(E,E^*)}{\longrightarrow}} 0$，因此 $z_{k_j} \overset{|\sigma|}{\underset{(E,E^*)}{\longrightarrow}} z$，如所要证明的。由于 $z \in K$，这就证明了 K 是绝对弱序列紧的。由包含关系 $\sigma(E,E^*) \subset |\sigma|(E,E^*)$，可知 K 是弱序列紧的。容易看出，绝对弱序列紧集是范数闭的。 □

引理 3.3. 巴拿赫格中任意绝对弱零序列的闭凸包都是绝对弱紧的。

证明。设 $x_n \overset{|\sigma|(E,E^*)}{\longrightarrow} 0$ 是巴拿赫格 E。集合

$$
K := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n : a_n \in \mathbb{R} \text{ for every } n \in \mathbb{N} \text{ and } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq 1 \right\}
$$

由引理 3.2 可知是绝对弱序列紧的。令 $C := \mathrm{co}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$，并用 $\tau_{\|\cdot\|}$ 表示 E 的范数拓扑，我们有

$$
\overline{C} := \overline{C}^{\tau_{\|\cdot\|}} \subset \overline{C}^{|\sigma|(E,E^*)} \subset \overline{C}^{\sigma(E,E^*)} = \overline{C},
$$

其中前两个包含关系由 $\sigma(E,E^*) \subset |\sigma|(E,E^*) \subset \tau_{\|\cdot\|}$ 得出，最后一个则由 Mazur 定理得出（注意 C 是凸集）。因此，$\overline{C} = \overline{C}^{|\sigma|(E,E^*)}$，所以 $\overline{C}$ 是 E 的一个 $|\sigma|(E,E^*)$-闭子集。注意，K 是范数闭的（引理 3.2）、凸的（显然），且包含 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$（显然）。由此可得 $\overline{C} = \mathrm{co}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset K$。总之，$\overline{C}$ 是 E 的一个 $|\sigma|(E,E^*)$-闭子集，并包含于 $|\sigma|(E,E^*)$-序列紧集 K 中。因此，$\overline{C}$ 中的每个序列都有一个子列，该子列在 $E(E^*)$ 下收敛到 $\overline{C}$ 中的某个元素。

令 $X = \overline{\mathrm{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$，由 [3, 习题 9，p. 204] 可知，存在一个包含 X 的 E 的可分巴拿赫子格 F。下面证明，$\overline{C}$ 中的每个序列都有一个子列，该子列在 $|\sigma|(F,F^*)$ 意义下收敛到 $\overline{C}$ 中的某个元素。事实上，给定 $\overline{C}$ 中的 $(z_n)_n$，由证明的第一部分可知，存在 $(z_n)_n$ 的子列 $(z_{n_k})_k$ 和 $z \in \overline{C}$，使得 $z_{n_k} \overset{|\sigma|}{\underset{(E,E^*)}{\longrightarrow}} z$，因此对每个 $x^* \in E^*$，都有 $|x^*|(|z_{n_k} - z|) \longrightarrow 0$。对于任意 $y^* \in F^*$，我们可以将 $|y^*|$ 延拓为一个正线性泛函 $x^* \in E^*$ [22, Corollary 1.3]，，于是 $|y^*|(|z_{n_k} - z|) = |x^*|(|z_{n_k} - z|) \longrightarrow 0$，也就是说，$z_{n_k} \overset{|\sigma|}{\underset{(F,F^*)}{\longrightarrow}} z \in \overline{C}$。这证明了 $\overline{C}$ 是 $|\sigma|(F,F^*)$-序列紧的。由于 F 可分，根据定理 2.9，$\overline{C}$ 是 $|\sigma|(F,F^*)$-紧的。由引理 2.1 可知，$\overline{C}$ 是 $|\sigma|(E,E^*)$-紧的。 □

根据上述推理，$\overline{C} := \overline{C}^{\tau_{\|\cdot\|}} = \overline{C}^{|\sigma|(E,E^*)}$ 对于巴拿赫格 E 的每个凸子集 C。为简便起见，今后我们将记作 $\overline{C}$。

The 下一个引理的证明可在 [13, 定理 1 的证明中找到].

引理 3.4. 在巴拿赫空间中， X 不存在弱零序列 $(x_n)_n$ 和 $(y_n)_n$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\|x_n\| = 1$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[(n \cdot \overline{\text{co}}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})) \cap \frac{1}{n} B_X \right] \subset \overline{\text{co}}(\{y_n : n \in \mathbb{N}\}).$$

事实上，上述引理中的结论是证明 [13, 定理 1] 和 [15, 定理 3] 最困难的部分之一。幸运的是，它也可以用来证明我们的主要结果：

定理 3.5. Banach 格 E 具有舒尔性质，当且仅当 E 的每个绝对弱紧子集都包含于某个绝对弱零序列的闭凸包中。

证明。首先假设 E 具有正 Schur 性质。设 K 是 E 的一个绝对弱紧子集，并设 $(x_n)_n$ 是 K 中的一个序列。由定理 2.4，存在 $\mathbb{N}$ 的一个子列 $(n_k)_k$ 和 $x \in K$，使得 $x_{n_k} \overset{|\sigma|_{(E,\ E^*)}}{\longrightarrow} x$，也就是说，$(x_{n_k} - x)_k$ 是 E 中的一个绝对弱零序列。命题 3.1 给出 $\|x_{n_k} - x\| \longrightarrow 0$，从而证明 K 是范数紧的。由格罗滕迪克紧性原理可知，存在一个范数零序列 $(y_n)_n \subset E$，使得 $K \subset \text{co}(\{y_n : n \in \mathbb{N}\})$。由于绝对弱拓扑包含于范数拓扑，我们有 $(y_n)_n$ 是绝对弱零的。

现在假设 E 的每个 $|\sigma|(E, E^*)$-紧子集都包含于某个 $|\sigma|(E, E^*)$-零序列的 $|\sigma|(E, E^*)$-闭凸包中。假设 E 不具备正 Schur 性质。根据命题 3.1，存在一个 $|\sigma|(E, E^*)$-零序列 $(z_n) \subset E$，但它不是范数零序列。不妨设存在 $\varepsilon > 0$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$都有 $\|z_n\| \geq \varepsilon$。对每个 $n \in \mathbb{N}$取 $x_n = \frac{z_n}{\|z_n\|}$。利用对每个 n都有 $\frac{1}{\|z_n\|} \leq \frac{1}{\varepsilon}$，可知 $(x_n)_n$ 是一个 $|\sigma|(E, E^*)$-零序列，并且对每个 $n \in \mathbb{N}$都有 $\|x_n\| = 1$。定义

$$K_n = (n \cdot \overline{\text{co}}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})) \cap \frac{1}{n} B_E \text{ for each } n \text{ and } K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

每个 K_n 都是 E的闭凸子集，因此 K_n 是 $|\sigma|(E, E^*)$-闭集，且包含于 $|\sigma|(E, E^*)$-紧集 $n \cdot \text{co}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$ 中（引理 3.3）。所以每个 K_n 都是 $|\sigma|(E, E^*)$-紧的。我们声称 K 是 $|\sigma|(E, E^*)$-紧的。事实上，设 $\mathcal{C}$ 是 K的一个 $|\sigma|(E, E^*)$-开覆盖。由于对每个 n都有 $x_n \in K_1$，$(x_n)_n$ 是一个包含于K中的 $|\sigma|(E, E^*)$-零序列，因此 $0 \in \overline{K}^{|\sigma|(E,E^*)}$。于是我们可以取 $U \in \mathcal{C}$，使得 $0 \in U$。由于 U是 $|\sigma|(E, E^*)$-开集且包含 0，它包含于 0 的一个基本 $|\sigma|(E, E^*)$-邻域中，也就是说，存在$\delta > 0$和 x_1^*、.....、 $x_k^* \in (E^*)^+$，使得

$$V(\delta, x_1^*, \ldots, x_k^*) = \{x \in E : x_i^*(|x|) < \delta, \forall i = 1, \ldots, k\} \subset U.$$

固定 $0 < \eta < \frac{\delta}{\text{最大值}_{1 \leq i \leq k} \|x_i^*\|}$，并令 $N_0 \in \mathbb{N}$ 满足：对于每个 $j > N_0$，都有 $\frac{1}{j} < \eta$。我们有

$$K_j \subset \eta B_E \subset V(\delta, x_1^*, \ldots, x_k^*) \subset U$$

对每个 $j > N_0$ 都成立。由于 $K_1 \cup \cdots \cup K_{N_0}$ 是有限个 $|\sigma|(E, E^*)$-紧集的并，因此其自身也是 $|\sigma|(E, E^*)$-紧的，所以我们可以选取 $U_1, \ldots, U_{N_1} \in \mathcal{C}$，使得 $K_1 \cup \cdots \cup K_{N_0} \subset U_1 \cup \cdots \cup U_{N_1}$，由此可得

$$K \subset U_1 \cup \cdots \cup U_{N_1} \cup U.$$

这证明了 K 是 $|\sigma|(E,E^*)$-紧的。根据假设，存在一个 $|\sigma|(E,E^*)$-零序列 $(y_n)_n \subset E$，使得 $K \subset \text{co}(\{y_n : n \in \mathbb{N}\})$。由于 $\overline{(x_n)}_n$ 和 $(y_n)_n$ 尤其是 E 中的弱零序列，引理 3.4 导致矛盾，从而完成证明。

□

自然会想知道对偶正舒尔性质与绝对弱拓扑之间有何联系。回顾 [29]，巴拿赫格 E 具有对偶正舒尔性质（分别地，具有正 Grothendieck 性质），当且仅当其中每个正的弱*零序列 E^* 在范数意义下（分别地，在弱拓扑意义下）收敛于零。这两种性质均由 Wnuk 在 [29] 中引入，并受到许多专家的关注；关于近期进展，请读者参阅 [11, 17, 23, 26]。Wnuk 指出，E 具有对偶正舒尔性质，当且仅当 E 具有正 Grothendieck 性质且 E^* 具有正舒尔性质。结合这一刻画与定理 3.5 和定理 2.4，我们得到绝对弱* 拓扑与对偶正舒尔性质之间的如下联系。

推论 3.6。对于巴拿赫格 E，以下条件等价：
(a) E 具有对偶正舒尔性质。(b) E^* 中的每个绝对弱*零序列都是范数零序列。(c) E 具有正 Grothendieck 性质，并且 E^* 的每个序列绝对弱*-紧子集都包含于某个绝对弱* 零序列的闭凸包中。

证明。(a) $\Rightarrow$ (b) 若 $(x_n^*)_n$ 是 E^*中的绝对弱*零序列，则 $(|x_n^*|)_n$ 是 E^*中的弱*零序列，因此 $\|x_n^*\| = \||x_n^*|\| \longrightarrow 0$。
(b) $\Rightarrow$ (c) 若 $(x_n^*)_n$ 是 E^*中的正弱*零序列，则 $(x_n^*)_n$ 是绝对弱*零序列，因此 $\|x_n^*\| \longrightarrow 0$属于 E^*。特别地，$x_n^* \xrightarrow{\omega} 0$，这证明了 E 具有正 Grothendieck 性质。现在，设 K 是 E^*的一个 $|\sigma|(E^*,E)$-序列紧子集。给定 $(x_n^*)_n \subset K$，取 $(x_{n_k})_k$ 使得 $x_{n_k}^* \xrightarrow{|\sigma|(E^*,E)} x^*$，也就是说，$(x_{n_k}^* - x^*)_k$是 E^*中的一个 $|\sigma|(E^*,E)$-零序列。由假设，$\|x_{n_k}^* - x^*\| \longrightarrow 0$，因此 K 是范数紧的。根据格罗滕迪克紧性原理，存在 E^* 中的一个范数零序列 $(y_n^*)_n$，使得 $K \subset \text{co}(\{y_n^* : n \in \mathbb{N}\})$。我们得证，因为 $y_n^* \xrightarrow{|\sigma|(E^*,E)} 0$。
(c) $\Rightarrow$ (a) 由于 E 具有正 Grothendieck 性质，根据 [29]，剩下需要证明的就是 E^* 具有正 Schur 性质。为此，设 K 是 E^*的一个绝对弱紧子集。根据定理 2.4，K 是绝对弱序列紧的，因此 K 是绝对弱* 序列紧的。根据假设，存在一个绝对弱* 零序列 $(y_n^*)_n$，它属于 E^*，使得 $K \subset \text{co}(\{y_n^* : n \in \mathbb{N}\})$。由 $y_n^* \xrightarrow{|\sigma|(E^*,E)} 0$ 属于E^* 可得 $|y_n^*| \xrightarrow{\omega^*} 0$ 属于 E^*。由于 E 具有正 Grothendieck 性质，$|y_n^*| \xrightarrow{\omega} 0$，因此 $y_n^* \xrightarrow{|\sigma|(E,E^*)} 0$ 属于 E^*。根据定理 3.5，我们得出 E^* 具有正 Schur 性质。

□

参考文献

[1] C. Aliprantis 和 K. Border，《无穷维分析：旅者指南》，第 3 版，施普林格，柏林-海德堡-纽约，2006 年。

[2] C. Aliprantis 和 O.Burkinshaw，《局部实黎曼空间及其在经济学中的应用》，《数学调查与专著》第 105 卷，美国数学会，2003 年。[3] C. Aliprantis 和 O. Burkinshaw，《正算子》，施普林格，多德雷赫特，2006 年。[4] J. Arazy，关于 Schatten p类的大子空间，《Compositio Math.》41 (1980)，第 3 期，297–336。[5] H. Ardakani、S.M. Moshtaghioun、S. M. S. M. Mosadegh 和 M. Salimi，巴拿赫格中的强 Gelfand-Phillips 性质，《Banach J. Math. Anal.》10 (2016)，15–26。[6] H. Baklouti 和 M. Hajji，Schur 算子与支配问题，《正性》21 (2017)，35–48。[7] K. Beanland 和 R. Causey，一种 ξ弱 Grothendieck 紧性原理，《Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.》172(1) (2022)，231-246。[8] G. Botelho、Q. Bu、D. Ji、Donghai 和 K. Navoyan，正射影张量积及正则多线性算子空间上的正 Schur 性质，《Monatsh. Math.》197(4) (2022)，565-578。[9] G. Botelho 和 J. L. P. Luiz，巴拿赫格中的正多项式 Schur 性质，《Proc. Amer. Math. Soc.》149(5) (2021)，2147-2160。[10] G. Botelho 和 J. L. P. Luiz，Fr ´echet 格中的 Schur 性质、正 Schur 性质和弱 Dunford-Pettis 性质，《Ann. Fenn. Math.》46(2) (2021)，633-642。[11] Q. Bu，关于正则紧算子的 Kalton 定理及正射影张量积的 Grothendieck 性质，《Proc. Amer. Math. Soc.》148(6) (2020)，2459–2467。[12] D. W. Dean，(m)中的 Schauder 分解，《Proc. Amer. Math. Soc.》18 (1967)，619–623。[13] P. N. Dowling、D. Freeman、C.J. Lennard、E. Odell、B. Randrianantoanina 和 B. Turett，一种弱 Grothendieck 紧性原理，《J. Funct. Anal.》263(5) (2012)，1378-1381。[14] P. N. Dowling、D. Freeman、C.J. Lennard、E. Odell、B. Randrianantoanina 和 B. Turett，具有对称基的巴拿赫空间的一种弱 Grothendieck 紧性原理，《正性》18 (2014)，147-159。[15] P. N. Dowling 和 D. Mupasiri，关于 Mackey 对偶拓扑的格罗滕迪克紧性原理，《J. Math. Anal. Appl.》410 (2014)，483-486。[16] M. Fabian、P. Habala、P. H ´ajek、V. Montesinos 和 V. Zizler，《巴拿赫空间理论：线性与非线性分析的基础》。《CMS 数学丛书》，Springer，纽约，2011。[17] P. Galindo 和 V. C. C. Miranda，巴拿赫格中的 Grothendieck 型子集，《J. Math. Anal. Appl.》506 (2022)，第 1 期，论文编号 125570，共 14 页。[18] A. Grothendieck，《拓扑张量积与核空间》，《Mem. Amer. Math. Soc.》16 (1955)。[19] W. B. Johnson、R. Lillemets 和 E. Oja，通过弱 ∞ 紧算子表示完全连续算子，《Bull. Lond. Math. Soc.》48(3) (2016)，452-456。[20] M. Kandi ´c、M. Marabeh 和 V. G. Troitsky，巴拿赫格中的无界范数拓扑，《J. Math. Anal. Appl.》451(1) (2017)，259-279。[21] J. M. Kim，弱 p核算子理想及其内射包和满射包，《J. Korean Math. Soc.》56 (2019)，225-237。

[22] H. P. Lotz, 《巴拿赫格上正线性映射的扩张与提升》, Trans. Amer. Math. Soc. 211（1975）, 85–100。[23] N. Machrafi、K. El Fahri、M. Moussa 和 B. Altin, 《关于弱几乎极限算子的注记》, Hacet. J. Math. Stat. 48(3)（2019）, 759–770。[24] P. Meyer-Nieberg, 《巴拿赫格》, 施普林格出版社, 1991。[25] F. R¨abiger, 《某些巴拿赫格类之间序有界序列和 Dunford-Pettis算子的下、上2-估计》, 《数学讲义》1470, 159–170, 1991。[26] P. Tradacete, 《正则算子空间中的正Schur性质》, 《正性》19（2015）, 305–315。[27] W. Wnuk, 《关于正 Schur 性质的注记》, Glasgow Math. J. 31（1989）, 169–172。[28] W. Wnuk, 《具有 Schur型性质的巴拿赫格：综述》, Conf. Sem. Mat. Univ. Bari 249（1993）, 1–25。[29] W. Wnuk, 《巴拿赫格中的对偶正舒尔性质》, 《正性》17（2013）, 759–773。

G. Botelho 和 V. C. C. Miranda 乌贝兰迪亚
联邦大学数学学院 38.400-902– 乌贝兰迪亚 –
巴西 电子邮箱：botelho@ufu.br,
colferaiv@gmail.com

J. L. P. Luiz 米纳斯吉拉斯北部联邦学院
阿拉苏艾校区 39.600-00– 阿拉苏艾 – 巴
西 电子邮箱：lucasvt09
@hotmail.com