arXiv:2304.07507v1 [cs.DM] 15 Apr 2023

计算有标号图的最短12-表示词

Asahi Takaoka*

2023年4月18日

摘要

12-可表示图这一概念是作为一类著名的词可表示图的变体而引入的。最近，研究表明，这类图等价于简单三角形图的补图。这意味着，如果某个图存在12-表示词（即表示该图的词），则可在多项式时间内求得。然而，所得的12-表示词不一定是最优的（即可能不是最短的）。本文提出了一种 $O(n^2)$时间算法，用于生成有标号图的最短12-表示词，其中 n 是该图的顶点数。

1 引言

如果存在一个由字母表 $V(G)$ 中的字母构成的词 w ，使得当且仅当从 w 中删除所有其他字母后，剩下的词为 $xyxy\cdots$ 或 $yxyx\cdots$ 时，图 G 中的两个字母 x 和 y 在 G 中相邻，则称该图为词可表示图。这样的词w 称为 G的图的表示词。近年来，词可表示图受到了广泛研究 [5, 7]。与本文相关的一项成果是，识别问题为 NP-困难，参见 [5, 定理 39] 或 [7, 定理 4.2。15]。

Jones等人 [4]引入了 u-可表示图的概念，作为词可表示图的推广。在此背景下，词可表示图称为 11-可表示图。Kitaev [6] 证明，在 u-可表示图理论中，只有两个图类是非平凡的：11-可表示图和 12-可表示图。本文聚焦于 12-可表示图。

令 $[n]=\{1,2,\ldots,n\}$ 为一个正 n。若一个标记图 G 的标号取自 $[n]$，则称其为 12-可表示的；如果存在一个关于 $[n]$的词 w ，使得 $[n]$ 中的每个字母在 w 中至少出现一次，并且对于满足 $i<j$ 的两个顶点 i 和 j ，它们在 G 中相邻，当且仅当没有 i 出现在 j 之前于 w中。在这种情况下，称 w 对图 G进行 12-表示，并称 w 为 G的 12-表示词。例如，

*信息与系统学院，室兰工业大学，日本北海道室兰市，邮编 050–8585。 *E-mail*: takaoka@mmm.muroran-it.ac.jp

图 G_1（图 1(a)）是 12-可表示的，其表示词为 $w = 8753532847616421$。如果存在对 G的标记，使其生成一个 12-可表示的标记图，则称无标号图 G 为 12-可表示的。

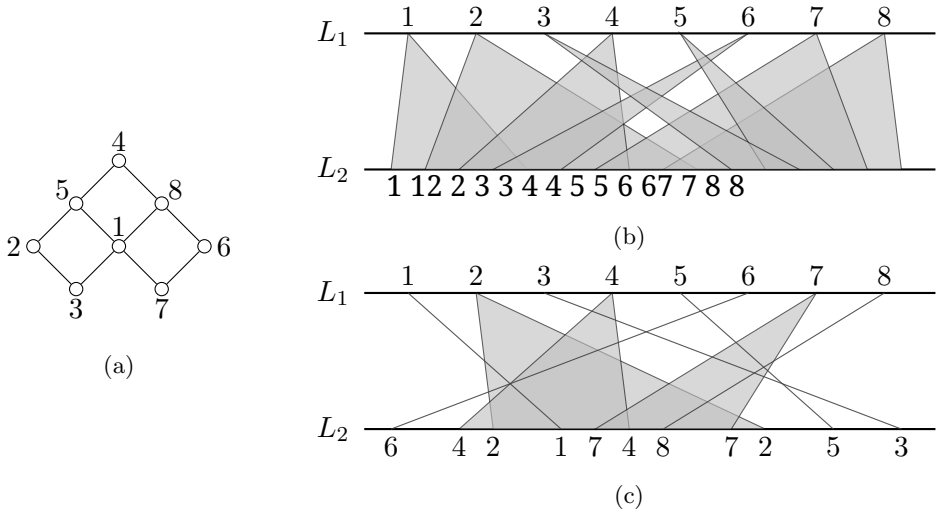

图1：（a）一个 12-可表示图 G_1。（b）补图 $\overline{G}_1$ 的一个模型 G_1。（c）另一个 $\overline{G}_1$的模型。顶点根据 L_1上的点进行标号。从图 1(b)中的模型得到的词$w = 8753532847616421$是 G_1的一个 12-表示词。我们可以从图 1(c)中的模型得到另一个 12-表示词 $w' = 35278471246$。如例13所述，顶点 2、4 和 7 在 G_1中是坏点；因此， w' 是 G_1的一个最短 12-表示词。

Jones等人 [4] 证明，12-可表示图类是可比图的真子类，同时也是余区间图和排列图的真超类。他们还给出了 12-可表示树的刻画，并提出了 12-可表示性的一个必要条件；后来证明该条件也是充分的（定理6）。Chen 和 Kitaev [1] 研究了网格图的一个子类的 12-可表示性，并给出了其刻画。

12-可表示图这一类图等价于简单三角形图的补图 [10]。这种等价关系可如下描述。设L_1 和 L_2 是平面上的两条水平直线，且 L_1 位于 L_2上方。L_1 上的一个点和 L_2 上的一个区间确定了 L_1 与 L_2之间的一个三角形。若存在一个三角形 T_v 对应 G 的每个顶点 v ，使得两个顶点 u 和 v 相邻当且仅当 T_u 与 T_v相交，则该图是一个简单三角形图 [2] 。三角形集合$\{T_v\colon \quad v \in V(G)\}$ 称为 G的模型或表示；为避免混淆，本文使用“模型”这一术语。例如，图 1(b)是图 1(a)中图 G_1 的补图 $\overline{G}_1$ 的一个模型。事实上， G_1 的两个顶点相邻当且仅当对应的三角形不相交。

给定一个简单三角形图的模型，我们可以根据每个三角形在 L_1 上的点从左到右进行标记，然后从右到左读取 L_2 上端点的标号，从而得到其补图的一个12-表示词。举例来说，可以从图 1(b)的模型得到 G_1 的一个12-表示词 $w = 8753532847616421$ 。另一方面，由于补图存在一种12-表示词，其中每个字母最多出现两次（定理 1），因此我们可以从其补图的一个12-表示词构造出简单三角形图的模型。

值得一提的是，一个简单三角形图可以有多个模型，而不同模型可能产生不同的 12-表示词。例如，图 1(c)展示了 $\overline{G}_1$的另一个模型，它给出了 G_1的另一个 12-表示词 w' =35278471246。此外，三角形也可以退化为直线，如图 1(c)的模型所示；这对应于 12-表示词中出现两次的字母。

由于可以在 $O(nm)$ 时间内识别简单三角形图， [12], 这一等价关系表明，可以在 $O(n(\bar{m}+n))$ 时间内识别 12-可表示图，其中 n、 m 和 $\bar{m}$ 分别是给定图的顶点数、边数和非边数。此外，如果图存在 12-表示词，也可以在相同的时间复杂度内求得。

需要指出的是，对于有标号图，也就是说，已给定标记时，能够在 $O(n^2)$ 时间内识别 12-可表示图 [10]。图的某种标记可能允许存在 12-表示词，而另一种标记则不允许（定理6）。寻找有效标号需要 $O(n(\bar{m}+n))$ 时间；但给定有效标号后，我们可以在 $O(n^2)$ 时间内求得 12-表示词（定理 7）。

通过 [10] 获得的 12-表示词长度为 $2n$，而如何改进长度上界仍是一个开放问题 [10]。本文研究的正是这一问题。该问题也可以看作：模型中的多少个三角形可以退化为直线。本文提出了一种 $O(n^2)$ 时间算法，用于计算给定标记图的最短 12-表示词。具体而言，我们给出一种算法，将标记图 G 的 12-表示词 w 转换为 G的最短 12-表示词 w' 。该算法见第 3 节。第 2 节介绍本文所用的一些定义、记号和结果。第 4 节讨论无标号情形，并提出一个开放问题。值得注意的是，无论标记如何，计算图的表示词都是 NP-困难的，因为识别问题是 NP-困难的 [5, 7] ；而且，与 12-可表示图不同，标记对词可表示图并不重要。

2 预备知识

图 本文中的所有图都是有限的、简单的无向图。我们用 uv表示连接两个顶点 u 和 v 的边。对于图 G，我们分别用 $V(G)$和$E(G)$表示 G的顶点集和边集。我们通常

用 n表示顶点数。图 G 的补图是图$\overline{G}$，满足：对于 $\overline{G}$中的任意两个顶点 u、v，$V(\overline{G}) = V(G)$且 $uv \in E(\overline{G})$，当且仅当 $uv \notin E(G)$。对于图 G，若对所有H中的 u、$v \in V$，$V(H) \subseteq V(G)$且 $uv \in V(H)$，当且仅当 $uv \in V(G)$，则图 H 是 G 的诱导子图。

图 G 的标记图是通过 G 为每个顶点分配一个整数（标号）得到的。G的标记是为 G的顶点分配标号。所有标号均假定互不相同，且取自 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$。对于标记图，我们通常用顶点的标号表示顶点。除非另有说明，图均假定为无标记图。

平凡的上界和下界 根据定义，每个 12-表示词至少包含每个字母的一份。因此，n 是 12-表示词长度的下界。以下定理给出了上界。

定理 1（[4]）。对于一个 12-可表示图，存在一个 12-表示词，使得每个字母至多出现两次。

命题2。图的最短 12-表示的长度至少为 n，至多为 $2n$，其中 n 是该图的顶点数。

以下定理也可用于得到下界。

定理3（[4]）。一个图可由一个排列 12-表示，当且仅当它是排列图。

推论4。若一个图不是排列图，则其 12-表示词的长度至少为 $n+1$，其中 n 是该图的顶点数。

例如，将推论4应用于图 1(a) 中的图 G_1，可得下界。

例5。我们可以如下看出，图 1(a) 中的图 G_1 不是排列图。从 G_1 中删除顶点 6 后得到的图，与 $[3,\ 8]$中的图 $\overline{\Gamma}_{12}[8]$ 同构。因此，G_1 不是可比图的补图。由于任何排列图都是可比图的补图 [9], ，图 G_1 不是排列图。因此，G_1 的每个 12- 表示词的长度至少为 9。

标记与识别 在处理 12-可表示图时，标记非常重要。以下定理表明，并非所有 12-可表示图的标记都是 12-可表示的。

定理6（[10]）。标记图 G 是 12-可表示的，当且仅当 G 不包含诱导子图 H，使得 red(H) 等于图2中的 I_3、J_4 或 Q_4 之一；其中，red(H) 表示 H的约化形式，即通过重新标记 H，将第 i小的标号替换为 i后得到的标记图。

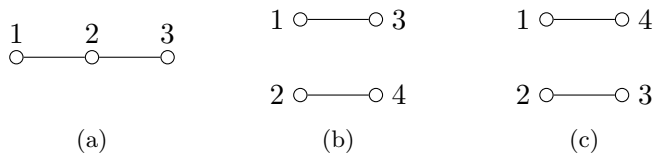

图2：有标号图 I_3 （a）、 J_4 （b）和 Q_4 （c）。

需要指出的是，定理6中的必要性最早由 Jones等人 [4]提出。我们称一种标记为有效标记，若其产生的图在约化形式下不包含与 I_3、 J_4 或 Q_4 同构的诱导子图。

如引言中所述，12-可表示图恰好是简单三角形图 [10]的补图。因此，可以在 $O(n(\bar{m}+n))$时间内识别12-可表示图，其中 $\bar{m}$ 是给定图的非边数。然而，当给定一个有效标号时，我们可以在 $O(n^2)$时间内得到其12-表示词。

定理 7（[10]）。对于12-可表示图 G的一个有效标号，可以在 $O(n^2)$时间内得到 G 的一个12-表示词，且无需对 G进行重新标记。

因此，可以在 $O(n^2)$时间内验证有标号图的12-可表示性。更具体地说，给定12-可表示图 G的一个有效标号，我们可以通过 [11]中的算法，在 $O(n^2)$时间内得到其补图 $\overline{G}$ 的一个模型。根据引言中所述的模型，可以得到 G 的一个12-表示词。因此，所得的12-表示词中每个字母至多出现两次。

定理8. 给定一个标记图，可以在 $O(n^2)$ 时间内检验该图是否可由 12-表示词表示。如果该图可由 12-表示词表示，则可以在 $O(n^2)$ 时间内求得一个其中每个字母至多出现两次的 12- 表示词。

3 算法

我们首先改进 12-表示词长度的下界。

定义9. 设 G 是一个标记图。若存在两个顶点 a 和 c，满足 $a<b<c$，且 ab、$bc \notin E(G)$ 和 $ac \in E(G)$，则称 G 中的顶点 b 为坏顶点。若一个顶点不是坏顶点，则称其为好顶点。

命题 10. 设 G 是一个可由 12-表示词表示的标记图。 G 的每个坏顶点在其任意一个 12-表示词中都必须出现两次。

证明。设 w 是 G 的一个 12-表示词，并设 a、 b 和 c 是三个满足 $a<b<c$ 的顶点，其中 ab、$bc \notin E$（G）且 $ac \in E$（G）。由于 $ac \in E$（G）， c 的每个副本都出现在 w 中 a 首次出现之前。于是， ab、$bc \notin E$（G）分别意味着 b 出现在 w 中某个 a 之后以及某个 c 之前。 □

命题 10 得出以下下界。

引理 11. 设 G 是一个标记图。 G 的每个 12-表示词的长度至少为 $n+b$，其中 n 和 b 分别是 G 的顶点数和坏顶点数。

在本节剩余部分中，我们证明标记图的最短12-表示词的长度恰好为 $n+b$。假设存在一个 12-可表示图G，其 12-表示词为 w。根据定理 1，我们可以假设每个字母在 w 中最多出现两次。命题 10 指出，所有坏顶点在 w 中都出现两次。如果 w 的长度大于 $n+b$，那么某些好顶点会在 w 中出现两次。因此，我们提出一种算法，将 w 转换为 G 的另一个 12-表示词，其中没有好顶点出现两次。

以下是一个关键观察。

命题 12. 设 G 为一个带有 w 的 12-表示词的标记图。假设字母 i 在 w 中出现两次。

(a) 设 j 是紧接在 i 第一次出现之后的一个字母，即 $w = W_1ijW_2iW_3$，其中 W_1、 W_2 和 W_3 是 w 的子词。如果 $j < i$，那么词 w' =$W_1jiW_2iW_3$ 是 G 的 12- 表示词。(b) 设 j 是紧接在 i 第二次出现之前的一个字母，即 $w = W_1iW_2jiW_3$，其中 W_1、 W_2 和 W_3 是 w 的子词。如果 $j > i$，那么词 w' =$W_1iW_2ijW_3$ 是 G 的 12-表示词。(c) 如果 i 的两次出现紧邻于 w 中，我们可以删去其中一次。换言之，如果 $w = W_1iiW_2$，其中 W_1 和 W_2 是 w 的子词，那么词 $w' = W_1iW_2$ 是 G 的 12-表示词。

证明。(a) 由于 j 在 w 中出现在 i 第二次出现之前，因此有 $ij \notin E(G)$。字母 j 在 w' 中仍出现在 i 之前，因此 w' 是 G 的一个 12-表示词。(b) 以类似的方式即可证明。(c) 显然。 □

命题 12 导出了算法 1，该算法生成一个 12-表示词，其中没有好顶点出现两次。该算法假设输入中每个字母至多出现两次。

在证明算法 1 的正确性之前，我们先了解该算法的工作方式。

例13。回顾一下，词 $w = 8753532847616421$ 是图 G_1 的一个 12-表示词，如图 1(a) 所示。对 w 应用算法 1，得到 12-表示词 $w' = 35278471246$。这一操作如图 3 所示。由于 G_1 中有三个顶点 2、4 和 7 是坏顶点，因此词 w' 是最短的。

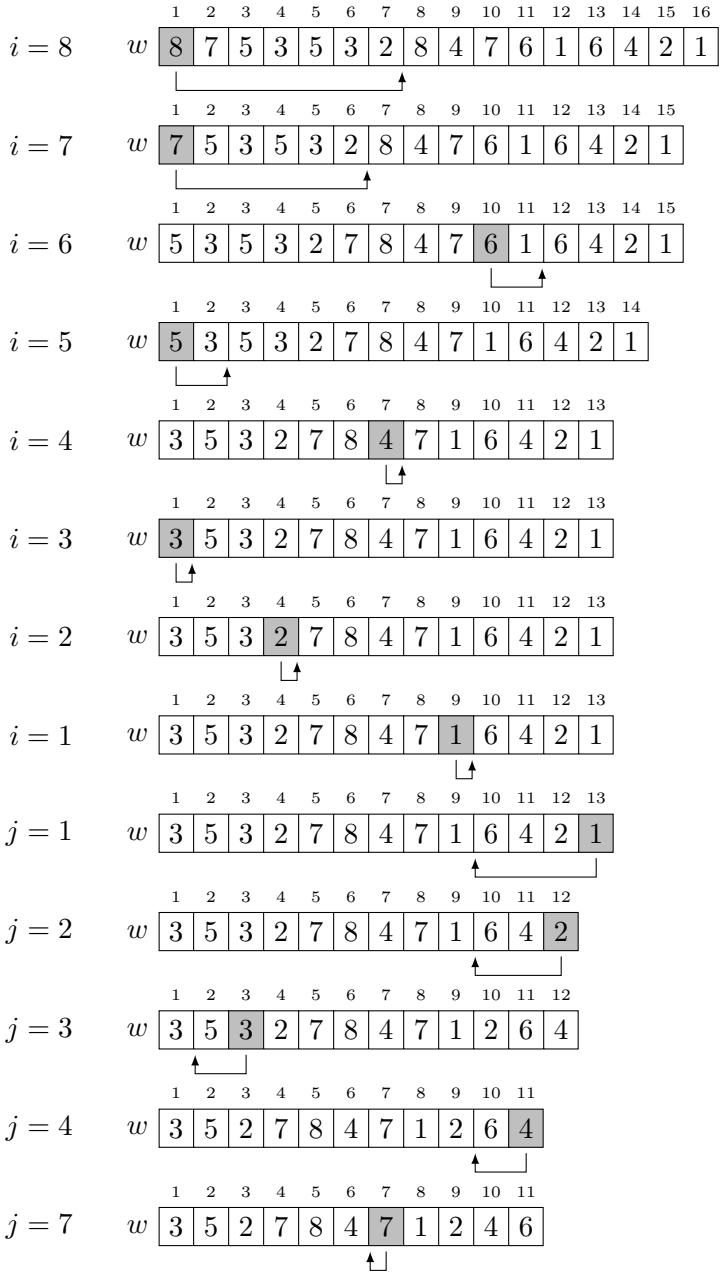

图 3：算法 1 在词 $w = 8753532847616421$ 上的操作。每个字母都存储在其位置显示于上方的方框中。每次迭代中，阴影方框中的字母会移动，箭头表示移动方向。前八行展示第 1–7 行中的循环，其余各行展示第 8–14 行中的循环。我们省略了 $j = 5$、6 和 8 这几种情况，因为这些字母在当时的 w 中没有出现两次。

算法 1：计算标记图的最短 12-表示

输入：标记图 G 的一个 12-表示词 w。

输出：G 的最短 12-表示词。

```
// 我们假设每个字母在 w 中最多出现两次。
1  对 i ← n 至 1 执行递减循环
2  |  如果 i 在 w 中出现两次，则
3  |  |  将 p 设为 i 在 w中首次出现的位置;
4  |  |  当 w_p > w_{p+1} 时，交换 w_p 和 w_{p+1}; p = p + 1;
5  |  |  如果 w_p = w_{p+1}，则从 w中移除 w_p ;
6  |  end
7  结束
8  对于从 j ← 1 到 n 的每个值，执行
9  |  如果 j 在 w 中出现两次，则
10 |  |  将 q 设为 j 在 w中第二次出现的位置;
11 |  |  当 w_q < w_{q-1} 时，交换 w_q 和 w_{q-1}; q = q − 1;
12 |  |  如果 w_q = w_{q-1}，则从 w中移除 w_q ;
13 |  end
14 结束
15 返回 w。
```

现在，我们证明算法 1 的正确性。

定理 14。算法 1 计算出输入所表示的标记图的一个最短 12-表示词。

证明。令 G 和 w 分别表示图和输入。命题 12 保证输出仍是 G 的一个 12-表示词。根据命题 10，坏顶点在任何 12-表示词中都会出现两次。因此，只需证明输出中没有好顶点出现两次。我们用 w_p 表示 w 在位置 p 处的字母，即 $w = w_1 w_2 \dots w_\ell$。

令 j 为 G 的一个好顶点。反设 j 在第 j 次循环结束时的 w 中出现两次，其中循环位于第 8–14 行。

断言 15。设 i 为一个字母，且 $i \geq j$ 在第 j 次循环结束时的 w 中出现两次，其中循环位于第 8–14 行。若 p 是 i 的第一个位置，则 $w_p < w_{p+1}$。

断言 15 的证明。根据算法 1，我们可以看到，在第 $n-i+1$ 次循环结束时（第 1–7 行），$w_{p'} < w_{p'+1}$，此时 p' 是 i 的第一个位置。在第 $n-i+1$ 次循环之后，只有小于 i 的字母向前移动。因此，在第 8–13 行的第一次循环开始时，$w_{p''} < w_{p''+1}$，此时 p'' 是 i 的第一个位置。在第 8–14 行的第 j 次循环结束之前，只有小于或等于 i 的字母向后移动。因此，断言成立。 □

断言 16. 设 k 为一个字母， $k \leq j$ 在第 j 次循环结束时的直线 8–14 中于 w 出现两次。若 q 是 k 的第二个位置，则 $w_q > w_{q-1}$。

断言 16 的证明。根据算法 1，我们可以看到，在第 8–14 行的第 k 次循环结束时， $w_{q'} > w_{q'-1}$ ，此时 q' 是 k 的第二个位置。在第 k 次循环之后，只有大于 k 的字母向后移动。因此，断言成立。 □

设 p 和 q 分别为第 j 次循环结束时 j 的第一个和第二个位置。根据断言 15，我们有 $w_{p+1} > w_p$ ；根据断言 16，我们有 $w_{q-1} < w_q$。设 $i_1 = w_{p+1}$ 和 $k_1 = w_{q-1}$，即 $w = W_1 j i_1 W_2 k_1 j W_3$，其中 W_1、 W_2和 W_3 是 w 的子词。我们有 $k_1 < j < i_1$ 和 $k_1 j$, $ji_1 \notin E(G)$。由于 j 是一个好顶点， $k_1 i_1 \notin E(G)$。因此，某个 k_1 在 w 中出现在某个 i_1 之前。由此可知，另一个 i_1 出现在 w_{p+1} 之后，或者另一个 k_1 出现在 w_{q-1} 之前。

假设 i_1 出现在 w_{p+1}之后。断言 15 表明 $w_{p+2} > w_{p+1}$。令$i_2 = w_{p+2}$，即 $w = W_1 j i_1 i_2 W_4 k_1 j W_3$，其中 W_4 是 w的子词。我们有$k_1 < j < i_2$ 和 $k_1 j, ji_2 \notin E(G)$。由于 j 是一个好顶点，因此 $k_1 i_2 \notin E(G)$。于是，在 w中，某个 k_1 出现在某个 i_2 之前。由此可知，另一个 i_2 出现在 w_{p+2}之后，或者另一个 k_1 出现在w_{q-1}之前。

另一方面，假设 k_1 出现在 w_{q-1}之前。断言 16 表明$w_{q-2} < w_{q-1}$。令 $k_2 = w_{q-2}$, 即 $w = W_1 j i_1 W_5 k_2 k_1 j W_3$，其中 W_5 是 w的子词。我们有 $k_2 < j < i_1$ 和 $k_2 j$, $ji_1 \notin E(G)$。由于 j 是一个好顶点，$k_2 i_1 \notin E(G)$。于是，在 w中，某个 k_2 出现在某个 i_1 之前。由此可知，另一个i_1 出现在 w_{p+1} 之后，或者另一个 k_2 出现在w_{q-2}之前。

如此继续下去，我们得到一个无限序列 $w_p < w_{p+1} < w_{p+2} < \cdots$或 $w_q > w_{q-1} > w_{q-2} > \cdots$，这就产生了矛盾。 □

由定理 14，我们得到主定理。

定理 17. 标记图的最短 12-表示词的长度为$n + b$，其中 n 和 b 分别是该图的顶点数和坏顶点数。可以在$O(n^2)$ 时间内求得标记图的最短 12-表示词。

证明. 定理 14 的证明给出了第一条结论。定理8指出，每个字母出现次数至多为两次的标记图的一个 12-表示词可以在 $O(n^2)$ 时间内求得。显然，算法 1 的运行时间为 $O(n^2)$。因此，第二条结论成立。 □

4 结论性说明

本文提出一种 $O(n^2)$ 时间算法，可将有标号图 G 的一个 12-表示词 w 转换为 G 的最短 12-表示词 w' ，其中 n 表示顶点数

G 的顶点数。这表明，可以在 $O(n^2)$ 时间内求出有标号图的最短 12-表示词。接下来很自然要研究无标号情形，即求给定无标号图的最短 12-表示词的问题。

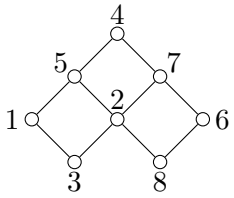

图4：图1(a)中图的一种不同标记。正如定理2所示，词是该图的一个12-表示词。

对于12-可表示性，从存在性的角度来看，标记很重要（定理6）。要找到无标号图的最短12-表示，标记同样重要。换言之，图的一种标记所对应的最短12-表示，可能比另一种标记所对应的更短。例如，如例13所示，图1(a)中的图的最短12-表示长度为。然而，如果我们在图4中将重新标记为，那么就得到一个长度为的12-表示，如定理2所示；只有顶点4是中的坏点。由例5可知，是该无标号图的最短12-表示。因此，我们以提出以下开放问题作为本文的结尾。

问题1. 给定一个无标号图 G，我们能否在多项式时间内计算出一种有效标号，使 G 中坏顶点的数量最少?

参考文献

[1]J. N. Chen 和 S. Kitaev. 关于网格图诱导子图的 12-可表示性。《讨论数学：图论》，42(2):383–403，2022年。doi:10.7151/dmgt.2263.[2] D. G. Corneil 和 P. A. Kamula. 排列图和区间图的扩展。Congr. Numer., 58:267–275，1987年。[3] T. Gallai. 可传递定向图。Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 18(1):25–66，1967年。doi:10.1007/BF02020961.[4] M. Jones、S. Kitaev、A. Pyatkin 和 J. Remmel. 通过模式避免词表示图。Electron. J. Comb., 22(2):P2.53，2015年。doi:10.37236/4946.

[5] S. Kitaev. 词可表示图理论的全面导论´。载于 E. Charlier、J. Leroy 和 M. Rigo 编，《语言理论的发展——第21届国际会议 DLT 2017》，比利 `时列日，2017年8月7日至11日，论文集，计算机科学讲义第10396卷，第36–67页。Springer，2017年。doi:10.1007/978-3-319-62809-7_2.[6]S. Kitaev. 图的 u-表示的存在性。《图论杂志》，85(3):661–668，2017年。doi:10.1002/jgt.22097.[7]S. Kitaev 和 V. Lozin.《词与图》。《理论计算机科学专著》。EATCS 丛书。Springer，2015年。doi:10.1007/978-3-319-25859-1.[8] F. Maffray 和 M. Preissmann. Tibor Gallai 论文《可传递定向图》的译文。载于 J. L. Ram´ırez-Alfons´ın 和 B. A. Reed 编，《完美图》，Wiley-Interscience 离散数学与优化丛书，第3章，第25–66页。Wiley，2001年。[9] A. Pnueli、A. Lempel 和 S. Even. 图的传递定向与排列图的识别。《加拿大数学杂志》，23(1):160–175，1971年。doi:10.4153/CJM-1971-016-5.[10] A. Takaoka. 与 12-可表示图等价的图类。《讨论数学：图论》。doi:10.7151/dmgt.2486.[11]A. Takaoka. 简单三角形图的顶点排序刻画。《离散数学》，341(12):3281–3287，2018年。doi:10.1016/j.disc.2018.08.009.[12] A. Takaoka. 简单三角形图的识别算法。《离散应用数学》，282:196–207，2020年。doi:10.1016/j.dam.2019.11.009.