arXiv:2304.07439v1 [math.QA] 15 Apr 2023

Q-Kostka 多项式与自旋 Green 多项式

ANGUO JIANG、NAIHUAN JING 和 NING LIU

Abstract. 我们通过顶点算子实现 Q-Hall-Littlewood 函数 $G_\lambda(x;t)$, 研究 Q-Kostka 多项式 $L_{\lambda\mu}(t)$, 并推导出 $L_{\lambda\mu}(t)$ 的新公式。特别地, 我们证明了 Q-Kostka 多项式具有稳定性。我们还引入了自旋 Green 多项式 $Y_\mu^\lambda(t)$, 它既是 Green 多项式的类似物, 也是 $\mathfrak{S}_n$ 的自旋不可约特征的变形。文中给出了自旋 Green 多项式的迭代公式, 并得到了若干与 Green 多项式相似的良好性质。文中还列出了 $n \leq 7$. 的 $Y_\mu^\lambda(t)$ 表格

1. Introduction

Kostka-Foulkes 多项式在代数组合学以及对称群 $\mathfrak{S}_n$ 和有限一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ 的表示论中有重要应用（见 [2] 和 [11]）。它们定义为 Hall-Littlewood 对称函数与 Schur 对称函数之间的过渡系数:

$$s_\lambda(x) = \sum_\mu K_{\lambda\mu}(t) P_\mu(x;t)$$

其中, s_λ 和 $P_\mu(t)$ 都构成域 $F = \mathbb{Q}(t)$ 上对称函数环 Λ_F 的基，且 $P_\mu(0) = s_\mu$。

在 [3], Green 提出了一族后来被称为 Green 多项式的多项式，用于确定群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ 的不可约复特征。Morris 运用 Littlewood 对称函数推导出了研究 Green 多项式时所用的 Morris 迭代公式 [13] 。最近，我们中的两位作者使用顶点算子建立了 Green 多项式的组合公式，并通过这种方法发现了若干新公式 [8]。

对称群不可约特征标的经典理论允许一种非凡的自旋推广，这一推广始于 Schur 的经典著作 [16],；对称群和对称函数的大多数构造都有高度非平凡的自旋对应物，例如 Schur Q-函数、移位杨表和 Robinson-Schensted-Knuth 对应 [15, 17]。值得注意的是，Frobenius 型特征公式被推广到了.....的不可约特征标的非平凡部分

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：05E05；次要分类号：17B69，05E10。
Key words and phrases. Kostka 多项式、Hall-Littlewood 多项式、Schur 的 Q-多项式、射影特征。

$\mathfrak{S}_n$ 的双覆盖群的不可约特征标，其中 Schur 的 Q-函数取代了通常的舒尔函数。

令 Γ 为由奇数次幂和 p_1、p_3、p_5.....在 $\mathbb{C}(t)$ 上生成的 Λ 子代数；当 μ 遍历严格分拆时，舒尔 Q 函数 $Q_\mu(x)$ 构成一组正交基。Γ 也可以解释为对称群 $\mathfrak{S}_n$ 的射影表示的表示环。作为对称函数的子环，Γ 已在 [12, 17] 中得到充分研究。特别地，舒尔 Q 函数是 Hall-Littlewood 对称函数在 $t=-1$ 处的特化：$Q_\mu(x) = Q_\mu(x;-1)$，其中 $Q_\mu(x;t)$ 是 $P_\mu(x;t)$ 的对偶。

Tudose 和 Zabrocki [18] 在 Γ 中构造了另一组以严格分拆为指标的基 $G_\lambda(x;t)$，它类似于 Λ 中 Hall-Littlewood 函数的基，因此 $G_\lambda(x;0) = Q_\lambda(x)$。基于这组新基，他们引入了类似的 Kostka-Foulkes 多项式 $L_{\lambda\mu}(t)$，作为 $G_\mu(x;t)$ 中 $Q_\lambda(x)$ 的系数。Q-Kostka 多项式 $L_{\lambda\mu}(t)$ 具有与其经典对应物相似的性质，并且猜想它们是正的。它们与通常的 Kostka 多项式相似且形式简洁，这一点显而易见，但其组合解释至今尚未揭示。在本文中，我们希望利用它们的顶点算子实现给出一些新的迭代公式。此外，我们还希望应用这些多项式研究 $\mathfrak{S}_n$ 的舒尔射影特征，并找到新的迭代公式。

为此，我们引入 Green 多项式的自旋类比，并研究将其解释为某些顶点算子的矩阵系数。借此，我们得以展示它们的一些与 Green 多项式类似的优良性质，进而有助于寻找自旋 Green 多项式的新迭代公式。作为副产品，我们还得到了对称群 $\mathfrak{S}_n$的自旋不可约特征标的新迭代公式。

我们指出，Wan 和 Wang [19] 还引入了 Hall-Littlewood 函数 $Q^-_\mu(x;t)$的另一种自旋类比形式，该形式与赫克-克利福德代数的表示论相关，相关内容将另行讨论 [10]。

本文的结构如下。第 2 节回顾 Q-Hall-Littlewood 函数 $G_\lambda(x;t)$ 的顶点算子实现，并介绍 $G_\lambda(x;t)$ 的一些性质。第 3 节推导计算 $L_{\lambda\mu}(t)$ 的迭代公式（见定理 3.4）。第 4 节引入 spinGreen 多项式，并介绍一些对应的性质（见定理 4.6）。具体而言，我们推导了对称群 $\mathfrak{S}_n$ 的射影特征的迭代公式。本文最后附上 $3 \le n \le 7$ 的 Green 多项式 Q-类比表。

2. Vertex operator realization of $G_\lambda(x;t)$

本节简要回顾对称函数[12] 的术语，并介绍 Q-Hall-Littlewood 多项式和 Q-Kostka 多项式 [18]。

分拆是按递减顺序排列的非负整数序列（有限或无限）：
$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_i \geq \ldots$ 其中只有有限项非零。各部分之和称为 λ的权重。如果 $|\lambda| = n$，我们称 λ 是 n的一个分拆。严格分拆（或奇分拆） λ 表示所有部分 λ_l互不相同（或均为奇数）。我们用 $\mathcal{SP}_n$ （或 $\mathcal{OP}_n$）表示所有权重为 n 的严格分拆（或奇分拆）构成的集合。非零部分的个数称为 λ 的长度 $l(\lambda)$。分拆 λ 的杨图定义为满足 $1 \leq j \leq \lambda_i$的点$(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ 所构成的集合。通常我们用方格代替这些节点。对于每个分拆 λ，我们定义

$$n(\lambda) = \sum_{i\geq 1}(i-1)\lambda_i. \tag{2.1}$$

分拆的支配序 $\geq$ 定义如下

$$\lambda \geq \mu \Leftrightarrow |\lambda| = |\mu| \quad \text{and} \quad \lambda_1 + \cdots + \lambda_i \geq \mu_1 + \cdots + \mu_i, \quad \forall i \geq 1.$$

对于分拆 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$，我们定义

$$\lambda^{\hat{i}} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_l) \quad i = 1, 2, \cdots, l. \tag{2.2}$$

本文中，我们使用 t-整数 $[n]_t = t^{n-1} + t^{n-2} + \cdots + t + 1$。如常见情形$[n]_t! = [n]_t \cdots [1]_t$和 $[0]_t = 1$。高斯 t-二项式符号为

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_t = \frac{[n]_t!}{[k]_t![n-k]_t!}.$$

类似地，我们引入 $(k > 0)$

$$(k)_t = \frac{t^k - (-1)^k}{t+1} = t^{k-1} - t^{k-2} + \cdots + (-1)^{k-2}t + (-1)^{k-1}.$$

我们约定 $(0)_t = 1$ 和 $(k)_t = 0$ ，其中 $k < 0.$ 。 $[k]_t$ 与 $(k)_t$ 之间的关系可轻易得到 [9]:

$$(k)_t + 2\sum_{i=1}^{k-1}(i)_t = [k]_t.$$

令 $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ 表示由 p_r生成的 Λ 的子环， r 为奇数。显然， Γ 是一个分次环 $\Gamma = \oplus_{n\geq 0}\Gamma^n$，其中 Γ^n 由满足$|\lambda| = n$的 $p_\lambda, \lambda \in \mathcal{OP}$ 张成。 Γ 配备双线性型 $\langle\ ,\ \rangle$，其定义如下

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = 2^{-l(\lambda)}\delta_{\lambda\mu}z_\lambda. \tag{2.3}$$

对于任意奇分拆 λ、μ，其中 $z_\lambda = \prod_{i\geq 1} i^{m_i(\lambda)}m_i(\lambda)!$，且 $m_i(\lambda)$ 是 i 在分拆 λ 中的重数。

已知 [12]，Schur 的 Q-函数 Q_λ（λ strict）构成 Γ 的正交 $\mathbb{Z}$-基。

$$\langle Q_\lambda, Q_\mu\rangle = 2^{l(\lambda)}\delta_{\lambda\mu}, \qquad \lambda,\mu\in\mathcal{SP}. \tag{2.4}$$

乘法算子 $p_n:\Gamma\to\Gamma$ 的次数为 n。因此，p_n 的伴随算子是次数为 $-n$ 的微分算子 $p_n^* = \frac{n}{2}\frac{\partial}{\partial p_n}$。注意，* 是 $\mathbb{Q}(t)$-线性的、反对合的，并且满足

$$\langle f_n u, v\rangle = \langle u, f_n^* v\rangle \tag{2.5}$$

对于任意线性齐次算子 f_n 和 $u,\ v\in\Gamma$。

Schur 的 Q-函数的顶点算子在 [7] 中定义如下。

$$\begin{aligned} Q(z) &= \exp\left(\sum_{n\geq 1,\text{odd}}\frac{2}{n}p_n z^n\right)\exp\left(-\sum_{n\geq 1,\text{odd}}\frac{\partial}{\partial p_n}z^{-n}\right)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} Q_n z^n. \end{aligned} \tag{2.6}$$

因此，伴随顶点算子 $Q^*(z) = Q(-z^{-1})$，于是 $Q_n^* = Q_{-n}$。换言之，对于任意 u、$v\in\Gamma$ 和 $n\in\mathbb{Z}$，$\langle Q_n u、\ v\rangle = \langle u、\ Q_{-n}v\rangle$。

已知对于任意严格分拆 $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_l)$，都有 $Q_\lambda = Q_{\lambda_1}Q_{\lambda_2}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}$，其中 $^{\mathbb{I}}$ 为真空向量。Q_m 的交换关系如下。

命题 2.1. $Q(z)$ 的分量生成一个克利福德代数，其满足以下关系：

$$\{Q_m, Q_n\} = (-1)^n 2\delta_{m,-n}. \tag{2.7}$$

此外，

$$Q_{-n}\cdot_{\mathbb{I}} = \delta_{n,0}, \quad (n\geq 0) \tag{2.8}$$

其中 $\{A,B\} := AB+BA$。

我们引入算子 $q(z)$ 及其伴随算子 $q^*(z)$：

$$q(z) = \exp\left(\sum_{n\geq 1,\text{odd}}\frac{2}{n}p_n z^n\right) = \sum_{n\geq 0} q_n z^n, \tag{2.9}$$

$$q^*(z) = \exp\left(\sum_{n\geq 1,\text{odd}}\frac{\partial}{\partial p_n}z^{-n}\right) = \sum_{n\geq 0} q_n^* z^{-n}. \tag{2.10}$$

显然，作为关于 p_k 的多项式，多项式 q_n is 是 Schur 的 Q-函数$Q_{(n)}$，对应于单行分拆 (n)。我们定义

$$q_\lambda = q_{\lambda_1}q_{\lambda_2}\cdots q_{\lambda_l}. \tag{2.11}$$

那么，q_λ λ 严格构成 Γ 的一个 $\mathbb{Z}$-基。

在 [18], 中，Tudose 和 Zabrocki 定义了 Q-Hall-Littlewood 函数 $G_\lambda(x;t) \in \Gamma \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(t)$:

$$G_\lambda(x;t) := \prod_{i<j}\left(\frac{1+tR_{ij}}{1-tR_{ij}}\right)\left(\frac{1-R_{ij}}{1+R_{ij}}\right) q_\lambda = \prod_{i<j}\left(\frac{1+tR_{ij}}{1-tR_{ij}}\right) Q_\lambda(x), \tag{2.12}$$

而经典的 Q-函数 Q_λ 是在 $t=0$ 处的特化。此外，他们还引入了 Kostka 多项式 $L_{\lambda\mu}$ 的 q 类比，作为过渡系数:

$$G_\mu(x;t) = \sum_{\lambda\in\mathcal{SP}} L_{\lambda\mu}(t) Q_\lambda(x), \qquad \mu \in \mathcal{SP}. \tag{2.13}$$

我们注意到， G_λ, λ 严格构成 $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}(t)$ 的一个 $\mathbb{Z}$-基，但并非正交基。事实上，我们有 $G_{(3,2)} = Q_{(3,2)} + 2tQ_{(4,1)} + 2t^2Q_{(5)}$,$G_{(4,1)} = Q_{(4,1)} + 2tQ_{(5)}$，但 $\langle G_{(3,2)}, G_{(4,1)}\rangle = 8t + 8t^3 \neq 0$。

$L_{\lambda\mu}(t)$ 称为 Q-Kostka 多项式。这族多项式已知具有许多与经典 Kostka-Foulkes 多项式相同的性质。借助顶点算子，我们将得到更多与 Kostka-Foulkes 多项式平行的优良性质。

为此，我们将顶点算子 $G(z)$ 和伴随算子 $G^*(z)$ 定义为以下映射: $\Gamma \longrightarrow \Gamma[[z,z^{-1}]] = \Gamma \otimes \mathbb{C}(t)[[z,z^{-1}]]$，其定义为

$$\begin{aligned} G(z) &= \exp\left(\sum_{n\geq 1,\text{odd}} \frac{2}{n} p_n z^n\right) \exp\left(\sum_{n\geq 1,\text{odd}} (t^n-1)\frac{\partial}{\partial p_n} z^{-n}\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} G_n z^n, \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} G^*(z) &= \exp\left(\sum_{n\geq 1,\text{odd}} \frac{2(t^n-1)}{n} p_n z^n\right) \exp\left(\sum_{n\geq 1,\text{odd}} \frac{\partial}{\partial p_n} z^{-n}\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} G^*_n z^{-n}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

显然，分量 G_n 和 G^*_{-n} 是针对 $n \geq 0$、次数为$-n$ 的湮灭算子。这些顶点算子是霍尔-利特尔伍德顶点算子 [6] 的类似物。若记 $G_\lambda \cdot_{\mathbb{I}} = G_{\lambda_1} G_{\lambda_2} \cdots G_{\lambda_l} \cdot_{\mathbb{I}}$，则由通常的顶点算子性质可知，它们显然等于 G_λ。注意，与 Schur Q-函数对应的顶点算子不同，$G_n G_n \cdot_{\mathbb{I}}$ $(n>0)$ 可能不为零！例如， $G_1 G_1 \cdot_{\mathbb{I}} = 2tQ_2 \neq 0$.

对于 $n \geq 0$，我们有

$$G^*_{-n} \cdot_{\mathbb{I}} = \sum_{\rho\in\mathcal{OP}_n} \frac{(-2)^{l(\rho)}}{z_\rho(t)} p_\rho. \tag{2.16}$$

由（2.4）和（2.13）可得

$$L_{\lambda\mu}(t) = 2^{-l(\lambda)}\langle G_\mu(x;t), Q_\lambda(x)\rangle = 2^{-l(\lambda)}\langle G_{\mu\cdot_{\mathbb{I}}}, Q_{\lambda\cdot_{\mathbb{I}}}\rangle.$$

顶点算子 G_n 满足一些二次关系。关于 G_n 的这些关系的 λ-环论证见于 [18]。下文将使用顶点算子技巧给出一个更简洁的证明。

命题 2.2. 我们有以下交换关系：

$$\begin{aligned}(1-t^2)(G_mG_n+G_nG_m)+t(G_{m-1}G_{n+1}-G_{n+1}G_{m-1}\\ +G_{n-1}G_{m+1}-G_{m+1}G_{n-1}) = 2(-1)^n(1-t)^2\delta_{m,-n}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

证明。由 (2.14)，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{z-tw}{z+tw}G(z)G(w)+\frac{w-tz}{w+tz}G(w)G(z) &=: G(z)G(w): (\frac{z-w}{z+w}+\frac{w-z}{w+z})\\ &= -2\delta(-\frac{w}{z})\end{aligned}$$

其中：$G(z)G(w)$: 是正规序乘积，且 $\delta(x) = \sum x^{n}_{\circ}$ 将 $(z+tw)(w+tz)$ 相乘后，我们得到

$$\begin{aligned}&(z-tw)(w+tz)G(z)G(w)+(w-tz)(z+tw)G(w)G(z)\\ &= -2(1-t)^2z^2\delta(-\frac{w}{z}),\end{aligned}$$

取 $z^{m+1}w^{n+1}$ 的系数，即可得到这些二次关系。 □

3. Iterative formulae for $L_{\lambda\mu}(t)$

本节给出 μ 上 $L_{\lambda\mu}(t)$ 的迭代公式，并在命题 3.7 和例子（例 3.5）中推导出 $L_{\lambda\mu}$ 的一些新性质。

利用顶点算子的技巧，我们还得到以下交换关系：

$$G^*(z)Q(w)+Q(w)G^*(z)\frac{w+tz}{w-tz} = 2q(tz)\delta(\frac{w}{z}), \tag{3.1}$$

$$q^*(z)G(w) = G(w)q^*(z)\frac{z+w}{z-w}, \tag{3.2}$$

$$Q(z)q(w) = q(w)Q(z)\frac{z-w}{z+w}. \tag{3.3}$$

取分量后，我们得到以下结果。

命题 3.1。算子 G_m 与 Schur 的 Q-函数算子之间的交换关系为：

$$\begin{aligned}G^*_mQ_n &= Q_nG^*_m+t^{-1}G^*_{m-1}Q_{n-1}+t^{-1}Q_{n-1}G^*_{m-1}\\ &\quad -2t^{n-m-1}(1-t)q_{n-m},\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$q^*_mG_n = G_nq^*_m+q^*_{m-1}G_{n-1}+G_{n-1}q^*_{m-1}, \tag{3.5}$$

$$Q_mq_n = q_nQ_m-Q_{m+1}q_{n-1}-q_{n-1}Q_{m+1}. \tag{3.6}$$

接下来我们推导迭代公式。

定理 3.2. 给定严格分拆 $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_l)$ 和正整数 k，则

$$G_k^*Q_{\lambda}\cdot_{\mathbb{I}}=\sum_{i=1}^{l}(-1)^{i-1}2t^{\lambda_i-k}q_{\lambda_i-k}Q_{\lambda^{\hat{i}}}\cdot_{\mathbb{I}}. \tag{3.7}$$

证明。对 $k+|\lambda|$ 使用归纳法即可证明。第一步显然成立。假设 (3.7) 对 $<k+|\lambda|$ 成立，则

$$\begin{aligned}&Q_{\lambda_1}G_k^*Q_{\lambda_2}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}\\=&Q_{\lambda_1}(2t^{\lambda_2-k}q_{\lambda_2-k}Q_{\lambda_3}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}-2t^{\lambda_3-k}q_{\lambda_3-k}Q_{\lambda_2}Q_{\lambda_4}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}\\&+\cdots+(-1)^l2t^{\lambda_l-k}q_{\lambda_l-k}Q_{\lambda_2}\cdots Q_{\lambda_{l-1}}\cdot_{\mathbb{I}}).\end{aligned}$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}&G_{k-1}^*Q_{\lambda_1-1}Q_{\lambda_2}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}\\=&2t^{\lambda_1-k}q_{\lambda_1-k}Q_{\lambda_2}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}-2t^{\lambda_2-k+1}q_{\lambda_2-k+1}Q_{\lambda_1-1}Q_{\lambda_3}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}\\&+\cdots+(-1)^{l+1}2t^{\lambda_l-k+1}q_{\lambda_l-k+1}Q_{\lambda_1-1}Q_{\lambda_2}\cdots Q_{\lambda_{l-1}}\cdot_{\mathbb{I}}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&Q_{\lambda_1-1}G_{k-1}^*Q_{\lambda_2}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}\\=&Q_{\lambda_1-1}(2t^{\lambda_2-k+1}q_{\lambda_2-k+1}Q_{\lambda_3}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}-2t^{\lambda_3-k+1}q_{\lambda_3-k+1}Q_{\lambda_2}Q_{\lambda_4}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}\\&+\cdots+(-1)^l2t^{\lambda_l-k+1}q_{\lambda_l-k+1}Q_{\lambda_2}\cdots Q_{\lambda_{l-1}}\cdot_{\mathbb{I}})\end{aligned}$$

由 (3.4) 可得

$$\begin{aligned}&G_k^*Q_{\lambda_1}Q_{\lambda_2}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}\\=&Q_{\lambda_1}G_k^*Q_{\lambda_2}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}+t^{-1}G_{k-1}^*Q_{\lambda_1-1}Q_{\lambda_2}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}\\&+t^{-1}Q_{\lambda_1-1}G_{k-1}^*Q_{\lambda_2}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}-2t^{\lambda_1-k-1}(1-t)q_{\lambda_1-k}Q_{\lambda_2}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}.\end{aligned}$$

对 $G_k^*Q_{\lambda_2}\cdot_{\mathbb{I}}$、$G_{k-1}^*Q_{\lambda_1-1}\cdot_{\mathbb{I}}$ 和 $Q_{\lambda_1-1}G_{k-1}^*\cdot_{\mathbb{I}}$ 使用归纳法展开，便得到

$$\begin{aligned}&G_k^*Q_{\lambda_1}Q_{\lambda_2}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}\\=&Q_{\lambda_1}(2t^{\lambda_2-k}q_{\lambda_2-k}Q_{\lambda_3}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}-2t^{\lambda_3-k}q_{\lambda_3-k}Q_{\lambda_2}Q_{\lambda_4}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}\\&+\cdots+(-1)^l2t^{\lambda_l-k}q_{\lambda_l-k}Q_{\lambda_2}\cdots Q_{\lambda_{l-1}}\cdot_{\mathbb{I}})\\&+t^{-1}(2t^{\lambda_1-k}q_{\lambda_1-k}Q_{\lambda_2}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}-2t^{\lambda_2-k+1}q_{\lambda_2-k+1}Q_{\lambda_1-1}Q_{\lambda_3}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}\\&+\cdots+(-1)^{l+1}2t^{\lambda_l-k+1}q_{\lambda_l-k+1}Q_{\lambda_1-1}Q_{\lambda_2}\cdots Q_{\lambda_{l-1}}\cdot_{\mathbb{I}})\\&+t^{-1}Q_{\lambda_1-1}(2t^{\lambda_2-k+1}q_{\lambda_2-k+1}Q_{\lambda_3}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}-2t^{\lambda_3-k+1}q_{\lambda_3-k+1}Q_{\lambda_2}Q_{\lambda_4}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}\\&+\cdots+(-1)^l2t^{\lambda_l-k+1}q_{\lambda_l-k+1}Q_{\lambda_2}\cdots Q_{\lambda_{l-1}}\cdot_{\mathbb{I}})\\&-2t^{\lambda_1-k-1}(1-t)q_{\lambda_1-k}Q_{\lambda_2}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}\end{aligned}$$

利用交换关系 (3.6)，我们接着计算得

$$Q_{\lambda_1-1}(2t^{\lambda_2-k+1}q_{\lambda_2-k+1}Q_{\lambda_3}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}$$

$$
\begin{aligned}
&+\cdots+(-1)^l 2t^{\lambda_l-k+1}q_{\lambda_l-k+1}Q_{\lambda_2}\cdots Q_{\lambda_{l-1}}\cdot_{\mathbb{I}})\\
=&t^{-1}(2t^{\lambda_2-k+1}q_{\lambda_2-k+1}Q_{\lambda_1-1}Q_{\lambda_3}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}-2t^{\lambda_2-k+1}Q_{\lambda_1}q_{\lambda_2-k}Q_{\lambda_3}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}\\
&-2t^{\lambda_2-k+1}q_{\lambda_2-k}Q_{\lambda_1}Q_{\lambda_3}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}})\\
&-t^{-1}(2t^{\lambda_3-k+1}q_{\lambda_3-k+1}Q_{\lambda_1-1}Q_{\lambda_2}Q_{\lambda_4}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}\\
&-2t^{\lambda_3-k+1}Q_{\lambda_1}q_{\lambda_3-k}Q_{\lambda_2}Q_{\lambda_4}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}\\
&-2t^{\lambda_3-k+1}q_{\lambda_3-k}Q_{\lambda_1}Q_{\lambda_2}Q_{\lambda_4}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}})\\
&+\cdots+(-1)^l t^{-1}(2t^{\lambda_l-k+1}q_{\lambda_l-k+1}Q_{\lambda_1-1}Q_{\lambda_2}\cdots Q_{\lambda_{l-1}}\cdot_{\mathbb{I}}\\
&-2t^{\lambda_l-k+1}Q_{\lambda_1}q_{\lambda_l-k}Q_{\lambda_2}\cdots Q_{\lambda_{l-1}}\cdot_{\mathbb{I}}\\
&-2t^{\lambda_l-k+1}q_{\lambda_l-k}Q_{\lambda_1}Q_{\lambda_2}\cdots Q_{\lambda_{l-1}}\cdot_{\mathbb{I}})
\end{aligned}
$$

这可以简化为

$$
\begin{aligned}
&G_k^* Q_{\lambda_1}Q_{\lambda_2}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}\\
=&2t^{\lambda_1-k}q_{\lambda_1-k}Q_{\lambda_2}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}-2t^{\lambda_2-k}q_{\lambda_2-k}Q_{\lambda_1}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}\\
&+\cdots+2(-1)^{l-1}t^{\lambda_l-k}q_{\lambda_l-k}Q_{\lambda_2}\cdots Q_{\lambda_{l-1}}\cdot_{\mathbb{I}}\\
=&\sum_{i=1}^{l}(-1)^{i-1}2t^{\lambda_i-k}q_{\lambda_i-k}Q_{\lambda^i}\cdot_{\mathbb{I}}.
\end{aligned}
$$

□

例3.3. 对于 $\lambda=(4,1)$ 和 $\mu=(3,2)$，我们有

$$
\begin{aligned}
L_{\lambda\mu}(t)&=2^{-l(\lambda)}\langle G_3G_2.1, Q_4Q_1.1\rangle\\
&=\frac{1}{4}\langle G_2.1, 2tq_1Q_1.1\rangle\\
&=\frac{1}{4}\langle (G_2.1, 4tQ_2.1\rangle\\
&=2t.
\end{aligned}
$$

定理 3.2 给出了 $L_{\lambda\mu}(t)$ 的代数迭代公式。我们回顾一下 Schur 的 Q-函数的皮埃里公式。对于两个分拆 $\mu\subset\lambda$，集合论差集 $\theta=\lambda-\mu$ 称为斜图，记作 λ/μ。若斜图 λ/μ 的每一行（或每一列）至多包含一个方格（见 [12]），则称其为垂直（或水平）条。设 λ、μ 为满足 $\mu\subset\lambda$ 的严格分拆，且 λ/μ 是一个横条。将满足以下条件的整数 $i\geq 1$ 的个数记为 $a(\lambda/\mu)$：λ/μ 在第 i 列有一个方格，但在第 $(i+1)$ 列没有。于是我们有

$$
2^{-l(\mu)}Q_\mu q_r=\sum_{\lambda}2^{a(\lambda/\mu)}2^{-l(\lambda)}Q_\lambda \tag{3.8}
$$

其中求和遍及满足 λ/μ 是水平r-带的严格分拆 $\lambda\supset\mu$。

定理 3.4. 对于给定的 n 的严格分拆 λ、μ，我们有关于 $L_{\lambda\mu}(t)$ 的代数迭代公式:

$$L_{\lambda\mu}(t)=\sum_{\lambda_i\geq\mu_1}\sum_{\xi}(-1)^{i-1}2^{a(\xi/\lambda^{\hat{i}})}t^{\lambda_i-\mu_1}L_{\xi\mu^{\hat{1}}}(t) \tag{3.9}$$

其中第二个求和遍历满足 ξ/λ^i 是水平 μ_1-条带的严格分拆 $\xi\supset\lambda^i$。

证明。$L_{\lambda\mu}(t)$ 可以表示为顶点算子的矩阵系数:

$$\begin{aligned}L_{\lambda\mu}(t)&=2^{-l(\lambda)}\langle G_{\mu\cdot_{\mathbb{I}}},Q_{\lambda\cdot_{\mathbb{I}}}\rangle\\&=2^{-l(\lambda)}\langle G_{\mu^{\hat{1}}\cdot_{\mathbb{I}}},G^*_{\mu_1}Q_{\lambda\cdot_{\mathbb{I}}}\rangle.\end{aligned}$$

于是，由 (3.7)、(3.8) 以及 $L_{\xi\mu^{\hat{1}}}(t)$ 的定义可得 (3.9)。 □

我们指出，Tudose 和 Zabrocki 得到了另一个类似于 Morris 迭代法 [18] 的迭代公式。

例 3.5。设 λ、$\mu=(\mu_1,\mu_2)$ 是 n 的两个严格分拆，则有

$$L_{\lambda(\mu_1,\mu_2)}(t)=\begin{cases}2^{\delta_{\lambda,\mu}}t^{\lambda_1-\mu_1} & \text{if } \lambda\geq(\mu_1,\mu_2)\\ 0 & \text{if others.}\end{cases} \tag{3.10}$$

推论 3.6. 设 $\mu\leq\lambda$ 按支配序排列。

(1) 若 $n>\lambda_1$，则 $L_{(n,\lambda)(n,\mu)}(t)=L_{\lambda\mu}(t)$。

(2) $L_{\lambda\lambda}(t)=1$ 且 $L_{(|\lambda|)\lambda}(t)=2^{l(\lambda)-1}t^{n(\lambda)}$。

(3) $2^{l(\mu)-l(\lambda)}\mid L_{\lambda\mu}(t)$。 (4) $deg L_{\lambda\mu}(t)=n(\mu)-n(\lambda)$。

证明. (1) 和 (2) 是 (3.9) 的直接推论。(3) 和 (4) 利用 (3.9)，对 $l(\mu)$ 作归纳法证明。□

回顾一下，Kostka-Foulkes 多项式具有稳定性（见 [1]），并且我们有如下 Q-类比，这证明了 [18, 中的一个猜想，猜想 10]。

命题 3.7. 设 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_l)$ $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_m)$ 为两个严格分拆，且 $\mu_1\geq\lambda_2$，则对任意 $r\geq1$，有稳定性

$$L_{\lambda+(r),\mu+(r)}(t)=L_{\lambda\mu}(t). \tag{3.11}$$

其中 $\lambda+(r)=(\lambda_1+r,\lambda_2,\cdots)$。

证明。根据定理 3.2，我们可以分别计算 $L_{\lambda+(r),\ \mu+(r)}(t)$ 和 $L_{\lambda\mu}(t)$，它们都等于

$$\langle G_{\mu_2}G_{\mu_3}\cdots G_{\mu_m}\cdot_{\mathbb{I}},2t^{\mu_1-\lambda_1}q_{\mu_1-\lambda_1}Q_{\lambda_2}\cdots Q_{\lambda_l}\cdot_{\mathbb{I}}\rangle.$$

□

4. Spin Green polynomials

本节中，我们介绍 Q-类比格林多项式，并说明它们具有与格林多项式类似的优良性质。作为应用，我们还推导出对称群 $\mathfrak{S}_n$ 的自旋特征的迭代公式。

回顾一下，格林多项式 $X_\mu^\lambda(t)$ 构成了 Hall-Littlewood 函数 $Q_\lambda(x;t)$ 与幂和乘积 $p_\mu(x)$ 之间的过渡矩阵：

$$Q_\lambda(x;t)=\sum_\mu z_\mu(t)^{-1}X_\mu^\lambda(t)p_\mu(x). \tag{4.1}$$

历史上，格林多项式 $Q_\mu^\lambda(q)$ 定义为

$$Q_\mu^\lambda(q)=q^{n(\lambda)}X_\mu^\lambda(q^{-1}).$$

特别地，$X_\mu^\lambda(0)=\chi_\mu^\lambda$，即对称群 $\mathfrak{S}_n$ 中循环类型为 μ 的元素上的不可约特征标 χ^λ 的取值。

我们引入自旋 Green 多项式 $Y_\mu^\lambda(t)$，作为式 (4.1) 的自旋类比： Q-Hall-Littlewood 函数与幂和乘积之间的过渡矩阵，即，

$$G_\lambda(x;t)=\sum_{\mu\in\mathcal{OP}_n} z_\mu^{-1}2^{l(\mu)}Y_\mu^\lambda(t)p_\mu(x). \tag{4.2}$$

令 ζ_μ^λ 为双覆盖 $\tilde{\mathfrak{S}}_n$ 的不可约负特征标，以 $\lambda\in\mathcal{SP}_n$ 为指标，并在共轭类 $\mu\in\mathcal{OP}_n$ 上取值。 ζ_μ^λ 可由以下 Frobenius 型公式 [16, 4] 确定：

$$Q_\lambda(x)=\sum_{\mu\in\mathcal{OP}_n} z_\mu^{-1}2^{\frac{l(\lambda)+l(\mu)+\epsilon(\lambda)}{2}}\zeta_\mu^\lambda p_\mu(x), \tag{4.3}$$

其中，若 $n-l(\lambda)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2)$，则 $\epsilon(\lambda)=\begin{cases}0;\\ \end{cases}$，

若 $(\ )\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,)$，则 $1\qquad n-l\ \lambda\qquad\qquad 2$.

与 Green 多项式类似，自旋 Green 多项式 $Y_\mu^\lambda(t)$ 可以视为自旋特征 ζ_μ^λ 的 t 变形（相差若干 2 的幂），因为 $G_\lambda(x;0)=Q_\lambda(x)$。事实上，我们有 $Y_\mu^\lambda(0)=2^{\frac{l(\lambda)-l(\mu)+\epsilon(\lambda)}{2}}\zeta_\mu^\lambda$.

我们可以用矩阵系数表示自旋 Green 多项式 $Y_\mu^\lambda(t)$:

$$Y_\mu^\lambda(t)=\langle G_\lambda(x;t),p_\mu(x)\rangle.$$

因此， $Y_\mu^\lambda(t)=\langle G_{\lambda\cdot\mathbb{T}},p_\mu\rangle$.为了计算 $Y_\mu^\lambda(t)$，我们在空间 Γ 上引入顶点算子 $P(z)$ 和 $P^*(z)$，它们是如下映射： $\Gamma\longrightarrow\Gamma[[z,z^{-1}]]$ 定义为

$$P(z)=\sum_{n\geq 1,odd} p_n z^n \tag{4.4}$$

$$P^*(z) = \sum_{n\geq 1, odd} p_n^* z^{-n} \tag{4.5}$$

根据第 2 节中发展的顶点算子技巧，由 (2.14) 和 (2.15) 可得:

$$G^*(z)P(w) = \sum_{n\geq 1, odd} (\frac{w}{z})^n G^*(z) + P(w)G^*(z) \tag{4.6}$$

$$P^*(w)G(z) = \sum_{n\geq 1, odd} (\frac{z}{w})^n G(z) + G(z)P^*(w) \tag{4.7}$$

因此，它们的分量满足以下交换关系:

$$G_m^* p_n = G_{m-n}^* + p_n G_m^* \tag{4.8}$$

$$p_m^* G_n = G_{n-m} + G_n p_m^* \tag{4.9}$$

记 $\nu \lhd \lambda$，若 ν是 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l)$的子分拆，即对于某个 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq l.$，有 $\nu = (\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \cdots, \lambda_{i_k})$。注意， ν可以是$\emptyset$ 或 $\lambda.$。令 $\{\lambda\}_i$ 为集合 $\{\tau \lhd \lambda \mid |\tau| = i\}$，且 $D^{(i)}(\lambda) =$。Card$\{\lambda\}_i.$。定义$D_t(\lambda) = \sum_{i\geq 0} D^{(i)}(\lambda)t^i.$。以下结果对我们后续的讨论很有用。

引理 4.1。 [8, 9] 设 λ 为任意分拆，则

$$D_t(\lambda) = \prod_{i\geq 1} [2]_{t^i}^{m_i(\lambda)} \tag{4.10}$$

$$\sum_{\rho \in \mathcal{OP}_n} \frac{(-2)^{l(\rho)}}{z_\rho(t)} = \begin{cases} 2(t-1)(n)_t & if\ n \geq 1, \\ 1 & if\ n = 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

我们汇总 $X_\mu^\lambda(t)$的一些性质如下。

命题 4.2。 [8, 12] 假设 λ, $\mu \in \mathcal{P}_n$. 则 Green 多项式$X_\mu^\lambda(t)$满足以下性质:

(1) $X_\mu^\lambda(t) = \sum_{\nu\in\mathcal{P}_n} K_{\nu\lambda}(t) X_\mu^\nu(0)$.
(2) $X_\mu^\lambda(t)$ *is monic of degree* $n(\mu)$.
(3) $X_\mu^\lambda(0) = \chi_\mu^\lambda$.
(4) $X_\mu^{(n)}(t) = 1$.
(5) $X_\mu^{(k,n-k)}(t) = (t-1)[D_t(\mu)t^{-k-1}]_+ + D^{(n-k)}(\mu)$.
(6) $X_\mu^\lambda(t) = \sum_{i=0}^{n-\lambda_1} \sum_{\tau\in\{\mu\}_i} \sum_{\rho\vdash(n-\lambda_1-i)} \frac{(-1)^{l(\rho)}}{z_\rho(t)} X_{\tau\cup\rho}^{\lambda^{[1]}}(t)$,

其中 $[f(t)]_+$ 是函数 f t 在 t中的正则部分，而 $K_{\lambda\mu}(t)$ 是通常的 t-Kostka 多项式 [12]。

定理 4.3。对于分拆 $\lambda \in \mathcal{SP}_n$、 $\mu \in \mathcal{OP}_n$，以及非负整数k,

$$G_k^* p_\mu = \sum_{\nu \lhd \mu} p_\nu G^*_{k+|\nu|-n} = \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{\nu \in \{\mu\}_i} p_\nu G^*_{k+i-n} \tag{4.12}$$

$$p_k^* G_\lambda = \sum_{i=1}^{l(\lambda)} G_{\lambda_1} \cdots G_{\lambda_i - k} \cdots G_{\lambda_l}. \tag{4.13}$$

证明。对于 (4.12)，我们对 $l(\mu)$ 使用归纳法。第一步显然成立。归纳假设表明，(4.12) 对 $< l(\mu)$ 成立。根据关系 (4.8)，我们有

$$\begin{aligned} G_k^* p_\mu &= G^*_{k-\mu_1} p_{\mu_2} \cdots p_{\mu_l} + p_{\mu_1} G_k^* p_{\mu_2} \cdots p_{\mu_l} \\ &= \sum_{\nu \lhd \mu^{\hat{1}}} p_\nu G^*_{k+|\nu|-n} + p_{\mu_1} \sum_{\nu \lhd \mu^{\hat{1}}} p_\nu G^*_{k+\mu_1+|\nu|-n} \\ &= \sum_{\nu \lhd \mu} p_\nu G^*_{k+|\nu|-n}. \end{aligned}$$

(4.13) 的论证类似。 □

定理 4.4。设 $\lambda \in \mathcal{SP}_n, \mu \in \mathcal{OP}_n$，则我们有以下关于 $Y_\mu^\lambda(t)$ 的迭代公式

$$Y_\mu^\lambda(t) = \sum_{i=0}^{n-\lambda_1} \sum_{\nu \in \{\mu\}_i} \sum_{\rho \in \mathcal{OP}_{n-\lambda_1-i}} \frac{(-2)^{l(\rho)}}{z_\rho(t)} Y^{\lambda^{\hat{1}}}_{\nu \cup \rho}(t). \tag{4.14}$$

证明。注意 ($n \geq 0$)

$$G^*_{-n} \cdot_{\mathbb{I}} = \sum_{\rho \in \mathcal{OP}_n} \frac{(-2)^{l(\rho)}}{z_\rho(t)} p_\rho.$$

于是 (4.14) 由 (4.12) 得出。 □

现在我们想讨论 $Y_\mu^\lambda(t)$ 的性质，这些性质与 Green 多项式 $X_\mu^\lambda(t)$ 的性质相似。作为 (4.14) 的直接推论，我们有 $Y_{(n)^\mu}(t) = 1$对于任意 $\mu \in \mathcal{OP}_n$. 此外,

$$\begin{aligned} Y_\mu^{(k,n-k)}(t) &= \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{\nu \in \{\mu\}_i} \sum_{\rho \in \mathcal{OP}_{n-k-i}} \frac{(-2)^{l(\rho)}}{z_\rho(t)} Y^{(n-k)}_{\nu \cup \rho}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-k-1} \sum_{\nu \in \{\mu\}_i} \sum_{\rho \in \mathcal{OP}_{n-k-i}} \frac{(-2)^{l(\rho)}}{z_\rho(t)} + \sum_{\nu \in \{\mu\}_{n-k}} 1. \end{aligned}$$

由引理 4.1 可得

$$Y_\mu^{(k,n-k)}(t) = \frac{2(t-1)}{t+1} ([D_{t^{-1}}(\mu) t^{n-k}]_+ - ([D_{t^{-1}}(\mu) t^{n-k}]_+ \mid_{t=-1}))$$

$$
\begin{aligned}
&+ D^{(n-k)}(\mu) \\
&= \frac{2(t-1)}{t+1}([D_t(\mu)t^{-k}]_+ - ([D_t(\mu)t^{-k}]_+ \mid_{t=-1})) + D^{(n-k)}(\mu).
\end{aligned}
$$

例 4.5。对于 $\lambda = (4,3)$ $\mu = (5,1,1)$，我们有

$$
\begin{aligned}
Y^{(4,3)}_{(5,1,1)}(t) &= \frac{2(t-1)}{t+1}([(t+1)^2(t^5+1)t^{-4}]_+ \\
&\quad - ([(t+1)^2(t^5+1)t^{-4}]_+ \mid_{t=-1})) + D^{(3)}(\mu) \\
&= \frac{2(t-1)}{t+1}(t^3+2t^2+t+0)+0 = 2t(t^2-1).
\end{aligned}
$$

由 $Y^\lambda_\mu(t)$ 的定义可得 $(t=0)$

$$
Q_\lambda(x) = \sum_{\mu\in\mathcal{OP}_n} z_\mu^{-1} 2^{l(\mu)} Y^\lambda_\mu(0) p_\mu(x).
$$

回顾

$$
G_\lambda(x;t) = \sum_{\nu\in\mathcal{SP}_n} L_{\nu\lambda}(t) Q_\nu(x).
$$

结合以上两个恒等式，得到

$$
G_\lambda(x;t) = \sum_{\mu\in\mathcal{OP}_n}\sum_{\nu\in\mathcal{SP}_n} z_\mu^{-1} 2^{l(\mu)} L_{\nu\lambda}(t) Y^\nu_\mu(0) p_\mu(x).
$$

由于 $p_\mu(x)$ $\mu\in\mathcal{OP}_n$ 构成 Γ_n 的一组基，

$$
Y^\lambda_\mu(t) = \sum_{\nu\in\mathcal{SP}_n} L_{\nu\lambda}(t) Y^\nu_\mu(0). \tag{4.15}
$$

注意到 $L_{\nu\lambda}(t)$ 的次数为 $n(\lambda)-n(\nu)$，因此 (4.15) 右侧的主导项为 $L_{(n)\lambda}Y^{(n)}_\mu(0) = 2^{l(\lambda)-1}t^{n(\lambda)}$，所以 $Y^\lambda_\mu(t)$ 的次数为 $n(\mu)$。

综上所述，对于$Y^\lambda_\mu(t)$，我们有以下对应的性质。

定理 4.6. 对于 $\lambda\in\mathcal{SP}_n$、 $\mu\in\mathcal{OP}_n$，自旋 Green 多项式 $Y^\lambda_\mu(t)$ 具有以下性质：

(1) $Y^\lambda_\mu(t) = \sum_{\nu\in\mathcal{OP}_n} L_{\nu\lambda}(t)Y^\nu_\mu(0)$.
(2) $Y^\lambda_\mu(t)$ *is of degree* $n(\mu)$ *with the leading coefficient* $2^{l(\lambda)-1}$.
(3) $Y^\lambda_\mu(0) = 2^{\frac{l(\lambda)-l(\mu)+\epsilon(\lambda)}{2}}\zeta^\lambda_\mu$.
(4) $Y^{(n)}_\mu(t) = 1$.
(5) $Y^{(k,n-k)}_\mu(t) = \frac{2(t-1)}{t+1}([D_t(\mu)t^{-k}]_+ - ([D_t(\mu)t^{-k}]_+ \mid_{t=-1})) + D^{(n-k)}(\mu)$.
(6) $Y^\lambda_\mu(t) = \sum_{i=0}^{n-\lambda_1}\sum_{\nu\in\{\mu\}_i}\sum_{\rho\in\mathcal{OP}_{n-\lambda_1-i}} \frac{(-2)^{l(\rho)}}{z_\rho(t)} Y^{\lambda^{\hat{1}}}_{\nu\cup\rho}(t)$.

注 4.7. Morris 和 Abdel-Aziz [14] 给出了 ζ_μ^λ 的双行公式和迭代公式，可以将其视为 (5) 在$t=0$ 处的特化（相差 2 的幂次）。

下面给出 $n \le 7$ 的自旋 Green 多项式表。我们注意到，$q^{n(\mu)}Y^\lambda_{(1^n)}(q^{-1})$ 与 Green 多项式 $q^{n(\mu)}X^\lambda_{(1^n)}(q^{-1})$ 一样呈现出正性，后者是某些旗簇 [5] 的 Poincar´e 多项式。

$Y_\mu^\lambda(t)$ 、 $n=3$、4、5、6、7 的表格。

TABLE 1. n=3

$\mu\backslash\lambda$	(3)	$(2,1)$
(3)	1	$2(t-1)$
(1^3)	1	$2t+1$

TABLE 2. n=4

$\mu\backslash\lambda$	(4)	$(3,1)$
$(3,1)$	1	$2t-1$
(1^4)	1	$2(t+1)$

TABLE 3. n=5

$\mu\backslash\lambda$	(5)	$(4,1)$	$(3,2)$
(5)	1	$2(t-1)$	$2(t-1)^2$
$(3,1^2)$	1	$2t$	$2t^2-1$
(1^5)	1	$2t+3$	$2(t^2+3t+1)$

TABLE 4. n=6

$\mu\backslash\lambda$	(6)	$(5,1)$	$(4,2)$	$(3,2,1)$
$(5,1)$	1	$2t-1$	$2t(t-1)$	$2(t-1)^2(2t^2+2t+1)$
$(3,3)$	1	$2(t-1)$	$2(t-1)^2$	$4(t-1)(t^3-t^2+1)$
$(3,1^3)$	1	$2t+1$	$2t^2+2t-1$	$4t^4+4t^3-2t^2-2t-1$
(1^6)	1	$2(t+2)$	$2t^2+8t+5$	$2(2t^4+8t^3+14t^2+5t+1)$

TABLE 5. n=7

$\mu\backslash\lambda$	(7)	(6, 1)	(5, 2,)	(4, 3)	(4, 2, 1)
(7)	1	$2(t-1)$	$2(t-1)^2$	$2(t-1)(t^2-t+1)$	$4t^2(t-1)^2$
$(5,1^2)$	1	$2t$	$2t^2-1$	$2t(t^2-1)$	$2(t-1)(2t^3+2t^2-1)$
$(3^2,1)$	1	$2t-1$	$2t(t-1)$	$2(t^3-t^2+1)$	$2(t-1)(2t^3-t+1)$
$(3,1^4)$	1	$2t+2$	$2t\ (t+2)$	$2t^3+4t-1$	$2\ (t+1)\quad (2t^3+2t^2-1)$
(1^7)	1	$2t+5$	$2t^2+10t+9$	$2t^3+10t^2+18t+5$	$4t^4+20t^3+46t^2+28t+7$

数据可用性：所有相关数据均包含在论文中。

致谢

本项目部分由西蒙斯基金会资助（资助编号：523868），并获得国家自然科学基金委员会资助（资助编号：12171303）。

REFERENCES

[1] T. Bryan 和 N. Jing, *An iterative formula for the Kostka-Foulkes polynomials*, J. Algebr. Comb. 54 (2021), 625-634. [2] J. D

´ ´ *Hall-Littlewood functions and Kostka-Foulkes* esarmenien、B. *polynomials in representation theory* ´ 1994, 32 32 Leclerc、J. Y. Thibon, . Sem. Lothar. Combin., : B c. [3] J. A. Green, *The character of the finite general linear groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 80 (1955), 402-447. [4] P. N. Hoffman 和 J. F. Humphreys, *Projective representations of the symmetric groups Q-functions and shifted tableaux* 1992 , Clarendon Press, Oxford, . [5] R. Hotta 和 T. A. Springer, *A specialization theorem for certain Weyl group representations and an application to the Green polynomials of unitary groups* , Invent. Math. 41 (1977), 113-127. [6] N. Jing, *Vertex operators and Hall-Littlewood symmetric functions*, Adv. Math. 87 (1991), 226-248. [7] N. Jing, *Vertex operators, symmetric functions, and the spin group* Γ_n, J. Algebra 138 (1991), 340-398. [8] N. Jing 和 N. Liu, *The Green polynomials via vertex operators*, J. Pure Appl. Algebra 226 (2022), no. 8, Paper No. 107032, 17pp. [9] N. Jing 和 N. Liu, *Mar Mar Nakayama-Nakayama rule and spin versus for the Hecke-Clifford Algebra* 2303 14459 , arXiv: . . [10] N. Jing 和 N. Liu, *Spin Kostka polynomials and vertex operators*, Pacific J. Math., 即将发表, arXiv:2303.10664. [11] A. N. Kirillov, *Ubiquities of Kostka polynomials*, 载于: Physics and combinatorics 1999 (Nagoya), 第 85-200 页, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001. [12] I. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, 第 2 版, Clarendon Press, Oxford, 1995. [13] A. O. Morris, *The characters of the group* GL(n,q), Math. Z. 81 (1963), 112-123. [14] A. O. Morris 和 A. A. Abdel-Aziz, *Schur Q-functions and spin characters of symmetric groups I* 3 1996 2, 20 , Electron. J. Combin. ( ), 第 R . [15] B. Sagan, *Shifted tableaux, Schur Q-functions, and a conjecture of R. Stanley*, J. Combin. Theory Ser. A. 45 (1987), 62-103.

[16] I. Schur, *Über die Darstellungen der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrochen lineare Substituionen* ¨ 139 1911 155 250 ,

J. fur Math. ( ), - . [17] J. Stembridge,
Shifted tableaux and the projective representations of symmetric groups, Adv. Math. 74 (1989), 87-134. [18] G. Tudose、M. Zabrocki, *A q-analog of Schur's Q-functions*, 载于: 代数组合学与量子群, N. Jing 编, World Sci., 2003, 第135-161页。[19] J. Wan、W. Wang, *Spin Kostka polynomials*, J. Algebraic Combin. 37 (2013), 117-138.
School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou, Guangdong 510640, China*Email address*: jagmath@163.com
Department of Mathematics, North Carolina State University, Raleigh, NC 27695, USA*Email address*: jing@ncsu.eduSchool of Mathematics,
South China University of Technology, Guangzhou,Guangdong 510640, China
Email address: mathliu123@outlook.com