arXiv:2304.07516v2 [cs.CC] 9 Aug 2024

用于近似参数化 k团问题的 $k^{o(1)}$下界的简单组合构造

陈一佳[1], 冯毅[2], Bundit Laekhanukit[3], 和刘彦霖[4]

[1]上海交通大学[2]上海财经大学[3]独立研究者[4]
中国海洋大学

摘要

在参数化 k团问题（简称 k团问题）中，给定一个图 G 和一个参数 $k \geq 1$。目标是判断 G 中是否存在 k 个顶点，使其诱导出一个完全子图（即一个 k团）。作为首批 W[1]完全问题之一，该问题在参数化难解性理论中发挥着核心作用。已有研究表明，在假设间隙指数时间假设（Gap-ETH）成立的情况下，即使允许任意近似比，也不存在 k团问题的 FPT近似算法（[Chalermsook等人，FOCS'17 和 SICOMP]）。然而，这一不可近似性结果能否基于 W[1] $\neq$ FPT 的标准假设，仍然尚不明确。

在 Bingkai Lin 的突破性工作中 [STOC'21], ，证明了对k-团的任何常数因子近似都是 W[1]-困难的。随后，Karthik C.S. 和 Khot [在 CCC'22], 的工作中将不可近似比改进为 $k^{o(1)}$；Lin、Ren、Sun 和 Wang 在 ICALP'22] [中也独立取得了这一结果（基于看似更强的复杂性假设 ETH）。这一方向的所有工作都遵循 Lin 提出的框架：该框架从 k-向量和问题出发，并需要一些复杂的代数技巧。

本文提出了一个替代框架，用于证明 $k^{o(1)}$-FPT 近似 k-团的 W[1]-困难性。利用这一框架，我们得到了k-团的产生间隙的自归约，且无需经过任何中间代数问题。更具体地说，对于任何仅依赖于参数 k的函数 q，我们都可以将 $(k, k-1)$-间隙团归约为 (q^k, q^{k-1})-间隙团，从而在 q 足够大时推出 $k^{o(1)}$-不可近似性结果。我们的证明相对简单，且主要采用组合方法。我们的构造核心是一种新颖的 k-元素子集编码，其灵感源自网络编码理论，以及图的（线性）Sidon 集表示。

1 引言

在 k-团问题中，给定一个 n顶点图 G 和一个整数 $k \geq 1$。目标是判断 G 是否包含一个大小为 k 的团。这个问题一直是计算机科学领域的重要研究课题，也是 Karp 的 21 个 NP 完全问题之一 [Kar72]。人们也在近似算法的背景下研究了 k-团问题的计算难解性。著名的 PCP 定理问世后，一系列研究 [FGL+96、H˚as01] 致力于构造 PCP 系统，以刻画 k-团问题（更准确地说，

最大团问题）。迄今为止，我们知道，对于任意常数 $\epsilon > 0$，即使给定一个G 承诺含有大小为 $n^{1-\epsilon}$的团的图 n^{ϵ}，判定其中是否存在大小为 n^{ϵ} 的团仍然是 NP困难的。 k-团问题的计算难解性也出现在参数化复杂性的背景下。在这里，我们以k-团问题中的数目 k 作为参数，期望 k 远小于G的大小。稍微滥用一下记号，我们仍将得到的参数化问题称为 k-团问题。众所周知， k-团是一个 W[1]-完全问题，因此不存在 FPT算法，即运行时间为 $t(k)\text{poly}(n)$ 的算法，其中 t是可计算函数，除非 FPT $=$ W[1]。因此，对于一个 G 承诺含有一个 k-团的输入图 G，不存在能计算出大小为 k的团的 FPT算法。一个自然的问题是，是否存在能计算出大小为 $k/f(k)$的团的 FPT算法。这里， f 是一个可计算函数，使得 $k/f(k)$无界且单调不减。这种算法称为 k-团问题的 FPT 近似，其近似比为f。在一个显然强于 W[1] $\neq$ FPT 的假设——间隙指数时间假设（Gap-ETH）——之下，k-团问题存在任何 FPT近似算法也已被排除 [CCK+20]。也就是说，除非 Gap-ETH 不成立，否则 k-团问题是完全 FPT不可近似的——对于参数化 k-团问题，不存在运行时间为 $t(k)\text{poly}(n)$ 的 $f(k)$-近似算法，其中 f 和 t是仅依赖于 k 的可计算函数，且 $k/f(k)$无界且单调不减。一个长期悬而未决的重要问题是，标准的参数化难解性假设（即 W[1] $\neq$ FPT）是否也能推出 k-团问题完全 FPT不可近似。

在一项突破性工作中， [Lin21], Bingkai Lin 证明了，对参数化[1]团问题进行近似是 W k-困难的，且无法在任何常数因子内近似。随后，Karthik C.S. 和 Khot [KK22]基于 Lin 的同一框架，将不可近似比提高到了 $k^{o(1)}$ 。最近，Lin、Ren、Sun 和 Wang [LRSW22]也在 ETH 假设下得到了相同的下界。所有这些结果都从 k向量求和问题（k简称 -Vector Sum）出发，这一问题可视为对 k团问题的代数化。接着， k-Vector Sum 被归约到某个恰当的 CSP问题，并通过一些巧妙的代数技巧在是实例与否实例之间构造出间隙。最后，应用著名的 FGLSS 归约 [FGL+96]，即可得到具有所需间隙的 k团实例。

本文通过相对简单的证明，得到了相同的 $k^{o(1)}$-近似下界 k，针对的是 [团问题。尽管我们的间隙构造归约受到 Lin 框架的启发，21], 但我们重新诠释了他的构造，将其视为Sidon 集与网络编码直接应用于 k团问题的组合。

更准确地说，Sidon 集是这样一个向量集合： S 其中任意两个不同向量的 S 之和都互不相同。这样，我们就可以用向量为图中的顶点“标记”，使任意两个相邻顶点之和都对应唯一的“边标签”。第二个要素是我们使用的网络编码技术，它将输入图中任意 k 个顶点的信息压缩为 Sidon 集中向量的线性组合。每个线性组合都成为结果图中的一个“节点”。如果两个线性组合的系数仅有一处或两处不同，那么我们就可以通过相减确定它们所编码的顶点或边。由于每个节点编码了输入图中的 k 个顶点，我们可以任意选取每个节点作为组的中心，并判断编码是否有效。由此，我们可以证明 Yes 实例与否实例之间存在某个常数间隙。为了实现超常数间隙，我们使用 Sidon 集的线性形式，即线性 Sidon 集(更多详情见第2.3 节）。除线性 Sidon 集和网络编码外，我们证明的其他部分都是组合性的。

如前所述，我们的构造给出了与 [KK22]相同的不可近似比

Work	困难性来源	参数变化	不可近似比	运行时间
[Lin21]	k-向量和 （来自 k'-团，$k=\binom{k'}{2}$）	$K=2^{\Omega(k^3)}$ 对于 $c>1$	$O(1)$ （2^{ck^3} 与 2^{ck^3-1} 对比）	$n^{\Omega(\sqrt[6]{\log K})}$
[KK22]	k-向量和 （来自 k'-团，$k=\binom{k'}{2}$）	$K=q^{2k^2}$ 对于素数 $q>2^{12k}$	$K^{o(1)}$ （q^{2k^2} vs $q^{2k^2-1/k}$）	$n^{\Omega\left(\frac{\log K}{\log q}\right)}$
[LRSW22]	k-向量求和 （来自 3-SAT）	$K=q^{2k}$ 对于 $c>1$、$t=o(\log k)$	$K^{o(1)}$ （2^{ckt} vs $2^{(ck-1)t}$）	$n^{\Omega\left(\frac{\log K}{t}\right)}$ （$t=\Theta(\log q)$（针对 $q=2^{ct}$））
[LRSW23b]	k-变量向量 2-约束满足问题 （来自 3-SAT）	$K=k^{\frac{\log k}{\log\log k}}$ 对于 $c>1$, $t=o(\log k/\log\log k)$	$K^{\Omega\left(1-c\frac{1}{\log K}\right)}$ （k^t 对 k^{ct}）	$n^{\Omega\left(\frac{\log K\log\log K}{\log K}\right)}$ （$t=\Theta(\log q)$，适用于 $q=2^{ct}$）
本文	k-团 （自归约）	$K=q^k$ 对于任意素数 $q=\geq 2$	q （q^k 与 q^{k-1}）	$n^{\Omega\left(\frac{\log K}{\log q}\right)}$ 对于任意素数 $q\geq 2$

表 1：ETH 假设下参数变换与运行时间下界的比较。

Karthik C.S. 和 Khot 所得到的不可近似比。然而，我们的归约具有更好的参数，这对其他应用可能很重要。事实上，[KK22] 提出了一种从 k-向量和问题归约到$(q^{2k^2}, q^{2k^2-1/k})$-间隙团的归约（间隙团的精确定义见第2节），其中 q 是大于 2^{12k}的素数。将其与 k-团到 k-向量和问题的归约组合起来，该归约会使参数发生二次膨胀； [Lin21],由此得到从$(k, k-1)$-间隙团到$(q^{\Theta(k^4)}\ q^{\Theta(k^4-1/k^2)})$-间隙团的自归约，其中 $q=2^{\Omega(k^2)}$是素数。另一方面，我们从 k-团出发的自归约会生成(q^k, q^{k-1})-间隙团实例，其中 q 是任意素数幂。作为副产品，这还蕴含了 [LRSW22] 中的另一项结果：除非 ETH 失败，否则不存在运行时间为 $t(k)n^{o(\log k)}$、且近似比为常数的 k-团近似算法。此外，我们认为，我们的归约有望递归应用，从而得到任意大的间隙。最近，Lin等人[LRSW23b] 提出了一种新技术，可在 ETH 假设下以多项式参数膨胀实现常数不可近似性。然而，该技术产生的约束满足问题（ CSP ）要求元数至少为三，这意味着由于一项特定的技术细节，它无法用于证明 W[1]-困难性下的不可近似性结果。此外，间隙放大幅度被限制在 $O(\log\ k/\log\log\ k)$。

参数变换的比较 在所有已知归约中的情况见表 1 .

2 预备知识

我们采用图论中的标准术语。设 $G=(V,E)$ 是一个图，其中 $V=V(G)$ 是顶点集， $E=E(G)$ 是边集。 G 中两个不同顶点 $u,v\in V$ 之间的一条边，可根据需要记作 $uv\in E$ 或 $\{u,v\}\in E$。 k-团是 G 上由 k 个顶点构成的完全子图。我们也可以用顶点子集 $S\subseteq V(G)$ 来指称 G 中的一个团，该子集诱导出一个完全子图。

在 k-团问题中，给定一个 G 和一个整数 $k\geq 1$，目标是确定 G 是否包含一个大小至少为 k 的团。最大团问题是 k-团的一个最大化变体，我们需要在 G中寻找一个规模最大的团。然而，我们也通常将 k-团这一名称用于其最大化变体，此处 k 表示最优解，即

中的最大团的规模 G。[1] 当我们在参数化复杂性的语境下提到 k-团问题时，我们指的是参数化于 k 的 k-团问题，即参数k 是一个与 G的规模无关的小整数。

(k, k')-间隙团问题是 k-团问题的一个承诺版本，要求判定图 G 是否有一个大小为 k 的团，或者 G 中的每个团的大小是否至多为 k'。同样，讨论参数化算法和参数化复杂性时使用的标准参数是 k 。

对于素数幂 $q \in \mathbb{N}$ ，我们用 $\mathbb{F}_q$ 表示含有 q 个元素的有限域。令 $d \geq 1$。通常， $\mathbb{F}_q^d$ 是定义在 $\mathbb{F}_q$上的向量空间，由所有如下形式的向量组成

$$r = (r_1, \ldots, r_d)$$

其中，对于每个 $i \in [k]$，都有 $r_i \in \mathbb{F}_q$ 。我们还用 $r[i]$ 表示 r的第 i个坐标，即 $r[i] = r_i$。回顾一下，标准单位向量 $e_i \in \mathbb{F}_q^d$ 定义为

$$e_i[i'] = \begin{cases} 1 & \text{if } i' = i \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1}$$

令 $r, r' \in \mathbb{F}_q^d$。我们将 r 与 r' 不同的坐标（或位置）构成的集合定义为

$$\operatorname{diff}(r, r') \coloneqq \{i \in [d] \mid r[i] \neq r'[i]\}.$$

r 与 r' 之间的汉明距离为

$$\operatorname{Hamming}(r, r') \coloneqq |\operatorname{diff}(r, r')|.$$

2.1 参数化复杂性

我们遵循 [FG06]中的定义和记号。在计算复杂性领域，判定问题定义为有限字母表 Σ 上的字符串集合语言，记作 $\Pi \subseteq \Sigma^*$。问题的参数化是一个可在多项式时间内计算的函数 $\kappa: \Sigma^* \to \mathbb{N}$。于是，参数化判定问题定义为一对（$\Pi$， κ），其中 $\Pi \subseteq \Sigma^*$ 是任意判定问题，而 κ是其参数化。

参数化 κ 给出了对指定问题实例的一种刻画，它取决于实例的属性，而非输入规模。也就是说，函数 κ 将问题实例映射为一个较小的正整数；我们可以将参数化判定问题视为这样一种问题：每个输入实例 $x \in \Sigma^*$ 都与一个数 $\kappa(x)$ 相关联，而该数通常远小于 x的长度 $|x|$ 。

如果存在一种算法，对于给定的字符串 $x \in \Sigma^*$ ，能在 $t(\kappa(x))\text{poly}(|x|)$ 时间内判定 $x \in \Pi$ ，那么我们称参数化问题 (Π, κ) 是固定参数可解（FPT）的；其中 $\text{poly}(n) = \bigcup_{c>0} n^c$ ，且 $t(k)$ 是仅依赖于参数 $k = \kappa(x)$ 的可计算函数。形式为 $t(\kappa(x))\text{poly}(|x|)$ 的运行时间称为 FPT 时间，而能在 FPT 时间内判定参数化问题的算法称为 FPT 算法。复杂性类 FPT 是所有存在 FPT 算法的参数化问题所构成的类。与 NP 完全性理论中的多项式层次类似，还存在 W 层次的各个类，使得

$$\text{FPT} \subseteq \text{W[1]} \subseteq \text{W[2]} \subseteq \cdots \subseteq \text{W[i]} \subseteq \cdots .$$

[1] 迄今为止 就 FPT 近似算法而言，这两个版本确实是等价的[CGG0 7].

W[1] 类和 W[2] 类包含许多自然的完全问题，尤其分别包括 k-团问题和 k-支配集问题。因此，除非 W[1] = FPT，否则 k-团问题不存在 FPT 算法；类似地，除非 W[2] = FPT，否则 k-支配集问题不存在 FPT 算法（这也意味着 W[2] =W[1] =FPT）。

FPT 算法一直是应对 NP难问题的工具之一：当参数 $\kappa(x)$ 远小于 $|x|$ 时，FPT 算法实际上就是一个多项式时间算法。然而，如前所述，假设 W[1] $\neq$FPT，许多重要的优化问题（如最大团问题和最小支配集问题）都不存在 FPT 算法。这促使人们为这些优化问题寻求 $f(k)$-FPT 近似算法，其中 f 是一个可计算函数。也就是说，对于一个实例 x，给定附加参数 k（使得最优解的代价记为 opt(x)，且满足

$$\begin{cases} \mathrm{opt}(x) \geq k & \text{for maximization problems} \\ \mathrm{opt}(x) \leq k & \text{for minimization problems,} \end{cases}$$

输出一个可行解 y，满足

$$\begin{cases} \mathrm{cost}(y) \geq \frac{k}{f(k)} & \text{for maximization problems} \\ \mathrm{cost}(y) \leq k \cdot f(k) & \text{for minimization problems.} \end{cases}$$

函数 f 称为该算法的近似比。显然，对于最大化问题，我们只关注比率 f，其中该比率无界且非递减$k/f(k)$。

FPT 近似算法的发展十分迅速，既取得了上界方面的进展，也取得了下界方面的进展（即 FPT-不可近似性结果）。相关参考文献请参见，例如： [FSLM20] 。目前，参数化复杂性领域的两个核心问题—— k-团问题和 k-支配集问题——已知是完全 FPT 不可近似的，也就是说，除非 Gap-ETH 不成立，否则它们对于任何近似比，都不存在以最优解大小为参数的 FPT 近似算法k 。 [CCK+20]。随后，Karthik C.S、Laekhanukit 和 Manurangsri 在k中证明了 W[1] $\neq$FPT 假设下 [SLM19]所述的 k-团和 k-支配集问题的近似困难性 [LRSW23a]。尽管如此，W kFPT 假设下的[1] $\neq$-团问题是否完全 FPT 不可近似，仍是一个悬而未决的问题。

形式化地说，对于由标准参数 k （例如最优解的大小）参数化的最大化问题（分别地，最小化问题），如果对于任意仅依赖于 k 的可计算非递减函数 $t(k)$ 和 $f(k)$，给定一个大小为 n 的输入，不存在一个运行时间为 $t(k)$poly(n) 的算法能够输出成本至少为 $k/f(k)$ 的可行解（对于最小化问题，则至多为 $f(k) \cdot k$），那么就称该问题是完全 FPT-不可近似的。

开放问题 1（ k-团的 W[1]-困难性）。在 W[1] $\neq$FPT 下， k-团问题是否具有完全 FPT-不可近似性?

k-支配集问题也存在一个类似的开放问题。

开放问题 2（ k-支配集的 W[2]-难性）。在 W[2] $\neq$FPT 假设下， k-支配集问题是否具有完全的 FPT-不可近似性?

最后，另一项猜想已被确立为推导 FPT-不可近似性结果的一般工具，即参数化难解性假设（PIH）。该猜想提出这样的问题：对于一个包含 k 个变量的 2约束满足问题（2-CSP），其中 k 是常数，而每个变量（例如 X_i）都从 $[n]$ 中取值，是否不存在常数因子的 FPT 近似算法？更正式地说，2-CSP 是一种约束满足问题，其中每个约束恰好涉及两个变量；该假设认为，对于以 k 为参数的这类 2-CSP，不存在在 FPT 时间内运行的常数因子近似算法：

假设 1（参数化难解性假设）。对于某个常数 $\epsilon > 0$，不存在针对 k 参数化的 k 变量 2-CSP 的 $(1+\epsilon)$ 倍 FPT近似算法，其中每个变量的取值来自 $[n]$。

Chalermsook等人的结果[CCK+20] 表明，在 Gap-ETH 假设下，PIH 成立；在最近的一项突破性进展中，这一结果已被改进为只需假设 ETH [GLR+24]。尽管如此，PIH 是否在 W[1]-难性假设下成立，仍是一个重要的开放问题：

开放问题 3（参数化难解性假设）。参数化难解性假设在 W[1] ≠FPT 下是否成立？

2.2 网络编码

网络编码是一种用于多输入组播网络的信息压缩技术。该方法最初由 [ACLY00], 提出，并由 [HKM+03] 针对无时延无环网络加以形式化，随后在 [HMS+03]中推广到一般情形。相关参考文献请参见 [YLC06]。

在随机线性网络编码模型中，数据以 k 向量的形式，通过有限域$\mathbb{F}_q^d$从 k 个不同的源节点传输到 k 个不同的目的节点，其中$\mathbb{F}_q^d$为 v_1，……，$v_k \in \mathbb{F}_q^d$，且 q是一个足够大的素数幂。每当数据包在中间节点相遇时，数据便会被压缩，并以这些 k 向量的随机系数线性组合形式传输，即

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_k v_k,$$

其中，对每个 $i \in [k]$，都有 $r_i \in \mathbb{F}_q$

汇节点收到足够的数据包后，可以通过求解线性系统正确解码信息。更准确地说，对于随机系数线性网络编码，已证明 O个（k）数据包足以保证存在 k 个线性无关向量。因此，线性系统有唯一解，使汇节点能够取回并正确解码信息。

网络编码的优势在于吞吐量效率接近最优，而且存储数据包所需的内存较少。

网络编码与近似 k-团的困难性之间的联系，直到 Lin 的突破性成果才为人所知 [Lin21], ，他隐式地应用网络编码方法，将 k 个顶点的信息压缩为一个向量。只要我们拥有 k 个具有线性无关系数的向量，就可以唯一解码原始 k 个顶点的信息，从而能够判断编码后的 k 个顶点是否构成 k-团。由于每个向量都编码了 k 个顶点的信息，任意由 k 个线性无关向量组成的子集都会给出线性系统的唯一解，使验证器只需读取这些向量中极小的一部分，就能拒绝一个不含 k-团的图。因此，这带来了近似方面的困难性下界：

通过一种非常巧妙的归约，将该 k-团问题从这个特定的概率证明系统归约为一个 k-团实例。

严格来说，网络编码与 Hadamard码相同，但这更符合我们的直觉：自归约为 k-团问题制造了间隙。更详细的讨论请参见第3 节。

2.3 Sidon 集与推广

Sidon 集是阿贝尔群的一个子集 S，其中 S 中任意两个不同元素的和都不相同；也就是说，对于任意 x、y、x'、$y' \in S$，若 $x \neq y$ 且 $x' \neq y'$，则当且仅当 $\{x, y\} = \{x', y'\}$ 时，有 $x + y = x' + y'$。给定一个正整数 $n \geq 1$，可以在多项式时间内使用贪心算法构造大小至少为 $n^{1/3}$ 的 Sidon 集 $S \subseteq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$（该算法归功于 Erd¨os）：从集合 $A = \emptyset$ 开始。反复向 A 中添加一个数 $x \in \{0, \ldots, n-1\} \setminus A$，使得对于任意 a、b、$c \in A$，x 都不能写成 $a + b - c$，直到不存在这样的数为止。Erd¨os 和 Tur´an [ET41]证明，也可以利用二次剩余高效地构造大小为 $\sqrt{n}$ 的 Sidon 集。具体而言，他们证明集合 $S = \{2pk + (k^2) \bmod p : 1 \leq k \leq p\}$ 是 Sidon 集，其中 p 是一个固定的素数，所有运算均在 $\mathbb{F}_p$ 下进行。注意，如果图的顶点取自一个 Sidon 集，那么每条边的两个端点之和在底层阿贝尔群中都是唯一的。因此，用 Sidon 集表示图的顶点，就能对其进行标准算术运算，不过运算是在某些有限域中进行的。

Sidon 集有几种推广形式 [O'B04]。就我们的目的而言，我们需要 Sidon 集的线性形式；Ruzsa 的研究曾探讨过这种形式 [Ruz93、Ruz95]，我们称之为线性 Sidon 集。

定义 1. 设 $\mathbb{F}$ 为一个有限域，且 $d \geq 1$。子集 $S \subseteq \mathbb{F}^d$ 是一个线性 Sidon 集，当且仅当对于所有a、$b \in \mathbb{F}^*(= \mathbb{F} \setminus \{0\})$以及 x、y、x'、$y' \in S$，若满足 $x \neq y$和 $x' \neq y'$，则有

$$ax + by = ax' + by' \implies \{x, y\} = \{x', y'\}.$$

上述定义是无和集 [CE16、Gre04] 以及不包含任何三项等差数列的集合的自然推广。另一方面，我们的线性 Sidon 集是（M，b）-自由集的特例 [Gre05、Sha09] 将其定义为集合 S，其中不存在非平凡解满足线性系统 $Mx = b$ 取值于 S^ℓ。

3 我们证明的概述

本节概述我们构造中的关键思路和步骤。我们归约的输入是一个图 G 和一个整数 $k \geq 1$。出于技术原因，不失一般性，我们假设G 是多色 k-团问题的一个实例，其中

$$V(G) = \biguplus_{i \in [k]} V_i,$$

并且，每个顶点集 V_i 都是 G中的一个独立集。因此，G 中的任何 k-团都必须恰好从每个 V_i中包含一个顶点。我们的目标是根据 G 和 k 构造一个图 H，使得在是实例（其中 G有一个 k-团）和否实例（其中 G没有 k-团）中，H 的最大团大小之间存在显著差距。

非正式讨论。让我们先非正式地解释一下我们归约背后的直觉。

通常，可以使用某个 $\ell \geq 1$ 的 ℓ 次图乘积来构造是例和否例之间的间隙，从而生成图 G^ℓ，其中 G^ℓ 中的每个节点都表示 G 中一个大小为 ℓ 的团。因此， G 中的任意 k 团都对应于 G^ℓ 中一个大小为 k^ℓ 的团，从而形成 k^ℓ 与 $(k-1)^\ell$ 之间的间隙。然而，要实现常数间隙， ℓ 必须至少为 $\Omega(k)$（例如 $\ell = k/2$），这会导致图 G^ℓ 的规模为 $n^{O(k)}$。因此，标准图乘积或自归约不足以通过 FPT 归约实现常数不可近似性。

为了解决这一问题，我们采用网络编码理论中的一种技术来压缩 G^ℓ 的表示。具体而言，我们将 G 中每个由 k 个顶点组成的子集编码为 k 个顶点的线性组合，这些顶点由有限域 $\mathbb{F}_q^d$ 上的向量表示。新图中的每个“节点”都对应一个线性组合 $\pi = \mathbf{r}^T\mathbf{v}$，其中 $\mathbf{v}$ 是一个由 k 个顶点构成的列向量。

新图由 q^k 组节点（即颜色类）构成，每组对应线性组合中的一个系数。每个颜色类都构成一个由节点组成的独立集，表示所有可能的线性组合。因此，任何算法都最多只能从每个颜色类中选取一个节点来组成一个团。不同颜色类的节点之间的边编码了两个线性组合之间的一致性：如果两个节点都编码了相同的“有效”信息，它们之间就存在一条边。

在网络编码中，解码过程很直接；接收节点会等待，直到收到 k 个线性无关的组合。由于线性系统有唯一解，发送方无法通过发送不一致的线性组合来欺骗接收方。然而，在构造 k-团实例时，每条边表示仅从两个线性组合中解码信息。在证明系统中， k-团实例可以看作是一个团测试，其中执行 $\binom{k}{2}$ 次双查询测试。每次双查询测试只对两个节点进行解码，且仅当两个线性组合至多相差两个坐标时才有效。如果它们相差一个坐标，相减后会得到原图中一个顶点的数值编码。如果它们相差两个坐标，则会得到两个数之和，该和编码了两个不同的节点以及一条据称存在的边。这会产生唯一性问题，因为包含两个变量的单个方程可能没有唯一解。我们通过使用加法组合学中的 Sidon 集来解决这一问题；它能确保集合中任意两个元素的和或差都唯一，从而解决解的非唯一问题。

这种方法不同于以往的研究 [Lin21] 和 [KK22], ，后者采用了类似的编码，但将其视为 *Hadamard* 码。Karthik 和 Khot [KK22] 通过利用 Hadamard 码的性质解决了唯一性问题，指出大多数双查询测试都有唯一解。相比之下，我们依靠 Sidon 集的性质来解决这些问题。

我们的证明还从网络编码的角度看待这种编码，并利用线性无关性来论证一致性。具体而言，无法保证两个不同的节点编码相同的信息——这是局部可测试码中通过局部码字测试来解决的问题。然而，我们通过线性无关性进行论证，绕过了局部测试；这种方法仅适用于团问题。对于任意节点 v，我们将其视为一个球的中心，并加入系数恰有一个位置不同（汉明距离为一）的 k节点。这些 k 节点线性无关，因此解唯一，从而防止对手提供不一致的信息。这样，我们便能完全绕过局部测试，这是团问题独有的优势。

更具体地说，我们的论证如下。如果输入图包含一个 k 阶团，那么

就存在一个大小为 q^k 的团。否则，令 Q 为任意算法给出的一个团。我们知道， Q 中的每个节点都来自不同的颜色类。任选一个节点 v 作为中心，我们考察与其汉明距离为一的邻近节点（按坐标计算）。如前所述，这些节点构成一个线性无关集，从而得到唯一解。此外，任何两个分别位于中心不同方向上的非中心节点，其汉明距离均为二，因此会触发一次边测试。如果这两个节点相减后解码得到原图中的一条边，那么它们之间就存在一条边。

结合一致性性质与解码的唯一性，我们得出结论：当且仅当解码结果在原图中构成一个团时，每个球在远离中心的所有 k 个方向上都包含非中心节点。因此，我们得出以下结论：（1）存在 q^k 个中心，形成 q^k 个球；（2）每个球至少缺少一个方向，因此该方向上会损失 q 个球。利用二项 Sidon 集，我们证明每个缺失的 q 个球至多属于 k 个球，这意味着如果原图中不存在大小为 k的团，结果图中的团大小至多为 $q^k \cdot k/q = q^{k-1}/k$。最后，我们将说明，若采用更高阶的 Sidon 集，例如四项 Sidon 集，就不会发生重复计数。

更正式的描述。现在，我们从较高层次对归约作更正式的描述。首先，对于适当的整数 $d \geq 1$，我们将顶点集 V（G）与有限域 $\mathbb{F}_q^d$ 上的线性 Sidon 集 S 对应起来。我们将在第 4 节证明，这样的 $S = V$（G）可以构造出来，且 $\mathbb{F}_q^d$ 的大小以 $|V$（G）|为多项式界。第二步，对于固定向量 r =（r_1,... , r_k），将每个含 k个元素的子集 $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq V$（$G$）与之关联，其中 $v_i \in V_i$对每个$i \in [k]$ 都成立

$$\pi = r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_k v_k, \tag{2}$$

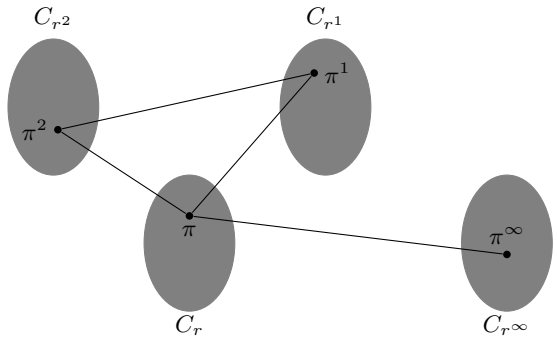
完全以相同的方式，我们通过网络编码，使用 r_1、... 、 r_k 作为系数来传输 k向量 v_1、...、 v_k。因此，对于每个 $r \in \mathbb{F}_q^k$，我们都有一个 $\mathbb{F}_q^d$ 的副本，作为 H 中以 r 为索引的顶点列 C_r 。

鉴于 $\mathbb{F}_q^d$ 的大小是 $|V(G)|$的多项式，有界的 k 向量的线性组合数量也仅为多项式有界。然而， $V(G)$ 的 k 元子集数量为 $\Omega(n^k)$。这是因为由 (2) 得到的每个向量 π 都编码了许多不同的 k 元子集。不过，如果我们从两列 C_r 和 $C_{r'}$ 中分别取两个 π 和 π'，且 r =(r_1、 ...、 r_k) 与 r' =(r'_1、...、 r'_k) 之间的汉明距离为 1，即对于恰好一个 $i \in [k]$ 有 $r_i \neq r'_i$，那么 $\pi - \pi'$ 将给出一个唯一的顶点 $v_i \in V_i$，其

$$v_i = (r_i - r'_i)^{-1}(\pi - \pi'). \tag{3}$$

当然，$r_i - r'_i)^{-1}(\pi - \pi')$ 可能并不属于线性 Sidon 集 $S = V(G)$。因此，只有当（ π 与 π' 在3）确实是 G中的一个顶点时，我们才会在二者之间添加一条边。换言之，列 r 与 r' 之间的边用于测试编码 $\pi \in C_r$ 与 $\pi' \in C_{r'}$ 在第 i 个位置是否一致，其中 $r_i \neq r'_i$。我们可以说， π 与 π' 通过顶点$v_i \in V(G)$ 的顶点测试。

现在假设，对于 $r \in \mathbb{F}_q^k$，对所有 $i \in [k]$，都有一个 $r^i \in \mathbb{F}_q^k$，它与 r 仅在第i个位置上不同。此外，对于 $\pi \in C_r$，假设存在 $\pi^1 \in C_{r^1}$、.....、$\pi^k \in C_{r^k}$，它们在 H 中都与 π相邻。根据上述构造，我们得到 $v_1 \in V_1$、... ...、 $v_k \in V_k$，其中每一对 π 和 π^i 都通过顶点 v_i 的顶点测试。于是，如果对于所有 $1 \leq i < i' \leq k$， v_i 和 $v_{i'}$ 在 G 中相邻，那么原图 G 就有一个 k-团，即 $\{v_1, \ldots, v_k\}$。另一方面，很容易看出 r_i



r r r =

图 1：令 2 r $r^\infty \geq 3$ r r^1 r 、

r^1、r^2、$r^\infty \in \mathbb{F}_q^k$ 满足汉明距离$(\,,r^1) = 1$、汉明距离$(\,,r^2) = 1$、汉明距离(r^1,r^2)，以及汉明距离$(\,,\,)$。更准确地说，假设 和 在它们的前 个位置上不同，而 和r^2 在它们的第二个位置上不同，因此 r^1 和 r^2 恰好在它们的第一个和第二个位置上不同。因此，$\pi \in C_r$ 与 π^1 之间的边意味着，对于某个$v_1 \in V_1$，$\pi - \pi^1 = (r[1] - r^1[1])v_1$；同理，根据边 $\pi\pi^2$，对于某个 $v_2 \in V_2$，$\pi - \pi^2 = (r[2] - r^2[2])v_2$。这里，我们用$r[1]$ 表示向量$r \in \mathbb{F}_q^k$的第一个坐标；同理，$r^1[1]$ 是r^1的第一个坐标。此外，π^1 与 π^2 之间的边意味着 v_1v_2 是原图 G中的一条边。最后，由于汉明距离$(\pi,\pi^\infty) \geq 3$，π 与任意一个$\pi^\infty \in C_{r^\infty}$之间都有一条边。

并且 $r_{i'}$ 恰好在两个位置上不同，即 i 和 i'。由于 v_i 和 $v_{i'}$ 都属于线性 Sidon 集 $S = V(G)$，因此它们由 $\pi^i - \pi^{i'}$ 唯一确定。于是，当且仅当对应的 v_i 和 $v_{i'}$ 在 G 中之间有一条边时，我们才在 π^i 和 $\pi^{i'}$ 之间添加一条边。因此，

$$\text{if } \pi,\pi^1,\ldots,\pi^k \text{ induce a clique in } H, \text{ then } G \text{ has a } k\text{-clique.} \tag{4}$$

更一般地，在 $\mathbb{F}_q^k$中有两个 $r = (r_1,\ldots,r_k)$和 $r' = (r'_1,\ldots,r'_k)$，它们的汉明距离为二，即对于所有 $i \in [k]$，除两个 $1 \leq i_1 < i_2 \leq k$外，$r_i = r'_i$。此外，$\pi \in C_r$ 和 $\pi' \in C_{r'}$ 满足

$$\pi - \pi' = (r_{i_1} - r'_{i_1})v + (r_{i_2} - r'_{i_2})v'. \tag{5}$$

当且仅当 v 和 v' 在 $E(G)$中相邻时，π 和 π' 之间才有一条边。也就是说，π和 π' 通过了边 $vv' \in E(G)$的边测试。

总而言之，图 H 由 C_r 列顶点组成，其索引为$r \in \mathbb{F}_q^k$。每一列C_r 都是$\mathbb{F}_q^d$ 的一个副本，旨在通过如下形式的线性组合（k来编码 $V(G)$ 的一个元素子集（2）。两列 C_r 和 $C_{r'}$ 之间的边取决于 r 和 r'之间的汉明距离。当 r和 r' 之间的距离分别为一或二时，它们对应于顶点测试和边测试。如果距离大于二，则在 C_r和 $C_{r'}$之间添加所有边。图1展示了 H的部分构造。

如果 G有一个由顶点 $v_1,\ldots,v_k$构成的 k-团，那么对于每一列 C_r，我们都可以选取 $\pi \in C_r$作为 (2)。我们的构造确保它们在 H 中构成一个大小为 q^k的团。否则，也就是说，G 中的任意团 K 的大小至多为 $k-1$，我们将论证 G 中最大团的大小为 q^{k-1}量级。关键观察是，正如 (4) 所示，对于每个 $r \in \mathbb{F}_q^d$，如果存在一个 $\pi \in K \cap C_r$，那么对于至少一个 $i \in [k]$，对所有与 r 恰好在第 i个位置不同的 r'，列 $C_{r'}$ 中都不含 K中的顶点。

4 线性 Sidon 集的构造

本节介绍如何使用一种贪心算法构造给定大小的线性 Sidon 集，该算法类似于预备知识中提到的 Erd¨os 算法。

固定一个有限域 $\mathbb{F}$ 和 $d \geq 1$。为使表述更简洁，我们再引入一个技术性概念。

定义 2. 若子集 $S \subseteq \mathbb{F}^d$ 中任意满足 $|S'| \leq 4$ 的 $S' \subseteq S$ 都线性无关，则称其为 4 项线性无关。等价地，任意 $x \in S$ 都不是 $S \setminus \{x\}$ 中三个（不一定互不相同）向量的线性组合。

Lem引理 1. 设 $S \subseteq \mathbb{F}^d$ 是 4 项线性无关的。则 S 是一个线性 Sidon 集 .

证明。设 a、$b \in \mathbb{F}^* = \mathbb{F} \setminus \{0\}$ 和 x、y、x'、$y' \in S$ 满足 $x \neq y$、$x' \neq y'$ 和 $ax + by = ax' + by'$。假设 $\{x, y\} \neq \{x', y'\}$。由对称性，不失一般性，我们还可以假设

$$x \notin \{y, x', y'\}.$$

注意

$$x = a^{-1}(ax' + by' - by) = x' + a^{-1}by' - a^{-1}by.$$

因此，x 是 x'、y'、$y \in S \setminus \{x\}$的线性组合，这与定义2矛盾。 □

通过归纳法，我们将构造一个序列

$$S_0 \subsetneq S_1 \subsetneq \ldots \subsetneq S_i \subsetneq \ldots \subsetneq \mathbb{F}^d$$

由 $\mathbb{F}^d$的 4 项线性无关子集组成，因此根据引理1，它们是线性 Sidon 集。我们从$S_0 := \emptyset$开始，它显然满足定义2。令 $i \geq 0$，并假设 4 项线性无关的 $S_i \subseteq \mathbb{F}^d$ 已构造完成，其中 $|S_i| = i$。我们定义一个集合

$$\operatorname{span}(S_i) := \left\{ax + by + cx' \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{F} \text{ and } x, y, x' \in S_i\right\}.$$

容易看出

$$|\operatorname{span}(S_i)| \leq |S_i|^3 \cdot |\mathbb{F}|^3 = i^3 \cdot |\mathbb{F}|^3.$$

假设

$$i^3 \cdot |\mathbb{F}|^3 < |\mathbb{F}|^d = \left|\mathbb{F}^d\right|, \tag{6}$$

那么就存在一个

$$w \in \mathbb{F}^d \setminus \operatorname{span}(S_i).$$

任意选取这样一个 w，并令

$$S_{i+1} := S_i \cup \{w\}.$$

显然，S_{i+1} 仍然是 4 项线性无关的。

定理 1. 设 $\mathbb{F}_q$ 为一个有限域，且 $n \geq 1$。我们定义

$$d := \lceil \frac{3 \log n}{\log q} + 3 \rceil.$$

Thus

$$n \leq q^{(d-3)/3}.$$

那么，我们可以构造一个 4 项线性无关集 $S \subseteq \mathbb{F}_q^d$，其中 $|S| = n$ 且 $|\mathbb{F}_q^d| \leq q^4 \cdot n^3$，所需时间关于 $n + q$为多项式时间。注意到 S 根据引理 *1*，它也是一个线性 Sidon 集。

证明。按照我们所描述的贪心策略，我们构造一个 4 项线性无关

$$S_0 \subsetneq S_1 \subsetneq \ldots \subsetneq S_i \subsetneq \ldots \subsetneq \mathbb{F}^d.$$

As

$$(n-1)^3 \cdot |\mathbb{F}_q|^3 < n^3 \cdot |\mathbb{F}_q|^3 = n^3 \cdot q^3 \leq q^{d-3} \cdot q^3 = q^d = |\mathbb{F}_q|^d,$$

由（6）可得我们得出结论，S_n 可以构造出来。因此，我们可以取 $S := S_n$，其中 $|S| = n$

要证明贪心算法能在多项式时间内运行，只需注意到

$$|\mathbb{F}_q^d| = q^d = q^{\lceil \frac{3 \log n}{\log q} + 3 \rceil} \leq n^3 \cdot q^4.$$ □

4.1 多项线性无关集

对于小节5.4中的构造，我们需要考虑给定集合 S中多于两个向量的线性组合。这引出以下定义。

定义3. 设 $\mathbb{F}$ 是一个有限域，且 $t \geq 1$。若对于每个满足 $|S'| \leq t$ 的 $S' \subseteq S$，其均线性无关，则子集 $S \subseteq \mathbb{F}^d$ 是 t 项线性无关的。

我们将 t项线性无关集的构造细节留给读者；这只是定理1的直接推广。

定理 2. 设 $\mathbb{F}_q$ 是一个有限域，$t \geq 1$ 且 $n \geq 1$。我们定义

$$d := \lceil \frac{(2t-1) \log n}{\log q} + 2t - 1 \rceil.$$

Thus

$$n \leq q^{(d-(2t-1))/(2t-1)}.$$

那么，我们可以在关于 $n^t + q^t$ 的多项式时间内构造一个 t 项线性无关集 $S \subseteq \mathbb{F}_q^d$，使得 $|S| = n$。

5 Redu从（k，$k-1$）-间隙团到（q^k，q^{k-1}）-间隙团的归约 e

本节首先介绍从 k-团（或等价地，从（k，$k-1$）-间隙团）到（q^k，$k \cdot q^{k-1}$）-间隙团的归约。事实上，这已经意味着，除非 FPT = W[1]，否则最大 k-团问题不存在近似比为 $k^{o(1)}$的 FPT近似算法。随后，我们将说明如何修改我们的构造，以获得从（k，$k-1$）-间隙团到（q^k，q^{k-1}）-间隙团的归约。它不如第一个归约直观，但能够使我们在 ETH 假设下获得 [LRSW22] 中的下界。

5.1 归约

设（G, k）是多颜色 k-团问题的一个实例。特别地，

$$V(G) = \biguplus_{i\in[k]} V_i, \tag{7}$$

并且每个 V_i 都是 G中的一个独立集。我们按如下方式构造图 H 。

- 设 $\mathbb{F}_q$ 为一个有限域，其中 q 稍后确定。此外，令 $n := |V(G)|$ 且$d := \lceil {}^{3}\log_q^{n} + 3\rceil_{\log}$。因此，根据~~定理~~ 1，不失一般性，我们可以假设 $V(G) \subseteq \mathbb{F}_q^d$是一个大小为 n的线性 Sidon 集。

- 对于每个 $r \in \mathbb{F}_q^k$，我们将索引为 r 的列定义为

$$C_r := \left\{ \Pi_{r,\pi} \;\middle|\; \pi \in \mathbb{F}_q^d \right\}.$$

  这里 $\Pi_{r,\ \pi}$ 是与 r 和 π相关联的唯一顶点。然后我们令

$$V(H) := \bigcup_{r\in\mathbb{F}_q^k} C_r. \tag{8}$$

- 我们仍需定义图 H的边集 $E(H)$。令 r、$r' \in \mathbb{F}_q^k$ 和 $\Pi_{r,\ \pi} \in C_r$、$\Pi_{r',\ \pi'} \in C_{r'}$。我们区分以下几种情况。

  (H1) 若 $r = r'$，则 $\Pi_{r,\ \pi}$ 与 $\Pi_{r',\ \pi'}$ 之间没有边。

  (H2) 若汉明距离$(r, r') = 1$，设 $r' = r + ae_i$[2]，其中 $a \in \mathbb{F}_q^*$ 和 $i \in [k]$。那么

$$\Pi_{r,\pi}\Pi_{r',\pi'} \in E(H) \iff \pi' - \pi = av \text{ for some } v \in V_i \subseteq V(G). \tag{9}$$

  也就是说，π 和 π' 通过以顶点 v 进行的顶点测试，如第 3 节所述。

  (H3) a、$b \in \mathbb{F}_q^*$ 和互不相同的 i、$j \in [k]$。那么

$$\Pi_{r,\pi}\Pi_{r',\pi'} \in E(H) \iff \pi' - \pi = au + bv \text{ for some } u \in V_i \text{ and } v \in V_j \text{ with } uv \in E(G). \tag{10}$$

  因此，π 和 π' 通过以边 uv进行的边测试。根据定义 1 ，顶点u 和 v（若存在）是唯一的。

  (H4) 若汉明距离$(r, r') \geq 3$，则 $\Pi_{r,\ \pi}\Pi_{r',\ \pi'} \in E(H)$。

引理 2. 图 H 可以在关于 $|V(G)| + q^k$ 的多项式时间内构造 .

证明。首先，我们将 $V(G)$ 与线性 Sidon 集 $S \subseteq \mathbb{F}_q^d$对应。根据定理 1，这可以在关于 $|V(G)| + q$ 的多项式时间内完成。然后，我们将 H 的顶点集构造为 (8)，耗时与 $V(H)$ 的大小成线性关系。注意

$$|V(H)| = |\mathbb{F}_q^k| \cdot |\mathbb{F}_q^d| = q^k \cdot q^d \leq q^{k+4} \cdot |V(G)|^3.$$

最后，为了构造边集 $E(G)$，我们遍历 $V(H)$ 中的每一对顶点，并检查条件 (H1)–(H4)。这首先需要在 $\mathbb{F}_q^k$ 和 $\mathbb{F}_q^d$ 中进行一些简单的算术运算，然后检查边集 $V(G)$。因此，同样可以在关于 $q^k + |V(G)|$ 的多项式时间内完成。 □

[2]回忆一下，e_i 是定义为 (1) 的单位向量。

5.2 完备性

引理 3. 如果 G 有一个 k-团，那么 H 有一个大小为 q^k 的团。

证明。设 $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq V(G) \subseteq \mathbb{F}_q^d$ 是 G中的一个 k团。那么对于每个 $r \in \mathbb{F}_q^k$，我们定义

$$\pi_r \coloneqq \left(\sum_{i \in [k]} r[i] v_i[1], \ldots, \sum_{i \in [k]} r[i] v_i[d] \right) \in \mathbb{F}_q^d.$$

我们声称

$$K \coloneqq \left\{ \Pi_{r, \pi_r} \mid r \in \mathbb{F}_q^k \right\}$$

是 H中的团。设 r、$r' \in \mathbb{F}_q^k$ 满足 $r \neq r'$。我们需要证明 $\Pi_{r,\ \pi_r}$ 和 $\Pi_{r',\ \pi_{r'}}$ 在 H中相邻。

- 情况 1：汉明距离$(r, r') = 1$，设 $r' = r + ae_i$，其中某个 $a \in \mathbb{F}_q^*$和 $i \in [k]$。那么

$$\begin{aligned}
\pi_{r'} - \pi_r &= \left(\sum_{\ell \in [k]} r'[\ell] v_\ell[1], \ldots, \sum_{\ell \in [k]} r'[\ell] v_\ell[d] \right) - \left(\sum_{\ell \in [k]} r[\ell] v_\ell[1], \ldots, \sum_{\ell \in [k]} r[\ell] v_\ell[d] \right) \\
&= \left(\sum_{\ell \in [k]} (r'[\ell] - r[\ell]) v_\ell[1], \ldots, \sum_{\ell \in [k]} (r'[\ell] - r[\ell]) v_\ell[d] \right) \\
&= \big((r'[i] - r[i]) v_i[1], \ldots, (r'[i] - r[i]) v_i[d] \big) = \big(a v_i[1], \ldots, a v_i[d] \big) \\
&= a \big(v_i[1], \ldots, v_i[d] \big) = a v_i.
\end{aligned}$$

  由（9）即可完成证明。

- 情况 2：汉明距离$(r, r') = 2$，特别地，$r' = r + ae_i + be_j$对于某些 a、$b \in \mathbb{F}_q^*$以及 i、$j \in [k]$，满足 $i \neq j$。由此可得

$$\begin{aligned}
&\pi_{r'} - \pi_r \\
=& \left(\sum_{\ell \in [k]} (r'[\ell] - r[\ell]) v_\ell[1], \ldots, \sum_{\ell \in [k]} (r'[\ell] - r[\ell]) v_\ell[d] \right) \\
=& \big((r'[i] - r[i]) v_i[1] + (r'[j] - r[j]) v_j[1], \ldots, (r'[i] - r[i]) v_i[d] + (r'[j] - r[j]) v_j[d] \big) \\
=& a \big(v_i[1], \ldots, v_i[d] \big) + b \big(v_j[1], \ldots, v_j[d] \big) = a v_i + b v_j.
\end{aligned}$$

  因此，（10）意味着 $\Pi_{r,\ \pi_r} \Pi_{r',\ \pi_{r'}} \in E(H)$。

- 情况 3：汉明距离$(r, r') \geq 3$。由（H4）可直接得到。

显然，$|K| = q^k$。这就完成了我们的证明。 □

5.3 可靠性

引理 4. 如果 G 没有 k-团，那么 H 没有大小为.....的团

$$k \cdot q^{k-1} + 1.$$

证明。假设 $K \subseteq V(H)$ 是 G 中的一个团。为此，令

$$R \coloneqq \left\{ r \in \mathbb{F}_q^k \;\middle|\; K \cap C_r \neq \emptyset \right\}.$$

于是由 (H1)，可得

$$|K \cap C_r| = 1$$

对每个 $r \in R$ 均成立；否则，对每个 $r \in \mathbb{F}_q^k \setminus R$ 均有 $|K \cap C_r| = 0$。在前一种情况下，我们用

$$\Pi_{r,\pi_r} \tag{11}$$

表示 $K \cap C_r$ 中的唯一元素。因此 $\pi_r \in \mathbb{F}_q^d$。

命题 1. 设 $r \in R$。则存在一个 $i \in [k]$，使得对所有 $a \in \mathbb{F}_q^*$，都有

$$r + ae_i \notin R.$$

命题证明。反设，对于每个 $i \in [k]$，都存在一个 $a_i \in \mathbb{F}_q^*$，使得

$$r^i \coloneqq r + a_i e_i \in R.$$

由（11），存在唯一的

$$\Pi_{r^i,\pi_{r^i}} \in K.$$

出于同样的理由，存在唯一的 $\Pi_{r,\ \pi_r} \in K$。由于 K 是一个团，图 H 中的 $\Pi_{r,\ \pi_r}$ 与 $\Pi_{r^i,\ \pi_{r^i}}$ 之间存在一条边。由 (H2)，原图 G 中存在一个顶点 $v_i \in V_i$，使得

$$\pi_{r^i} - \pi_r = a_i v_i.$$

现在我们证明 $\{v_1, \ldots, v_k\}$ 是 k 中的一个团，这与我们的假设矛盾： G 不含 k-团。因此，我们需要证明，对于任意不同的 i、$j \in [k]$，都有 $v_i v_j \in E(H)$。注意，

$$\pi_{r^i} - \pi_{r^j} = (\pi_{r^i} - \pi_r) - (\pi_{r^j} - \pi_r) = a_i v_i - a_j v_j = a_i v_i + (-a_j) v_j.$$

由 (H3)，可得所需的 $v_i v_j \in E(G)$。需要强调的是， $V(G)$ 是一个线性 Sidon 集，因此上述 v_i 和 v_j 均可唯一确定。 □

当然，对于每个 $r \in R$，可能有多个 $i \in [k]$ 满足上述断言。尽管如此，我们仍任意固定其中一个，并将其记为 i_r。然后我们定义

$$T_r \coloneqq \left\{ r + a \cdot e_{i_r} \in \mathbb{F}_q^k \;\middle|\; a \in \mathbb{F}_q^* \right\}. \tag{12}$$

注意 $|T_r| = q - 1$ 和 $T_r \cap R = \emptyset$。

命题 2. 对于 $r' \in R$，每个 $r \in \mathbb{F}_q^k \setminus R$ 最多只能出现在 k 个不同的 $T_{r'}$ 中。更准确地说，

$$\left|\{r' \in R \mid r \in T_{r'}\}\right| \leq k.$$

命题证明。假设对于不同的 r'、$r'' \in R$，有 $r \in T_{r'}$ 和 $r \in T_{r''}$。我们证明

$$i_{r'} \neq i_{r''},$$

这立即由 $i_{r'}$、$i_{r''} \in [k]$ 推出该命题。根据假设，对于某些 a、$b \in \mathbb{F}_q^*$，我们有

$$r = r' + ae_{i_{r'}} \quad \text{and} \quad r = r'' + be_{i_{r''}}.$$

因此，如果 $i_{r'} = i_{r''}$，我们将有

$$r'' = r' + (a-b)e_{i_{r'}}.$$

注意 $a - b \neq 0$ 作为 $r' \neq r''$。然后根据我们对 $T_{r'}$ 的定义（即 (12)，其中 $r \mapsto r'$），我们得出结论

$$r'' \in T_{r'}.$$

另一方面，$T_{r'} \cap R = \emptyset$，这与 $r'' \in R$ 矛盾。 □

现在，我们继续引理 4 的证明。综合以上所有部分，我们得到

$$\begin{aligned}
& R \uplus \bigcup_{r \in R} T_r \subseteq \mathbb{F}_q^k && \left(\text{by } T_r \cap R = \emptyset \text{ for every } r \in R\right) \\
\implies & |R| + \left|\bigcup_{r \in R} T_r\right| \leq q^k \\
\implies & |R| + \frac{|R| \cdot (q-1)}{k} \leq q^k && \left(\text{by } |T_r| = q-1 \text{ and Claim 2}\right) \\
\implies & \frac{|R| \cdot (q-1+k)}{k} \leq q^k \\
\implies & \frac{|R| \cdot q}{k} \leq q^k && \left(\text{by } k \geq 1\right) \\
\implies & |R| \leq k \cdot q^{k-1}.
\end{aligned}$$

证明到此结束。 □

5.4 对 (q^k, q^{k-1})-间隙团的改进

同样，我们从一个多色 k-团实例（G，k），其中 V（G）满足条件（7），并按如下方式修改第 5.1 小节中 H 的构造。

- 我们将顶点 V（G）与 $\mathbb{F}_q^d$ 中的一个 8 项线性无关集对应起来，如定理 2 所述。
- 同样，H的顶点集为 $V(H) = \bigcup_{r \in \mathbb{F}_q^k} C_r$，其中对于每个 $r \in \mathbb{F}_q^k$，都有 $C_r = \left\{\Pi_r, \pi \;\middle|\; \pi \in \mathbb{F}_q^d\right\}$。

• 对于 H 的边集 $E(H)$，令 r、$r' \in \mathbb{F}_q^k$ 和 $\Pi_{r,\ \pi} \in C_r$、$\Pi_{r',\ \pi'} \in C_{r'}$。设 $t :=$ 汉明距离(r, r')。当且仅当满足以下条件之一时，$\Pi_{r,\ \pi}$ 与 $\Pi_{r',\ \pi'}$ 之间有一条边。

– 情况 1。 $1 \le t \le 4$。假设 $\mathsf{diff}(r, r') = \{i_1, \ldots, i_t\}$，则

$$\pi - \pi' = \sum_{j \in [t]} \big(r[i_j] - r'[i_j]\big) v_j,$$

其中，$v_1 \in V_{i_1}$、...、$v_t \in V_{i_t}$ 和 $\{v_1, \ldots, v_t\}$ 是 G 中的一个 t-团。注意，由于 $V(G)$ 是线性无关的 8 项集合且 $t \le 4$，不难看出顶点 v_1、...、v_t 是唯一的。为后续使用，我们记

$$\mathrm{vertexset}_{r,r'}(\pi, \pi') := \{v_1, \ldots, v_t\}. \tag{13}$$

– 情况 2。 $t \ge 5$。

我们注意到，上述图 H 是原始 H 的一个导出子图。与引理 2 完全相同，我们可以证明：

引理 5。图 H 可以在 $|V(G)| + q^k$ 的多项式时间内构造。

现在，我们准备证明 q^k 与 q^{k-1} 之间的间隙。

引理 6. 1. 完备性。若 G 有一个 k-团，则 H 有一个大小为 q^k的团。

2. 可靠性。若 G 没有 k-团，则 H 没有大小为 $q^{k-1} + 1$的团 .

证明。 完备性部分的论证与引理 3相同。对于可靠性部分，则需要按照引理 4的证明思路做一些额外工作。假设 G 没有 k-团，并考虑 H中的任意团 $K \subseteq V(H)$。再次令 $R := \{r \in \mathbb{F}_q^k \mid K \cap C_r \neq \emptyset\}$。

命题 3. 设 $r \in R$。那么存在一个 $i \in [k]$，使得对于所有满足 $\mathsf{Hamming}(r, r') \le 2$且 $\mathsf{diff}(r, r')$ $r' \in \mathbb{F}_q^k$ 的情况，我们都有

$$r' \notin R.$$

命题证明。假设对于每个 $i \in [k]$，都存在一个 $r^i \in R$，使得

$$\mathrm{Hamming}(r, r^i) \le 2 \quad \text{and} \quad i \in \mathrm{diff}(r, r^i). \tag{14}$$

固定这样一个 r^i。由于 $r^i \in R$，存在唯一的 $\Pi_{r^i,\ \pi_{r^i}} \in K$。类似地，我们有唯一的 $\Pi_{r,\ \pi_r} \in K$。由此可知，按 (13) 中定义的顶点集$_{r,\ r^i}(\pi_r,\ \pi_{r^i})$ 的大小至多为 2，其中包含一个顶点

$$v_i \in V_i.$$

现在令 $1 \le i < j \le k$。由 (14) 可得，汉明距离$(r^i, r^j) \le 4$。此外，容易验证，要么 $\{i, j\} \subseteq \mathsf{diff}(r^i, r^j)$，要么 $\{i, j\} \subseteq \mathsf{diff}(r, r^i)$，要么 $\{i, j\} \subseteq \mathsf{diff}(r, r^j)$，根据 (13) 是一个团这一事实，这些情况都保证 $v_i v_j \in E(G)$。因此，$v_1, \ldots, v_k$ 在 G 中诱导出一个 k-团，这与假设矛盾。 □

对每个 $r \in R$ 我们固定一个 $i_r \in [k]$ 满足命题 3，并令 $T_r := \left\{ r + a \cdot e_{i_r} \in \mathbb{F}_q^k \;\middle|\; a \in \mathbb{F}_q^* \right\}$，与 (12) 相同。

命题 4. 每个 $r \in \mathbb{F}_q^k \setminus R$ 至多只能出现在一个 $T_{r'}$ 中（对应于 $r' \in R$），即

$$\left| \{ r' \in R \mid r \in T_{r'} \} \right| \leq 1.$$

命题证明。为导出矛盾，假设 $r \in T_{r'} \cap T_{r''}$ 对应于两个不同的 r'、$r'' \in R$。因此

$$\mathrm{diff}(r', r) = \{ i_{r'} \} \quad \text{and} \quad \mathrm{diff}(r'', r) = \{ i_{r''} \}.$$

由于 $r' \neq r''$，我们得出

$$\mathrm{diff}(r', r'') = \{ i_{r'}, i_{r''} \}, \quad \text{and thus} \quad \mathrm{Hamming}(r', r'') \leq 2.$$

由于 $r' \in R$ 且 $i_{r'} \in \mathsf{diff}(r', r'')$，命题 1 推出 $r'' \notin R$。这便得到了所需的矛盾。 □

最后，我们完成引理6可靠性情形的证明。上述两个命题推出以下结论。

$$\begin{aligned} R \uplus \bigcup_{r \in R} T_r \subseteq \mathbb{F}_q^k &\implies |R| + \left| \bigcup_{r \in R} T_r \right| \leq q^k \\ &\implies |R| + |R| \cdot (q-1) \leq q^k \qquad \big(\text{by } |T_r| = q-1 \text{ and Claim 4}\big) \\ &\implies |R| \cdot q \leq q^k \implies |R| \leq q^{k-1}. \end{aligned}$$ □

定理 3. 存在一个算法（即一个归约） $\mathbb{R}$，它以输入图 G、$k \geq 1$和一个素数幂 q为输入，计算出一个图 $H = H(G, k, q)$，满足以下条件。

(R1) 如果 G 有一个 k-团，那么 H 就有一个大小为 q^k的团。

(R2) 如果 G 没有 k-团，那么 H 就没有大小为 $q^{k-1} + 1$的团。

此外，$\mathbb{R}$ 的运行时间关于 $|V(G)| + q^k$是多项式的。

6 次多项式近似下界

借助定理 3，我们已准备好推导 FPT 近似的下界：k-团。

定理 4. k-团问题不存在近似比为 $k^{o(1)}$ 的 FPT 近似，除非 FPT $=$ W*[1]*。

证明。为了导出矛盾，假设 $\mathbb{A}$ 是 k-团问题的 FPT 近似，且对于任意输入图 G 和 $k \geq 1$:

(A) 若 G 含有一个 k 团，则 $\mathbb{A}$ 输出一个大小至少为 $k/k^{h(k)}$ 的团，其中 $h: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$，且

$$\lim_{k \to \infty} h(k) = 0.$$

我们将定义一个函数 $q\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得对于任意 $k\geq 1$、$q\colon =q(k)$，其中 q 为素数，且 $k'\colon =q^k$，且

$$(k')^{h(k')}<q. \tag{15}$$

这将导出我们所需的矛盾，因为我们将得到一个 FPT 算法来判定k-团问题：对于任意输入$(G,\ k)$，我们首先计算 $q\colon =q(k)$。[3] 接着应用定理 3 中的算法 $\mathbb{R}$于 3 得到一个图 $H\colon =H(G,\ k,\ q)$。最后，我们在（$\mathbb{A}$上运行近似算法 $H,\ k'$），其中 $k'\colon =q^k$。

- 如果 G 有一个 k-团，那么根据 (R1)，H 就有一个 k'-团。由 (A) 和 (15) 可知，算法 $\mathbb{A}$ 将输出一个大小至少为

$$\frac{k'}{(k')^{h(k')}}>\frac{q^k}{q}=q^{k-1},$$

  即至少为 $q^{k-1}+1$。

- 如果 G 没有 k-团，那么根据 (R2)，H 没有大小为 $q^{k-1}+1$ 的团。因此，算法 $\mathbb{A}$ 输出的团大小至多为

$$q^{k-1}.$$

因此，我们可以通过检查算法 $\mathbb{A}$ 计算出的团的大小是否至少为 $q^{k-1}+1$，来判定原图 G 是否有一个 k-团。

还需证明，我们可以定义一个函数 $q\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 使得对于 $q\colon =q(k)$ 不等式 (15) 成立。令 $k\in\mathbb{N}$。由于 $\lim_{x\to\infty}h(x)=0$，因此存在一个 $n_k\in\mathbb{N}$，使得对于所有$n\geq n_k$，我们都有

$$h(n)<\frac{1}{k}.$$

定义

$$q=q(k)\coloneqq\min\left\{p\in\mathbb{N}\;\middle|\;p\text{ is a prime and }p^k\geq n_k\right\}.$$

显然，$q(k)$ 定义良好。特别地，对于 $k'\coloneqq q^k$，我们得到 $k'\geq n_k$。因此，根据我们对 n_k 的选择

$$h(k')<\frac{1}{k}.$$

由此可得

$$(k')^{h(k')}<(k')^{1/k}=\left(q^k\right)^{1/k}=q.$$

这恰好就是 (15)。 □

下一个下界最早由 [LRSW22]证明。

定理 5 （ [LRSW22]的简化证明）。 假设 ETH 成立，则不存在运行时间为 k 的常数近似比近似算法来解决 $t(k)\,n^{o(\log k)}$ -团问题，其中 t 是任意可计算函数。

[3]在如何计算 q的问题上存在一个小但令人烦恼之处，不过人们通常会忽略它。对于大多数自然函数h，这很容易。更严谨的处理方式要求将 $k^{o(1)}$ 中的“小 o”解释为“有效的”（详见 [CG07] 的详细讨论）。

证明。设 $c \geq 1$ 和 $\mathbb{B}$ 是一种算法：如果输入图 G 包含大小为 k 的团，该算法就能找出大小为 k/c 的团。此外， $\mathbb{R}$ 的运行时间为 $t(k)n^{o(\log k)}$，其中 t 是一个可计算函数。我们选取一个（最小的）素数

$$q \geq c + 1.$$

现在给定一个图 G 和 $k \geq 2$。我们首先对 $\mathbb{R}$ 应用定理 3 中所述的归约 G，k和 q，从而得到一个满足 (R1) 和 (R2) 的图 H。特别地，如果 G 有一个 k-团，那么 H 就有一个大小为

$$k' := q^k.$$

否则， H 没有大小为.....的团

$$q^{k-1} + 1 = \frac{q^k - q^{k-1} + q - 1}{q - 1} < \frac{q^k}{q - 1} \leq \frac{k'}{c},$$

其中，第一个不等式由 $k \geq 2$ 得出，第二个由 $q \geq c+1$ 得出。注意， $\mathbb{R}$ 的运行时间关于.....是多项式的

$$|V(G)| + q^k = n + 2^{O(k)},$$

这意味着

$$|V(H)| \leq 2^{O(k)}\text{poly}(n).$$

接下来，我们将 $\mathbb{B}$ 应用于 H 和 k'。由此可得，

- 完备性。如果 G 有一个 k-团，那么 H 就有一个大小为 $k' = q^k$ 的团。因此， $\mathbb{B}$ 输出一个大小至少为 k'/c 的团。
- 可靠性。若 G不含大小为 k 的团，则 H 不含大小为 k'/c 的团。因此， $\mathbb{B}$ 无法输出大小为 k'/c 的团。

这意味着我们可以判定原图 G 是否含有大小为 k 的团。此外，注意到 $\mathbb{B}$ 的运行时间为

$$t(k')|V(H)|^{o(\log k')} \leq t(q^k)\big(2^{O(k)}\text{poly}(n)\big)^{o(k)} \leq h(k)n^{o(k)}$$

其中 h是某个适当的可计算函数。这与 ETH 矛盾。 □

7 结论与讨论

我们给出了一个从 k-团到 (q^k, q^{k-1})-间隙团的自归约。我们的归约简单且几乎完全是组合式的。我们只需结合网络编码理论中的技术与 Sidon 集的应用。这两种技术在文献中都广为人知，无需借助复杂的工具。此外，我们的归约是一种自归约，这为 W[1]-难问题的一种通用间隙生成型 FPT 归约提供了思路。

事实上，我们的理想目标是设计一种自归约，将一个 (k, k')-间隙团实例转换为一个 $(q^k, q^{k'})$-间隙团实例。如果这种转换存在，就能推出以下归约链。

$$(k, k-1)\text{-Gap Clique} \Rightarrow (q^k, q^{k-1})\text{-Gap Clique} \Rightarrow (\sigma^{q^k}, \sigma^{q^{k-1}})\text{-Gap Clique}$$

令 $q = 2$ 和 $\sigma = f(k)$，即可立即排除关于 k 的多项式近似比，例如 K 与 $K^{1/2}$ 之间的间隙。由于我们可以选择 σ 作为定义在 k 上的任意函数，对于任意可计算的非递减函数 $f(K)$，我们可以选择 $\sigma = \left(f^{-1}(K)\right)^{1/K}$，从而排除运行时间为 FPT 时间的 $f(K)$-近似算法。粗略地说，在 W[1]- 困难性假设下，我们可能距离证明 k- 团完全具有 FPT- 不可近似性只有一步之遥。

参考文献

[ACLY00] R. Ahlswede、N. Cai、S.-Y.R. Li 和 R.W. Yeung。网络信息流。《IEEE信息论汇刊》，46(4):1204–1216，2000年。[CCK+20] P. Chalermsook、M. Cygan、G. Kortsarz、B. Laekhanukit、P. Manurangsi、D. Nanongkai 和 L. Trevisan。从间隙指数时间假设到固定参数可处理的不可近似性：团、支配集及更多问题。《SIAM计算杂志》，49(4):772–810，2020年。[CE16] P.J. Cameron 和 P. Erd¨os。具有各种性质的整数集的数量，第61–80页。De Gruyter，2016年。[CG07] Y. Chen 和 M. Grohe。次指数复杂性理论与参数化复杂性理论之间的同构。《SIAM计算杂志》，37(4):1228–1258，2007年。[CGG07] Y. Chen、M. Grohe 和 M. Gr¨uber。论参数化可近似性。《计算复杂性电子研讨会》，TR07-106，2007年。[ET41] P. Erd¨os 和 P. Tur´an。关于加性数论中 Sidon 的一个问题及若干相关问题。《伦敦数学学会杂志》，s1-16(4):212–215，1941年。[FG06] J. Flum 和 M. Grohe。《参数化复杂性理论》（理论计算机科学文本：EATCS丛书）。Springer-Verlag，柏林、海德堡，2006年。[FGL+96] U. Feige、S. Goldwasser、L. Lov´asz、S. Safra 和 M. Szegedy。交互式证明与团近似的困难性。《ACM 学报》，43(2):268–292，1996年。[FSLM20] A. E. Feldmann、Karthik C. S.、E. Lee 和 P. Manurangsi。参数化复杂性中的近似综述：困难性与算法。《Algorithms》，13(6)，2020年。[GLR+24] Venkatesan Guruswami、Bingkai Lin、Xuandi Ren、Yican Sun 和 Kewen Wu。在指数时间假设下的参数化不可近似性假设。载于 Bojan Mohar、Igor Shinkar 和 Ryan O’Donnell（编），《第56届ACM理论计算研讨会论文集》，STOC 2024，加拿大不列颠哥伦比亚省温哥华，2024年6月24–28日，第24–35页。ACM，2024年。[Gre04] B. Green。Cameron–Erd˝os猜想。《伦敦数学学会通报》，36(6):769–778，2004年。[Gre05] B. Green。阿贝尔群中的 Szemer´edi 型正则性引理及其应用。《几何与泛函分析》（GAFA），15(2):340–376，2005年。

[H˚as01] J. H˚astad。一些最优不可近似性结果。《ACM 学报》，48(4):798–859，2001年。[HKM+03] T. Ho、R. Koetter、M. Medard、D.R. Karger 和 M. Effros。在随机化设置中，编码相较于路由的优势。载于《IEEE国际信息论研讨会》，2003年。会议录，第442–页，2003年。[HMS+03] T. Ho、M. M´edard、J. Shi、M. Effros 和 D. R. Karger。论随机网络编码。载于 41st Allerton通信、控制与信号处理年度会议，2003年。特邀论文。[Kar72] R. M. Karp。组合问题之间的可归约性。载于 R. E. Miller 和 J. W. Thatcher（编），《计算复杂性研讨会论文集》，研讨会于1972年3月20–22日在美国纽约州约克敦高地的 IBM托马斯·J·沃森研究中心举行，IBM研究研讨会丛书，第85–103页。普莱enum出版社，纽约，1972年。[KK22] Karthik C. S. 和 S. Khot。参数化 k-团的近乎多项式因子不可近似性。载于 S. Lovett（编），第37届计算复杂性会议，CCC 2022，2022年7月20–23日，美国宾夕法尼亚州费城，第234卷 LIPIcs，第6:1–6:21页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2022年。[Lin21] B. Lin。常数因子近似 k- 团是 W[1]- 困难的。载于 Samir Khuller 和 Virginia Vassilevska Williams （编），STOC ’21：第53届ACM SIGACT理论计算研讨会，线上活动，意大利，2021年6月21–25日，第1749–1756页。ACM，2021年。[LRSW22] B. Lin、X. Ren、Y. Sun 和 X. Wang。参数化 k-团近似的下界。载于 Mikolaj Bojanczyk、Emanuela Merelli 和 David P. Woodruff（编），第49届国际自动机、语言与编程研讨会，ICALP 2022，2022年7月4–8日，法国巴黎，第229卷 LIPIcs，第90:1–90:18页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2022年。[LRSW23a] B. Lin、X. Ren、Y. Sun 和 X. Wang。常数因子近似参数化 k-集合覆盖是 W[2]-困难的。载于 Nikhil Bansal 和 Viswanath Nagarajan（编），《2023年ACM-SIAM离散算法研讨会论文集》，SODA 2023，意大利佛罗伦萨，2023年1月22–25日，第3305–3316页。SIAM，2023年。[LRSW23b]Bingkai Lin、Xuandi Ren、Yican Sun 和 Xiuhan Wang。在 ETH 下近似 k-团的改进困难性。载于第64届IEEE年度计算机科学基础研讨会，FOCS 2023，美国加利福尼亚州圣克鲁斯，2023年11月6–9日。IEEE计算机学会，2023年。预印本见 https://arxiv.org/pdf/2304.02943.pdf。[O’B04] K. O’Bryant。与 Sidon 序列相关研究的完整注释书目。《组合学电子期刊》 *[*仅电子版*]*, DS11:39页，仅电子版–39页，仅电子版，2004年。[Ruz93] I. Z. Ruzsa。在整数集中求解线性方程 I。《算术学报》，65(3):259–282，1993年。

[Ruz95] I. Z. Ruzsa. 在整数集上求解线性方程 II. 《算术学报》, 72(4):385–397, 1995年.[Sha09] A. Shapira. Green 猜想与线性不变性质的测试. In M. Mitzen- macher, editor, 第41届 ACM 理论计算年会论文集（STOC 2009）, 美国马里兰州贝塞斯达, 2009年5月31日至6月2日, 页码 159–166. ACM, 2009年.[SLM19] Karthik C. S., B. Laekhanukit, and P. Manurangsi. 关于近似支配集的参数化复杂性. 《ACM 学报》, 66(5):33:1–33:38, 2019年.[YLC06] Raymond W. Yeung, S-y Li, and N. Cai. 网络编码理论（通信与信息论中的基础与趋势）。Now Publishers Inc., 美国马萨诸塞州汉诺威, 2006年.