arXiv:2304.07523v1 [math.GN] 15 Apr 2023

不连续点集的闭包属于闭集理想的函数环

Amrita Dey、Sudip KumarAcharyya、Sagarmoy Bag 和 Dhananjoy Mandal

Abstract. 设 $\mathcal{P}$ 是拓扑空间 X的一个闭子集理想。考虑 X 上的实值函数环 $C(X)_{\mathcal{P}}$ ，其中函数的不连续点集的闭包是 $\mathcal{P}$中的一个元素。对于 $\mathcal{P}$的不同取法，我们研究$C(X)_{\mathcal{P}}$ 的环性质，例如该环的 $\aleph_0$-自内射性和正则性，以及该环是否为阿廷环和／或诺特环。Z. Gharabaghi、M. Ghirati 和 A. Taherifar 于2018年在《休斯敦数学杂志》发表的一篇论文中引入了 $\mathcal{F}P$-空间的概念。在该论文中，他们证明了每个 P-空间都是 $\mathcal{F}P$-空间。我们指出，如果 X 不是Tychonoff 空间，这一定理可能不成立，并给出一个恰当的反例来证明这一结论。

1. 引言

我们假设所有拓扑空间（X,τ）都是 T_1。设 $\mathcal{P}$是拓扑空间（X,τ）的闭子集理想，也就是说， $\mathcal{P}$是 X 的一个闭子集族，满足以下条件:

(1) $A,B\in\mathcal{P}\implies A\cup B\in\mathcal{P}$，且 (2) 若 $A\in\mathcal{P}$ 且 $B\subseteq A$ ，其中 B 在 X中闭，则 $B\in\mathcal{P}$。

例如，拓扑空间（X,τ）的所有闭子集构成 X的一个闭子集理想。其他例子包括 X的所有有限子集构成的集合，记作 $\mathcal{P}_f$； X的所有闭紧子集构成的集合，记作 $\mathcal{K}$ ；甚至还有 X的所有闭 Lindelöf 子集构成的集合，记作 $\mathcal{L}$。另一个显然但重要的闭集理想例子是 $\{\emptyset\}$。我们引入三元组（ $X,\tau,\mathcal{P}$ ），并称其为 $\tau\mathcal{P}$-空间。对于 X的子集S， $\mathcal{P}_S=\{P\cap S\colon\ P\in\mathcal{P}\}$ 是 S 的一个闭子集理想，并且我们称（$S,\tau_S,\mathcal{P}_S$）是 X的一个 $\tau\mathcal{P}$-子空间，其中 τ_S 是由 X上的拓扑 τ 在 S上诱导的子空间拓扑。

现在定义集合 $C(X)_{\mathcal{P}}=\{f\in\mathbb{R}^X\colon\ \overline{D_f}\in\mathcal{P}\}$，其中 D_f 表示 f 的所有不连续点所成的集合。容易看出，$C(X)_{\mathcal{P}}$ 关于逐点加法和乘法构成一个环。此外，定义 $(f\wedge g)(x)=\min\{f(x)\ g(x)\},\forall x\in X$ 以及 $(f\vee g)(x)=\max\{f(x)\ g(x)\},\forall x\in X$，对于任意 $f,g\in C(X)_{\mathcal{P}}$，$(C(X)_{\mathcal{P}},+,\cdot,\vee,\wedge)$ 构成一个格序环。另外，集合 $C^*(X)_{\mathcal{P}}$ 是 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 中所有有界函数所成的集合

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 54C30；次要分类 13C99。
Key words and phrases. $\tau\mathcal{P}$空间， $\tau\mathcal{PU}$空间， P完全分离， $\tau\mathcal{P}$紧， $\mathcal{P}P$空间。

是 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的格序子环。本文中，我们称 X 为 $\tau\mathcal{P}$-空间，而不称其为 $(X,\tau,\mathcal{P})$；称 $C(X)_{\mathcal{P}}$，而不称其为 $(C(X)_{\mathcal{P}},+,\cdot,\vee,\wedge)$。显然，对于 $\mathcal{P}=\{\emptyset\}$, $C(X)_{\mathcal{P}}=C(X)$，它是实值连续函数构成的环，这一环已在 [**9**] 中得到充分研究；当 $\mathcal{P}$ 是 X 的所有闭子集所成的集合时，$C(X)_{\mathcal{P}}=\mathbb{R}^X$。此外，当 $\mathcal{P}$ 是 X 的所有有限子集所成的集合时，则 $C(X)_{\mathcal{P}}=C(X)_F$，即 X 上不连续点有限的函数所成的环；而当 $\mathcal{P}$ 是 X 的所有闭无处稠密子集所成的集合时，$C(X)_{\mathcal{P}}=T'(X)$（由那些实值连续函数组成的环；对于每个函数，都存在 X 的一个稠密开子集 D，使得 $f|_D\in C(D)$ [**1**]）。当 $\mathcal{P}=\mathcal{K}$ 时，我们将环 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 记作 $C(X)_K$。

本文旨在研究并讨论环 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的各种性质。

本文假设所有环均为含幺交换环。本文中，环的理想均视为该环的真子集。若环 R 的理想与 R 的每个非零理想都有非零交集，则称其为本质的。R 的所有极小理想之和称为其底。$rad(R)$ 表示 R 的雅各布森根，即 $rad(R)$ 是 R 的所有极大理想的交集。若环 S 包含约化环 R，且当且仅当对每个 $s\in S\setminus\{0\}$，都存在 $r\in R$ 使得 $sr\in R\setminus\{0\}$，则称 S 为 R 的商环。若对每个非单位元 $a\in R$，都存在非单位元 $b\in R$ 使得 $ab=a$，则称环 R 几乎正则。我们用记号 χ_A 表示 A 在 X 上的特征函数，定义如下：

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 \text{ when } x\in A,\\ 0 \text{ otherwise}\end{cases}.$$

对于 R的理想 I，$Ann(I)=\{r\in R:$ 对所有 $i\in I\}$，$ri=0$。若环R满足：对于任意两个理想 I和 J，$Ann(I\cap J)=Ann(I)\cap Ann(J)$，则称其为 IN-环。若环 R满足：对于任意两个理想 I和 J，存在 R的一个理想 K，使得 $Ann(I)\cap Ann(J)=Ann(K)$，则称其为 SA-环。显然，SA-环总是 IN-环。若环 R 的每个非空理想的湮没子都由一个幂等元生成，则称其为 Baer 环。下一个引理在 [**15**] 中得到证明，它给出了约化环中 IN-环的一种刻画。

Lemma 1.1. 设 R 为一个约化环。则以下陈述等价。

(1) 对于 R的任意两个正交理想 I和 J，$Ann(I)+Ann(J)=R$。(2) 对于 R的任意两个理想 I和 J，$Ann(I)+Ann(J)=Ann(I\cap J)$。

此外，Birkenmeier、Ghirati 和 Taherifar 在 [**7**] 中确立了以下等价条件。

Lemma 1.2. 设 R 是一个约化交换环。则以下陈述等价。

(1) R 是 Baer 环。(2) R 是一个 SA-环。(3) R 的素理想空间是极端不连通的。(4) R 是一个 IN-环。

在第 2 节中，我们定义形如 $Z_{\mathcal{P}}(f) = \{x \in X\colon f(x) = 0\}$ 的零集，其中 $f \in C(X)_{\mathcal{P}}$。我们将 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 中函数的余零集定义为 $Z_{\mathcal{P}}(f)$ 的补集，并记作 $coz(f)$。我们用 $Z_{\mathcal{P}}[X]$ 表示 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 中函数的所有零集构成的集合，并用 $coz[X]$ 表示 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 中函数的所有余零集构成的集合。此外，对于子集 $S \subseteq C(X)_{\mathcal{P}}$，我们记 $Z_{\mathcal{P}}[S] = \{Z_{\mathcal{P}}(f)\colon f \in S\}$ 和 $coz[S] = \{coz(f)\colon f \in S\}$。在这里，我们还引入了 X 的 $\mathcal{P}$-完全分离子集的概念，并通过 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 中函数的零集对其进行刻画。接下来，我们定义 X 上的 $z_{\mathcal{P}}$-滤子以及 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 中的 $z_{\mathcal{P}}$-理想，并考察它们之间存在的对偶关系。不出所料，我们发现，$C(X)_{\mathcal{P}}$ 的所有极大理想 $Max(C(X)_{\mathcal{P}})$ 与 X 上所有极大 $z_{\mathcal{P}}$-滤子构成的集合 $\mathcal{U}(X)_{\mathcal{P}}$ 之间存在一一对应关系。我们利用这一对偶关系证明，赋予包核拓扑的 $M(C(X)_{\mathcal{P}})$ 与赋予 Stone 拓扑 [的 $\mathcal{U}_{\mathcal{P}}$ 同胚（定理 2.18]）。

在第 3 节中，我们考察 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 何时在一致极限下封闭。当 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 在一致极限下封闭时，我们称 X 为 $\tau\mathcal{P}\mathcal{U}$-空间。显然，当 $\mathcal{P} = \{\emptyset\}$ 时， $C(X)_{\mathcal{P}} = C(X)$，对于任意拓扑空间 X，它在一致极限下封闭。我们还验证，对于任意选取的 $\mathcal{P}$，如果 X 的所有非孤立点构成的集合是 $\mathcal{P}$ 的一个元素，那么 $(X, \tau, \mathcal{P})$ 是一个 $\tau\mathcal{P}\mathcal{U}$- 空间。对于某些特殊的 $\mathcal{P}$ 选取，可以证明这一结果的逆命题成立 [定理 3.3 和 3.6]。此外还指出，若对于某个拓扑空间 Y， $C(X)_{\mathcal{P}}$ 与 $C(Y)$ 同构，则 X 是一个 $\tau\mathcal{P}\mathcal{U}$-空间。利用上述结果，我们在 [**8**] 中给出了定理 3.4 的另一种证明。本节末尾，我们针对 $C(X)$ 建立了一个类似于乌雷松延拓定理的结果，该结果在 [**9**]，中针对 $\tau\mathcal{P}\mathcal{U}$-空间陈述。

在第 4 节中，我们将 X 中每个具有有限交性质的零集族都具有非空交集的 $\tau\mathcal{P}$-紧 X $\tau\mathcal{P}$-空间定义为 $\tau\mathcal{P}$-紧空间。我们利用 X 的固定$z_{\mathcal{P}}$-滤子和 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的定理想，获得了 $\tau\mathcal{P}$-紧空间的一个刻画。顺便地，我们还如下定义 $\tau\mathcal{P}$-拟紧空间： $\tau\mathcal{P}$-空间 X 是 $\tau\mathcal{P}$-拟紧的，当且仅当 $C(X)_{\mathcal{P}} = C^*(X)_{\mathcal{P}}$。接着我们证明，每个 $\tau\mathcal{P}$-紧空间都是 $\tau\mathcal{P}$-拟紧的。在同一节中，我们称 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的极大理想M为实的，如果 $C(X)_{\mathcal{P}}/M$ 同构于 $\mathbb{R}$。我们将 $\tau\mathcal{P}$-空间定义为 $\tau\mathcal{P}$-实紧的，如果 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的每个实极大理想都是固定的。我们证明， $\tau\mathcal{P}$-空间是 $\tau\mathcal{P}$-紧的，当且仅当它既是 $\tau\mathcal{P}$-拟紧的又是 $\tau\mathcal{P}$-实紧的。对于 $\mathcal{P} = \{\emptyset\}$，这可以表述如下：拓扑空间 X 是紧的，当且仅当它既是拟紧的又是实紧的，正如 [**9**] 中所证明的那样。我们构造了一些例子，以确保 $\tau\mathcal{P}$-拟紧空间不一定是 $\tau\mathcal{P}$-紧的，而实 $\tau\mathcal{P}$-紧空间也不一定是 $\tau\mathcal{P}$-紧的。

在第5节中，我们继续研究 $C(X)_{\mathcal{P}}$ ，并附加假设： X 的每个单点子集都是 $\mathcal{P}$的成员。由此可得，对于所有 $x \in X$，$\chi_{\{x\}} \in C(X)_{\mathcal{P}}$。在这一限制下，我们看到 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 是一个几乎正则环，且任意 $f \in C(X)_{\mathcal{P}}$ 要么是零因子，要么是单位元。我们进一步证明， $C(X)_{\mathcal{P}} = C(X)$ 当且仅当 X 是离散的，当且仅当 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 是 $C(X)$的商环。此外，我们还得以证明， $\tau\mathcal{P}$-空间成为 $\tau\mathcal{P}$-紧

空间的充要条件是 X 有限。我们找到了 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的理想成为极小理想的充要条件，并证明 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的底由所有除有限集外处处为零的函数组成，且其自身是一个本质理想，同时也是自由的。我们还指出， $Soc(C(X)_{\mathcal{P}}) = C(X)_{\mathcal{P}} \iff X$ 是有限的。利用这些结果，我们证明 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 是阿廷（且诺特）环，当且仅当 X有限。本节最后，我们给出一组等价条件，用以刻画 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 是一个 IN-环、 SA-环及 Baer 环。我们还提供了反例，表明当放宽“$\mathcal{P}$ 包含 X的所有单点子集”这一限制时，这些结果可能不再成立。

在第6节中，我们考察 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的正则性。这里，我们将 a$\tau\mathcal{P}$-空间（$X, \tau, \mathcal{P}$）定义为一个 $\mathcal{P}P$-空间，当且仅当 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 是正则的。我们证明，当 X 是 Tychonoff 空间时，aP-空间是一个 $\mathcal{P}P$-空间。我们还给出一个反例，说明当 X 不是 Tychonoff 空间时，这一结论可能不成立。这个反例还表明，当 X 不是 Tychonoff 空间时， [8] 中的定理6.1不成立。最后，我们利用 $\mathcal{P}$ 的成员给出一个 $\mathcal{P}P$-空间的刻画。

最后，在第七节中，我们运用 ϕ-代数和可测函数代数的概念，建立一个涉及 $\tau\mathcal{PU}$-空间的条件；在该条件下， $C(X)_{\mathcal{P}}$ 是 $\aleph_0$-自内射的。我们还给出一个例子，说明条件“ X 是一个 $\tau\mathcal{PU}$-空间”并非多余。

2. 定义与预备知识

NOTATION 2.1. 令 $\mathcal{P}'$ 为集合 X的所有孤立点的闭子集所构成的理想。

THEOREM 2.2. *$C(X)_{\mathcal{P}} = C(X)$ if and only if $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$.*

PROOF. 令 $\mathcal{P} \nsubseteq \mathcal{P}'$。那么存在 $A \in \mathcal{P}$ ，使得存在$x_0 \in A$ ，它是 X 中的一个非孤立点。令 $f = \chi_{\{x_0\}}$。那么 $f \in C(X)_{\mathcal{P}}$。然而，由于 x_0 是 X 中的一个非孤立点， $f \notin C(X)$。反之显然。□

我们在引言中指出，对于 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{nd}$， $C(X)_{\mathcal{P}} = T'(X)$，其中 $T'(X)$ 是 X 上满足以下条件的实值连续函数所构成的环：存在 X 的一个稠密开子集 D ，使得 $f|_D \in C(D)$ [4]。我们给出证明来支持这一结论。

THEOREM 2.3. *$C(X)_{\mathcal{P}_{nd}} = T'(X)$*

PROOF. 设 $f \in C(X)^{\mathcal{P}_{nd}}$，则 $\overline{D_f}$无处稠密。因此， $X \setminus \overline{D_f}$在 X中稠密。此外，$\overline{D_f}$在 $X \implies X \setminus \overline{D_f}$中闭， $X \implies X \setminus \overline{D_f}$在 X中开。最后，f 在 $X \setminus D_f \supseteq X \setminus \overline{D_f}$上连续。因此 $f \in T'(X)$。反过来，设 $g \in T'(X)$。则存在 X 的一个开稠密子集 D ，使得 $f|_D \in C(D) \implies D_f \subseteq X \setminus D$. 因此 $\overline{D_f} \subseteq \overline{X \setminus D} = X \setminus D$。由于开稠密集的补集是闭无处稠密集，$X \setminus D \in \mathcal{P}_{nd}$ ，所以 $\overline{D_f} \in \mathcal{P}_{nd}$。因此 $f \in C(X)^{\mathcal{P}_{nd}}$。□

我们定义 $\mathcal{I}$ 为 X 的所有闭子集的理想所构成的族，并定义$\mathcal{J}(X)$为包含 $C(X)$的 $\mathbb{R}^X$ 的所有子环所构成的族。这两个族在子集包含关系下都构成一个格。

容易看出，对于两个环 S_1、$S_2 \in \mathcal{J}(X)$，

$S_1 \vee S_2 = \{\sum f_i g_i : f_1 \in S_1, g_i \in S_2, i = 1, 2, ..., m.\}$ 是包含 $S_1 \cup S_2$ 的 $\mathbb{R}^X$ 的最小子环；对于 $\mathcal{I}$中的两个闭集理想 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$，$A \in \mathcal{P}$ 和 $B \in \mathcal{Q}\}$ 是包含 $\mathcal{P}$和 $\mathcal{Q}$的 X 的最小闭子集理想。显然，对于两个环 S_1，$S_2 \in \mathcal{J}(X)$,$S_1 \wedge S_2 = S_1 \cap S_2$，以及 $\mathcal{I}$中的两个闭集理想 $\mathcal{P}$和 $\mathcal{Q}$，有 $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$。因此 $C(X)_{\mathcal{P}\wedge\mathcal{Q}} = C(X)_{\mathcal{P}} \wedge C(X)_{\mathcal{Q}}$。然而，$C(X)_{\mathcal{P}\vee\mathcal{Q}} = C(X)_{\mathcal{P}} \vee C(X)_{\mathcal{Q}}$并非对所有 T_1-空间都成立；但若拓扑空间 X 的每个开子空间都是 C-嵌入的，则该结论成立。

Theorem 2.4. 设 X 为一个拓扑空间，且 X 的每个开子空间都是 C-嵌入的。那么对于 $\mathcal{I}$中的任意 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$，$C(X)_{\mathcal{P}\vee\mathcal{Q}} = C(X)_{\mathcal{P}} \vee C(X)_{\mathcal{Q}}$。

Proof. 设 $\alpha = \sum f_i g_i \in C(X)_{\mathcal{P}} \vee C(X)_{\mathcal{Q}}$。那么 $D_\alpha \subseteq \bigcup D_{f_i g_i} \subseteq \bigcup (D_{f_i} \cup D_{g_i})$，其中 $\overline{D_{f_i}} \in \mathcal{P}$，且对所有 $i = 1, 2, ..., m$，都有 $\overline{D_{g_i}} \in \mathcal{Q}$。因此，对所有 $i = 1, 2, ..., m$，都有 $\overline{D_{f_i} \cup D_{g_i}} \in \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$。由于 $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ 是闭集理想，故 $\overline{D_\alpha} \in \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$，从而 $\alpha \in C(X)_{\mathcal{P}\vee\mathcal{Q}}$。反过来，设 $f \in C(X)_{\mathcal{P}\vee\mathcal{Q}}$。那么 $f|_{X\setminus\overline{D_f}}$ 在 X的开子空间 $X \setminus \overline{D_f}$ 上连续。根据我们的假设，存在 $f \in C(X)$使得 $f|_{X\setminus\overline{D_f}} = f|_{X\setminus\overline{D_f}}$。此外，$\overline{D_f} \in \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$。因此 $\overline{D_f} = A \cup B$，其中 $A \in \mathcal{P}$且 $B \in \mathcal{Q}$。我们定义 $g: X \setminus B \to \mathbb{R}$，使得当（）时 $g(x) = \begin{cases} (& x \quad x \in X \setminus A), \text{ 当} \frac{1}{2} f\ x \quad x \in A \cap B \text{（）时，以及当} \\ - & f\ x \end{cases}$

.....时；并定义 $h: X \longrightarrow \mathbb{R}$，使得当 $x \in X \setminus B$ 时 $h(x) = \begin{cases} 0 \\ \text{，当（）时，} \\ - \end{cases}$

以及当 $x \in B \setminus A$ 时。于是 $\frac{1}{2} f\ x \quad x \in A \cap B$（）$\overline{D_g} \subseteq A$ 且 $\overline{D_h} \subseteq B$。因此

$g \in C(X)_{\mathcal{P}}$ 且 $h \in C(X)_{\mathcal{Q}}$，并且 $f = g + h \in C(X)_{\mathcal{P}} \vee C(X)_{\mathcal{Q}}$。

□

需要注意的是，如果 X 是不可约空间，那么 X 的每个开子空间都是 C-嵌入的。因此，对于不可约空间 X，$C(X)_{\mathcal{P}\vee\mathcal{Q}} = C(X)_{\mathcal{P}} \vee C(X)_{\mathcal{Q}}$。

我们将以上内容总结为以下定理。

Theorem 2.5. 设 X 是一个拓扑空间，其中每个 X的开子空间都是 C-嵌入的。那么，由 $\phi(\mathcal{P}) = C(X)_{\mathcal{P}}$ 定义的 $\phi: \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{J}(X)$ 是一个格同态。

回顾一下，$f \in C(X)_{\mathcal{P}}$, $Z_{\mathcal{P}}(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$称为 f的零集。此外，如果子集 A属于 X，且对于某个 $f \in C(X)_{\mathcal{P}}$，有 $A = Z_{\mathcal{P}}(f)$，则称 A为零集。令 $Z_{\mathcal{P}}[X]$ 表示 X的所有零集组成的集合。

不难验证：

(1) For $f \in C(X)_{\mathcal{P}}$, $Z_{\mathcal{P}}(f) = Z_{\mathcal{P}}(|f|) = Z_{\mathcal{P}}(f \wedge \mathbf{1}) = Z_{\mathcal{P}}(f^n)$, for all $n \in \mathbb{N}$.

(2) $Z_{\mathcal{P}}(0) = X$且 $Z_{\mathcal{P}}(1) = \emptyset$。(3) 对于 $f, g \in C(X)_{\mathcal{P}}$, $Z_{\mathcal{P}}(fg) = Z_{\mathcal{P}}(f) \cup Z_{\mathcal{P}}(g)$和 $Z_{\mathcal{P}}(|f| + |g|) = Z_{\mathcal{P}}(f^2 + g^2) = Z_{\mathcal{P}}(f) \cap Z_{\mathcal{P}}(g)$。(4) 对于 $f \in C(X)_{\mathcal{P}}$, $r, s \in \mathbb{R}$, 形如 $\{x \in X\colon f(x) \geq r\}$和$\{x \in X\colon f(x) \leq s\}$ 的集合都是零集，因为：(a) $\{x \in X\colon f(x) \geq r\} = Z_{\mathcal{P}}((f - \boldsymbol{r}) \wedge 0)$，以及 (b) $\{x \in X\colon f(x) \geq s\} = Z_{\mathcal{P}}((f - \boldsymbol{s}) \vee 0)$。

根据以上观察可知，$Z_{\mathcal{P}}[X]$ 对于有限并和交集是闭的。我们知道，$Z[X]$ 中的零集（ X上的实值连续函数的零集）是 G_δ-集。下面的结果将这一事实推广到 $C(X)_{\mathcal{P}}$中的函数。

THEOREM 2.6. X 中的每个零集都可以表示为一个 G_δ集与一个集合 A 的不交并，使得 $\overline{A} \in \mathcal{P}$。

PROOF. 令 $f \in C(X)_{\mathcal{P}}$。则 $Z_{\mathcal{P}}(f) = G \cup A$，其中 $G = Z_{\mathcal{P}}(f) \cap (X \setminus D_f)$ 且 $A = Z_{\mathcal{P}}(f) \cap D_f$。于是 G是连续映射 $f|_{X \setminus D_f}$的零集，因此是 $X \setminus D_f$中的一个 G_δ-集。由于 D_f是X中的一个 F_σ-集，$X \setminus D_f$ 是 X中的一个 G_δ-集。因此 G 是 X中的一个 G_δ-集。另一方面，$\overline{A} \subseteq \overline{D_f} \in \mathcal{P} \implies \overline{A} \in \mathcal{P}$。□

我们知道，$Z(X)$中的所有零集都是 X中的闭集。然而，$Z_{\mathcal{P}}[X]$ 中的零集未必都是闭集。事实上，我们给出了这种情况成立的充要条件。

THEOREM 2.7. 对于 $\tau\mathcal{P}$-空间 X，$Z_{\mathcal{P}}[X]$中的所有零集都是闭集，当且仅当 $C(X)_{\mathcal{P}} = C(X)$。

PROOF. 设 $C(X)_{\mathcal{P}} \neq C(X)$。沿着定理 2.2 的证明步骤推演，存在一个非孤立点 $x_0 \in X$，使得 $\chi_{\{x_0\}} \in C(X)_{\mathcal{P}} \setminus C(X)$且$Z_{\mathcal{P}}(\chi_{\{x_0\}}) = X \setminus \{x_0\}$，它在 X 中不是闭集。反向显然。□

以下结论显然成立。

PROPOSITION 2.8. 设 X 是一个 $\tau\mathcal{P}$-空间，则以下陈述成立。

(1) $C(X)_{\mathcal{P}}$ 是约化的。（若交换环 R 不含任何非零幂零元，则称其为约化环。）(2) f是 $C(X)_{\mathcal{P}}$中的单位元，当且仅当 $Z_{\mathcal{P}}(f) = \emptyset$。

DEFINITION 2.9. 若存在 $f \in C(X)_{\mathcal{P}}$，使得 $f(X) \subseteq [0, 1]$、$f(A) = \{0\}$且 $f(B) = \{1\}$，则称两个子集 A 和 B 为 $\mathcal{P}$-完全分离。

因此，当 $\mathcal{P} = \{\emptyset\}$时，$\mathcal{P}$-完全分离集可归结为 [9], 中的完全分离集。

令 τ_u 为全体实数集 $\mathbb{R}$ 上的通常拓扑，并令 $\mathcal{P} = \{\emptyset, \{0\}\}$。定义 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$如下：$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$于是 $f \in C(X)_{\mathcal{P}}$。因此，$(-\infty, 0]$ 和 $(0, \infty)$ 是 $\mathcal{P}$-完全分离的。然而，$(-\infty, 0]$ 和 $(0, \infty)$ 并非完全分离。

PROPOSITION 2.10. $\tau\mathcal{P}$-空间 X 中的两个不相交子集 A 和 B 在 X 中是 $\mathcal{P}$-完全分离的，当且仅当它们包含于 X 中的不相交零集中。

PROOF. 定理的第一部分可以仿照 [9] 中定理 1.2 的证明，按部就班地加以证明。为证明逆命题，设 A 和 B 是 $\tau\mathcal{P}$-空间 X 中的两个不相交子集，它们分别包含在 X 中的不相交零集 $Z_{\mathcal{P}}(f)$ 和 $Z_{\mathcal{P}}(g)$ 内。定义

$$h(x) = \frac{|f|(x)}{(|f| + |g|)(x)}, \quad \forall x \in X.$$

于是 $\overline{D_h} \subseteq \overline{D_f} \cup \overline{D_g} \implies \overline{D_h} \in \mathcal{P}$，因此 $h \in C(X)_{\mathcal{P}}$。此外，$h(A) = \{0\}$ 且 $h(B) = \{1\}$。因此，A 和 B 在 X 中是 $\mathcal{P}$-完全分离的。□

THEOREM 2.11. $\tau\mathcal{P}$-空间 X 中的两个不相交子集 A 和 B 在 X 中是 $\mathcal{P}$-完全分离的，当且仅当存在一个 $P \in \mathcal{P}$，使得 $A \setminus P$ 和 $B \setminus P$ 在 $X \setminus P$ 中完全分离。

PROOF. 该定理的证明与 [8] 中命题 2.3 的证明类似。□

现在我们介绍 X 上的 $z_{\mathcal{P}}$-滤子以及 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的 $z_{\mathcal{P}}$-理想的概念。

DEFINITION 2.12。

(1) $Z_{\mathcal{P}}[X]$ 的非空子集族 $\mathcal{F}$ 称为 X 上的 $z_{\mathcal{P}}$-滤子，若 $\mathcal{F}$ 满足以下条件：(a) $\emptyset \notin \mathcal{F}$；(b) $\mathcal{F}$ 对有限交集封闭；(c) 若 $Z_1 \in \mathcal{F}$ 且 $Z_2 \in Z_{\mathcal{P}}[X]$，其中 $Z_1 \subseteq Z_2$，则 $Z_2 \in \mathcal{F}$。(2) 若 $z_{\mathcal{P}}$-滤子 X 不被 X 上任何其他 $z_{\mathcal{P}}$-滤子真包含，则称其为 X 上的 $z_{\mathcal{P}}$-超滤子。(3) 若 $Z_{\mathcal{P}}^{-1}Z_{\mathcal{P}}[I] = I$，则称 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的理想 I 为 $z_{\mathcal{P}}$-理想。

利用定理 2.3、2.5、2.9 和 2.11 中相同的论证，我们可以证明以下定理：[9],

THEOREM 2.13.

(1) 对于 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的任意理想 I，$Z_{\mathcal{P}}[I]$ 是一个 $z_{\mathcal{P}}$-滤子。(2) 对于一个 $z_{\mathcal{P}}$-滤子 $\mathcal{F}$，$Z_{\mathcal{P}}^{-1}(\mathcal{F}) = \{f \in C(X)_{\mathcal{P}} : Z_{\mathcal{P}}(f) \in \mathcal{F}\}$ 是 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的一个理想。(3) 若 M 是 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 中的一个极大理想，则 $Z_{\mathcal{P}}[M]$ 是 X 上的一个 $z_{\mathcal{P}}$-超滤子。(4) 对于 X 上的一个 $z_{\mathcal{P}}$-超滤子 $\mathcal{U}$，$Z_{\mathcal{P}}^{-1}(\mathcal{U})$ 是 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的一个极大理想。

THEOREM 2.14. 对于 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的任意 $z_{\mathcal{P}}$-理想 I，以下条件等价：

(1) I 是素理想。(2) I 包含一个素理想。(3) 对所有 $g, h \in C(X)_{\mathcal{P}}$，若 $gh = \mathbf{0}$，则 $g \in I$ 或 $h \in I$。(4) 对每个 $f \in C(X)_{\mathcal{P}}$，在 $Z[I]$ 中存在一个零集，使得 f 在其上不改变符号。

THEOREM 2.15. $C(X)_{\mathcal{P}}$ 中的每个素理想都包含于唯一的极大理想中。

COROLLARY 2.16. $C(X)_{\mathcal{P}}$ 是一个 pm-环（若交换环 R 含有单位元，则称其为 pm-环；如果 R 的每个素理想都包含于 R的唯一一个极大理想中。）

现在我们感兴趣的是研究 $C(X)_{\mathcal{P}}$的极大理想空间。令$Max(C(X)_{\mathcal{P}})$为 $C(X)_{\mathcal{P}}$的所有极大理想的集合。对于 $f \in C(X)_{\mathcal{P}}$，定义 $\mathcal{M}_f = \{M \in Max(C(X)_{\mathcal{P}}) : f \in M\}$。容易看出，对于某个拓扑，$\mathcal{B} = \{\mathcal{M}_f : f \in C(X)_{\mathcal{P}}\}$ 是 $Max(C(X)_{\mathcal{P}})$上的闭集基，该拓扑称为包核拓扑。

令 $\beta_{\mathcal{P}}X$为 X上所有满足条件的 $z_{\mathcal{P}}$-超滤子的指标集：对于 $p \in X$，$A^p = A_p = \{Z \in Z_{\mathcal{P}}[X] : p \in Z\}$。对于 $Z \in Z_{\mathcal{P}}[X]$，定义$\overline{Z} = \{p \in \beta_{\mathcal{P}}X : Z \in A^p\}$。于是，$\mathcal{B}' = \{\overline{Z} : Z \in Z_{\mathcal{P}}[X]\}$ 构成 $\beta_{\mathcal{P}}X$上某个拓扑的闭集基。

以下关于 $Z \in Z_{\mathcal{P}}[X]$ 的观察是显然的：

THEOREM 2.17. (1) $\overline{Z} \cap X = Z$.
(2) $\overline{Z} = cl_{\beta_{\mathcal{P}}X} Z$.

THEOREM 2.18. $Max(C(X)_{\mathcal{P}})$ 与 $\beta_{\mathcal{P}}X$ 同胚

PROOF. 定义 ϕ：$\beta_{\mathcal{P}}X \longrightarrow Max(C(X)_{\mathcal{P}})$，使得 $\phi(p) = Z_{\mathcal{P}}^{-1}[A^p] = M^p$（也就是说）那么 M^p 是 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的极大理想。此外，根据定理 2.13，ϕ 是一个双射。令 $Z = Z_{\mathcal{P}}(f) \in Z_{\mathcal{P}}[X]$。那么 $\phi(\overline{Z}) = \mathcal{M}_f \in \mathcal{B}$，且 $\phi^{-1}(\mathcal{M}_f) = Z_{\mathcal{P}}(f) \in \mathcal{B}'$。因此，$\phi$ 将 $Max(C(X))_{\mathcal{P}}$ 与 $\beta_{\mathcal{P}}X$ 的基本闭集互换。故 ϕ 是一个同胚映射。□

由于 $C(X)_{\mathcal{P}}$含有单位元，$Max(C(X)_{\mathcal{P}})$ 是紧的，因此 $\beta_{\mathcal{P}}X$ 是紧的。由于 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 是一个环（根据定理 2.15），由 [14] 的定理 1.2 可知，$\beta_{\mathcal{P}}X$ 是豪斯多夫的。

容易看出，当 $\mathcal{P} = \{\emptyset\}$ 时，我们有 $\beta_{\mathcal{P}}X = \beta X$。

我们进一步指出，对于赋予从 $\mathbb{R}$ 的通常拓扑继承的子空间拓扑的 $X = (0,1) \cup \{2\}$，$\mathcal{P}$ 是 $(0,1)$ 的所有闭子集构成的理想。于是，$C(X)_{\mathcal{P}} = \mathbb{R}^X = C(X_d)$，其中 $X_d = X$ 赋予了 X 上的离散拓扑。显然，$\beta_{\mathcal{P}}X$ 有不可数多个孤立点，而 βX 只有一个孤立点。因此，一般而言，$\beta_{\mathcal{P}}X$ 与 βX 不同胚。

3. 何时 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 在一致极限下闭?

DEFINITION 3.1. 子环 S $\mathbb{R}^X$ 中的函数序列 $\{f_n\}$ 称为在 X 上一致收敛于函数 f，如果对于给定的 $\epsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $n \geq N$ 和所有 $x \in X$，$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$。若子环 S $\mathbb{R}^X$ 中的$\{f_n\} \subseteq S$ 一致收敛于函数 $f \in \mathbb{R}^X$，则称该子环在一致极限下封闭，$f \in S$。若 $\tau\mathcal{P}$-空间 $(X, \tau, \mathcal{P})$ 满足 $C(X)_{\mathcal{P}}$在一致极限下封闭，则称其为 $\tau\mathcal{P}\mathcal{U}$-空间。

这里很容易看出，若 $\mathcal{P} = \{\emptyset\}$，则 X是一个 $\tau\mathcal{P}\mathcal{U}$-空间。另一个关于在一致极限下封闭的环的显然例子是 $\mathbb{R}^X$。因此，若 $C(X)_{\mathcal{P}} = \mathbb{R}^X$，则 X是一个 $\tau\mathcal{P}\mathcal{U}$-空间。此外，$\mathbb{R}^X$中的每个函数

在 X的所有孤立点上连续。鉴于这些观察，我们得到以下定理。

THEOREM 3.2. 设 $\mathcal{P}$ 是 X 的一个闭子集理想，且 X 中的所有非孤立点组成的集合属于 $\mathcal{P}$。那么 $C(X)_{\mathcal{P}} = \mathbb{R}^X$，因此 $C(X)_{\mathcal{P}}$在一致极限下封闭，也就是说， X 是一个 $\tau\mathcal{PU}$-空间。

当 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_f$时，上述定理的逆命题成立，见定理 2.9 [**13**]。

对于可度量化空间 X以及 $\mathcal{P} = \mathcal{K}$ ，上述定理的逆命题也成立。

THEOREM 3.3. 设 X 是一个可度量化空间，且 $\mathcal{P} = \mathcal{K}$。若 X 是一个 $\tau\mathcal{PU}$-空间，则 X中的所有非孤立点组成的集合属于 $\mathcal{K}$。

PROOF. 令 T 为 X中所有非孤立点组成的集合。假设T 非紧。那么 T 不是序列紧的。因此， $\exists$一个没有收敛子列的序列$\{a_n\} \in T$ 。令 $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$。那么 A 是 X 的一个闭非紧子集。

对每个 $m \in \mathbb{N}$，定义 f_m 在 X 上的方式如下:

$$f_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = a_n, n < m \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

于是，对于每个 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\{f_m\}$， $f_m \in C(X)_K$一致收敛于函数 $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ，其中

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = a_n \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

显然，$\overline{D_f} = \overline{A} = A \notin \mathcal{K}$。因此 $f \notin C(X)_K$。所以 $C(X)_K$ 在一致极限下不闭。这就完成了证明。□

众所周知，对于任意拓扑空间 Y， $C(Y)$在一致极限下是闭的。接下来一个自然的问题是：如果 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 与 $C(Y)$同构，那么我们能否得出 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 在一致极限下也闭?

THEOREM 3.4. 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X的闭子集理想。若$C(X)_{\mathcal{P}}$ 与某个拓扑空间 Y上的 $C(Y)$同构，那么 X 是一个$\tau\mathcal{PU}$-空间。

PROOF. 设 ϕ: $C(X)_{\mathcal{P}} \longrightarrow C(Y)$是一个同构。首先，我们尝试证明 ϕ 是保序映射。为此，取满足 $g \geq 0$的 $g \in C(X)_{\mathcal{P}}$。那么，对某个 $l \in C(X)_{\mathcal{P}}$，有 $g = l^2$。因此 $\phi(g) = \phi(l^2) = (\phi(l))^2 \geq 0$。所以， ϕ是保序的。对于 $f \in C(X)_{\mathcal{P}}$， $\phi(|f|) \geq 0$。此外，$(\phi(|f|))^2 = \phi(|f|^2) = \phi(f^2) = (\phi(f))^2$，这意味着对于所有$f \in C(X)_{\mathcal{P}}$，$\phi(|f|) = |\phi(f)|$.....(1)。由于 ϕ 是同构，对于任意有理数r， $\phi(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}$..... (2)。利用上述论证，我们可以证明 (1) 和 (2) 对 ϕ^{-1} 也成立。

设 $\{f_n\}$ 是 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 中一个一致收敛于函数 $f \in \mathbb{R}^X$ 的序列。现在我们证明 $f \in C(X)_{\mathcal{P}}$。

设 $\epsilon > 0$ 为任意有理数。那么存在 $k \in \mathbb{N}$ ，使得$|f_n - f_m| < \boldsymbol{\epsilon}$ 对所有 n、$m \geq k$ 都成立。由于 ϕ 保序，并利用 (1) 和 (2)，我们有 $|\phi(f_n) - \phi(f_m)| < \phi(\boldsymbol{\epsilon}) = \boldsymbol{\epsilon}$，对所有 n、$m \geq k$ 都成立。因此， there

存在 $h \in C(Y)$，使得 $\{\phi(f_n)\}$ 一致地收敛到 $h \in C(Y)$。根据假设， ϕ 是满射。因此存在 $g \in C(X)_{\mathcal{P}}$，使得 $\phi(g) = h$。

现在，对于给定的有理数 $\epsilon > 0$，由于 $\{\phi(f_n)\}$ 一致收敛到$h \in C(Y)$，存在 $k \in \mathbb{N}$，使得

$$\begin{aligned} & |\phi(f_n) - h| < \boldsymbol{\epsilon} \quad \forall n \geq k \\ \implies & |\phi(f_n) - \phi(g)| < \boldsymbol{\epsilon} \quad \forall n \geq k \\ \implies & |f_n - g| = |\phi^{-1}(\phi(f_n)) - \phi^{-1}\phi(g)| < \phi^{-1}(\boldsymbol{\epsilon}) = \boldsymbol{\epsilon} \quad \forall n \geq k. \end{aligned}$$

因此， $\{f_n\}$ 一致收敛到函数 g。但是， $\{f_n\}$ 一致收敛到 f。因此， $f = g \in C(X)_{\mathcal{P}}$。于是， $C(X)_{\mathcal{P}}$在一致极限下是闭的。

□

Corollary 3.5. 在度量空间 X 中，以下命题等价：

(1) $C(X)_K$ 在一致极限下是闭的。(2) X 中所有非孤立点组成的集合是紧的。(3) $C(X)_K$ 与某个拓扑空间 Y上的 $C(Y)$ 同构。

Proof. (1) $\implies$(2) 由定理 3.3 得出。
由定理 3.2，我们得到 (2) $\implies$ $C(X)_K = \mathbb{R}^X = C(X_d)$，其中 X_d表示带离散拓扑的空间 X。这证明了 (3)。(3) $\implies$(1) 对于 $\mathcal{P} = \mathcal{K}$由定理 3.4 得出。

□

若考虑拓扑空间 X上的理想 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_f$，则有以下定理，其中我们给出了 [8]的定理 3.4 的另一种证明。

Theorem 3.6. 对于拓扑空间 X，以下命题等价：

(1) $C(X)_F$ 在一致极限下是闭的。(2) X 有有限多个非孤立点。
(3) 对于某个拓扑空间 Y， $C(X)_F$ 与 $C(Y)$同构。

Proof. (1) $\iff$(2) 由 [13]中的定理 2.9 得出。由定理 3.2，我们得到 (2) $\implies$ $C(X)_F = \mathbb{R}^X = C(X_d)$，其中 X_d表示带离散拓扑的空间 X。这证明了 (3)。(3) $\implies$ (1) 对于 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_f$由定理 3.4 得出。

□

$C(X)$在一致极限下保持闭性这一事实，被广泛用于证明乌雷松延拓定理（ [9]中的定理 1.17）。我们的目标是实现该结果的一个类似结论。为此，我们需要以下定义。

Definition 3.7. 如果子空间 S of X 中的每个$f \in C(S)_{\mathcal{P}_S}$ 都可以延拓为 $C(X)_{\mathcal{P}}$中的一个函数，则称其为 $C_{\mathcal{P}}$-嵌入的。如果子空间 S of X 中的每个 $f \in C^*(S)_{\mathcal{P}_S}$ 都可以延拓为 $C^*(X)_{\mathcal{P}}$中的一个函数，则称其为 $C^*_{\mathcal{P}}$-嵌入的。

下面的定理是乌雷松延拓定理（ [9]中的定理 1.17）的推广，其证明可通过紧密仿照 [9]中的定理 1.17 的证明得到。

Theorem 3.8. 设 X 是一个 $\tau\mathcal{PU}$-空间。那么， S 是 X 的一个 $C^*_{\mathcal{P}}$-嵌入子空间，当且仅当 S 中任意两个 $\mathcal{P}_S$-完全分离的集合都是 X 中的 $\mathcal{P}$-完全分离集合。

此外，正如 $C(X)$ 的情形所示， X 的 $C^*_{\mathcal{P}}$-嵌入子空间未必是 $C_{\mathcal{P}}$-嵌入的。

Theorem 3.9. X 的 $C^*_{\mathcal{P}}$-嵌入子空间是 $C_{\mathcal{P}}$-嵌入的，当且仅当它与每个和它不相交的零集都是 $\mathcal{P}$-完全分离的。

紧随 [9] 中定理 1.18 的证明即可证明这一点。

4. $\tau\mathcal{P}$-紧空间。

本节定义 $\tau\mathcal{P}$-紧、 $\tau\mathcal{P}$-拟紧和实 $\tau\mathcal{P}$-紧空间，并讨论它们的刻画和性质。

Definitions 4.1.

(1) 若 $\tau\mathcal{P}$-空间（X、τ、$\mathcal{P}$）对每个具有有限交性质的零集族 $\mathcal{F} \subseteq Z_{\mathcal{P}}[X]$ 均满足 $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$，则称其为 $\tau\mathcal{P}$-紧。(2) 若 $z_{\mathcal{P}}$-滤子 $\mathcal{F}$ 满足 $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$，则称其为固定的；否则称为自由的。若理想 I 满足 $\bigcap Z_{\mathcal{P}}[I] \neq \emptyset$，则称其为固定的；否则称为自由的，其中 $C(X)_{\mathcal{P}}$。
(3) 若 $\tau\mathcal{P}$-空间 X 满足 $C(X)_{\mathcal{P}} = C^*(X)_{\mathcal{P}}$，则称其为 $\tau\mathcal{P}$-拟紧。

以下观察是直接的。

Observation 4.2. 设（X、τ、$\mathcal{P}$）为一个 $\tau\mathcal{P}$-空间，且（X、τ）为 Tychonoff 空间。如果（X、τ、$\mathcal{P}$）是 $\tau\mathcal{P}$-紧的，则（X、τ）是紧的。

然而，如果 $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ 赋予由 $\mathbb{R}$ 和 $\mathcal{P} = \{\emptyset, \{0\}\}$上的通常拓扑所诱导的子空间拓扑，那么 X 是紧的，但不是 $\tau\mathcal{P}$-紧的。这说明上述观察的逆命题可能不成立。

关于上述定义，我们有如下结果，其证明与 [9] 中定理 4.11 的证明类似。

Theorem 4.3. 以下陈述等价：
(1) X 是 $\tau\mathcal{P}$-紧的。(2) 每个 $z_{\mathcal{P}}$-滤子都是固定的。(3) 每个 $z_{\mathcal{P}}$-超滤子都是固定的。
(4) $C(X)_{\mathcal{P}}$ 中的每个理想都是固定的。(
5) $C(X)_{\mathcal{P}}$ 中的每个极大理想都是固定的。

Theorem 4.4. 如果 $(X, \tau, \mathcal{P})$ 是 $\tau\mathcal{P}$-紧的，那么它是 $\tau\mathcal{P}$-拟紧的。

Proof. 设 $(X, \tau, \mathcal{P})$ 是 $\tau\mathcal{P}$-紧的。若可能，设存在一个无界函数 $f \in C(X)_{\mathcal{P}}$，并对每个 $n \in \mathbb{N}$考察 $Z_n = f^{-1}((-\infty, -n] \cup [n, \infty))$。于是 $\mathcal{B} = \{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 $Z_{\mathcal{P}}[X]$的子集族。由于 f 无界，每个 Z_n 都非空。因此，存在一个 $z_{\mathcal{P}}$-滤子 $\mathcal{F}$ 于 X 上，使得$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$。由定理 4.3， $\emptyset \neq \bigcap \mathcal{F} \subseteq \bigcap \mathcal{B}$。令 $x \in \bigcap \mathcal{B}$。那么对所有 $n \in \mathbb{N}$， $|f(x)| \geq n$，这是不可能的。因此 $C^*(X)_{\mathcal{P}} = C(X)_{\mathcal{P}}$。故 X 是$\tau\mathcal{P}$-拟紧的。□

需要注意的是，上述结果的逆命题一般并不成立，以下示例说明了这一点。

Counter Example 4.5. 考虑赋予余可数拓扑 τ 的 $X = \mathbb{R}$，并取 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_f$，即 X 的所有有限子集所构成的集合。对于任意 $f \in C(X)_{\mathcal{P}}$，由于 D_f 是有限的，因此 f 在 $X \setminus D_f$ 上连续，而 $X \setminus D_f$ 在 X 中是开的。所以 f 在 $X \setminus D_f$ 上是常值的。此外， D_f 是有限的。因此 $f \in C^*(X)_{\mathcal{P}}$。故 $(X, \tau, \mathcal{P})$ 是 $\tau\mathcal{P}$-拟紧的。对于每个 $x \in X$，考虑 $f_x = \chi_{X\setminus\{x\}} \in C(X)_{\mathcal{P}}$。于是 $Z_{\mathcal{P}}(f_x) = \mathbb{R} \setminus \{x\}$。令 $\mathcal{B} = \{Z_{\mathcal{P}}(f_x) : x \in X\} \subseteq Z_{\mathcal{P}}[X]$。那么 $\mathcal{B}$ 具有有限交性质。然而 $\bigcap \mathcal{B} = \emptyset$。因此 X 不是 $\tau\mathcal{P}$-紧的。

对于一个 $\tau\mathcal{P}$-拟紧空间，可以得到 $\tau\mathcal{PU}$-空间的一种有趣刻画。正如 [9] 中已经指出的，赋予范数 $||f|| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ 的 $C^*(X)$ 是一个巴拿赫空间。然而，赋予相同范数的 $C^*(X)_{\mathcal{P}}$ 未必是巴拿赫空间。

由于 $C^*(X)_{\mathcal{P}}$ 中函数序列的一致收敛与该序列关于上述范数的收敛相同，我们得到以下结果。

Theorem 4.6. $\tau\mathcal{P}$-拟紧空间 X 是 $\tau\mathcal{PU}$-空间，当且仅当 $(C^*(X)_{\mathcal{P}}, ||.||)$ 是一个巴拿赫空间。

为了建立一个类似于拓扑空间 X 的实紧性概念，我们需要以下定义。

Definitions 4.7. (1) 偏序环 R 的理想 I 称为凸的，如果 $0 \leq x \leq y$ 且 $y \in I$ 蕴含 $x \in I$。(2) 格序环 R 的理想 I 称为绝对凸的，如果当 $|x| \leq |y|$ 且 $y \in I$ 时，有 $x \in I$。(3) 全序域 R 称为阿基米德的，如果对于每个元素 $a \in R$，存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\boldsymbol{n} \geq a$，其中 $\boldsymbol{n}$ 表示 1_R（R 的单位元）相加 n 次。

Proposition 4.8. 环 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的每个 $z_{\mathcal{P}}$-理想都是绝对凸的。

Proof. 显然。 □

由 [9]，中的定理 5.2、5.3，我们得到以下定理。

Theorem 4.9. 设 I 是格序环 A 中的一个绝对凸理想。根据以下定义， A/I 是一个格序环： $I(a) \geq 0$ 当且仅当存在 $x \in A$，使得 $x \geq 0$ 且 $I(a) = I(x)$。

以下命题显然成立，可通过紧密仿照 [9] 中 5.4(a) 和 5.4(b) 的讨论予以证明。

Proposition 4.10. 对于一个 $z_{\mathcal{P}}$-理想 I，

(1) $I(f) \geq 0$ 当且仅当存在 $Z \in Z_{\mathcal{P}}[I]$ 使得对于所有 $x \in Z$， $f(x) \geq 0$。(2) 如果 $f > \mathbf{0}$ 在 I 中某个函数的零集上成立，那么 $I(f) > 0$。

Definition 4.11. 若极大理想 M 属于环 $C(X)_{\mathcal{P}}$，且 $C(X)_{\mathcal{P}}/M$ 同构于实数域，则称其为实的。

Proposition 4.12. 极大理想 M 属于 $C(X)_{\mathcal{P}}$，当且仅当$C(X)_{\mathcal{P}}/M$ 是阿基米德的，才称其为实的。

Proof. 设 $C(X)_{\mathcal{P}}/M$ 是阿基米德的。于是，根据 [9],中的定理 0.21，存在一个同构 ϕ，将 $C(X)_{\mathcal{P}}/M$ 映到 $\mathbb{R}$的一个子域 S。此外，$\psi\colon \mathbb{R} \longrightarrow C(X)_{\mathcal{P}}/M$由 $\psi(r) = M(\boldsymbol{r})$ 对所有 $r \in \mathbb{R}$定义，是一个单同态。因此，$\phi \circ \psi$ 是一个从 $\mathbb{R}$ 映到 $\mathbb{R}$的子域上的单同态。根据 [9]中的定理 0.22，$\phi \circ \psi$ 是从 $\mathbb{R}$映到 $\mathbb{R}$的恒等同态。因此，$\phi(C(X)_{\mathcal{P}}/M) = \mathbb{R} \implies M$是实的。反之显然。□

Definition 4.13. 若一个 $\tau\mathcal{P}$-空间（$X, \tau, \mathcal{P}$）中的每个实极大理想都是固定的，则称其为 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的 $\tau\mathcal{P}$-实紧空间。

$C(X)_{\mathcal{P}}$ 的实极大理想对$\tau\mathcal{P}\mathcal{U}$-空间有如下刻画：

Theorem 4.14. 设 X是一个 $\tau\mathcal{P}\mathcal{U}$-空间。以下陈述等价。

(1) M 是 $C(X)_{\mathcal{P}}$的实极大理想。(2) $Z_{\mathcal{P}}[M]$ 对可数交封闭。(3) $Z_{\mathcal{P}}[M]$ 具有可数交性质。

上述结果可以仿照定理 5.14[9]的证明得出。

接下来，我们利用实 $\tau\mathcal{P}$-紧空间和 $\tau\mathcal{P}$-拟紧空间来刻画 $\tau\mathcal{P}$-紧空间。

Theorem 4.15. $\tau\mathcal{P}$-空间 X是 $\tau\mathcal{P}$-紧的，当且仅当它既是$\tau\mathcal{P}$-拟紧的，又是 $\tau\mathcal{P}$-实紧的。

Proof. 设 X 既是 $\tau\mathcal{P}$-拟紧的，又是 $\tau\mathcal{P}$-实紧的。设$\mathcal{U}$是 $z_{\mathcal{P}}$上的一个超滤子，且 $M = Z_{\mathcal{P}}^{-1}(\mathcal{U})$。那么 M是$C(X)_{\mathcal{P}}$的一个极大理想。若 M 不是实极大理想，则由命题 4.12，存在 $f \in C(X)_{\mathcal{P}}$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$，$M(f) \geq M(\boldsymbol{n})$。因此，对每个$n \in \mathbb{N}$，存在 $x_n \in X$，使得 $f(x_n) \geq n$。这与 X是 $\tau\mathcal{P}$-拟紧的矛盾。故 M是一个实极大理想。由于 X是 $\tau\mathcal{P}$-实紧的，$\bigcap Z_{\mathcal{P}}[M] \neq \emptyset$，因此 $\bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset$。故 X是 $\tau\mathcal{P}$-紧的。
逆向结论部分可由定理 4.4 得出，其余部分则显而易见。

□

需要指出的是，每个 $\tau\mathcal{P}$-紧空间总是实 $\tau\mathcal{P}$-紧的；正如下面的例子所示，反之则未必成立。

Counter Example 4.16. 设 $X = \mathbb{R}$ 赋予通常拓扑，且 $\mathcal{P}$是 X的任意闭子集理想。则 $(X, \tau, \mathcal{P})$ 是一个 $\tau\mathcal{P}$空间。设 M是 $C(X)_{\mathcal{P}}$的实极大理想。则定义为 $\phi\colon \mathbb{R} \longrightarrow C(X)_{\mathcal{P}}/M$，其中 $\phi(r) = M(\boldsymbol{r})$，是一个同构。现在，$i$（$X$上的恒等映射）$\in C(X) \subseteq C(X)_{\mathcal{P}} \implies \exists\, r \in \mathbb{R}$，使得 $M(\boldsymbol{r}) = M(i)$。这意味着$\{r\} \subseteq Z_{\mathcal{P}}[M]$，也就是说，理想 M是固定的。因此 X是实的 $\tau\mathcal{P}$-紧的。然而，由于 X 不是紧的，所以它不是 $\tau\mathcal{P}$-紧的。

这里可以提出两个有趣的观察：

(1) $\tau\mathcal{P}$-拟紧空间未必是实 $\tau\mathcal{P}$-紧空间。这可由反例 4.5 和定理 4.15 看出。(2) 实 $\tau\mathcal{P}$-紧空间未必是 $\tau\mathcal{P}$-拟紧空间。这可由反例 4.16 和定理 4.15 看出。

5. 当 $\mathcal{P}$ 包含 X的所有单点子集时

本节中，我们研究在$\mathcal{P}$ 包含 X的所有单点子集这一限制下， $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的性质。由于 X 是 T_1 ，且 X 的所有单点子集都属于 $\mathcal{P}$，因此对于每个 $x \in X$，都有 $\chi_{\{x\}} \in C(X)_{\mathcal{P}}$ 。这类环中有两种，即 $T'(X)$ 和 $C(X)_F$ ，已分别在 [8], [2], [13] 和 [1]中研究过。本节中，除非另有说明，我们假设 $\tau\mathcal{P}$-空间 X 上任意由闭子集构成的理想 $\mathcal{P}$ 都包含 X 的所有单点子集。

对于任意非单位元 $f \in C(X)_{\mathcal{P}}$，存在 $x_0 \in X$ 使得$f(x_0) = 0$。这给出了 $f\chi_{X\setminus\{x_0\}} = f$。这表明 $C(X)_{\mathcal{P}}$是几乎正则的，具体总结如下定理。

THEOREM 5.1. 对于一个 $\tau\mathcal{P}$-空间 X， $C(X)_{\mathcal{P}}$ 是一个几乎正则环。

此外，对于非单位元 $f \in C(X)_{\mathcal{P}}$，存在 $y \in Z_{\mathcal{P}}(f)$ 使得 $f\chi_{\{y\}} = \mathbf{0}$。因此， f 是一个零因子。于是我们得到以下结果。

PROPOSITION 5.2. 对于一个 $\tau\mathcal{P}$-空间 X， $f \in C(X)_{\mathcal{P}}$ 或者是零因子，或者是单位元。

如果去掉 $\mathcal{P}$ 包含 X的所有单点子集这一条件，上述结果可能不成立。

COUNTER EXAMPLE 5.3. 考虑带有通常拓扑的 $X = \mathbb{R}$ ，并令 $\mathcal{P} =$ 为 $(0, \infty)$ 的所有闭子集的集族。则 $f(x) = |x|$ 满足 $f \in C(X)_{\mathcal{P}}$。由于 $Z_{\mathcal{P}}(f) \neq \emptyset$， f是一个非单位元。现在，令$g \in C(X)_{\mathcal{P}}$满足 $fg = \mathbf{0}$。由于对于所有 $x \neq 0$都有 $f(x) \neq 0$，我们必有，对于所有 $x \neq 0$， $g(x) = 0$ 。若 $g(0) \neq 0$，则 $\overline{D_g} = \{0\} \notin \mathcal{P}$，这与 $g \in C(X)_{\mathcal{P}}$ 矛盾。因此，$g(0) = 0$，从而 $g = \mathbf{0}$。所以 f 不是零因子。

接下来，我们将以如下方式推广 [8] 中的命题 3.1。

PROPOSITION 5.4. 对于 $\tau\mathcal{P}$-空间 $(X, \tau, \mathcal{P})$，以下陈述等价。

(1) $C(X) = C(X)_{\mathcal{P}}$。(2) X 是离散的。
(3) $C(X)_{\mathcal{P}}$ 是 $C(X)$ 的商环。

PROOF. 若 X 是离散的，则 $\mathbb{R}^X$ 中的所有函数都是连续的。因此，$\mathbb{R}^X = C(X) = C(X)_{\mathcal{P}}$。此外，当 $C(X) = C(X)_{\mathcal{P}}$时，对每个$x \in X$，$\chi_{\{x\}} \in C(X)_{\mathcal{P}} = C(X)$，这意味着 $\{x\}$ 是开的。因此 X 是离散的。这表明 1 和 2 等价。为了证明 3 和 2 等价，我们已经知道，若 X 是离散的，则 $C(X) = C(X)_{\mathcal{P}}$。因此，对每个 $f \in C(X)_{\mathcal{P}}$，都有 $f \cdot \mathbf{1} = f \in C(X)_{\mathcal{P}} = C(X)$。这就证明了 3。最后，设 3 成立。那么对每个 $x \in X$，存在 $f \in C(X)$，使得 $f\chi_{\{x\}} \in C(X) \setminus \{\mathbf{0}\}$。这意味着 $f(x) \neq 0$。但是 $\chi_{\{x\}} = f^{1}(x)$ $f\chi_{\{x\}} \in C(X)$。这表明 X 是离散的。□

同样，仿照 [8]定理 3.2 的证明，我们得到:

THEOREM 5.5. 对于一个 $\tau\mathcal{P}$-空间 X，以下各项等价:
(1) X 是有限的。(2) $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的每个真理想都是固定的。(3) $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的每个极大理想都是固定的。(4) $C^*(X)_{\mathcal{P}}$ 的每个真理想都是固定的。
(5) $C^*(X)_{\mathcal{P}}$ 的每个极大理想都是固定的。

COROLLARY 5.6. 一个 $\tau\mathcal{P}$-空间 X是 $\tau\mathcal{P}$-紧的，当且仅当 X是有限的。

PROOF. 这由上述定理和定理 4.3 得出。 □

然而，即使 $\mathcal{P}$ 未包含 X 的所有单点子集，这个结果也可能不成立。

COUNTER EXAMPLE 5.7. 设 $X = \{\frac{1}{n}\colon\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ 为实数直线的子空间，且 $\mathcal{P} = \{\emptyset, \{1\}\}$。由于 1 是一个孤立点，$C(X)_{\mathcal{P}} = C(X)$。此外， X 是紧的，这意味着 $C(X) = C(X)_{\mathcal{P}}$ 的每个极大理想都是固定的；尽管 X 是一个无限集。

接下来我们讨论 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的某些环性质。我们首先讨论极小理想的结构以及该环的底。

THEOREM 5.8. 以下断言对 $\tau\mathcal{P}$-空间 X成立。
(1) $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的非零理想 I 是极小理想，当且仅当存在一个 $\alpha \in X$，使得 $I =< \chi_{\{\alpha\}} >$，当且仅当 $|Z_{\mathcal{P}}[I]| = 2$。(2) $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的底由所有除有限集外处处为零的函数组成。(3) $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的底是本质的且自由的。

PROOF. (1) 设 I 是 $C(X)_{\mathcal{P}}$的一个非零极小理想。对于 $f \in I \setminus \{\mathbf{0}\}$，存在 $\alpha \in X$ 使得 $f(\alpha) \neq 0$。因此 $\chi_{\{\alpha\}} = f^{\frac{1}{(\alpha)}}\chi_{\{\alpha\}} f \in I$。由于 I是 $C(X)_{\mathcal{P}}$的一个极小理想，可得 $I =< \chi_{\{\alpha\}} >$。这表明 $Z_{\mathcal{P}}[I] = \{Z_{\mathcal{P}}(\mathbf{0}) Z_{\mathcal{P}}(\chi_{\{\alpha\}})\} = \{X, X \setminus \{\alpha\}\}$。因此， $|Z_{\mathcal{P}}[I]| = 2$。

接下来我们证明 $< \chi_{\{\alpha\}} >$ 是 $C(X)_{\mathcal{P}}$的一个极小理想。设I 是 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的一个理想， $\{\mathbf{0}\} \subsetneq I \subseteq < \chi_{\{\alpha\}} >$。那么存在$f \in I \setminus \{\mathbf{0}\} \subseteq < \chi_{\{\alpha\}} >$。因此，对于某个 $g \in C(X)_{\mathcal{P}}$，有 $f = g\chi_{\{\alpha\}}$。但是 $f = g\chi_{\{\alpha\}} = g(\alpha)\chi_{\{\alpha\}} \implies \chi_{\{\alpha\}} = \frac{1}{g\,\alpha()} f \in I$。因此$I =< \chi_{\{\alpha\}} >$。

最后，我们假设 $|Z_{\mathcal{P}}[I]| = 2$，并证明 I是 $C(X)_{\mathcal{P}}$的极小理想。存在 $f \in I$ 使得 $f(\alpha) \neq 0$ 对某个$\alpha \in X$ 成立。因此 $\chi_{\{\alpha\}} = f^{\frac{1}{\alpha()}}\chi_{\{\alpha\}} f \in I$。根据我们的假设，对于任意非零函数 $g \in I$， $Z_{\mathcal{P}}(g) = Z_{\mathcal{P}}(\chi_{\{\alpha\}}) = X \setminus \{\alpha\}$。所以，每个非零 $g \in I$ 都具有 $g = g(\alpha)\chi_{\{\alpha\}}$的形式。因此 $I = \{c\chi_{\{\alpha\}}\colon\ c \in \mathbb{R}\} =< \chi_{\{\alpha\}} >$，正如上文所示，它是一个极小理想。

(2) 根据 1， $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的底，

$$Soc(C(X)_{\mathcal{P}}) = \sum_{\alpha \in X} < \chi_{\{\alpha\}} > =< \left\{\chi_{\{\alpha\}}\colon \alpha \in X\right\} > .$$

因此， $Soc(C(X)_{\mathcal{P}})$ 中的每个函数除了 X 中有限多个点外处处为零。反过来，设 $f \in C(X)_{\mathcal{P}}$ 是这样的函数，它除了有限多个点外处处为零，即 $Z_{\mathcal{P}}(f) = X \setminus \{\alpha_i \colon \alpha_i \in X, i = 1, ...n\}$，其中 $n \in \mathbb{N}$。那么

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\chi_{\{\alpha_i\}} \in Soc(C(X)_{\mathcal{P}}).$$

(3) 设 I 是 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的一个非零理想。则存在 $f \in I$，使得对某个 $\alpha \in X$，有 $f(\alpha) \neq 0$。由 1 可知， $\chi_{\{\alpha\}} \in Soc(C(X)_{\mathcal{P}})$ 且 $\chi_{\{\alpha\}} = f^{1}(\alpha)\chi_{\{\alpha\}} f \in I$。这保证了 $Soc(C(X)_{\mathcal{P}}) \cap I \neq \emptyset$。因此， $Soc(C(X)_{\mathcal{P}})$ 是一个本质理想。此外，对于任意的 $\alpha \in X$， $\chi_{\{\alpha\}} \in Soc(C(X)_{\mathcal{P}})$ 且 $\chi_{\{\alpha\}}(\alpha) = 1$。所以 $\alpha \notin Z_{\mathcal{P}}[Soc(C(X)_{\mathcal{P}})]$。这保证了 $Soc(C(X)_{\mathcal{P}})$ 是一个自由理想。

□

这里我们指出， $\mathcal{P}$ 包含 X 的所有单点子集这一条件，并非上述定理中 2 的必要条件。取一个 Tychonoff 空间 X 和 $\mathcal{P} = \{\emptyset\}$ 即可看出这一点。此处 $C(X)_{\mathcal{P}} = C(X)$。其余部分由 [4] 中的命题 2.2 得出。

利用上述结果，我们建立一个条件，使得 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 是阿廷环。为此，我们需要以下结果。

PROPOSITION 5.9. *$Soc(C(X)_{\mathcal{P}}) = C(X)_{\mathcal{P}}$ if and only if X is finite.*

PROOF. 设 $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. 则 $\mathbf{1} = \sum_{i=1}^{n} \chi_{\{x_i\}} \in Soc(C(X)_{\mathcal{P}})$。因此 $C(X)_{\mathcal{P}} = Soc(C(X)_{\mathcal{P}})$。反过来，设 $Soc(C(X)_{\mathcal{P}}) = C(X)_{\mathcal{P}}$。那么存在 $f_i \in C(X)_{\mathcal{P}}$，其中 $i = 1,2, ..., n$，使得 $\mathbf{1} = \sum_{i=1}^{n} f_i\chi_{\{x_i\}} = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)\chi_{\{x_i\}}$. 因此，对每个 $x \in X$，

$$1 = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)\chi_{\{x_i\}}(x) = f_i(x_i)\chi_{\{x_i\}}(x) \text{ for some } i \in \{1, 2, ..., n\}$$

这意味着 $\chi_{\{x_i\}}(x) = 1 \implies x = x_i$。因此 X 是有限的。 □

[6] 告诉我们，含单位元的交换环 R 是半单的，当且仅当 $rad(R) = \{0\}$。此外， R 是阿廷半单的，当且仅当 R 等于其极小理想之和。

在环 $C(x)_{\mathcal{P}}$ 中，很容易看出 $\bigcap_{p \in X} M_p = \{\mathbf{0}\}$。因此， $rad(C(X)_{\mathcal{P}}) = \{\mathbf{0}\}$。由此可知， $C(X)_{\mathcal{P}}$ 是半单的。

在假设 $\mathcal{P}$ 包含 X 的所有单点子集，并结合上述讨论，我们得到以下推论。

COROLLARY 5.10. *$C(X)_{\mathcal{P}}$ 是阿廷环，当且仅当 X 是有限的。*

这里自然会产生一个问题： $C(X)_{\mathcal{P}}$ 何时是诺特的? 当 $\mathcal{P}$ 包含 X 的所有单点子集时，我们能够回答这个问题。

THEOREM 5.11. *$C(X)_{\mathcal{P}}$ is an Noetherian ring if and only if X is finite.*

PROOF. 根据 5.10，以及阿廷交换环是诺特环这一事实， X 为有限集意味着 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 是诺特环。反过来，设 X 是一个无限集。那么 X 包含一个可数无限集 $\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$。于是

$< \chi_{\{x_1\}} > \subsetneqq < \chi_{\{x_1,x_2\}} > \subsetneqq < \chi_{\{x_1,x_2,x_3\}} > \subsetneqq \ldots$ 给出了 $C(X)_{\mathcal{P}}$的一个无界理想升链。因此， $C(X)_{\mathcal{P}}$ 不是诺特环。□

需要注意的是，在 5.8(1)、5.10 和 5.11 中， $\mathcal{P}$ 包含 X 的所有单点子集这一条件并非多余。下面的例子可以说明这一点。

Counter Example 5.12. 设 $X = \mathbb{R}$ 赋予余有限拓扑，且 $\mathcal{P} = \{\emptyset\}$。那么 $C(X)_{\mathcal{P}} = C(X)$只由 $\mathbb{R}$上的常值函数组成。因此， $C(X)_{\mathcal{P}}$ 同构于 $\mathbb{R}$ ，而 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的理想只有 $\{\mathbf{0}\}$和其本身。所以， $\{\mathbf{0}\}$ 是 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 唯一的极小理想，并且对任意 $x \in X$，它都不能由 $\chi_{\{x\}}$ 生成。此外， $|Z_{\mathcal{P}}[\{\mathbf{0}\}]| = 1$。进一步， $C(X)_{\mathcal{P}}$ 既是阿廷环也是诺特环，尽管 X 是一个无限集。

我们继续研究 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的环性质，并建立一组等价条件，以确定 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 何时是 IN-环、 SA-环和/或 Baer 环。

Theorem 5.13. 对于一个 $\tau\mathcal{P}$-空间（X， τ， $\mathcal{P}$），以下各陈述等价。

(1) X 的任意两个不相交子集都是 $\mathcal{P}$-完全分离的。(2) $C(X)_{\mathcal{P}}$ 是一个 IN-环。(3) $C(X)_{\mathcal{P}}$ 是一个 SA-环。(4) $C(X)_{\mathcal{P}}$ 是一个 Baer 环。(5) $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的所有素理想所成的空间是极端不连通的。(6) X 的任意子集都可表示为 $coz(e)$，其中 $e \in C(X)_{\mathcal{P}}$ 是某个幂等元。(7) 对于 X 的任意子集 A，存在 $P \in \mathcal{P}$，使得 $A \setminus P$ 是 $X \setminus P$ 的开闭子集。

为了证明这一结果，我们需要以下两个引理。

Lemma 5.14. 对于 X 的任意子集 A，存在 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的一个子集 S，使得

$$A = \bigcup coz[S] = \bigcup \{coz(f) \colon f \in S\}.$$

这是直接推出的，因为

$$A = \bigcup coz[S] \text{ where } S = \{\chi_{\{x\}} \colon x \in A\} \text{ and } \chi_{\{x\}} \in C(X)_{\mathcal{P}} \text{ for all } x \in X.$$

Lemma 5.15.

(1) 设 I和 J是 $C(X)_{\mathcal{P}}$的理想。那么 $Ann(I) \subseteq Ann(J)$ 当且仅当 $\bigcap Z_{\mathcal{P}}[I] \subseteq \bigcap Z_{\mathcal{P}}[J]$当且仅当 $\bigcap coz[J] \subseteq \bigcap coz[I]$。(2) 对于 $C(X)_{\mathcal{P}}$的任意子集 S， $Ann(S) = \{f \in C(X)_{\mathcal{P}} \colon \bigcup coz[S] \subseteq Z_{\mathcal{P}}(f)\}$。

Proof. (1) 设 $Ann(I) \subseteq Ann(J)$ 且 $x \in \bigcap Z_{\mathcal{P}}[I]$。则对所有 $f \in I \implies \chi_{\{x\}} f = \mathbf{0}$，有 $f(x) = 0$。因此$\chi_{\{x\}} \in Ann(I) \subseteq Ann(J)$ $\implies \chi_{\{x\}} g = \mathbf{0}$ 对所有 $g \in J$成立。所以 $g(x) = 0$ 对所有 $g \in J \implies x \in \bigcap Z_{\mathcal{P}}[J]$成立。反过来，设 $\bigcap Z_{\mathcal{P}}[I] \subseteq \bigcap Z_{\mathcal{P}}[J]$且$f \in Ann(I)$。则对所有 $h \in I$，有 $fh = \mathbf{0}$。所以 $coz(f) \subseteq \bigcap Z_{\mathcal{P}}[I] \subseteq \bigcap Z_{\mathcal{P}}[J]$。因此对所有 $h_1 \in J$，有 $fh_1 = \mathbf{0}$，从而 $f \in Ann(J)$。

(2) 设 $f \in Ann(S)$。则对所有 $g \in S$，有 $fg = \mathbf{0}$。因此对于 $x \in \bigcup coz[S]$，$f(x) = 0$。反过来，设 $f \in C(X)_{\mathcal{P}}$ 满足 $\bigcup coz[S] \subseteq Z_{\mathcal{P}}(f)$ 且 $g \in S$。则 $coz(g) \subseteq \bigcup coz[S] \subseteq Z_{\mathcal{P}}(f)$。因此 $fg = \mathbf{0}$。所以 $f \in Ann(S)$。

□

现在证明定理 5.13。

PROOF. 由于 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 是一个约化交换环，根据引理 1.2，(2) 到 (5) 的陈述等价。我们使用引理 1.1 证明 (1) 与 (2) 等价。设 (1) 成立，并设 I 和 J 是 $C(X)_{\mathcal{P}}$的正交理想。那么 $\bigcup coz[I]$和 $\bigcup coz[J]$是 X的不相交子集。根据 (1)，存在 $C(X)_{\mathcal{P}}$中的不相交零集 $Z_{\mathcal{P}}(f_1)$ 和 $Z_{\mathcal{P}}(f_2)$，使得 $\bigcup coz[I] \subseteq Z_{\mathcal{P}}(f_1)$ 且 $\bigcup coz[J] \subseteq Z_{\mathcal{P}}(f_2)$。这意味着$f_1 \in Ann(I)$ 且 $f_2 \in Ann(J)$。因此 ${f_1}^2 + {f_2}^2$ 是 $Ann(I) + Ann(J)$中的单位元。这就证明了 (2)。接下来设 (2) 成立，并且设 A 和 B 是 X的不相交子集。根据引理 5.14，存在子集 $S_A, S_A \subseteq C(X)_{\mathcal{P}}$，使得 $A = \bigcup coz[S_A]$ 且 $B = \bigcup coz[S_B]$。设 $I =< S_A >$ 和 $J =< S_B >$。那么 $\bigcup coz[I]$ 和 $\bigcup coz[J]$ 是不相交集合（因为 A 和 B 不相交）。因此 I 和 J 是 $C(X)_{\mathcal{P}}$的正交理想。根据 (2) 和引理 1.1，$Ann(I) + Ann(J) = C(X)_{\mathcal{P}}$。因此存在 $h_1 \in Ann(I)$ 和 $h_2 \in Ann(J)$，使得 $h_1 + h_2 = \mathbf{1}$，它是一个单位元。因此 $Z_{\mathcal{P}}(h_1)$ 和 $Z_{\mathcal{P}}(h_1)$不相交。此外，$A = \bigcup coz[S_A] \subseteq \bigcup coz[I] \subseteq Z_{\mathcal{P}}(h_1)$（因为 $h_1 \in Ann(I)$）。类似地，$B \subseteq Z_{\mathcal{P}}(h_2)$。这就证明了 (1)。

接下来证明 (4) 与 (6) 等价。设 $A \subseteq X$。那么存在$S \subseteq C(X)_{\mathcal{P}}$（由引理 5.14），使得 $A = \bigcup coz[S]$。定义 I 为由 S生成的理想。由 (4)，存在幂等元 $e' \in C(X)_{\mathcal{P}}$，使得 $Ann(I) =< e' >= Ann(< e >)$，其中 $e = \mathbf{1} - e'$也是幂等元。由引理 5.15，得到 $\bigcup coz[I] = \bigcup coz[< e >]$。容易看出 $\bigcup coz[S] = \bigcup coz[I]$。因此 $A = \bigcup coz[S] = \bigcup coz[< e >] = X \setminus Z_{\mathcal{P}}(e)$。这就证明了 (6)。设 (6) 成立，且 I 是 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的一个理想。由 (6)，存在幂等元 $e \in C(X)_{\mathcal{P}}$，使得 $\bigcup coz[I] = coz(e)$。由引理 5.15，$Ann(I) = \{f \in C(X)_{\mathcal{P}} : \bigcup coz[I] \subseteq Z_{\mathcal{P}}(f)\} = \{f \in C(X)_{\mathcal{P}} : coz(e) \subseteq Z_{\mathcal{P}}(f)\} = Ann(e) =< \mathbf{(1} - e) >$. 这表明 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 是一个 Baer 环。

最后，我们证明 (6) 与 (7) 等价。令 $A \subseteq X$。由 (6)，对于某个幂等元 $e \in C(X)_{\mathcal{P}}$，有 $A = coz(e)$。令 $P = \overline{D_e} \in \mathcal{P}$。容易看出，$coz(e) = Z_{\mathcal{P}}(\mathbf{1} - e)$。因此，$A \setminus P = X \setminus Z(e|_{X \setminus P}) = Z((\mathbf{1} - e)|_{X \setminus P})$ 在 $X \setminus P$ 中既开又闭。设 (7) 成立，且 $A \subseteq X$。那么根据 (7)，存在 $P \in \mathcal{P}$，使得 $A \setminus P$ 在 $X \setminus P$ 中既开又闭。定义 $e = \chi_A$。于是 $e|_{A \setminus P}$ 在 $X \setminus P$ 上连续。因此 $\overline{D_e} \subseteq P \in \mathcal{P}$。所以 $e \in C(X)_{\mathcal{P}}$，且 $A = coz(e)$。□

6. 何时 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 正则?

本节研究环 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的正则性。

DEFINITION 6.1. 若一个带单位元的交换环 R 满足：对每个元素 $a \in R$，都存在一个 $x \in R$ 使得 $a = a^2x$，则称其为正则环（冯·诺依曼意义）。

若空间 X 中的每个 G_δ-集都是开集，则称其为 P-空间。

Definition 6.2. 若 $\tau\mathcal{P}$-空间 $(X,\tau,\mathcal{P})$ 满足 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 是正则的，则称其为 $\mathcal{P}P$-空间。

已有研究指出，在 [9] 中，对于 Tychonoff 空间 X， X 是 P-空间，当且仅当 $C(X)$ 是正则的。当 X 不是 Tychonoff 空间时，这一结论不成立，以下反例可以说明这一点。

Counter Example 6.3. 令 $X=\mathbb{R}$ 配备余有限拓扑。则 $C(X)$ 由 $\mathbb{R}$ 上所有实值常函数构成。因此，$C(X)$ 同构于域 $\mathbb{R}$，而它是正则的。故 $C(X)$ 是正则的。对每个 $r\in\mathbb{Q}$，定义 $G_r=X\setminus\{r\}$。那么，对所有 $r\in\mathbb{Q}$， G_r 在 X 中是开集；并且 $G=\bigcap_{r\in\mathbb{Q}}G_r=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 是一个 G_δ-集，但它在 X 中不是开集。因此，X 不是 P-空间。

我们注意到，当 X 不是 Tychonoff 空间时， [8] 中的定理6.1也不成立。为此，我们来看下面的反例。

Counter Example 6.4. 设 $X=\mathbb{Q}^*=\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的一点紧化。那么， $C(\mathbb{Q}^*)$ 中的每个函数都是常值函数。因此， $C(X)$ 与 $\mathbb{R}$ 同构，而后者是正则的。然而， $C(\mathbb{Q})$ 并不正则，尽管 $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Q}^*$ 的子空间。接下来，我们证明 $C(X)_F$ 并不正则。

我们定义 $f(x)=\begin{cases}\sin(\pi x) & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x=\infty\end{cases}$ if if。那么 $f\in C(X)_F$。

若可能，设存在 $g\in C(X)_F$ 使得 $f=f^2g$，那么对于所有 $x\in X\setminus\mathbb{Z}$， $g(x)=\frac{1}{\sin(\pi x)}$。对于任意 $n\in\mathbb{Z}$， g 在 $\mathbb{Q}^*$ 中 n 的任意邻域内都是无界的。因此， $D_g\supseteq\mathbb{Z}$，这与 $g\in C(X)_F$ 矛盾。这表明 $C(X)$ 的正则性未必能推出 $C(X)_F$ 的正则性，也就是说，一个 P-空间未必是 $\mathcal{F}P$-空间。

然而，若我们假设 X 是 Tychonoff 的，则下述结论成立。

Example 6.5. 若 X 是 P-空间，则它是 $\mathcal{P}P$-空间。

Proof. 设 X是一个 P-空间，且 $f\in C(X)_{\mathcal{P}}$。那么 $f\in C(X\setminus\overline{D_f})$，其中 $X\setminus\overline{D_f}$是一个 P-空间，因为它是一个 P-空间的子空间（由 [9]中的 4K 得出）。因此， $C(X\setminus\overline{D_f})$是正则的。故存在 $\exists\, g\in C(X\setminus\overline{D_f})$，使得 $f|_{X\setminus\overline{D_f}}=(f|_{X\setminus\overline{D_f}})^2g$。在 X上定义 g^*如下：当()时， $g^*(x)=\begin{cases}(\ x & x\in X\setminus\overline{D_f}\ )\text{；当}(f)\text{时，}\\ \frac{1}{f\ x} & x\in\overline{D_f}\setminus Z_{\mathcal{P}}\end{cases}$

取 0；当 $x\in\overline{D_f}\cap Z_{\mathcal{P}}(f)$时，取.....。于是$D_{g^*}\subseteq\overline{D_f}$。因此， $g^*\in C(X)_{\mathcal{P}}$且 $f=f^2g^*$。由此， $C(X)_{\mathcal{P}}$是正则的，所以 X 是一个 $\mathcal{P}P$-空间。□

下面的结果推广了定理 6.2 (1) $\Longleftrightarrow$[8]。 (2)

Theorem 6.6. X 是一个 $\mathcal{P}P$空间，当且仅当对于 X中的任意零集 Z，都存在一个集合 $P\in\mathcal{P}$，使得 $Z\setminus P$是 $X\setminus P$中的闭开集。

Proof. 设 X是一个 $\mathcal{P}P$-空间，且 $f\in C(X)_{\mathcal{P}}$。那么存在 $g\in C(X)_{\mathcal{P}}$使得 $f=f^2g$。设 $P=\overline{D_f}\cup\overline{D_g}\in\mathcal{P}$。现在， $f|_{X\setminus P}$、$(1-fg)|_{X\setminus P}$是连续的。此外， $Z_{\mathcal{P}}(f)\setminus P=Z(f|_{X\setminus P})=(X\setminus P)\setminus Z((1-fg)|_{X\setminus P})$ 是 $X\setminus P$的一个开闭子集。反过来，设给定条件成立，并设

$f \in C(X)_{\mathcal{P}}$。那么，对于某个 ${}_1P \in \mathcal{P}$， $Z_{\mathcal{P}}(f) \setminus P$是 $X \setminus P$的一个开闭子集。定义 g: $X \longrightarrow \mathbb{R}$，使得 $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)} & x \notin Z_{\mathcal{P}}(f), \\ 0 & x \in Z_{\mathcal{P}}(f) \end{cases}$ 那么 $\overline{D_g} \subseteq \overline{P} \cup \overline{D_f} \in \mathcal{P} \implies \overline{D_g} \in \mathcal{P}$。因此， $g \in C(X)_{\mathcal{P}}$且 $f = f^2 g$。故 X是一个 $\mathcal{P}P$-空间。

□

7. $\aleph_0$-自内射性 $C(X)_{\mathcal{P}}$

本节中，我们将建立 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 为 $\aleph_0$-自内射的条件。为此，我们需要以下定义和理论。

Definition 7.1. [3] 若环 R 满足如下条件，则称其为 $\aleph_0$-自内射：每个模同态 ϕ: $I \longrightarrow R$ 都可以扩张为模同态 $\curvearrowright\phi$: $R \longrightarrow R$，其中 I 是 R 的可数生成理想。

格序向量空间或向量格是指偏序向量空间，其序结构构成一个格。

Definition 7.2. [**12**]
若 x 且对所有 $y \in X$，$\inf\{x, |y|\} = 0$ 都蕴含 $y = 0$，则称向量格 X 中的元素 x 在 X 中是弱序单位。

Definitions 7.3. [**12**] 格序环（$A, +, ., \vee, \wedge$）是指这样一种格序群：它同时是一个环，且正元素的乘积仍为正元素。若此外， A 是一个（实）向量格，则称 A 为格序代数。

若格序环 A 中每个非零元素 $a \in A$所对应的集合 $\{na\colon\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ 均无界，则称 A 为阿基米德的。

ϕ-代数 A是指实数域 $\mathbb{R}$上的阿基米德格序代数，它具有单位元1，且1是 A中的弱序单位。

如果一个 ϕ-代数 A 由实值函数构成，且在一致收敛下封闭，则称其为一致闭的。

Definitions 7.4. [**11**] 设 A 是一个 ϕ-代数。我们将 $\mathcal{M}(A)$记为由 A 的极大绝对凸环理想组成、赋予 Stone 拓扑的紧空间。此外，我们将 $\mathcal{R}(A)$记为 A 的所有实理想的集合。

Definitions 7.5. [3]对于环 R 的子集 Q， $Ann(Q) = \{r \in R\colon$ 对所有 $q \in Q\}$ 均成立。若环 R 的子集 P 中任意两个不同元素的乘积都为零，则称该子集正交。设 P 和 Q 是 R 的不相交子集，且它们的并集是 R 的正交子集。那么，若元素 $a \in R$ 满足以下条件，则称其将 P 与 Q 分离：

(1) 对所有 $p \in P$ 均成立，且

(2) $a \in Ann(Q)$。

我们将使用 [**11**] 中的定理 2.3 来证明 $C(X)_{\mathcal{P}}$ 同构于一个可测函数代数。

我们假设 X是一个 $\mathcal{P}P$-空间和一个 $\tau\mathcal{P}\mathcal{U}$-空间，因此 $C(X)_{\mathcal{P}}$是正则的，并且在一致收敛下闭。进一步，对于任意 $f \in C(X)_{\mathcal{P}} \setminus \{\mathbf{0}\}$，存在 $x \in X$ 使得 $f(x) \neq 0$。因此，集合 $\{\boldsymbol{nf}\colon\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbf{0}\}\}$是无界的。我们已经看到， $C(X)_{\mathcal{P}}$ 是一个格序群。

也容易看出，它构成一个实向量空间，并且对于任意两个正元素 $f, g \in C(X)_{\mathcal{P}}$， fg也是正的。此外， $C(X)_{\mathcal{P}}$具有单位元 1，显然它是一个弱序单位。因此， $C(X)_{\mathcal{P}}$ 是一个在一致收敛下闭的 ϕ-代数。也就是说， $C(X)_{\mathcal{P}}$ 构成一个一致闭的 ϕ-代数。

我们还看到， $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的所有极大理想都是 $z_{\mathcal{P}}$-理想，而它们又都是绝对凸的。因此， $C(X)_{\mathcal{P}}$ 的所有极大理想都属于 $Max(C(X)_{\mathcal{P}})$。

对每个 $p \in X, M_p = \{f \in C(X)_{\mathcal{P}}$，定义： $f(p) = 0\}$。那么，对每个 $p \in X$， $C(X)_{\mathcal{P}}/M_p$ 与 $\mathbb{R}$ 同构。因此，对每个 $p \in X$， M_p 都是一个实极大理想，因而属于 $\mathcal{R}(C(X)_{\mathcal{P}})$。

THEOREM 7.6. [**11**, 定理 2.3] 关于 ϕ-代数 A 的以下条件等价。

(a) A 是一致闭的、正则的，并且 $\bigcap\{M\colon\ M \in \mathcal{R}(A)\} = \{0\}$.
(b) A 与一个可测函数代数同构。

我们有

$$\bigcap_{p \in X} M_p = \{\mathbf{0}\} \implies \bigcap\{M\colon M \in \mathcal{R}(C(X)_{\mathcal{P}})\} = \{\mathbf{0}\}$$

由上述定理可知， $C(X)_{\mathcal{P}}$ 同构于一个可测函数代数。

接下来，我们证明环的 $\aleph_0$-自内射性在环同构下是不变的。

THEOREM 7.7. 若环 R 同构于一个 $\aleph_0$-自内射约化环 S，则 R 也是 $\aleph_0$-自内射的。

PROOF. 我们将使用 [**10**] 的定理 2.2 来证明该结论。
设 $\psi\colon\ S \longrightarrow R$ 是给定的同构。显然，由于 S 是约化环， $\psi(S) = R$也是约化环。

此外，根据 [**10**] 的定理 2.2， S 是正则的。因此， $R = \psi(S)$ 也是一个正则环。

现在考虑 R 的两个不相交子集 P 和 Q ，它们的并集是 R 的一个可数正交子集。那么， $\psi^{-1}(P)$ 和 $\psi^{-1}(Q)$ 不相交，且它们的并集是可数的。此外，对于任意 s， $s' \in \psi^{-1}(P) \cup \psi^{-1}(Q)$，其中 $s \neq s'$， $\psi(s)\ \psi(s') \in P \cup Q$，且 $\psi(s) \neq \psi(s')$（因为 ψ 是单射）。由于 $P \cup Q$ 是正交的，

$$\psi(s)\psi(s') = 0 \implies \psi(ss') = 0 \implies ss' = 0, \text{ since } \psi \text{ is injective.}$$

T 因此， $\psi^{-1}(P) \cup \psi^{-1}(Q)$ 是正交的。由于 S 是 $\aleph_0$-自内射的，根据 [**10**], 的理 . **2**，存在 $a \in S$ 将 $\psi^{-1}(P)$ 与 $\psi^{-1}(Q)$ 分离。现在我们证明， $\psi(a)$ 将 P 与 Q分离。

(1) 设 $p \in P$，则 $\psi^{-1}(p^2\psi(a)) = (\psi^{-1}(p))^2 a = \psi^{-1}(p)$，因为 $a \in S$ 将 $\psi^{-1}(P)$ 与 $\psi^{-1}(Q)$ 分离。由 ψ^{-1} 的单射性可知， $p^2\psi(a) = p$。因此，对所有 $p \in P$， $p^2\psi(a) = p$ 。(2) 设 $q \in Q$，则 $\psi^{-1}(q) \in \psi^{-1}(Q)$。由于 $a \in S$ 将 $\psi^{-1}(P)$ 与 $\psi^{-1}(Q)$ 分离， $\psi^{-1}(q)a = 0$ ，这表明 $q\psi(a) = 0$。因此， $\psi(a) \in Ann(Q)$。

因此，我们得到 R ($\psi(a)$) 中一个将 P 与 Q 分离的元素。由 [**10**] 的定理 2.2 可知， R 是 $\aleph_0$-自内射的。□

最后，我们利用上述理论证明以下定理。

THEOREM 7.8. 对于一个 $\tau\mathcal{PU}$-空间，以下条件等价。(a) X 是一个 $\mathcal{P}P$-空间。(b) $C(X)_{\mathcal{P}}$ 同构于一个可测函数代数。(c) $C(X)_{\mathcal{P}}$ 是 $\aleph_0$-自内射的。

PROOF. (a) $\implies$ (b) 可由上述讨论得出。(b) $\implies$ (c) 可由 [**3**] 的定理 7 及上述定理得出。最后，(c) $\implies$(a) 直接由 [**10**]的定理 2.2 得出。□

我们不能省略 X是一个 $\tau\mathcal{PU}$-空间这一条件。这可由以下例子看出。

COUNTER EXAMPLE 7.9. 现在考虑

$$X = \mathbb{N} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{\frac{1}{n} + k \colon n \in \mathbb{N}\}$$

赋予从 $\mathbb{R}_u$ 继承的子空间拓扑。另设 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_f$，即 X 的所有有限子集所构成的理想。于是， $C(X)_{\mathcal{P}} = C(X)_F$，根据 [**13**] 中的定理 2.9，该集合不是一致闭的。现在，我们考虑 X 的以下子集:

$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{\frac{1}{2n} + k \colon n \in \mathbb{N}\} \text{ and } B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{\frac{1}{2n-1} + k \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

定义 $P = \{\chi_{\{x\}} \colon x \in A\}$ 以及 $Q = \{\chi_{\{x\}} \colon x \in B\}$ 于是， P 和 Q 不相交，且 $P \cup Q$ 是可数的并且正交。如果存在一个 $f \in \mathbb{R}^X$ 将 P 与 Q 分离，则 $f(A) = \{1\}$ 以及 $f(B) = \{0\}$。因此， $\mathbb{N}$中的每一点都是 f 的不连续点。故 $f \notin C(X)_F$。由此，根据 [**10**] 的定理 2.2，可知 $C(X)_F$ 不是 $\aleph_0$-自内射的。

参考文献

[1] M. R. Ahmadi Zand, 《布伦伯格空间的代数刻画》, Quaest. Math., 33(2) (2010), 223-230。[2] M. R. Ahmadi 和 Z. Khosravi, 《具有有限个不连续点的函数环的若干注记》, Appl. Gen. Topol., 22 (2021), 139-147。[3] H. Azadi、M. Henriksen 和 E. Momtahan, 《实值可测函数的若干性质》, Acta Math. Hungar., 124 (1-2) (2009), 15-23。[4] F. Azarpanah, 《$C(X)$ 中本质理想的交》, Proc. Amer. Math. Soc., 125 (7) (1997), 2149-2154。[5] S. Bag、S. K. Acharyya、D. Mandal、A. Raha 和 A. Singha, 《在零测度集上不连续的函数环》, Positivity, 26 (2022)。[6] A. J. Berrick、M.E. Keating, 《环与模导论》, 剑桥大学出版社 (2000)。[7] G. F. Birkenmeier、M. Ghirati 和 A. Taherifar, 《湮灭子理想之和何时为湮灭子理想？》, Comm. Algebra, 43(7) (2015), 2690-2702。[8] Z. Gharabaghi、M. Ghirati、A. Taherifar, 《在有限集上不连续的函数环》, Houston J. Math., 44 (2018), 721-739。[9] L. Gillman 和 M. Jerison, 《连续函数环》, 施普林格，伦敦，1976。[10] O. A. S. Karamzadeh, 《关于 Maltis 的一个问题》, Comm. Algebra, 32 (2004), 2717-2726。[11] Anthony W. Hager, 《可测函数代数》, Duke Math. J. 38 (1) (1971), 21-27。[12] M. Henriksen 和 D. G. Johnson, 《一类阿基米德格序代数的结构》, Fund. Math. 50 (1962), 73-94。

[13] S. Mandal、S. Bag 和 D. Mandal, 《关于在某些有限集上不连续的函数环的注记》, arXiv:2109.06414 (2021)。[14] G. D. Marco 和 A. Orsatti, 《每个素理想都包含于唯一极大理想中的交换环》, Proc. Amer. Math. Soc., 30 (1971), 459-466。[15] A. Taherifar, 《拓扑空间与湮灭子理想的若干新类》, Topology Appl., 165 (2014) 84-97。Department of Pure Mathematics, University of Calcutta, 35, Ballygunge Circu-lar Road, Kolkata 700019, West Bengal, India*Email address*: deyamrita0123@gmail.comDepartment of Pure Mathematics, University of Calcutta, 35, Ballygunge Circu-lar Road, Kolkata 700019, West Bengal, India*Email address*: sdpacharyya@gmail.comDepartment of Mathematics, Bangabasi Evening College, 19, Raj Kumar Chakrabort

Y

Ln.,Baithakkhana, Kolkata West Bengal, India*Email address*: sagarmoy.bag01@gmail.com Department of Pure Mathematics, University of Calcutta, 35, Ballygunge Circu-lar Road, Kolkata 700019, West Bengal, India*Email address*: dmandal.cu@gmail.com