arXiv:2304.07491v1 [cs.SC] 15 Apr 2023

JSSAC 通讯（200X）卷 XX，第 1–16 页

用计算机代数对“Kariya定理”进行计算机辅助证明

伊藤绫音 笠井武文 照井章 *筑波大学 筑波大学 筑波大学

摘要

我们利用计算机代数，对初等几何中的定理“Kariya定理”进行了计算机辅助证明。在使用计算机代数证明几何定理时，将待证明的几何图形的顶点表示为变量。这些变量分为两类：任意给定的点，以及由约束根据前一类点定义的点。我们针对任意点的两种给定方式，采用两种表述证明Kariya定理：一种称为“顶点表述”，另一种称为“内心表述”；同时使用两种方法：一种是格罗布纳基计算，另一种是吴方法。此外，我们还采用两种表述和两种方法，对所谓的“Kariya点”位于所谓的“费尔巴哈双曲线”上的性质进行了计算机辅助证明。

1 引言

本文讨论利用计算机代数对“Kariya定理”进行的计算机辅助证明。该定理属于初等几何。

利用计算机代数证明初等几何定理时，假设和结论分别表示为一个多项式方程组和一个多项式方程。在这种表述中，方程中出现的变量分为两组：一组对应任意给定的点，另一组对应由前一组变量所表示的点经过构造得到的点，并带有约束。证明通过说明由“假设”方程定义的代数簇包含于由“结论”方程定义的代数簇来展示。通常，证明中的“计算”可归结为求解由“假设”方程导出的理想成员问题或根式成员问题。这一计算通过格罗布纳基计算 [4] 或吴方法 [2]完成。

“Kariya定理” [5] 是初等几何中的一个定理，与三角形的内心有关。该定理于19世纪末被发现 [1] ，至今仍是研究课题（[6], [10]）。本文以两种不同的表述给出该定理的计算机辅助证明：1）给定点位于三角形的顶点上（称为“顶点表述”）；2）给定点位于底边的顶点和三角形的内心处（称为“内心表述”）。对于每种表述，我们都使用格罗布纳基计算和吴方法证明Kariya定理及其推论。此外，

*terui@math.tsukuba.ac.jp

© 200X 日本 符号与代数计算学会

已知Kariya定理断言中出现的点（所谓的“Kariya点”）位于一条称为“费尔巴哈双曲线”的矩形双曲线上。因此，我们也使用格罗布纳基计算和吴方法，基于上述两种表述给出了这一性质的计算机辅助证明。据作者所知，除内心表述下推论的证明（见第 2.2.2 节）外，本文给出的证明此前从未见诸文献。

本文结构如下：第 2 节介绍 Kariya定理及其各种表述。第 3 节说明如何利用格罗布纳基计算和吴方法对 Kariya定理进行计算机辅助证明。第 4 节展示利用格罗布纳基计算和吴方法对 Kariya定理进行的证明。第 5 节运用两种方法和两种不同的表述，证明Kariya点位于费尔巴哈双曲线上这一性质。最后，我们在第 6 节作结论。

2 Kariya定理及其表述

“Kariya定理”是初等几何中的一个定理，描述了与三角形内心有关的性质。尽管有几位数学家在19世纪末和20世纪初发现了它的证明（并对原定理进行了推广），[1],Kariya 这个名称 [5] 却一直沿用至今。

Kariya定理如下。请注意，广为人知的“Kariya定理”这一结论，是以下定理的推论（见推论2）。

定理1（Kariya定理 **[5]**）
在三角形ABC中，设O为三角形ABC的内心，D′、E′和F′分别为内切圆与边BC、CA和AB的切点。对于实数k，分别在直线OD′、OE′和OF′上取点D、E和F，使得$\longrightarrow$OD $=$ k $\longrightarrow$OD′，$\longrightarrow$ $\longrightarrow$ $\longrightarrow$ $\longrightarrow$
OE $=$k OE′，OF $=$k OF′。那么，直线AD、BE和CF共点于G。

定理1中的点G称为“Kariya点”。在定理1中，令k $=1$，即D、E和F分别与D′、E′ 和F′重合，可得以下推论。

推论2
在三角形ABC中，设D、E、F分别为内切圆与边BC、CA和AB的切点。那么，直线AD、BE和CF交于一点G。

用计算机代数证明初等几何定理时，我们在实平面（或空间）上建立一个坐标系。然后，将证明中出现的点的坐标作为变量，用变量的代数关系来表达包含这些点的几何图形之间的关系，从而得到多项式方程。因此，我们分别将假设和结论表示为一个多项式方程组和一个多项式方程。笛卡尔坐标系是一种广泛使用的坐标系。

证明中出现的一些点，其坐标将表示为变量，这些点有些是任意给定的，另一些则由任意给定的点导出。对于任意给定的点，将其坐标表示为$u_1, u_2, \ldots\ldots u_m$；对于由任意给定的点导出的点，若其坐标以$u_i$ 表示，则将其坐标表示为$x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$。变量$u_1, u_2, \ldots\ldots u_m$称为“自由变量”，变量$x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$称为“因变量”。

几何图形的性质可表示为关于上述变量的多项式方程。为方便起见，将变量元组记为 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ 和

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$。表示假设的多项式方程的数量通常等于因变量的数量 m。因此，设表示假设的多项式方程为

$$h_1(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = 0, \ldots, h_n(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = 0,$$

其中 $h_1(u, x), \ldots, h_n(u, x) \in \mathbb{R}[u, x]$,，表示结论的多项式方程为 $g(u, x) = 0$，其中 $g(u, x) \in \mathbb{R}[u, x]$。

结合以上讨论，我们来展示如何将 Kariya定理表述为多项式方程。根据将任意给定的点设为以下对象，可分为两种表述:

1. 三角形ABC的顶点，以及
2. 三角形ABC的底边顶点和内心。

这 f 前者称为“顶点表述”，后者称为“内心表述”。

2.1 将任意给定的点设为三角形顶点的表述（顶点表述）

在顶点表述中，不失一般性，设BC为三角形ABC的底边，其中A(u_1,u_2)、B(0, 0)、C(0, 1)，且$u_1 > 0$ 和$u_2 > 0$。定理1和推论2的表述如下。

2.1.1 定理1的情形

在定理1的表述中（见图1），设 $O(x_1, x_{13})$ 为内心，$D'(x_1, 0)$、$E'(x_2, x_3)$ 和 $F'(x_4,x_5)$ 分别为内切圆与边 BC、CA 和 AB 的切点。设 $D(x_1, x_6)$、$E(x_7, x \xrightarrow{8})$ 和 $F(x^{9}, \longrightarrow x_{10})$ 分别为直线 OD′、OE′和 OF′上的点，满足对于 $k \in \mathbb{R}$，$OD = k \longrightarrow OD'$、$OE = k \longrightarrow OE'$ 且 $\longrightarrow OF = k \longrightarrow OF'$。设 $G(x_{11}, x_{12})$ 为 Kariya点。那么，假设在方程（1）中表示为 $h_1, \ldots, h_{13}$，结论在方程（2）中表示为 g_1。注意，在每个方程中，箭头（$\Longleftrightarrow$）后面右侧的注释表示相应的几何条件。

$$
\begin{aligned}
h_1 &= x_1^2 - x_4^2 - x_5^2 \iff BD' = BF', \\
h_2 &= (1 - x_1)^2 - (1 - x_2)^2 - x_3^2 \iff CD' = CE', \\
h_3 &= (u_1 - x_4)^2 + (u_2 - x_5)^2 - (u_1 - x_2)^2 - (u_2 - x_3)^2 \iff AF' = AE', \\
h_4 &= u_1 x_5 - u_2 x_4 \iff A, B \text{ and } F' \text{ are collinear}, \\
h_5 &= u_2(1 - x_2) - x_3(1 - u_1) \iff A, E' \text{ and } C \text{ are collinear}, \\
h_6 &= (x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_{13})^2 - x_{13}^2 \iff OD' = OE', \\
h_7 &= (x_6 - x_{13}) + k x_{13} \iff \overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OD'}, \\
h_8 &= (x_7 - x_1) - k(x_2 - x_1) \iff \overrightarrow{OE} = k\overrightarrow{OE'} \quad \text{(with respect to the } x \text{ coordinate)}, \\
h_9 &= (x_8 - x_{13}) - k(x_3 - x_{13}) \iff \overrightarrow{OE} = k\overrightarrow{OE'} \quad \text{(with respect to the } y \text{ coordinate)}, \\
h_{10} &= (x_9 - x_1) - k(x_4 - x_1) \iff \overrightarrow{OF} = k\overrightarrow{OF'} \quad \text{(with respect to the } x \text{ coordinate)}, \\
h_{11} &= (x_{10} - x_{13}) - k(x_5 - x_{13}) \iff \overrightarrow{OF} = k\overrightarrow{OF'} \quad \text{(with respect to the } y \text{ coordinates)}, \\
h_{12} &= (u_2 - x_6)(u_1 - x_{11}) - (u_1 - x_1)(u_2 - x_{12}) \iff A, G \text{ and } D \text{ are collinear}, \\
h_{13} &= (1 - x_{11})x_{10} - (1 - x_9)x_{12} \iff C, G \text{ and } F \text{ are collinear}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

图1：采用顶点表述的定理1示例。详情见第2.1.1节。

$$g = x_7x_{12} - x_8x_{11} \iff B, G \text{ and } E \text{ are collinear.} \tag{2}$$

2.1.2 推论2的情形

在推论2中（见图2），点D、E和F分别与定理1中的 $D'(x_1, 0)$、$E'(x_2, x_3)$ 和 $F'(x_4, x_5)$ 重合。因此，在推论2的表述中，设 $D(x_1, 0)$、$E(x_2, x_3)$、$F(x_4, x_5)$ 和 $G(x_6, x_7)$。那么，假设在方程（3）中表示为 $h_1, \ldots, h_8$，结论在方程（4）中表示为 g。

$$\begin{aligned}
h_1 &= x_1^2 - x_4^2 - x_5^2 \iff BD = BF,\\
h_2 &= (u_1 - x_4)^2 + (u_2 - x_5)^2 - (u_1 - x_2)^2 - (u_2 - x_3)^2 \iff AF = AE,\\
h_3 &= (x_2 - 1)^2 + x_3^2 - (1 - x_1)^2 \iff CE = CD,\\
h_4 &= u_1x_5 - u_2x_4 \iff A, F \text{ and } B \text{ are collinear,}\\
h_5 &= u_2(1 - x_2) - x_3(1 - u_1) \iff A, E \text{ and } C \text{ are collinear,}\\
h_6 &= (u_1 - x_1)x_7 - (x_6 - x_1)u_2 \iff A, G \text{ and } D \text{ are collinear,}\\
h_7 &= x_2x_7 - x_6x_3 \iff B, G \text{ and } E \text{ are collinear.}
\end{aligned} \tag{3}$$

$$g = (x_4 - 1)x_7 - (x_6 - 1)x_5 \iff C, G \text{ and } F \text{ are collinear.} \tag{4}$$

2.2 将任意给定的点设为底边的顶点和三角形的内心的表述（内心表述）

在内心表述中，不失一般性，设 BC 为三角形ABC的底边，并令 B(0,0)、C(1,0)。此外，设 $O(u_1,u_2)$ 为三角形ABC的内心。定理1和推论2的表述如下。

图2：顶点表述下推论2的一个示例。详情请参见第2.1.2节。

2.2.1 定理1的情形

在定理1的表述中（见图3），设 $A(x_2, x_1)$ 为三角形的另一个顶点，并设 $D'(u_1, 0)$、$E'(x_4, x_3)$ 和 $F'(x_6, x_5)$ 分别为内切圆与边 BC、CA 和 AB 的切点。设 $D(u_1, x_7)$、$E(x_9, x_8)$ 和 $F(x_{11}, x_{10})$ 分别为直线 OD′、OE′和 OF′ 上的点，满足对于 $k \in \mathbb{R}$, $\longrightarrow OD = k\longrightarrow OD'$, $\longrightarrow OE = k\longrightarrow OE'$ and $\longrightarrow OF = k\longrightarrow OF'$。那么，假设表示为式（5）中的 $h_1, \ldots, h_{13}$，结论表示为式（6）中的 g。

$$
\begin{aligned}
h_1 &= -(u_1-1)^2 x_1 + u_2^2 x_1 + 2(u_1-1)u_2(x_2-1) \iff \tan\angle BCO = \tan\angle OCA,\\
h_2 &= x_1(-u_1^2+u_2^2) + 2u_1u_2x_2 \iff \tan\angle CBO = \tan\angle OBA,\\
h_3 &= x_3(x_2-1) - x_1(x_4-1) \iff A, E' \text{ and } C \text{ are collinear},\\
h_4 &= (x_2-1)(x_4-u_1) + x_1(x_3-u_2) \iff OE' \text{ and } CA \text{ intersect perpendicularly},\\
h_5 &= x_1x_6 - x_2x_5 \iff A, F' \text{ and } B \text{ are collinear},\\
h_6 &= x_2(x_6-u_1) + x_1(x_5-u_2) \iff OF' \text{ and } BA \text{ intersect perpendicularly},\\
h_7 &= x_7 + u_2(k-1) \iff \overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OD'} \text{ (with respect to the } y \text{ coordinate)},\\
h_8 &= (x_9-u_1) - (k(x_4-u_1)) \iff \overrightarrow{OE} = k\overrightarrow{OE'} \text{ (with respect to the } x \text{ coordinate)},\\
h_9 &= (x_8-u_2) - (k(x_3-u_2)) \iff \overrightarrow{OE} = k\overrightarrow{OE'} \text{ (with respect to the } y \text{ coordinate)},\\
h_{10} &= (x_{11}-u_1) - (k(x_6-u_1)) \iff \overrightarrow{OF} = k\overrightarrow{OF'} \text{ (with respect to the } x \text{ coordinate)},\\
h_{11} &= (x_{10}-u_2) - (k(x_5-u_2)) \iff \overrightarrow{OF} = k\overrightarrow{OF'} \text{ (with respect to the } y \text{ coordinate)},\\
h_{12} &= (x_{13}-u_1)(x_1-x_7) - (x_{12}-x_7)(x_2-u_1) \iff A, G \text{ and } D \text{ are collinear},\\
h_{13} &= x_{12}(x_{11}-1) - x_{10}(x_{13}-1) \iff C, G \text{ and } F \text{ are collinear}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

$$
g = x_8x_{13} - x_9x_{12} \iff B, G \text{ and } E \text{ are collinear}. \tag{6}
$$

图3：内心表述下定理1的一个示例。请注意，在此图中，点D、E和F分别将线段OD′、OE′ 和OF′ 外分；而在图1中，点D、E和F分别将线段OD′、OE′ 和OF′ 内分。详情请见第2.1.1节。

2.2.2 推论2的情形

在推论2的表述中（见图4），与第2.1.2节一样，设$D(u_1, 0)$、$E(x_4, x_3)$和$F(x_6, x_5)$。那么，假设表示为式（7）中的$h_1, \ldots, h_7$，结论表示为式（8）中的g。请注意，这一表述也见于Chou的 [2, Example 336]。

$$\begin{aligned} &h_1 = u_2^2((1-x_4)^2 + x_3^2) - (1-u_1)^2((u_1-x_4)^2 + (u_2-x_3)^2) \iff \tan\angle BCO = \tan\angle OCA, \\ &h_2 = u_2^2(x_6^2 + x_5^2) - u_1^2((u_1-x_6)^2 + (u_2-x_5)^2) \iff \tan\angle CBO = \tan\angle OBA, \\ &h_3 = x_3(x_2-1) - x_1(x_4-1) \iff \text{A、E和C共线}, \\ &h_4 = x_3(x_3-u_2) + (x_4-1)(x_4-u_1) \iff \text{OE与CE垂直相交}, \\ &h_5 = x_6x_1 - x_2x_5 \iff \text{A、F和B共线}, \\ &h_6 = x_5(x_5-u_2) + x_6(x_6-u_1) \iff \text{OF与BF垂直相交}, \\ &h_7 = x_8x_3 - x_4x_7 \iff \text{B、G和E共线}, \\ &h_8 = (x_8-u_1)x_1 - x_7(x_2-u_1) \iff \text{A、G和D共线}。 \end{aligned} \tag{7}$$

$$g = (x_8-1)x_5 - x_7(x_6-1) \iff C, G \text{ and } F \text{ are collinear.} \tag{8}$$

3 使用格罗布纳基计算和吴方法证明Kariya定理

我们遵循 Cox等人 [4]，回顾使用计算机代数证明几何定理的基础理论。假设假设表示为 $h_1(u, x), \ldots, h_n(u, x)$，结论表示为 $g(u, x)$，其中 $u, x, h_1, \ldots, h_n$ 和 g 的定义与上文相同。初等几何中的定理证明可归结为证明方程的实零点 a

图 4：内心表述的推论2示例。详情见第 2.2.2 节。

$h_1(u, x) = \cdots = h_n(u, x) = 0$ 也是方程 $g(u, x) = 0$的零点。这个想法给出了一个朴素的定义，据此可以推导出结论。下文中，令 $V = V(h_1, \ldots, h_n) \subset \mathbb{R}^{m+n}$ 为由 $h_1, \ldots, h_n$ 定义的仿射簇，并令 I(V) 为 V 的理想。

定义 3（“严格推出”）
结论 g 严格地由假设 h_1,、.....、h_n 推出，当且仅当 $g \in I(V)$。

命题 4
若 $g \in \sqrt{\langle h_1, \ldots, h_n \rangle}$，则 g 严格地由 $h_1, \ldots, h_n$ 推出。

根据定义 3 和命题 4，定理的一个朴素证明可归结为求解根式成员问题。然而，这个条件似乎过于严格，因为命题 4 的逆命题未必成立。在这种情况下，假设中可能存在一个多项式 h(u)，其中只包含独立变量 u，并且 $h(\bar{u}) = 0$ for $\bar{u} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m) \in V$，这意味着几何图形配置 [4] 的一种退化情形。为避免这类退化情形，我们考虑 V 的一个子簇，并要求对于其中的点，仅含独立变量的定义多项式始终非零，如下定义所示。

定义 5（代数独立）
设 $W \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ 是一个不可约仿射簇，其坐标为 $u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_n$。若不存在一个非零多项式，其变量为 $u_1, \ldots, u_m$，且在 W 上有零点，也就是说，$u_1, \ldots, u_m$ 满足 $I(W) \cap \mathbb{R}[u_1, \ldots, u_m] = \{0\}$，则变量 $u_1, \ldots, u_m$ 在 W 上代数独立。

因此，我们通过以下定义接受几何证明中的非退化情形。

定义 6（“泛型地推出”）
结论 g 泛型地由假设 h_1,、.....、h_n 推出，当且仅当

$$g \in \mathbf{I}(V') \subseteq R[u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_n],$$

其中，$V' = W_1 \cup \cdots \cup W_p \subset \mathbb{R}^{m+n}$ 满足：对于 $i = 1, \ldots, p$，W_i 不可约，且 $u_1, \ldots, u_m$ 在 W_i 上代数独立。

首先，要依据定义 6 得出证明，需要计算 $V = V(h_1, \ldots, h_n)$ 的不可约分支。幸运的是，我们有以下命题。

命题 7
设 $H = \langle h_1, \ldots, h_n \rangle$。若存在非零多项式 $c(u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}[u_1, \ldots, u_m])$，满足 $c \cdot g \in \sqrt{H}$，则结论 g 可由假设 $h_1, \ldots, h_n$ 泛型地推出。

注意，若 $g \in H$，则 g 和 H 满足命题 7。

3.1 使用格罗布纳基计算进行证明

本节介绍如何使用格罗布纳基计算 [4] 进行证明。命题 7 告诉我们，计算证明可归结为求解根式成员问题。下面给出推论。

推论 8
在命题 7 的条件下，以下各项等价。

1. 存在一个非零多项式 $c(u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}[u_1, \ldots, u_m]$，满足 $c \cdot g \in \sqrt{H}$。
2. 设 $\tilde{H}$ 是由 $h_1, \ldots, h_n$ 在 $\mathbb{R}(u_1, \ldots, u_m)[x_1, \ldots, x_n]$ 中生成的理想。那么，$g \in \sqrt{\tilde{H}}$。
3. 理想 $\langle h_1, \ldots, h_n, 1 - yg \rangle \subseteq \mathbb{R}(u_1, \ldots, u_m)[x_1, \ldots, x_n, y]$ 的约化格罗布纳基等于 $\{1\}$。

推论 8 告诉我们，证明的计算可归结为求解理想成员问题 $g \in H$，或计算理想 $\langle h_1, \ldots, h_n, 1 - yg \rangle$ 的约化格罗布纳基。

3.2 使用吴方法计算证明

本节将说明如何使用吴方法计算证明。请注意，这里介绍的计算方法是吴方法的一个基础版本 [4], ，其完整版本可见于其他文献（例如，参见 Chou [2]）。在吴方法中，我们首先通过伪除法将与假设对应的多项式“三角化”。然后，我们用三角化后的多项式对与结论对应的多项式反复进行伪除法，以证明结论可由假设推出。

命题 9（伪除法 **[4]**）
设 $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n, y]$ 是表示为以下形式的多项式

$$f = c_p y^p + \ldots + c_1 y + c_0, \quad g = d_m y^m + \ldots + d_1 y + d_0, \tag{9}$$

其中 $c_i, d_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$，且 $m \leq p$，$d_m \neq 0$。那么，存在多项式 $q, r \in k[x_1, \ldots, x_n]$，满足以下条件。

1. $r = 0$，$\operatorname{ordeg}_y r < m$，且存在一个非负整数 s，使得 $d_m^s f = qg + r$.
2. 环 $\in \langle f, g \rangle$（环 $k[x_1, \ldots\ldots, x_n, y]$）中。

在命题 9 中，多项式 q 和 r 分别称为 f 关于 y 对 g 进行伪除法所得的伪商和伪余式。伪余式 r 记作 prem(f, g, y)。

在伪除法算法中，选择 d_m^s ，使得除法在多项式环 $k[x_1, \ldots, x_n]$ 中进行。此外，为避免系数多项式 [8]的次数增长，可用 $d_m / \gcd(d_m, c_p, \ldots, c_0)$ 代替 d_m^s。

在对假设多项式 $h_1, \ldots, h_n \in k[u, x]$, 进行“三角化”时，会反复对变量 $x_n, x_{n-1} \ldots, x_1$ 执行伪除法，以将其化为“三角化”的多项式系统

$$f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n). \tag{10}$$

计算 $f_1, \ldots, f_n$ 所用的变量顺序记为

$$x_n \succ x_{n-1} \succ \cdots \succ x_1,$$

式 (10) 中的多项式集称为升链。

定义 10（不可约升链）
方程 (10) 中的多项式升链称为不可约的，如果对于 $i = 1, \ldots, n$，f_i 在多项式环 $k(u_1, \ldots, u_m)[x_i, \ldots, x_i]/\langle f_1, \ldots, f_{i-1}\rangle$ 中不可约。

于是，对于结论多项式 $g \in k[u, x]$, ，通过升链中方程 (10) 的多项式反复进行伪除法，计算多项式 $R_{n-1}, \ldots, R_{n-0}$，如下所示

$$R_{n-1} = \text{prem}(g, f_n, x_n),\ R_{n-2} = \text{prem}(R_{n-1}, f_{n-1}, x_{n-1}), \ldots, R_0 = \text{prem}(R_1, f_1, x_1), \tag{11}$$

R_0 记作 $\text{prem}(g, f_1, \ldots, f_n)$。下面给出以下命题。

命题 11
设 $\{f_1, \ldots, f_n\}$ 是由假设多项式 $h_1, \ldots, h_n$ 得到的升链，且这些多项式表示为方程 (10) 的形式；设 g 为结论多项式。那么，以下条件等价。

1. $\text{prem}(g, f_1, \ldots, f_n) = 0$.
2. 存在一个非零多项式 $c(u) \in \mathbb{R}[u]$，满足 $c \cdot g \in \langle f_1, \ldots, f_n\rangle$。

$\text{prem}(g, h_1, \ldots, h_n)$

在命题 11 中，注意到我们有 $\langle f_1, \ldots, f_n\rangle \subset H$，其中 H 的定义与命题 7 中相同，因为 $f_i \in H$。因此，推论 8 和命题 11 告诉我们，若有 $\text{prem}(g, f_1, \ldots, f_n) = 0$，则结论 g 泛型地推出自假设 $h_1, \ldots, h_n$。

4 实验

我们在计算机代数系统（CAS）Risa/Asir [7], 上实现了吴方法的一个初等版本，并使用格罗布纳基计算和吴方法，分别基于顶点表述和内心表述 [9]计算出定理1和推论2的证明。测试环境如下：Intel Xeon Silver 4210，主频 2.20 GHz，内存 256 GB，Linux 5.4.0（SMP），Asir 版本 20210326。

4.1 使用格罗布纳基计算证明

本节分别说明如何基于顶点表述和内心表述，通过格罗布纳基计算来求得证明。

4.1.1 使用顶点表述计算证明

在计算定理1的证明时，对于式 (1) 中的假设多项式 $h_1, \ldots, h_{13}$，我们¨已根据次数逆字典序（DegRevLex）排序及如下变量顺序，计算出理想 $I = \langle h_1, \ldots, h_{13} \rangle$ 的格罗布纳基 G_1：

$$x_6 \succ x_7 \succ x_8 \succ x_9 \succ x_{10} \succ x_{11} \succ x_{12} \succ x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_5 \succ x_{13}. \tag{12}$$

然后，对于式 (2) 中的结论多项式 g，我们通过证明 g 关于 G_1 的标准形等于 0，验证了 $g \in H = \langle h_1, \ldots, h_{13} \rangle$。

在计算推论2的证明时，对于式 (3) 中的假设多项式 $h_1, \ldots, h_7$，我们¨已根据 DegRevLex 排序及如下变量顺序 $x_7 \succ x_6 \succ x_5 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_1$，计算出理想 $I = \langle h_1, \ldots, h_7 \rangle$ 的格罗布纳基 G_2。然后，对于式 (4) 中的结论多项式 g，我们通过证明 g 关于 G_2 的标准形等于 0，验证了 $g \in H = \langle h_1, \ldots, h_7 \rangle$。

4.1.2 使用内心表述进行证明计算

在计算定理1的证明时，对于式（5）中的假设多项式 $h_1, \ldots, h_{13}$，我们¨计算了理想 $I = \langle h_1, \ldots, h_{13} \rangle$ 的格罗布纳基 G_3，所依据的变量顺序为 $x_{13} \succ x_{12} \succ x_{11} \succ x_{10} \succ x_9 \succ x_8 \succ x_7 \succ x_6 \succ x_5 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_1$，并采用 DegRevLex 排序。然后，对于式（6）中的结论多项式 g，我们通过证明 g 关于 G_3 的标准形等于 0，验证了 $g \in H = \langle h_1, \ldots, h_{13} \rangle$。

在计算推论2的证明时，对于式（7）中的假设多项式 $h_1, \ldots, h_7$，我们¨计算了理想 $I = \langle h_1, \ldots, h_7 \rangle$ 的格罗布纳基 G_4，所依据的变量顺序为 $x_8 \succ x_7 \succ x_6 \succ x_5 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_1$，并采用 DegRevLex 排序。我们计算得出，式（8）中的结论多项式 g 关于 G_4 的标准形不等于零，而且理想 $\langle h_1, \ldots, h7, 1 - yg \rangle$ 的约化格罗布纳基不等于 {1}。然后，通过添加约束 $u_1 \neq 0$（其中 y_2 是一个新变量），我们计算得出该理想的约化格罗布纳基

$$\langle h_1, \ldots, h_7, 1 - yg, 1 - y_2 u_1 \rangle \tag{13}$$

等于 {1}。

4.1.3 计算时间与变量排序

表1展示了本节中计算证明所需的时间。对于每种表述，该表展示了计算格罗布纳基和标准形所需的时间。例外是使用内心表述证明推论2：在这种情况下，该表仅展示计算式（13）中理想的约化格罗布纳基所需的时间。在下表中，标记为 †、‡ 和 †† 的计算时间分别表示重复测量10次、100次和1000次所得数据的平均值。

在证明的每次计算中，变量排序定义如下。对于使用顶点表述证明定理1的情形，在式（1）的假设多项式中，变量 $x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}$ 出现在总次数为1的项中。因此，我们将变量

表1：使用格罗布纳基计算进行证明的计算时间。请注意，带有字母 †和 †† 的计算时间分别表示重复测量 10 次和 1000 次所得数据的平均值。详情请参阅第4.1.3节。

表述	定理	计算时间（秒）	
		格罗布纳基	标准形
顶点表述	定理1	762.0†	0.4194†
	推论2	0.524†	0.02152†
内心表述	定理1	0.05179†	0.007314†
	推论2	0.002069††	N/A

排序定义为式（12）中的排序，以便优先化简含有 $x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10},x_{11},x_{12}$ 的项。在其他情形中，由于格罗布纳基的计算时间以及标准形的计算时间都足够短，我们将证明定理1时的变量排序定义为 $x_{13} \succ x_{11} \succ \cdots \succ x_1$，将证明推论2时的变量排序定义为 $x_8 \succ x_7 \succ \cdots \succ x_1$。

4.2 使用吴方法计算证明

本节分别说明如何使用吴方法计算顶点表述和内心表述的证明。

4.2.1 使用顶点表述计算证明

在计算定理1的证明时，我们将变量顺序设为

$$x_8 \succ x_7 \succ x_{12} \succ x_{11} \succ x_{10} \succ x_9 \succ x_6 \succ x_{13} \succ x_5 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_1, \tag{14}$$

并且，对于式 (1) 中的 $h_1, \ldots, h_{13}$，计算得到一个升链：

$$f_{1,1}(x_1), f_{1,2}(x_1, x_2), \ldots, f_{1,13}(x_8, x_7, x_{12}, \ldots, x_2, x_1).$$

然后，对于式 (2) 中的 g，我们计算得到 $\mathrm{prem}(g, f_{1,1}, \ldots, f_{1,13}) = 0$。

在计算推论2的证明时，我们将变量顺序设为 $x_7 \succ x_6 \succ x_5 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_1,$，并且对于式 (3) 中的 $h_1, \ldots, h_7$，计算得到一个升链：

$$f_{2,1}(x_1), f_{2,2}(x_1, x_2), \ldots, f_{2,7}(x_7, \ldots, x_2, x_1).$$

然后，对于式 (4) 中的 g，我们计算得到 $\mathrm{prem}(g, f_{2,1}, \ldots, f_{2,7}) = 0$。

4.2.2 使用内心表述计算证明

在计算定理1的证明时，我们将变量顺序设为 $x_{13} \succ x_{12} \succ x_{11} \succ x_{10} \succ x_9 \succ x_8 \succ x_7 \succ x_6 \succ x_5 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_1,$，并且对于式 (5) 中的 $h_1, \ldots, h_{13}$，计算得到一个升链：

$$f_{3,1}(x_1), f_{3,2}(x_1, x_2), \ldots, f_{3,13}(x_{13}, x_{12}, \ldots, x_2, x_1).$$

因此，对于式（6）中的 g，我们计算得到了 $\mathrm{prem}(g, f_{3,1}, \ldots, f_{3,13}) = 0$。

在计算推论2的证明时，我们将变量顺序设为 $x_8 \succ x_7 \succ x_6 \succ x_5 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_1,$，并对式（7）中的 $h_1, \ldots, h_8$ 计算得到一个升链：

$$f_{4,1}(x_1), f_{4,2}(x_1, x_2), \ldots, f_{4,8}(x_8, \ldots, x_2, x_1).$$

于是，对于式 (8) 中的 g，我们计算得到 $\mathrm{prem}(g, f_{4,1}, \ldots, f_{4,8}) = 0$。

表 2：使用吴方法证明的计算时间。注意，带字母的计算时间
† 和 †† 分别表示重复测量 10 次和 1000 次所得数据的平均值。详见第4.2.3节。

表述	定理	计算时间（秒）
顶点表述	定理1	2.952†
	推论2	0.005355††
内心表述	定理1	0.00124††
	推论2	0.01187††

4.2.3 计算时间与变量顺序

表 2 显示了计算本节证明所需的时间。对于每种表述，表中列出了计算升链以及按照式 (11) 对结论多项式反复进行伪除法所需的总计算时间。

在证明的每次计算中，变量顺序定义如下。对于使用顶点表述的定理1证明，式（2）中的结论多项式 g 含有变量 x_7, x_8, x_{11}, x_{12}。此外，式（1）的假设多项式中，分别有多项式含有次数为 1 的 x_7 和 x_8。因此，我们尝试先从 g 中消去 x_7 和 x_8，再从伪余式中消去 x_{11} 和 x_{12}。之后，由于式（1）的假设多项式中存在一些多项式，其含有关于 x_{11}, x_{10}, x_9, x_6 和 x_{13} 的次数为 1 的项，因此我们尝试消去这些变量。由此，我们将变量顺序定义为式（14）所示。在其他情形下，由于计算时间足够短，我们将定理1证明的变量顺序定义为 $x_{13} > x_{12} > \cdots > x_1$，将推论2证明的变量顺序定义为 $x_8 > x_7 > \cdots > x_1$。

5 费尔巴哈双曲线上的计算

对于给定的三角形，费尔巴哈双曲线是等轴双曲线，其中心位于九点圆与内切圆的切点，并经过该三角形的顶点。此外，已知在定理1中改变 k 的值时，Kariya点位于费尔巴哈双曲线上 [6]。本节通过使用顶点表述和内心表述进行格罗布纳基计算及吴方法，证明这一性质。

对于一个 $\in \mathbb{R}$，焦点位于 $(\pm\sqrt{2}a, 0)$ 的等轴双曲线可表示为

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{15}$$

将中心平移至 (p_x, p_y) 并逆时针旋转 θ 后，其中 $p_x, p_y, \theta \in \mathbb{R}$，式 (15) 中的假设变为

$$(cx + sy - p_x)^2 - (-sx + cy - p_y)^2 = a^2, \tag{16}$$

其中 $c = \cos\theta$，$s = \sin\theta$。

证明的计算过程如下。由式（16），令 $g' = (cx+sy-p_x)^2 - (-sx+cy-p_y)^2 - a^2$，其中 x 和 y 替换为适当的变量。根据定理1或推论2中的假设多项式计算出格罗布纳基或升链后，将约束 $c^2 + s^2 - 1$ 添加到格罗布纳基或升链中。如果多项式集对 g′ 的约化结果等于 0，则可知 Kariya点位于费尔巴哈双曲线上。

5.1 使用格罗布纳基计算证明

证明的计算采用了格罗布纳基计算，过程如下。

使用顶点表述计算证明时，对于第4.1.1节中计算得到的格罗布纳基 G_1，令 $\bar{G}_1 = \{c^2 + s^2 - 1\} \cup G_1$。利用等式 (16)，令

$$g' = (cx_{11} + sx_{12} - p_x)^2 - (-sx_{11} + cx_{12} - p_y)^2 - a^2 \iff G(x_{11}, x_{12}) \text{ is located on the hyperbola,}$$

并且我们已计算出 g' 关于 G_1 的标准形等于 0，以证明 $g' \in \langle G_1 \rangle$。使用内心表述计算证明时，对于第4.1.2节中计算得到的格罗布纳基 G_3，令 $\bar{G}_3 = \{c^2 + s^2 - 1\} \cup G_3$。利用等式 (16)，令

$$g' = (cx_{13} + sx_{12} - p_x)^2 - (-sx_{13} + cx_{12} - p_y)^2 - a^2 \iff G(x_{13}, x_{12}) \text{ 位于双曲线上,}$$

并且我们已计算出，相对于 G_3，g' 的标准形等于 0，从而证明 $g' \in \langle G_3 \rangle$。

5.2 使用吴方法计算证明

我们使用吴方法计算证明如下。

在使用顶点表述计算证明时，对于式（1）中的假设多项式 $h_1, \ldots, h_9, h_{12}, h_{13}$，我们计算得到了一个升链

$$f_{5,1}(x_5), f_{5,2}(x_5, x_{13}), \ldots, f_{5,11}(x_5, \ldots, x_8, x_{10}),$$

相对于如下给定的变量顺序

$$x_{10} \succ x_8 \succ x_7 \succ x_6 \succ x_{11} \succ x_{12} \succ x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_{13} \succ x_5. \tag{17}$$

然后，令

$$g' = (cx_{11} + sx_{12} - p_x)^2 - (-sx_{11} + cx_{12} - p_y)^2 - a^2 \iff G(x_{11}, x_{12}) \text{ is located on the hyperbola,}$$

并且我们已计算出 $\mathrm{prem}(g, f_{5,1}, \ldots, f_{5,11}) = 0$。

使用内心表述计算证明时，对于式 (15) 中的双曲线，将中心平移至 (p_x, p_y) 并逆时针旋转 θ，令 $c = \cos 2\theta$，$s = \sin 2\theta$。令假设多项式集合由式 (5) 中的 $h_1, \ldots, h_9, h_{12}, g$ 组成，并且

$$\begin{aligned}
h_{14} &= c^2 + s^2 - 1 \quad \text{(a constraint on } \sin 2\theta \text{ and } \cos 2\theta\text{)},\\
h_{15} &= c - 2p_x c - 2p_y s \iff B(0,0) \text{ and } C(1,0) \text{ are located on the hyperbola,}\\
h_{16} &= x_2^2 c - 2x_2 p_x c + 2x_1 x_2 s - 2x_2 p_y s - 2p_x x_1 s - x_1^2 c + 2x_1 p_y c\\
&\quad \iff B(0,0) \text{ and } A(x_2, x_1) \text{ are located on the hyperbola,}\\
h_{17} &= u_1^2 c - 2u_1 p_x c + 2u_1 u_2 s - 2u_1 p_y s - 2p_x u_2 s - u_2^2 c + 2u_2 p_y c\\
&\quad \iff B(0,0) \text{ and } O(u1, u2) \text{ are located on the hyperbola.}
\end{aligned} \tag{18}$$

对于假设多项式集合，我们已计算出一个升链

$$f_{6,1}(x_1), f_{6,2}(x_1, x_2), \ldots, f_{6,15}(x_1, \ldots, p_y, p_x),$$

相对于变量顺序

$$p_x \succ p_y \succ c \succ s \succ x_{13} \succ x_{12} \succ x_9 \succ x_8 \succ x_7 \succ x_6 \succ x_5 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_1. \tag{19}$$

表3：费尔巴哈双曲线证明的计算时间。请注意，带有字母 †、‡ 和 †† 的计算时间分别表示重复测量 10 次、100 次和 1000 次所得数据的平均值。详情请参见第5.3节。

计算方法	表述	计算时间（秒）
格罗布纳基	顶点表述	0.01147††
	内心表述	0.002255††
吴方法	顶点表述	0.1639‡
	内心表述	2.162†

然后，令

$$g' = x_{13}^2 c - 2x_{13}p_x c + 2x_{13}x_{12}s - 2x_{13}p_y s - 2p_x x_{12}s - x_{12}^2 c + 2x_{12}p_y c$$
$$\iff B(0,0) \text{ and } G(x_{13}, x_{12}) \text{ are located on the hyperbola,}$$

并且我们已计算出 $\mathrm{prem}(g_2, f_{6,1}, \ldots, f_{6,15}) = 0$。

请注意，h_{15},h_{16},h_{17},g_2 的推导将在附录中说明。

5.3 计算时间与变量排序

表3展示了本节证明所需的计算时间，包括使用顶点表述和内心表述进行格罗布纳基计算及吴方法的计算时间。

变量顺序定义如下。在格罗布纳基计算中，采用证明定理1时使用的变量顺序（见第4.1.3节）。

在采用顶点表述的吴方法中，变量顺序按如下理由设定，如式（17）所示。计算升链时，我们首先消去 x_{10}，因为在 $h_1, \ldots, h_9, h_{12}, h_{13}$ 中出现的 x_{10} 项数，在 $h_1, \ldots, h_9, h_{12}, h_{13}$ 中出现的变量里最少。接着，我们消去 x_8，因为在输入多项式中出现的 x_8 项数，在输入多项式中出现的变量里最少。重复这一过程，在每一步计算升链时，消去在多项式中出现项数最少的变量。

在使用内心表述的吴方法中，变量顺序如式（19）所示，原因如下。在计算升链时，我们先按此顺序消去新引入的变量 p_x、p_y、c 和 s，然后按照证明定理1时所用的相同顺序消去其余变量（参见第 4.2.2 节）。

6 结论

本文使用顶点表述和内心表述，通过格罗布纳基计算和吴方法，给出了 Kariya定理及其推论的计算机辅助证明。此外，我们还给出了计算机辅助证明，证明 Kariya点也以类似方式位于 Feuerbach双曲线上。

计算时间（见表1和表2）表明，在定理1的证明中，内心表述更适合高效计算。在推论2的证明中，使用内心表述能提高格罗布纳基计算的效率，而使用顶点表述则能提高吴方法的效率；因此，哪种表述更有效取决于所用的方法。

利用计算机代数对Kariya定理进行计算机辅助证明的未来研究课题包括以下内容。

1. 在格罗布纳基计算和吴方法证明中，采用不同于本文所用的变量序，可能会加快计算。2. 在内心表述中，将内心设为原点可能会加快计算。3. 虽然 Kariya定理使用内心，但该定理可能也适用于旁心。4. 利用格罗布纳基计算，可以从假设多项式推导出费尔巴哈双曲线的公式。5. 尽管本文使用了笛卡尔坐标系，但其他坐标系可能会加快计算。（请注意，Coanda、等人 [3] 使用重心坐标系，从其更一般形式的定理推导出 Kariya定理。）

致谢

本文的研究最初是筑波大学理工学院数学学院的一项本科生研究项目。作者感谢 Nanako Ishii 和 Gaku Kuriyama 在项目期间与作者合作。

参考文献

[1] A. Bostan. 11154：三角形中心 X(79)，问题与解答。《美国数学月刊》119(8):703–704，2012年10月。[2] S.-C. Chou. 机械化几何定理证明。D. Reidel，1988年。[3] C. Coanda、F. Smarandache 和 I. Patraşcu. 三角形几何中若干特殊点的推广。载于 I. Patraşcu 和 F. Smarandache 编，《平面几何专题变奏》，第69–73页。Education Publishing，2013年。[4] D. A. Cox、J. Little 和 D. O’Shea.《理想、簇与算法：计算代数几何与交换代数导论》。施普林格，第4版，2015年。[5] J. Kariya. 关于三角形的一个定理。《数学教学》6:130–132，1904年。[6] S. N. Kiss 和 P. Yiu. 切点三角形与费尔巴哈双曲线。《几何论坛》14:63–86，2014年。[7] M. Noro. 计算机代数系统：Risa/Asir。载于 M. Joswig 和 N. Takayama 编，《代数、几何与软件系统》，第147–162页。施普林格，2003年。[8] K. Shiraishi、H. Kai 和 M.-T. Noda. 稳定化吴方法在机器人控制中的应用。载于《计算机代数——算法、实现与应用》，RIMS Kôkyûroku 第1295卷，第203–208页。京都大学，2002年。（日语）。[9] A. Terui、A. Ito 和 T. Kasai. teamsnactsukuba/kariya：投稿前发布版 (v1.0) [计算机软件]。Zenodo，2023年。https://doi.org/10.5281/zenodo.7828998[10] P. Yiu. 狩谷问题与相关构造。《几何论坛》15:191–201，2015年。

附录：方程 (18) 中 h_{15},h_{16},h_{17} 和 g_2 的推导

在附录中，我们给出式 (18) 中 h_{15},h_{16},h_{17} 和 g_2 的推导。

在推导公式之前，我们先展示对方程 (15) 中双曲线的一种变换。将方程 (15) 中的双曲线逆时针旋转 θ 后，得到

$$(x\cos\theta + y\sin\theta)^2 - (-x\sin\theta + y\cos\theta)^2 = a^2.$$

展开左侧，并按 x 和 y 收集各项，可表示为

$$x^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2xy(2\cos\theta\sin\theta) - y^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = a^2.$$

应用二倍角公式，可得

$$x^2c - 2xys - y^2c = a^2,$$

其中 $c = \cos 2\theta$，$s = \sin 2\theta$。将原点平移至 (p_x, p_y) 后，得到

$$(x - p_x)^2c - 2(x - p_x)(y - p_y)s - (y - p_y)^2c = a^2. \tag{20}$$

现在，h_{15} 推导如下。在图3中，由于式（20）中的双曲线经过 B(0,0)，因此有

$$p_x^2c - 2p_xp_ys - p_y^2c = a^2. \tag{21}$$

此外，由于同一条双曲线经过 C(1, 0)，因此有

$$(1 - p_x)^2c - 2(1 - p_x)p_ys - p_y^2c = a^2. \tag{22}$$

将式（21）和式（22）的左端等同，即可推导出 h_{15}。

接下来，h_{16} 推导如下。在图3中，由于式（20）中的双曲线经过 $A(x_2,x_1)$，因此有

$$(x_2 - p_x)^2c - 2(x_2 - p_x)(x_1 - p_y)s - (x_1 - p_y)^2c = a^2. \tag{23}$$

将式（21）和式（23）的左端等同，即可推导出 h_{16}。

接下来，h_{17} 推导如下。在图3中，由于式（20）中的双曲线经过 $O(u_1,u_2)$，因此有

$$(u_1 - p_x)^2c - 2(u_1 - p_x)(u_2 - p_y)s - (u_2 - p_y)^2c = a^2. \tag{24}$$

通过等同方程（21）和（24）的左端，得到 h_{17}。

最后，g_2 的推导如下。在图3中，由于方程（20）中的双曲线经过 $G(x_{13},x_{12})$，因此有

$$(x_{13} - p_x)^2c - 2(x_{13} - p_x)(x_{12} - p_y)s - (x_{12} - p_y)^2c = a^2. \tag{25}$$

通过等同方程（21）和（25）的左端，得到 g_2。