arXiv:2304.07510v1 [math.CO] 15 Apr 2023

箭图与簇代数的特殊折叠

DANI KAUFMAN

Abstract. 我们给出折叠箭图和折叠簇代数的精确定义，并提供许多例子，其中包括一些具有有限变异结构、但在未折叠情形中没有对应物的例子。我们将这些例子与有限变异型箭图 X_6和 X_7联系起来。我们还构造了一个与带孔曲面的三角剖分相关联的折叠簇代数，其中允许出现含自折叠三角形的三角剖分。我们给出一种简单的折叠簇代数构造，其簇复形是一个广义全排列多面体。

1. Introduction

我们考察箭图、其突变及相关簇代数的若干族和例子。特殊折叠 本质上，箭图的折叠就是将其节点划分为互不相交的集合，并对每组节点同时进行突变。通过为每组中的各个节点赋予相同的簇变量，便得到相应的“折叠簇代数”。箭图折叠是一种自然且广为人知的方法，可由斜对称交换矩阵构造出具有非斜对称交换矩阵的簇代数，参见 [1]。

我们所说的“特殊”折叠，指的是任何无法用斜对称化交换矩阵表示的折叠。

这些特殊折叠最初源于这样一种愿望：为带标记点曲面构造一个簇代数，其中包含对应于三角剖分中围住自折叠三角形的弧的簇变量。我们在第 4 节中通过对曲面作一个在标记点处分歧的二重覆盖，并按覆盖曲面的相关箭图在甲板变换下进行折叠，构造了这样一个簇代数。所得簇代数本质上是通常与曲面相关联的簇代数，但也包含对应于自折叠弧的簇变量。这些簇变量可以写成其他簇变量的单项式，并且实际上已经包含在通常的曲面簇代数中。

我们的构造与将广义簇代数关联到具有 [2]轨形奇点的曲面的构造有显著相似之处。在带有 $n+1$ 个标记点和一个 $\mathbb{Z}_2$ 轨形点的圆盘情形中进行折叠，会从一个 D_{n+1} 型簇代数得到一个 B_n型簇代数。然而，在我们的情形中，我们对一个带有 $2n$ 个标记点的$\widehat{\ }$带标记点的圆盘进行循环折叠，从而由$\widehat{\ }$一个 D_{2n} 型代数得到我们称为 D_n 型的簇代数。我们指出，我们的 D_n 簇代数与 B_n 代数的簇组合学非常相似，但并不完全相同。

日期：2023年4月。作者得到丹麦国家研究基金会（CPH-GEOTOP-DNRF151）2020年资助。数学分类号。主要分类号 13F60，次要分类号 05E40。特别感谢 Zachary Greenberg 提供用于簇代数计算的程序。1

在此过程中，我们在第3节展示了许多其他具有特殊折叠、但并非来自曲面的箭图实例。我们考察的大多数实例都是对突变无限箭图进行折叠，而得到的折叠箭图实际上是突变有限的。在这些情形下，我们使用 Z. Greenberg 编写的程序（可在 `https://bitbucket.org/zng42/clusteralgebras/src/master/` 获取）来计算突变类。其中许多（但并非全部）实例实际上是 Fraser 在 [3] 中描述的、与格拉斯曼流形中的循环对称轨迹相关的广义簇结构。有限型及突变有限折叠箭图能否得到分类，是一个值得探讨的问题。我们发现可能构造出的新实例数量相当惊人，但它们确实似乎映照了未折叠情形中的分类。

我们最终在第 5 节构造出一种簇结构，其中簇复形是广义拟阵多面体。这个代数中的簇变量并不十分有趣，因为很容易看出它们全都是初始簇变量的单项式。

2. Cluster Algebras From Quivers

首先，我们回顾一些与箭图相关的簇代数的记号和构造。

2.1. **箭图与突变**。

定义 2.1。 箭图 是一个不含自环或 2-循环的有限有向图。

这样的箭图等价于一个斜对称矩阵，在簇代数的语境中通常称为交换矩阵。我们倾向于使用箭图，因为这样更容易进行图形化表示。设 Q 为一个箭图。

定义 2.2. 突变 在 Q 的节点 k 处进行，是一种生成新箭图$\mu_k(Q)$的操作，其中 Q 的箭按以下规则变化：

(1) 对于每一对箭 $(i \to k)$,$(k \to j)$，添加一条从节点 i 到节点 j的箭，并消去节点 i 和 j之间的所有 2-循环。(2) 反转所有与 k相连的箭。

定义 2.3. 如果存在一个突变序列可以将一个箭图变为另一个箭图，我们就称这两个箭图变异等价。与给定箭图变异等价的箭图所构成的集合称为它的突变类。具有有限突变类的箭图称为突变有限。

W当我们给一个箭图命名时，通常是在为它的突变类命名 .

变异有限箭图的分类已十分清楚，参见 [4]。这些箭图要么来自曲面的三角剖分，要么属于 11 个例外中的一种。其中 9 个例外与类型 E_n Dynkin 图有关；每个 E_n 都对应有限型、仿射型和椭圆型 Dynkin 图，参见图1。另两个例外分别称为 X_6 和 X_7，各有 6 个和 7 个节点。

2.2. **箭图折叠**。 将单边 Dynkin 图经典折叠为非单边图的关系可以推广到箭图。

本质上，要折叠一个箭图，我们会将其节点分成若干互不相交的集合，并规定对某个集合中的所有节点同时进行突变。我们将依次对一组节点中的每个元素进行突变的操作称为“群变异”。

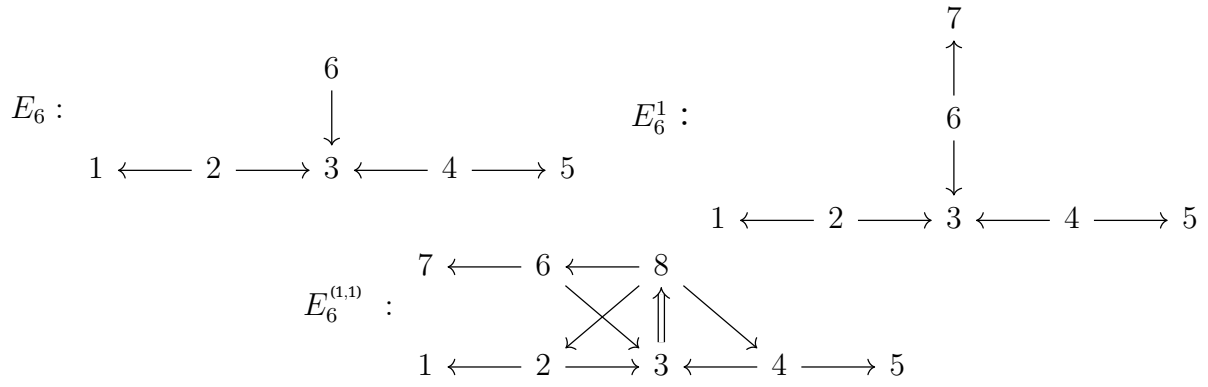


FIGURE 1. 有限型、仿射型和椭圆型箭图的类型 E_6

一般来说，群变异取决于节点突变的顺序。然而，如果所有突变都可交换，顺序就无关紧要。所有突变可交换的一个充分条件是同一组内任意两个节点之间都没有箭。基于这一点，我们有如下定义：

定义 2.4。箭图 Q 的一种折叠，其中有 n 个节点，是指选取 k 个非空且互不相交的节点集，其并集包含 Q 的所有节点，并满足以下条件（称为折叠条件）：

(1) 给定集合中的节点之间没有箭。(2) 对这些固定集合进行任意次数的群变异后，
条件 1 仍然成立 ts.

如果满足折叠条件，我们就称该折叠有效。有效折叠定义了一个折叠变异类，它就是与该折叠群变异等价的折叠箭图所组成的集合。

谈到箭图的折叠时，我们实际上是在创建一个新的箭图，并将每个群视为单个节点。提到一个折叠箭图时，我们通常指的是它的折叠变异类。

注2.5。折叠条件可以自然地推广，以允许同一群中的节点之间存在箭。若某个群所对应的子箭 quiver 存在一个“由红变绿”的突变序列，且该序列的阶为二（差一个子箭 quiver 的自同构），那么这一变换的作用应当等同于对该群进行广义变异。因此，我们的折叠条件要求这种变换始终可行。

当 Q 是单边有限或仿射 Dynkin 图的箭图，且这些集合由 Q 的自同构作用下的节点轨道构成时，这些性质总是成立。在这种情况下，群变异将描述与“斜对称化”矩阵相关的通常矩阵变异，参见 [2, 5]

定义 2.6. 我们将可用斜对称化矩阵表示的折叠称为标准折叠。其他折叠则称为特殊折叠。

我们常常希望按照自同构或自同构子群的作用对箭图进行折叠。

引理 2.7。 设 τ 是箭图 Q 的一个自同构， O 是 τ 作用下的节点轨道，且 O 中的节点之间没有箭。那么，在 O 处进行群变异会产生一个新的箭图， τ 在该箭图上通过自同构作用。

证明。 我们需要检查，突变操作改变或添加的每一支箭，是否都以 τ 对称的方式进行。设$(i \to k)$,$(k \to j)$是一对箭，且 $k \in O$ 和$i, j \notin O$。那么，由于我们在 O 中的所有节点上进行突变，因此对所有 n，我们都会添加相同数量的箭$\tau^n(i) \to \tau^n(j)$，从而保持 τ 对称性。突变的第二步显然也保持 τ 对称性。□

然而，这种折叠可能并非有效折叠。下一个引理将为我们提供一大类例子

引理 2.8. 如果箭图 Q 具有一个二阶自同构 τ，那么按照 τ 的轨道对 Q 进行折叠是有效的。

证明。 首先注意到， τ 的每个轨道都包含一个或两个节点。我们只需确保，经过若干次群变异后，包含两个节点的轨道之间不会出现箭。为此我们注意到，含有两个节点的群之间不能有箭，因为如果 i, j 是一个轨道，那么一支箭$(i \to j)$意味着必定还有一支箭$(\tau(i) \to \tau(j))$，这将在 Q中形成一个2-圈。现在根据前一个引理可知，这种折叠的群变异会生成新的箭图，且在这些箭图上τ 是一个自同构。□

2.3. 由箭图构造簇代数。 （几何型）簇代数的构造方法是：从一个初始种子出发，该种子由一个箭图及与其节点相关联的变量组成，然后进行所有可能的突变。

设 Q 是一个有 n 个节点的箭图，并设 $\boldsymbol{z} = \{z_1, \ldots, z_n\}$ 是 $\mathbb{Z}(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ 中的代数独立元素。

定义 2.9。 一个种子 $\boldsymbol{i} = (Q, \boldsymbol{z})$ 是由一个箭图 Q 和变量集 $\boldsymbol{z} = \{z_1, \ldots, z_n\}$ 构成的有序对，其中每个变量都与 Q 的一个不同节点相关联。集合 $\boldsymbol{z}$ 称为簇，其中的变量称为簇变量。

我们可以在节点 k 处对种子进行突变：像之前那样对 Q 进行突变，并将与节点 k 相关联的变量 z_k 替换为满足下式的新变量 z_k'

$$z_k \cdot z_k' = \prod_{(i \to k)} z_i + \prod_{(k \to j)} z_j. \tag{1}$$

此过程会生成一个新的种子，以及一个新的变量簇。

我们还可以将 Q 中的一些节点标记为冻结节点，并禁止在这些节点处进行突变。与这些节点相关联的变量称为“冻结变量”，并且会出现在每个簇中。

定义 2.10。 由对一个种子进行所有可能的突变所得到的全部簇变量生成的 $\mathbb{Z}-$ 代数，称为与该种子相关联的簇代数 ，记作 $\mathcal{C}(Q)$，其中 Q 是初始种子所对应的底层箭图。

我们将引用的主要簇代数实例是 Scott [6] 定义的 Grassmann簇代数 $Gr(n, k)$。

2.4. **簇复形**。 虽然我们不需要了解许多细节，但还是会简要回顾与簇代数相关的簇复形概念。

对于任意簇代数，都有一个与之对应的单纯复形 $\mathcal{M}_Q$ ，称为簇复形。该复形的详细定义见 $[5,7]$。

定义 2.11。 如果两个簇变量同时出现在一个簇中，则称它们相容 。簇复形是簇变量相容性规则的团复形。

换言之， $\mathcal{M}_Q$ 的 k 维单形对应于 $\mathcal{C}(Q)$ 中由 k 个两两相容的簇变量组成的集合。顶点对应单个簇变量；当两个簇变量能够同时出现在一个簇中时，它们之间就有一条边相连。最高维单形对应于 $\mathcal{C}(Q)$ 的簇。

定义 2.12。 簇复形的对偶复形称为交换复形。交换复形的 1-骨架称为簇代数的交换图 。

该图的顶点对应簇，边对应簇与簇之间的突变。

这些复形的对称群通常值得关注，称为“簇模群”。

2.5. **簇代数的折叠**。 如果一个箭图满足折叠条件，我们便会关注它是否存在一个相应的折叠簇代数，类似于与非斜对称交换矩阵相关联的通常簇代数。

定义 2.13。 如果一个折叠箭图满足折叠簇条件 ，或者简称为簇折叠 ，那么将每个群中的所有节点赋予相同簇变量的初始种子，在经过任意次数的群变异后仍保持这一性质。我们将由此生成的簇代数称为与该折叠箭图相关联的折叠簇代数 。

引理 2.14。 如果在自同构 τ 下对 Q 进行折叠是有效的，那么它满足折叠簇条件。

证明。 我们只需验证每次群变异都会使给定群中的每个节点产生相同的簇变量。只需注意到 τ 作用于每个交换关系即可得出这一结论；此外，由于每个轨道上的节点一开始都取相同的变量，因此 τ 对给定初始簇变量的作用是平凡的。 □

注记 2.15. 我们可以推广这个定义：不必在一组中的每个节点上都放置相同的变量，而是要求一组中各节点上的变量始终满足某种关系。

即使某个折叠是有效的但不是簇折叠，我们仍可以考察与展开箭图相关的簇代数中由群变异选出的子代数。这样，我们仍然可以研究非簇折叠的交换复形。

2.6. **折叠的对偶性**。 类型 B_n 和 C_n 簇代数所体现的朗兰兹对偶概念，可以自然地推广。

令 Q， R 为两个箭图，它们分别在群 G_1、.....、 G_k 和 H_1， $\ldots H_k$ 中具有有效折叠。

定义 2.16. 若它们的簇复形之间存在一个胞腔同构 ϕ，使两个折叠的群相互对应，且比值 $|G_i|/|G_j| = |\phi(G_j)|/|\phi(G_i)|$ 满足相应关系，则称这些折叠为朗兰兹对偶 。

我们将使用此 的概念将一些新的折叠与其他先前已知的箭图联系起来 .

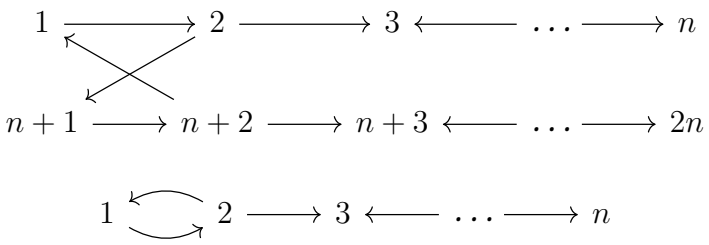


FIGURE 2. D_n 的代表性箭图。

3. Examples of Special Folding With Finite Cluster Complexes

本节中，我们通过将节点 1、2、.....、n 与箭图中的其他节点折叠在一起，来表示含有 n 个群的折叠，使得每个群都由 1 到 n 之间的一个节点标识。图中通常会将这些群竖直排列。附录 A 中展示了此处提及的许多代数的交换复形图示。

3.1. 有限簇折叠。 我们的第一个特殊折叠示例是一个基本示例，后续的大部分研究都将以此为基础。设 D_n° 是由 n 个节点构成的箭图，这些节点按编号递增的顺序连接成一个有向环。

箭图 D_{2n}° 有一种特殊折叠，分成 n 个群，其中节点 i 与节点 $i+n \bmod 2n$ 归为一组。我们将这个折叠箭图称为 D_n。根据引理2.14和2.8，这是一种满足折叠簇条件的有效折叠。

The D_n 箭图与图2所示的第一个箭图变异等价。值得注意的是，从 D_{2n}° 的折叠开始进行群变异所产生的交换关系，与由一个有向n–环箭图产生的交换关系完全相同。一旦我们突变到类似图2所示的箭图，交换关系就会有所不同。这表明 D_n 无法用斜对称化矩阵表示。

许多特殊折叠的例子都会涉及该箭图前两组的子箭图，因此，为简便起见，我们用带有二环的箭图来表示这种特定的折叠（在折叠方式明确无误时）；该箭图也见图2。

我们还可以在同一大类中找到更多具有特殊折叠的箭图，如图3所示。与这些箭图相关联的折叠簇代数，其组合结构应与所标注的 E_n 根系相关，但我们在此不探讨这些细节。

有趣的是，这些例子中的折叠箭图均为有限型，但展开箭图依次属于有限型、有限变异型和无限型。这说明箭图的变异型在折叠后不一定保持不变。E_n 箭图的展开箭图分别与 Grassmann簇代数$Gr(3,\ 8)$ $Gr(3,\ 9)$ $Gr(3,\ 10)$的箭图变异等价。

通常的 D 和 E Dynkin 图与这些特殊箭图之间的对应关系，可以通过将带有 2-圈的 2 个节点替换为按 D_4 图连接的 4 个节点来观察。有趣的是，2-圈展开后会变成一个 4-圈，它与 D_4 图变异等价。

3.2. 非簇折叠的示例。我们的首批非簇折叠示例来自 Dynkin 图的折叠。图 4 展示了两个示例。第一个源于 E_8 和 H_4 Coxeter 群之间的通常关系。与此折叠相关联的交换复形生成了 H_4 广义结合多面体，其构造见 [8]。第二个是对一个仿射 D_6 箭图的折叠，结果得到一个变异型为仿射 G_2的箭图。然而，

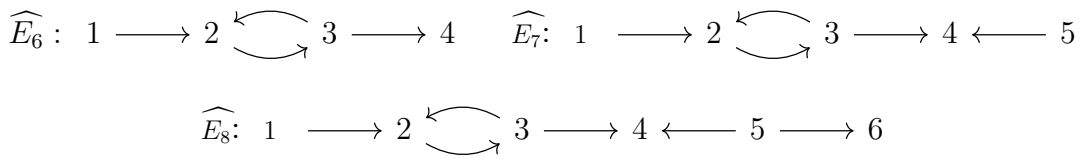


FIGURE 3. $\widehat{E_n}$

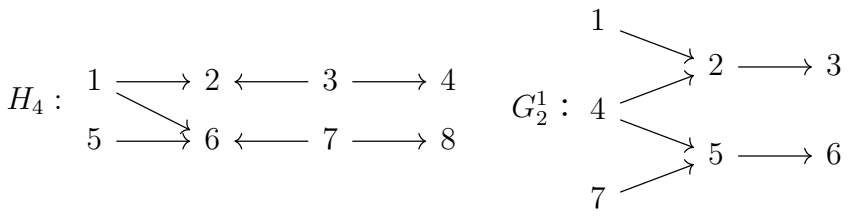


FIGURE 4. 来自 Dynkin 图的非簇折叠。

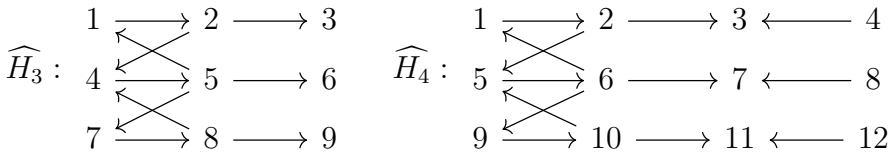


FIGURE 5. 非簇折叠的特殊示例。

尽管存在一个仿射 G_2 代数，但与这种折叠相关联的并非一个特殊的折叠簇代数。

我们还可以找到一些全新的示例。图 5 中展示的箭图具有特殊折叠，其对应群以竖排方式标出。这些示例也不满足折叠簇条件。

其交换复形$\widehat{H_3}$有 32 个顶点、48 条边和 18 个面（4 个正方形、8 个五边形、2 个六边形和 4 个七边形）。值得注意的是，该复形与通常的H_3广义结合多面体具有相同的面向量，见 [8], ，但两者并非完全相同的复形。不过， H_4 的交换$\widehat{\ }$复形与 H_4 广义结合多面体的交换复形截然不同。

我们在表 1 中列出了有限特殊折叠代数的一些性质。此$\widehat{\ }$$\widehat{\ }$处也包括了 H_3 和 H_4 箭图，尽管它们并不具有折叠代数。 D_n 代数中的簇总数$\widehat{\ }$在第 4 节中计算。

$\widehat{\ }$$\widehat{\ }$**注记 3.1**。与 H_3 和 H_3 的例子类似， D_n 交换复形似乎与 B_n 广义结合多面体具有相同的面向量。不过，我们只证明了这一点适用于极大单形和 0 单形（簇和簇变量的数量）。

3.3. 有限突变类型折叠。目前考虑的大多数例子都会产生有限多个簇。我们可以构造许多新的箭图例子，它们具有特殊折叠，且这些折叠属于有限突变类型。对于每个新的例外例子，我们在表 2 中列出了其突变类中的箭图数量。第一个例子是与仿射 D 和 E 型相对应的特殊折叠，如图 6 所示。

Type	展开类型	簇变量数量	簇对称性数量	
$\widehat{D_n}$	D_{2n}	$(n+1)(n)$	$\binom{2n}{n}$	n
$\widehat{E_6}$	$E_8 = Gr(3,\ 8)$	24	88	4
$\widehat{E_7}$	$E_8^{(1,1)} = Gr(3,9)$	45	432	6
$\widehat{E_8}$	$Gr(3,10)$	90	2600	10
$\widehat{H_3}$	$E_7^{(1,1)} = Gr(4,8)$	18	32	4
$\widehat{H_4}$	$Gr(4,9)$	62	234	9

TABLE 1. 有限型特殊折叠的簇组合学。

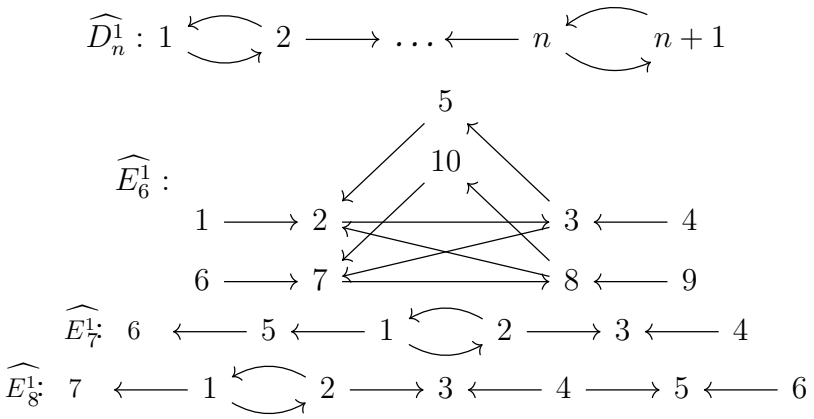


FIGURE 6. 特殊仿射类型。

还有几个具有特殊折叠的箭图，以类似于通常的椭圆 Dynkin 图 $E_6^{(1,1)}$ 、 $E_7^{(1,1)}$ 、 $E_8^{(1,1)}$ 型扩展仿射类型的方式，扩展了仿射 E 型中的特殊类型。这些例子见图 7。

令人惊讶的是，可以在 $\widehat{E_6}^{(1,1)}$ 箭图中再加入两个群组，并在 $\widehat{E_7}^{(1,1)}$ 箭图中再加入一个群组，同时仍保持有限变异类型。这些箭图如图 8 所示。我们还可以分别通过冻结 $\widehat{E_6}^{(2,2)}$ 中的群组 8 和 8,7 来定义 $\widehat{E_6}^{(1,2)}$ 和 $\widehat{E_6}^{(0,2)}$ 。

注 3.2. $\widehat{E_7}^{(1,2)}$ 和 $\widehat{E_8}^{(1,1)}$ 的展开箭图分别与格拉斯曼流形 $Gr(5,10)$ 和 $Gr(3,12)$ 的箭图变异等价。这是通常的 $E_7^{(1,1)}$ 和 $E_8^{(1,1)}$ 代数分别属于 $Gr(4,8)$ 和 $Gr(3,9)$ 类型这一事实的推广。我们猜测， $\widehat{E_6}^{(2,2)}$ 的展开类型具有有趣的代数解释，类似于通常的 $E_6^{(1,1)}$ 与加权射影空间 $\mathbb{P}[3,3,3]$相关联。

3.4. 与格拉斯曼流形的循环对称轨迹的关系。 许多展开后为格拉斯曼流形的箭图示例，$Gr(k,n)$都与二重循环对称性有关。 $Gr(k,n)$可以看作一组 n k–向量。这些 $n-fold$向量的循环对称性延伸为簇结构的对称性。Fraser [3] 描述了这些情形下不动点集的结构。当 n 为偶数时，我们可以尝试通过该循环对称性的二阶子群来折叠簇结构。这些折叠

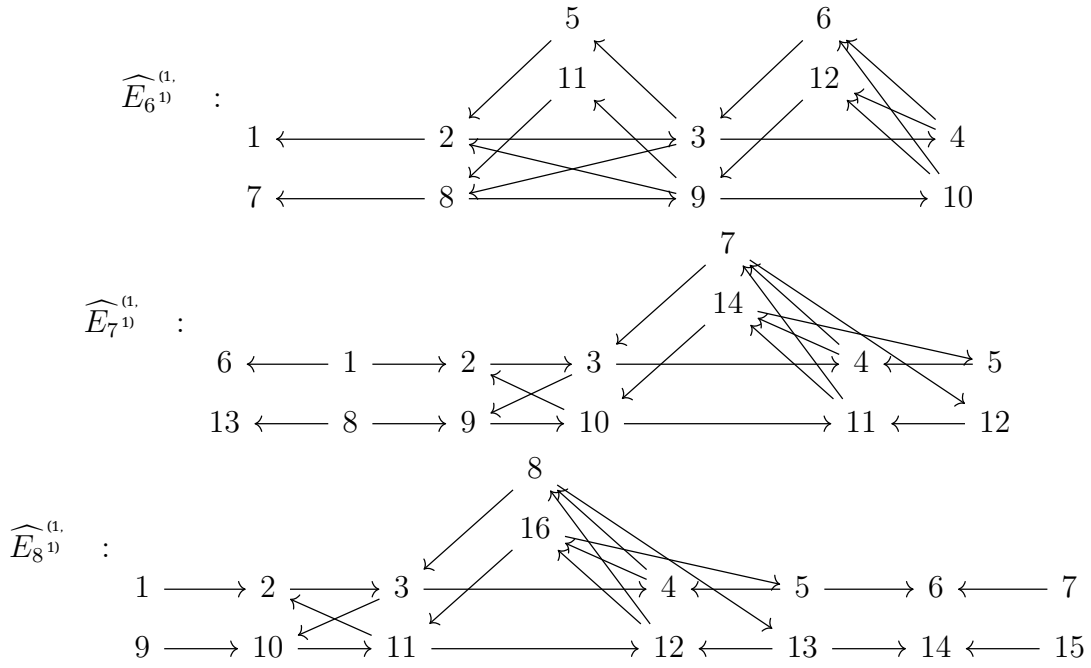


FIGURE 7. 特殊椭圆型。

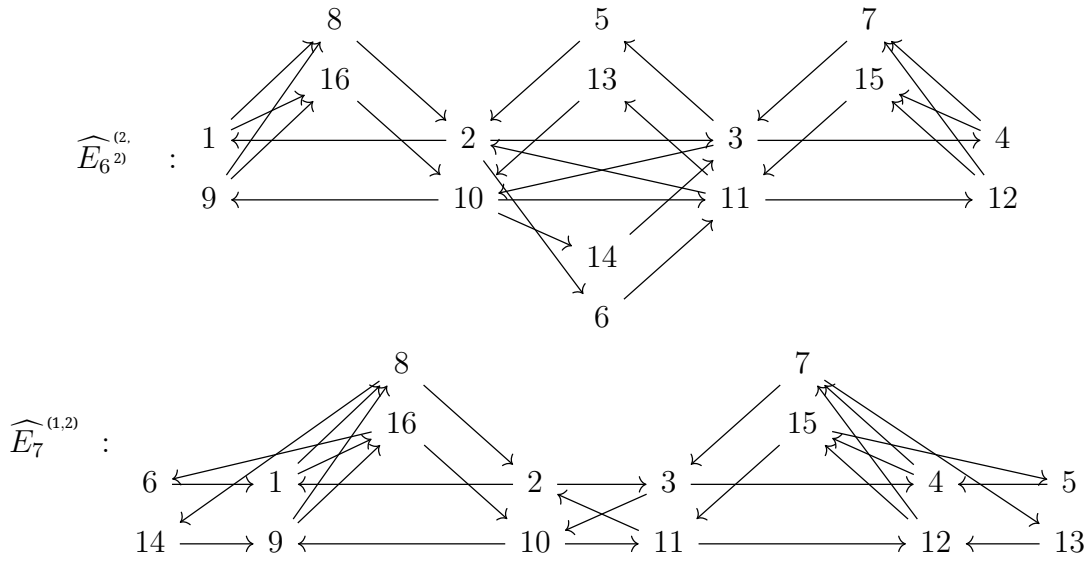


FIGURE 8. 进一步扩展的箭图。

$\widehat{E_6}, \widehat{E_8}, \widehat{E_7}^{(1,2)}, \widehat{E_8}^{(1,1)}$ 都是以这种方式产生的。其他那些展开后为格拉斯曼流形的示例则不是。

3.5. 与 X_7 箭图的关系。 箭图 $\widehat{E_6}^{(1,1)}$ 和 $\widehat{E_6}^{(2,2)}$ 与特殊的变异有限箭图 X_6 和 X_7 存在如下关系：将节点 4、6 和 5、7 分组，对 X_7 进行折叠，所得结果与对 $\widehat{E_6}^{(2,2)}$ 的群变异类中的箭图进行折叠的折叠互为朗兰兹对偶，见图 9。第一个箭图经群变异可得到 $\widehat{E_6}^{(2,2)}$。我们可以进一步对它进行折叠

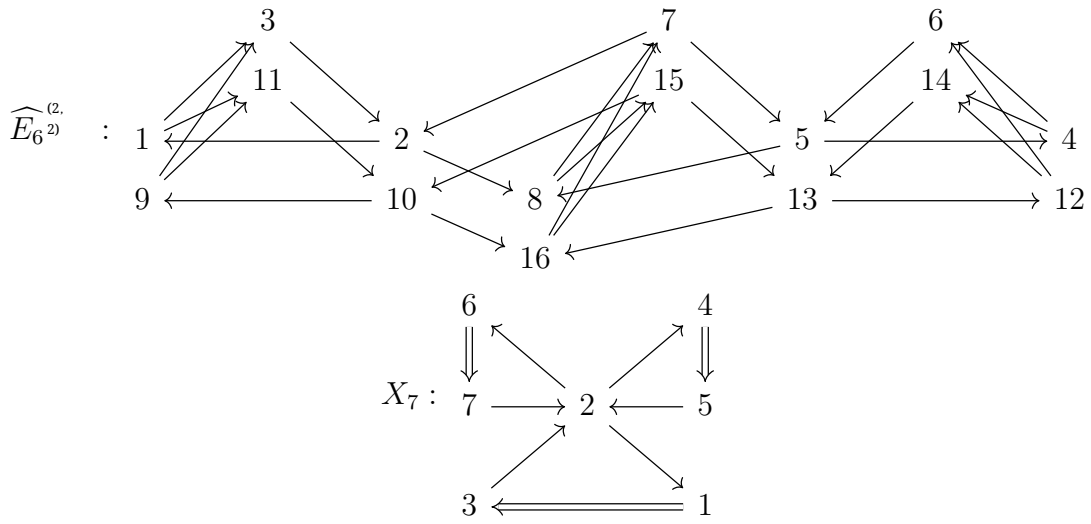


FIGURE 9. 一个与 $\widehat{E_6}^{(2,2)}$ 群变异等价的箭图，以及展示对偶性的箭图 X_7。

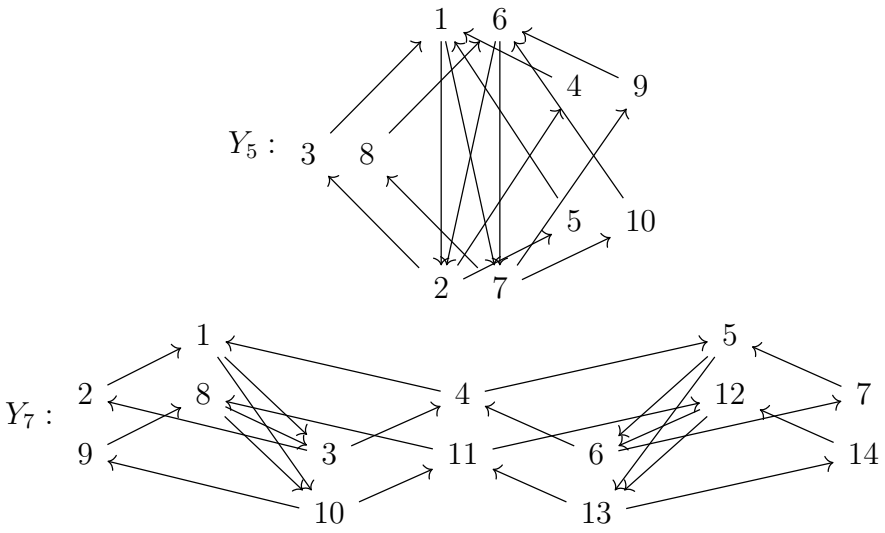


FIGURE 10. 折叠箭图 Y_5 和 Y_7

分别将 1、2、3 组与 4、5、6 组进行分组。这个额外的折叠与对 X_7 的折叠互为对偶。通过冻结 X_7 中的节点 3，可以看出存在对 $\widehat{E_6}^{(1,1)}$ 的折叠，该折叠与对 X_6 的折叠互为对偶。

注释 3.3. 这展示了一个特殊折叠自然出现的例子。不可能构造出一个与 X_7 的折叠朗兰兹对偶的箭图，而不将所有群加倍。

我们还可以从箭图 X_7 构造另外两个有限变异型的特殊折叠。首先，将三个双箭头折叠在一起，再对偶化并展开，得到 Y_5，如图10所示。然后，我们可以对 Y_5 的第4组和第5组重复这一过程，得到 Y_7。

Type	size
$\widehat{E_6^1}$	42
$\widehat{E_6^{(1,1)}}$	55
$\widehat{E_6^{(0,2)}}$	124
$\widehat{E_6^{(1,2)}}$	110
$\widehat{E_6^{(2,2)}}$	23

类型大小

Type	size
$\widehat{E_7^1}$	192
$\widehat{E_7^{(1,1)}}$	254
$\widehat{E_7^{(1,2)}}$	51

Type	size
$\widehat{E_8^1}$	1260
$\widehat{E_8^{(1,1)}}$	1023
Y_5	7
Y_7	99

TABLE 2. 各种特殊折叠的突变类大小

4. PUNCTURED SURFACES

我们的下一个目标是构造一个与带孔曲面相关联的折叠簇代数，其中群变异对应于允许出现折叠三角形的翻转。这将为箭图 $\widehat{D}_n$ 和 $\widehat{D}_n^1$ 提供几何解释。所构造的每个折叠簇代数都属于有限变异型，因为它们是由有限变异型箭图折叠而来。

我们将采用与曲面的三角剖分相关的簇代数的基本概念，以及它们与 Teichm¨uller 空间之间的联系，如 [9, 10] 中所述。设 S 为一个带标记曲面，Δ 为 S 的一个理想三角剖分。回顾与带孔曲面相关的通常簇代数。我们将该簇代数记为 $\mathcal{A}(S)$。

$\mathcal{A}(S)$ 中的每个簇变量都对应曲面上的一条弧，其端点为两个标记点或标记点（孔），并且根据 [9] 中的规则，这条弧可以带标签或不带标签。不过，没有簇变量对应于这样一种弧：它从一个标记点出发，绕过一个标记点（孔）后又回到同一标记点。我们用 l_m^p 表示这样的弧，并将它们围成的三角形称为自折叠三角形。

我们为带孔曲面上的三角剖分翻转考虑一组新规则，称为特殊翻转规则：

(1) 带孔二边形中的翻转会生成一个自折叠三角形。(2) 自折叠三角形内部一条弧的翻转会得到一条带标记弧。(3) 同一个标记点（孔）处的所有标签必须一致。

这些规则完全确定了所有可能的特殊翻转结果。此外，通过一系列特殊翻转得到的带孔曲面上的每个三角剖分，都只是一个通常的三角剖分，其中每个标记点（孔）要么全部带标签，要么全部不带标签。如果曲面上可以放置一条弧，将给定的标记点（孔）围成一个自折叠三角形，那么就可以得到该标记点（孔）带标签的三角剖分。

图11展示了这些规则在带孔二边形中的应用

注4.1。 我们完全可以选择一些标记点采用特殊翻转规则，而让另一些标记点采用通常的标签规则。我们的构造也将为这些曲面构造特殊簇代数。

定义4.2。 我们将突变组合结构对应特殊翻转规则的簇代数称为与曲面相关联的特殊簇代数。我们将这个簇˜代数记作 $\mathcal{A}(S)$

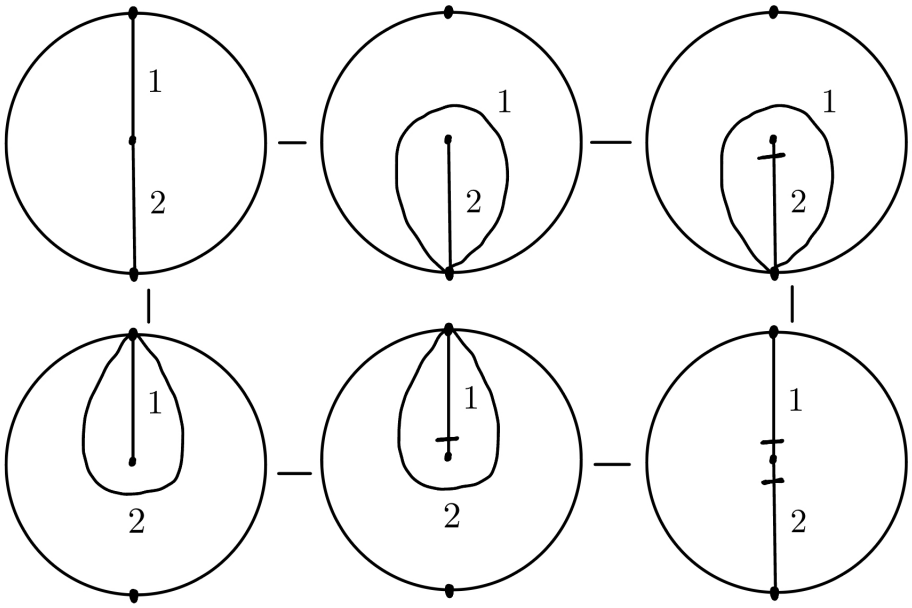


FIGURE 11. 带孔二边形的特殊翻转规则

我们希望为每个带有若干特殊标记点的曲面构造这样的簇代数。遗憾的是，如果 S 是只有一个特殊标记点的带孔球面，我们似乎无法做到这一点，因此在以下定理中排除此情形。

定理 4.3。 对于任意带有 $\chi(S) < 0$ 的带孔曲面，都存在一个特殊簇代数。此外，该簇代数是一个与无特殊标记点的三角剖分曲面相关联的簇代数的折叠簇代数。

给定一个带有若干特殊标记点的 S 带孔曲面，我们可以比较与 S相关联的通常簇代数和特殊簇代数。考虑 S 的一个三角剖分Δ ，其中不含带标记弧或自折叠弧，并考虑代数 $\mathcal{A}(S)$ 和$\tilde{\mathcal{A}}(S)$，它们都以对应于 Δ的种子开始

定理 4.4。 带孔曲面 $\mathcal{A}(S)$ 中特殊标记点处带标记弧对应的簇变量，恰好是 $\mathcal{A}(S)$ 中对应簇变量的 2 倍。 $\mathcal{A}(S)$ 中对应于环 l_m^p 的簇变量，等于 $\mathcal{A}(S)$ 中对应于从 m 到 p的 p 处带标记弧和不带标签弧的簇变量的乘积。

我们的证明总体策略是构造一个曲面 S ，它是一个二重（某些情况下为四重）覆盖，并沿特殊标记点 S 分歧。我们将 S 视为带孔曲面，但把分歧点处的标记点视为非特殊标记点。接着，我们考虑此覆盖的甲板变换 σ， (τ)，它们固定所有分歧点，并考虑一个正则三角剖分，其中每个标记点要么不带标签，要么完全带标签；该三角剖分 S 在 σ 作用下保持不变。这样的三角剖分给出 S 的一个三角剖分，其中可能包含自折叠三角形。对与 S 三角剖分相关联的箭图进行折叠，将得到与 S相关联的特殊簇代数的折叠种子。

根据引理 2.8、2.14，这个折叠种子是有效的，并满足折叠簇条件；对于四重覆盖，这是因为该覆盖可分解为两个二重覆盖。

这种折叠的群变异显然对应于我们的特殊翻转规则；这些翻转要么对应于通常的翻转规则，要么发生在˜ S上的特殊带孔二边形中。 S 上的每个特殊带孔二边形都会提升为 S 上的常规带标记点的正方形，很容易验证群变异会给出特殊翻转规则。

通过直接计算簇变量的值，可以得知簇˜变量在 S上的情况。由于我们从一组在甲板变换下对称的簇变量开始，相应的 Lambda 长度参数化了 Teichm¨uller 空间中一个具有对称双曲度量的点。由于折叠有效，且簇代数.....我们知道，每次群变异都会产生一个新的对称三角剖分，因此新的 Lambda 长度也将是对称的。

˜我们基本上沿用 [2] 第12节中的构造来构造 S，但为求完整，仍在接下来的小节中重述这一构造。他们的构造中也出现了带有一个特殊标记点的球面这一问题。

4.1. 带标记点的圆盘。 首先，我们为一个多标记点的单边形构造一个特殊覆盖，其中所有标记点都是特殊标记点。这一构造取决于特殊标记点的数量的奇偶性˜， p。如果 $p = 2g + 1$ 为奇数，那么我们取 S 为一个亏格为 g、有 p 个标记点且有一个边界分支（其上有两个标记点）的曲面。该覆盖由双曲 involution 给出，它固定这些 p 标记点和边界分支，并交换两个标记点。

˜如果 $p = 2g+2$，那么我们取 S 为一个亏格为 g、有 p 个标记点的曲面，并带有两个边界分支，每个边界分支上各有一个标记点；覆盖仍由双曲 involution 给出，该对合固定所有标记点，但交换两个边界分支。

这些曲面各自都有一个通常的三角剖分，它在覆盖˜对合下保持不变。请注意，无论哪种情况，S 都有两条边界弧，它们要么位于两个不同的边界分支上，要么位于同一个边界分支上。

S 有一个或两个特殊标记点的情形分别给出 D_n 和 D^1_{n+3} 箭图。

4.2. 带边界分支的曲面。现在假设 S 是一个带孔曲面，有 n 个标记点，至少有一个边界分支，且至少有一个标记点。选取这样一个标记点，并将其记为 m。令 l 为一条弧，它从 m出发，环绕所有特殊标记点后返回 m。因此，在 l 内部有一个 p特殊带标记点的单边形，而在 l 外部则是一个没有特殊标记点的曲面。将这个带孔单边形记为 M。

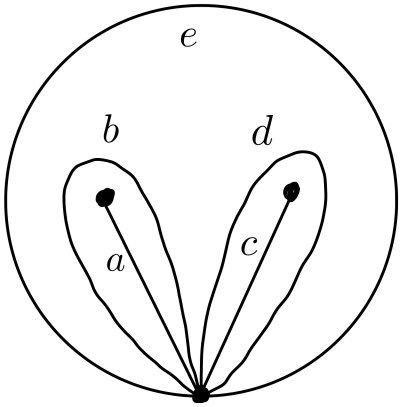
S以及S在该曲面上的对合：将先前构造的曲面

我们将构造曲面

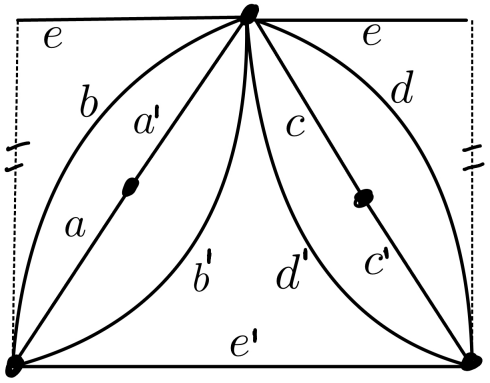
˜ M与 $S - M$的两个副本沿着 M的两条边界弧粘合起来。 M 上的˜双曲 involution通过交换这两个副本，延拓为 S 上的一个对合。

我们可以使用任意的三角剖分来˜构造 $\tilde{S}$的一个对称三角剖分。

4.3. 带 puncture 的闭曲面。 现在考虑 S 一个带有 p 特殊˜标记点的闭曲面。首先假设 $p > 1$ 为偶数。在这种情况下，我们通过将特殊标记点两两配对成组 p_i， p_{i+1}，直接构造 S 。然后沿着连接每对标记点的简单弧切割 S ，使每对标记点各形成一条带有两个标记点的边界。我们将所得曲面˜的两个副本沿每个边界分支粘合，得到 S。对合就是固定所有特殊标记点并交换这两个副本的对合。我们可以轻松地



(A) 一个双穿孔二边形的三角剖分。



(B) 二重覆盖。

˜从任意一个包含所有切割弧的 S 三角剖分开始，就能构造出 S 的对称三角剖分。

如果 $p > 1$ 是奇数，我们首先将所有标记点两两配对，留出一个，称之为 p_0。沿每一对标记点切开 S 并将其加倍，得到一个曲面 S_1 ，它带有一个对合，该对合固定除 p_0以外的所有特殊标记点，并将 p_0映到 p_0'。现在我们将 S_1 视为一个带有˜两个特殊标记点 p_0 和 p_0'的闭曲面。重复这一过程，将得到 S ，它是 S 的一个四重覆盖，并在所有特殊标记点处分歧。

最后，如果 $p = 1$ ，我们使用与 [2]相同的技巧。我们假设 S 不是球面，这样就能找到一条从 p 到其自身的弧，且它不会将曲面分成两部分。我们沿这条弧切开 S，再沿边界粘合所得曲面的两个副本，从而构造出S_1 ，一个 S的二重非分歧覆盖。 S_1 现在有两个特殊标记点，因此可以由˜利用四重覆盖构造出 S ，该覆盖在 p处分歧。

ˆ ⁀**4.4. 代数** D_n。折叠 D_n 对应于一个带有 n 个标记点和一个特殊标记点的圆盘。我们可以利用这一对应关系，计算簇变量总数和簇总数。

簇变量的数量由 $n(n+1)$ 给出，因为带有特殊翻转规则的带标记点圆盘上的弧数，等于遵循普通翻转规则的弧数加上构成自折叠三角形的弧数。因此，通常的 D_n 簇代数中的簇变量对应 n^2 条弧，此外还有 n 条弧对应折叠三角形。

簇的数量也很容易计算。可以将它们划分为以下互不相交的集合:

(1) 不含折叠三角形的三角剖分 (2) 含有由无标记弧构成的折叠三角形的三角剖分 (3) 含有由带标记弧构成的折叠三角形的三角剖分

前两个集合的总数等于带有普通穿孔点的带标记点圆盘的三角剖分数，这可以通过将折叠弧替换为通向穿孔点的带标记弧来理解。第三个集合的大小等于一个 $n+1$ 边形的三角剖分数乘以 n。因此，总数为 $\frac{3n-2}{n}\binom{2n-2}{n-1} + \frac{n}{n}\binom{2n-2}{n-1} = \binom{2n}{n}$ _

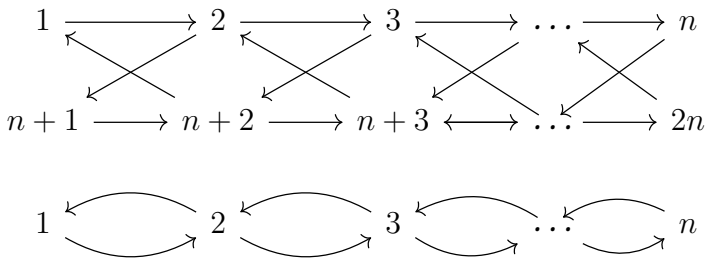


FIGURE 13. 箭图 A_n

注 4.5。 正如前文所述，这一结果与 B_n 和 C_n 簇代数的计算相呼应，这些簇代数与带有一个轨形点的 $n+1$边形相关。然而，这些曲面及其对称性并不相同：带一个穿孔的 n边形与带有一个轨形点的 $n+1$边形。

5. PERMUTOHEDRA

对于每种 Dynkin 类型，我们都可以构造一种特殊的折叠簇代数，使其交换复形为广义排列多面体。这种构造足够简单。

令 X_n 为一个 ADE 型 Dynkin 图。我们定义一个箭图 X_n，其具有 $2n$，以及一个具有 n 群的折叠：将 X_n 的每条边替换为一条二周期边； A_n情形见图 13。

定理 5.1. X_n 满足折叠条件，并且有一个与之关联的特殊折叠簇代数。这个特殊簇代数的交换复形是X_n型排列多面体。

证明。 容易验证，每次群变异后交换群中的两个元素，都会保持箭图同构类不变。因此，这些箭图满足折叠条件。此外，显然每个箭图都关联着一个折叠簇代数。只需证明其交换复形是相应的广义全排列多面体。

我们可以如下看出，在每种情形下， X_n 的簇模群至少是 $W(X_n) \rtimes Aut(X_n)$ 的一个商：由于每次突变都保持箭图同构类不变，簇模群由每个群对应的突变 μ_i 以及 $Aut(X_n)$ 中的元素生成。显然，这些突变满足 Coxeter 关系，因为只需检验由 A_2、 B_2 和 G_2 产生的关系，而这些关系可以手工验证。

现在我们只需证明，簇模群并不是相应 Coxeter 群的某个更小商群。根据 [11], , Coxeter 群可能的商群只有有限多个；我们很容易看出这些商群都不可能，因为列出的每个商群都会将 Coxeter 群的某些生成元等同起来，而簇模群的每个生成元显然都各不相同。

□

其中一些箭图属于已知的突变类。 A_3 箭图的展开与一个四点穿孔球面（带有常规穿孔）的展开变异等价。这种折叠为带有两个特殊标记点的三孔球面给出了特殊簇代数。

$\bar{}$ $\bar{}$ A_5 的展开与 Y_5的展开变异等价。 D_4 的展开是与三孔球面上的 SL_3 相关联的 Fock-Goncharov 模空间的簇类型。

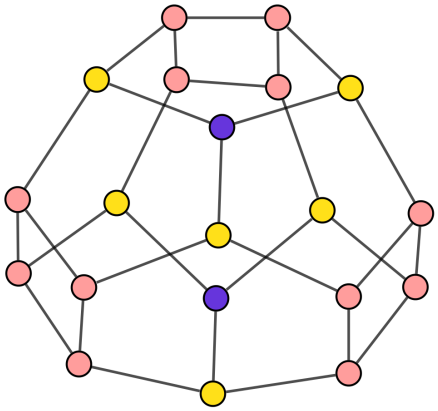
References

[1] Anna Felikson、Michael Shapiro 和 Pavel Tumarkin，通过非折叠研究有限变异型簇代数，《国际数学研究通知》**2012年** (2012年)，第 8 期，1768–1804（英文）。[2] , 簇代数与三角剖分的轨形，《数学进展》**231** (2012年)，第 5 期，2953–3002（英文）。[3] Chris Fraser，格拉斯曼流形中的循环对称轨迹，2020年。[4] Anna Felikson、Michael Shapiro 和 Pavel Tumarkin，有限变异型斜对称簇代数，《欧洲数学会杂志》(JEMS) **14** (2012年)，第 4 期，1135–1180（英文）。[5] Sergey Fomin 和 Andrei Zelevinsky，簇代数 *I*：基础，《美国数学会杂志》**15** (2002年)，第 2 期，497–529。MR1887642[6] Joshua S. Scott，格拉斯曼流形与簇代数，《伦敦数学会会刊》(3) **92** (2006年)，第 2 期，345–380（英文）。[7] Vladimir Fock 和 Alexander Goncharov，局部系统模空间与高阶 *Teichm¨uller* 理论，《高等科学研究所数学出版物》 ´第**103** 卷 (2006年)，1–211（英文）。[8] Sergey Fomin 和 Nathan Reading，根系与广义结合多面体，《几何组合学》，2007年，第 63–131 页（英文）。[9] Sergey Fomin、Michael Shapiro 和 Dylan Thurston，簇代数与三角剖分曲面 *I*：簇复形，《数学学报》**201** (2008年)，第 1 期，83–146（英文）。[10] Sergey Fomin 和 Dylan Thurston，簇代数与三角剖分曲面 *II*：*Lambda* 长度。，《美国数学会回忆录》，第 1223 卷，美国罗得岛州普罗维登斯：美国数学会 (AMS)，2018年（英文）。[11] George Maxwell，有限与仿射 *Coxeter* 群的正规子群，《伦敦数学会会刊》(3)**76** (1998年)，第 2 期，359–382（英文）。

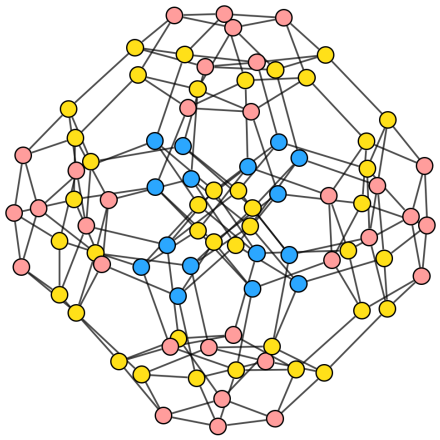
Appendix A. Exchange Graph Pictures

在下列图中，节点表示簇，边表示突变，而颜色则近似表示每个簇所对应的箭图的箭图同构类。

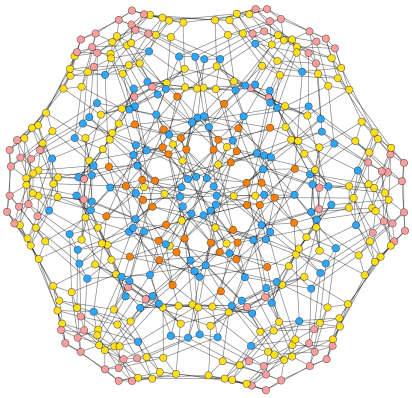
University of Copenhagen, Department of Mathematical Sciences, 2100 Copenhagen ø,Denmark电子邮件地址: dk@math.ku.dk



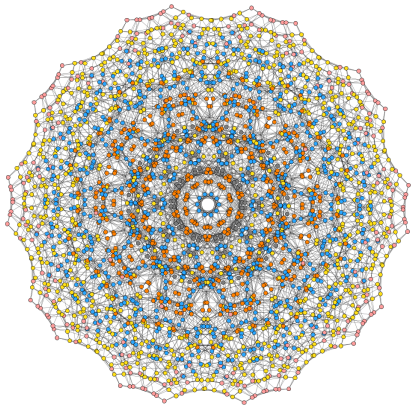
(A) $\widehat{D_3}$



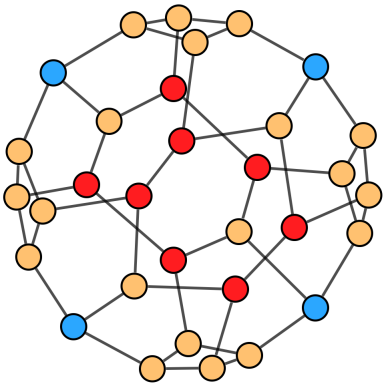
(B) $\widehat{E_6}$



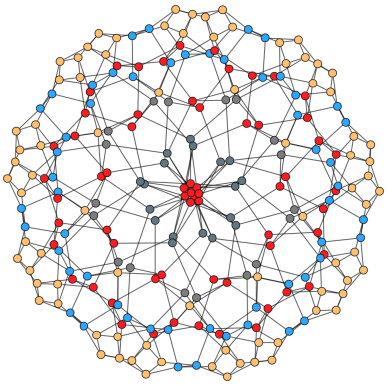
(A) $\widehat{E_7}$



(B) $\widehat{E_8}$



(C) $\widehat{H_3}$



(D) $\widehat{H_4}$

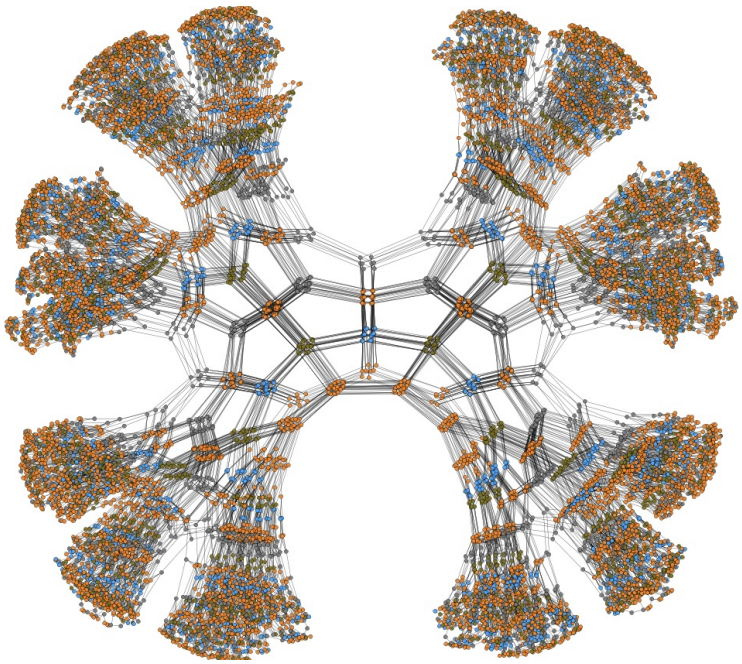
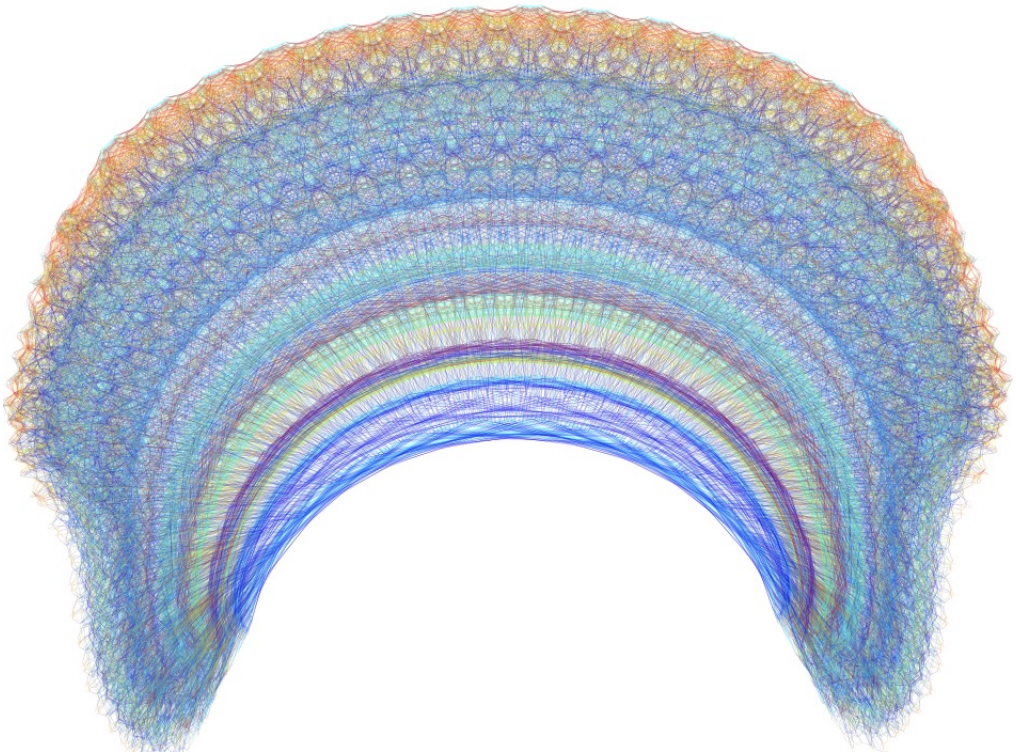
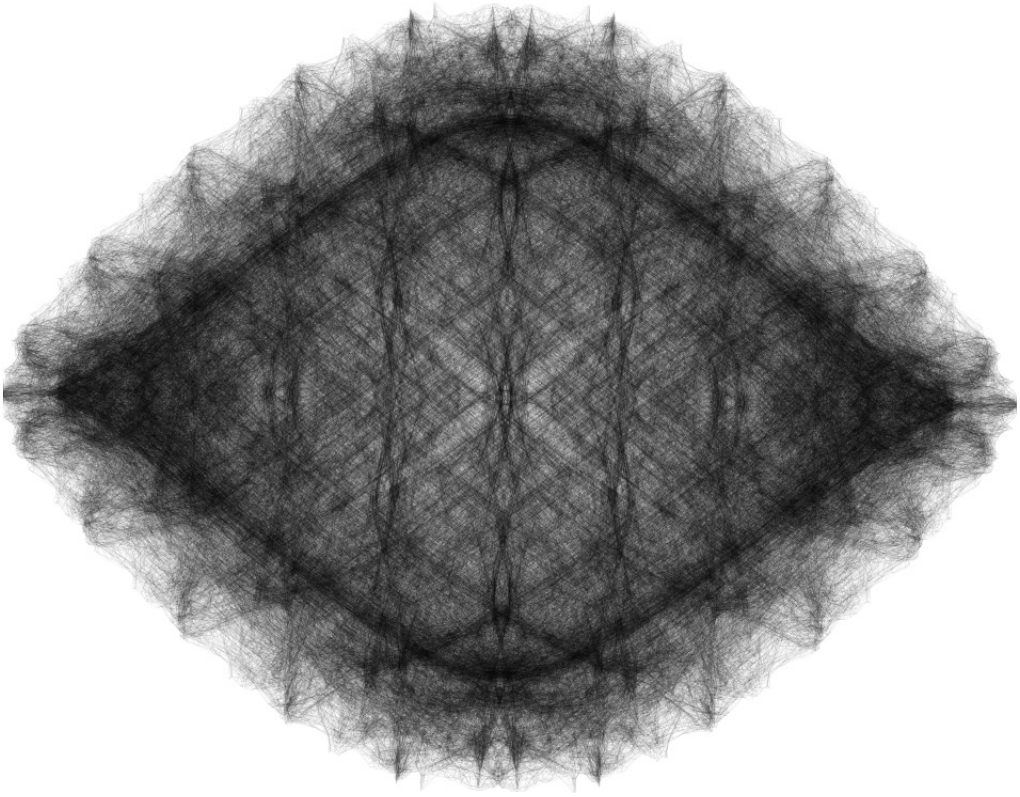


FIGURE 16. $\widehat{Y_5}$



(A) $\widehat{E_8}^1$



(B) $\widehat{E_7}^{(1,2)}$