arXiv:2304.07539v1 [math.CT] 15 Apr 2023

教义的几何完备化

J. L. Wrigley*

2023年4月18日

摘要

由于若干句法并不等价的不同形式系统可能描述等价的语义，因此可以找到更具表达力的句法完备化，使其保持语义不变。Lawvere 意义上的教义理论，是表达一阶逻辑完备化的自然范畴框架。我们研究将预序的理想完备化的纤维化推广用于教义完备化、使其达到几何逻辑句法的适用性。与文献中所考察的其他教义完备化不同，我们的完备化将格罗滕迪克拓扑作为第二个参数。因此，几何完备化是幂等的；对于模型可表示为连续平坦函子范畴的任何教义，它也具有"语义不变性"，涵盖了常见教义中的一大类。

我们还将几何完备化与文献中所考察的其他教义完备化联系起来：首先，研究省略第二个参数时几何完备化的行为；然后，研究它与那些完备化至几何逻辑片段的教义完备化之间的相互作用。全文中，我们都将说明这些教义完备化如何通过句法范畴构造产生范畴的完备化。我们证明，只要逻辑理论具有等价的分类拓扑斯，那么用教义或句法范畴来表示它们是等价的。

目录

1 引言 **2**

2 预备知识 52.1 位点态射与位点余态射.5 2.2 内部局部.8

3 教义与教义站点
113.1 期望模型.12 3.2 教义站点.14

4 教义的几何　　完备化 16
4.1 几何完备化的计算.17 4.2 几何完备化的泛性质.20 4.3 作为单子的几何完备化.24

5 句法位点　　与几何完备化 26
5.1 存在性教义站点.27 5.2 句法范畴.31 5.3 句法位点.33 5.4 正则位点的几何完备化.41

6 粗几何完备化 **41**

*Un因苏布里亚大学，瓦莱焦街11号，科莫 22100 CO，电子邮件：jwrigley@uninsubria。 it

7 次几何完备化 **48**
7.1 自由几何完备化与存在完备化.48 7.2 广义次几何完备化.50 7.3 通过子教义实现的次几何完备化.55
7.4 逐点子几何完成.60

1 引言

教义（也称为指标化或纤维化预序）由 Lawvere 在 [30] 中引入，并在 [31], 中进一步发展，是命题逻辑中林登鲍姆-塔斯基代数向一阶逻辑情形自然的范畴推广，以下典型例子便可说明这一点。

例 1.1。设 $\mathbb{T}$ 是一个基于签名 Σ 的一阶逻辑片段中的理论。记 Con_Σ 为上下文范畴（即由有限个带类型变量组成的序列构成的范畴）及其上下文重标记所组成的范畴。函子$F^{\mathbb{T}}\colon \mathsf{Con}_\Sigma \to \mathsf{PoSet}$ 的作用如下：

(i) 将每个上下文 $\vec{x}$ 映射到集合 $F^{\mathbb{T}}(\vec{x})$，其中包含在上下文$\vec{x}$中、关于 Σ 的公式的 $\mathbb{T}$-可证等价类，并按理论 $\mathbb{T}$ 中的句法证明排序；(ii) 对于每个上下文重标记 $\sigma\colon \vec{x} \to \vec{y}$， $F^{\mathbb{T}}(\sigma)$ 的作用是按照重标记 σ 对公式 $\varphi \in F^{\mathbb{T}}(\vec{x})$ 的自由变量进行替换。

教义是范畴逻辑中的一种强大工具，因为理论的教义可以表达某些逻辑语法，并由范畴构造来解释，即使这些语法并未出现在逻辑的显式符号语法中。例如，主教义是一种取值于 MSLat 的教义 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to$ MSLat；MSLat 是交半格及其同态组成的范畴，而 $\mathcal{C}$ 是笛卡尔 的（即 $\mathcal{C}$ 具有所有有限极限），它解释了二元合取 $\wedge$ 和真 $\top$ 符号。

这种对逻辑与句法的范畴论表述引出了以下问题：给定一个教义

$$P\colon \mathcal{C}^{op} \to \text{预序}$$

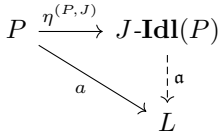
以及我们希望 P 对其建模的某种句法，是否存在一种普适的方法将 P 完备化为这种新句法？近年来，人们研究了许多这样的逻辑完备化。在 [39], Pasquali 构造了从主教义到初等教义的余自由完备化（初等教义是一种主教义，直观上表达相等，见 [39, 定义 1.2]）。Maietti 和 Rosolini 在 [34], [35], [37]深入研究了初等教义的商完备化。Trotta 在 [46], 提出了存在完备化，它以普适方式将主教义完备化为存在教义，即能够解释存在量化的教义（见 [46, 定义 3.3]）。Trotta 和 Spadetto 在 [48, §3]对存在完备化作了调整，从而将主教义完备化为能够解释全称量化的教义。在 [11] Coumans 给出了相干教义的一种完备化，它推广了分配格的典范扩张。

本文旨在提供另一种逻辑完备化：教义的几何完备化。正如我们将在定理 4.10 中看到的，这为将任意教义完备化为几何教义定义了一种普适且幂等的方式；几何教义属于一类具有几何逻辑理论表达能力的教义。关于术语及几何逻辑语法的介绍，请读者参阅 [23,§D1]。简言之，几何逻辑是无穷一阶逻辑的一个片段，其中允许使用的符号包括相等 $=$、真 $\top$、假 $\bot$、有限合取 $\wedge$、无穷析取 $\bigvee$ 和存在量化 $\exists$。几何逻辑具有强大的空间直觉（见 [49]中的探讨）以及丰富且富有表现力的模型论，这一点可由分类托扑理论（参见 [6, §2.1]）体现。在 [1], 的§2.3中，Abramsky 从多个角度阐述了几何逻辑，其中一种观点认为，它应被解释为可观测性质的逻辑——即那些基于有限信息便可判定为成立的性质。我们使用“几何教义”这一术语，以强调它与几何一阶逻辑及更广泛的教义理论领域之间的联系；不过，该术语与文献中也使用的内框架和内部局部同义。

预序的理想完备化。我们将要研究的几何完备化，是预序理想完备化的一种纤维化推广，其描述见§III. 4 [25] 和§II.2.11 [22]。回想一下，给定一个预序 P，所有单调映射 f构成的预序 $2^{P^{op}}$（赋予逐点序），与按包含关系排序的 P 的所有下闭集构成的集合同构；这一预序是 P 的自由并完备化（其泛性质可由注释1.3推出）。此外， $2^{P^{op}}$还是一个帧。

还要记住，若我们赋予 P 一个格罗滕迪克拓扑（有时也称为覆盖系统），那么 J-闭下集 $I \subseteq P$，也就是满足如下条件的下集： $x \in I$只要 $\{ y_j \leqslant x \mid j \in J \}$是一个$J$-覆盖筛，且其中每个 y_j 都属于 I，按包含关系排序后便构成一个帧 J-Idl(P)，我们称之为 P上的 J-理想。映射 $\eta^{(P,J)}\colon P \to J\text{-Idl}(P)$将元素 $x \in P$ 映到由 x生成的主下集 $\downarrow x$ 的 J-闭包，它构成了对偶(P, J)的“几何完备化”，因为它满足一个泛性质。

定理1.2 (命题 II.2.11 [22])。 对于交半格 P 及其上的格罗滕迪克拓扑 J，帧 $J\text{-}\mathbf{Idl}(P)$ 满足如下泛性质：对于任意映入一个帧 L 的交半格同态 $a\colon P \to L$，若该同态是 J-连续的，也就是说，对于 x上的每个 J-覆盖筛 S，都有 $x = \bigvee_{y \leqslant x \in S} y$，则存在唯一的帧同态 $\mathfrak{a}\colon J\text{-}\mathbf{Idl}(P) \to L$，使得该三角形



可交换。

注释1.3 (定理 6.2 [5])。 在定理1.2中，可以放宽要求 P 是交半格这一条件。若 P 是任意预序，且 J 是 P 上的格罗滕迪克拓扑，则框架 J-Idl(P) 满足如下泛性质：对于每个 J-连续单调映射 $a\colon P \to L$ 到框架 L，都存在唯一的单调映射 $\mathfrak{a}\colon J\text{-Idl}(P) \to L$，使得 $\mathfrak{a}$ 保持所有上确界且 $\mathfrak{a} \circ \eta^{(P,J)} = a$。当且仅当 $a\colon P \to L$ 定义了一个位点态射 $a\colon (P, J) \to (L, J_{\mathrm{can}})$（参见定义 2.2 ）时，映射 $\mathfrak{a}$ 也保持有限交，因此是框架同态。

预序的理想完备化可以内化到一个拓扑斯中，而这种内在的理想完备化可以从纤维化拓扑斯理论的视角在外部加以理解，正如 [8] 第 6 节所阐述的那样。一个教义$P\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 预序，可视为预层拓扑斯 集合$^{\mathcal{C}^{op}}$ 中的内在预序；再加上格罗滕迪克构造 $\mathcal{C} \rtimes P$ 上的格罗滕迪克拓扑 J（见 [23, 定义 B1.3.1] 或记号2.7），它作为 P 上的内在覆盖系统，便具有纤维化理想完备化，如 [8, 定理 6.1], 所确立；这推广了预序的理想完备化。这就是我们所称的教义P相对于 $\mathcal{C} \rtimes P$ 上格罗滕迪克拓扑 J 的几何完备化。

我们的贡献。我们在 §4.2 中提出的几何完备化的泛性质，是对 [8] 中确立的纤维化理想完备化的泛性质的扩展（纳入了基范畴变换）。我们将证明，几何完备化在定义 3.6 所定义的教义站点范畴上构成一个幂等 2-单子。对于某些教义，我们还给出了几何完备化的一种更简单的描述，进而可以借此恢复任意教义上的几何完备化。

我们还将几何完备化与另外两类教义的完备化联系起来。第一类是粗几何完备化：通过为所得的几何教义赋予一个更粗拓扑，我们“忘记”教义站点的几何完备化是几何的。由此得到的粗几何完备化不再是幂等的，而是松弛幂等的。我们研究的另一类是次几何完备化，旨在刻画将教义完备化到几何语法部分（而非全部）数据的情形——例如，在 §7.3 中，我们将证明，根据定义 7.2，Trotta 的存在完备化 [46] 属于次几何完备化。

我们还将展示上述教义的完备化如何导出相应的范畴完备化，例如通过正则完备化 [9], 的句法范畴 构造。句法范畴构造将一个教义映射到其可证明函数关系范畴。我们还将构造一个函子，将正则教义的格罗滕迪克构造映至其句法范畴；当这两个范畴

赋予适当的格罗滕迪克拓扑后，该函子会诱导出层拓扑斯之间的等价。由此，我们得到通过教义和句法范畴来表示一个理论（或者更确切地说，其分类拓扑斯）的等价性。

哲学动机。 为什么我们要在几何完备化中将格罗滕迪克拓扑作为第二个参数？我们为范畴 $\mathcal{C} \rtimes P$ 选择的拓扑旨在捕捉教义 P的更多句法或语义信息： $\mathcal{C}^{op} \to$ 预序。

除了一阶理论 $\mathbb{T}$的句法数据之外，还有关于 $\mathbb{T}$的语义 概念：即 $\mathbb{T}$ 的模型范畴以及这些模型的同态；按照 Kock 和 Reyes [27, 定义 3.5]的建议，这通常被视为教义态射范畴 $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Doc}}(F^{\mathbb{T}}, \mathscr{P})$ 的一个子范畴（此处， $\mathscr{P}$ 表示幂集教义 $\mathscr{P}$：集合$^{op} \to$ CBool）。如此表述后，如果 $\mathbb{T}$ 的期望模型能够被刻画为保持某种范畴结构的教义态射 $F^{\mathbb{T}} \to \mathscr{P}$，那么就很容易识别出这些模型。然而，这种特设处理取决于 $\mathbb{T}$ 所属逻辑片段的句法，并且难以采用统一的方法。

正如在 [23, §D1], 中所显明的，一阶理论的语义可以改述为连续平坦函子。对于教义 P: $\mathcal{C}^{op} \to$ 预序, $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Doc}}(P, \mathscr{P})$可以嵌入函子范畴 $[\mathcal{C} \rtimes P, \text{集合}]$。众所周知（我们将在 §3.1 中回顾），对于许多最常考察的教义，包括表达相干逻辑、几何逻辑乃至经典一阶逻辑的教义，通过在范畴 $\mathcal{C} \rtimes P$ 上选取合适的格罗滕迪克拓扑 J，我们可以得到等价

$$J\text{-}\mathbf{Flat}(\mathcal{C} \rtimes P, \mathbf{Sets}) \simeq \mathbf{Mod}(P), \tag{1}$$

其中， J-Flat($\mathcal{C} \rtimes P$, 集合)是从 $\mathcal{C} \rtimes P$到集合的 J-连续平坦函子的范畴，而 Mod(P) 是 $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Doc}}(P, \mathscr{P})$ 中由 P 的期望模型构成的子范畴。因此，我们选择使用序对 (P, J)，其中 P: $\mathcal{C}^{op} \to$ 预序是一个教义， J 是 $\mathcal{C} \rtimes P$ 上的格罗滕迪克拓扑。

尽管教义的句法完备化因其泛性质而显然具有哲学上的意义，但我们也希望它们具有语义不变性，即与教义 P 相关联的模型范畴和其完备化 TP 在范畴论意义上等价。这样，我们就能够在可能更为熟悉的 TP句法框架内研究教义 P的语义。我们将在定理 4.10 中看到，如果某个教义 P的期望模型可以表示为 J-Flat($\mathcal{C} \rtimes P$)，其中 $\mathcal{C} \rtimes P$上的某个格罗滕迪克拓扑为 J，那么 (P, J) 的几何完备化具有语义不变性。正是这一性质使得几何完备化能够实现其预期用途：通过对几何教义进行统一处理，重新表述针对各种教义的模型论研究。

概要。 本文结构如下。

- 在 §2 中，我们回顾必要的背景知识。前半部分 §2.1 介绍几何态射理论的场论方法中所用的概念，相关内容见 [32, §VII.10] 和 [7]；我们还回顾了 [51] 中的引理 2.5，并说明本文采用的记号。后半部分 §2.2 回顾格罗滕迪克拓扑斯的内部局部的性质，包括其在外部的刻画（见[25, §VI.2] 和 [8, §4], ），以及内部局部的态射与位点态射之间的相互作用（见 [51]）。

- 我们关于如何使用格罗滕迪克拓扑为逻辑语法建模的讨论将在 §3 中完成。在 §3.1 中，我们概述了对于初等、存在、相干和布尔教义，Kock 和 Reyes 所定义的教义模型与作为连续平坦函子的教义模型之间的等价 (1)。 [27] 在 §3.2 中，我们定义了 2-范畴 DocSites，即几何完备化所作用的教义站点。我们还概述了通常表述的初等、存在、相干和布尔教义范畴如何构成 DocSites 的全忠实 2-子范畴。我们也借此机会明确了几何教义及其态射的定义。

- §4 将几何完备化作为 [8, §6] 的纤维化理想完备化的一项应用加以发展。我们在 §4.1 中证明，当一个教义具有（且保留）最大元时，几何完备化可以用比 [8, §6] 中所述更简单明确的方式来描述。任意教义的几何完备化都可以从这一特殊情形中恢复出来；我们展示这一点，是为了引入一个次几何完备化的例子——自由顶元完备化。次几何完备化

将在 §7 中得到更详细的探讨。§4.2 证明了教义站点的几何完备化具有泛性、语义不变性和幂等性；这一泛性质被用于在 §4.3 中发展几何完备化的 2-单子方面。

• 第 5 节探讨教义站点与正则位点 之间的联系（见定义 5.11），具体而言，说明如何利用教义站点的几何完备化推导出正则位点的几何完备化。相关内容在 §5.4 中展开。我们以存在性纤维化站点为框架进行论述；这一概念在 §5.1 中回顾，源自 [8, §5] 。存在教义与正则范畴之间的拟 2-伴随（此处沿用[16, §I.7]中的术语）会将存在教义映射到其句法范畴，相关内容在 §5.2 中回顾，并在 §5.3 中扩展为存在性教义站点与正则位点之间的拟 2-伴随。我们还在 §5.3 中证明，存在性教义站点上的层拓扑斯与相应句法位点 上的层拓扑斯等价。

• 几何完备化是幂等的，因为我们可以通过赋予适当的格罗滕迪克拓扑，追踪几何教义的几何性。第 6 节专门研究在赋予更粗的 格罗滕迪克拓扑而“遗忘”部分信息时的完备化。我们建立了粗几何完备化 的一般框架，并证明每一种粗几何完备化都是松弛幂等的。

• 最后，我们在 §7 中研究次几何完备化。粗略地说，根据 [47]，的建议，将教义的一个 2-单子 T（视为教义的完备化）定义在教义的一个 2-子范畴上；如果某个适当的几何教义子类全都是 T-代数，并且完备化中添加到教义 P 的数据 TP 能够通过 $\mathcal{D} \rtimes TP$ 上的某个格罗滕迪克拓扑 J_P^T 被“看见”，那么该 2-单子就是“次几何的”。我们将证明， P 的几何完备化（根据 $\mathcal{C} \rtimes P$ 上的平凡拓扑）同构于这样得到的教义：先根据 T 对 P 进行完备化，通过拓扑 J_P^T 记录新数据，然后再进行几何完备化。此前我们已经在 §4.1 中看到，自由顶元完备化是次几何完备化的一个例子；因此，我们在 §7.1 中通过展示 Trotta 的存在完备化满足上述关于次几何性的宽松意义，开始介绍另一个动机性例子。次几何完备化的形式定义将在 §7.2 中给出；在那里，我们还将给出次几何完备化成为松弛幂等的充分条件。

接下来我们转向次几何完备化的例子。在 §7.3 中，我们建立了一般理论，通过自由几何完备化的子教义来构造次几何完备化；该理论涵盖主教义的存在完备化和相干完备化。我们还将这些完备化与笛卡尔范畴的正则 完备化和相干 完备化联系起来（见 [9]）。最后，我们证明，自由顶元完备化以及另外两种完备化——自由并完备化 和二元交完备化 ——按照 §7.4 中的一般定义，都是次几何的。

2 预备知识

我们首先回顾一些必要的预备知识。我们假定读者熟悉托普斯理论和框架与局部空间理论的入门内容，分别可参见 [32] 和 [40]。在其他部分，熟悉一阶逻辑的若干片段及其范畴语义也会有所帮助，相关内容可参见[23, §D1]。在接下来的小节中，我们将进一步介绍托普斯理论的两个领域，我们会最频繁地用到它们：位点的态射与余态射，以及内部局部格理论。

2.1 位点的态射与余态射

关于我们在此回顾的托普斯理论的场论方法， [7] 中有详尽的论述。我们回顾位点余态射和位点态射，它们分别通过作用于呈现拓扑斯的位点上的函子，以协变和逆变的方式生成拓扑斯之间的几何态射。最后，我们在引理 2.6 中回顾一个结果，该结果涉及由某个包含位点余态射和位点态射的混合图表所诱导的几何态射的交换性。

定义 2.1 (定义 2.1，专题 III [2])。 设 $(\mathcal{C}, J)$ 和 $(\mathcal{D}, K)$ 为位点。一个位点余态射$F\colon (\mathcal{C}, J) \to (\mathcal{D}, K)$ 是一个函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，具有覆盖提升性质：对于 $\mathcal{C}$ 的每个对象 c 以及 $F(c)$ 上的 K-覆盖筛 S，存在 c 上的一个 J-覆盖筛 R，使得 $F(R) \subseteq S$。

位点余态射 $F\colon (\mathcal{C},J)\to(\mathcal{D},K)$ 诱导出一个几何态射 $C_F\colon \mathrm{Sh}(\mathcal{C},J)\to\mathrm{Sh}(\mathcal{D},K)$（参见[32, 定理 VII.10.5]），其逆像 C_F^* 由一个 ${}_J(-\circ F)$ 给出。两个位点余态射 F 和 G 的复合仍是一个位点余态射，对此有 $C_{F\circ G}=C_F\circ C_G$。

定义 2.2 (定义 1.1，专题 III [2])。设 $(\mathcal{C},J)$ 和 $(\mathcal{D},K)$ 是位点。位点态射 $F\colon(\mathcal{C},J)\to(\mathcal{D},K)$ 是一个函子 $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，满足以下条件。

(i) 若 S 是 $c\in\mathcal{C}$ 上的 J-覆盖筛，则 $F(S)$ 是 $F(c)$ 上的 K-态射覆盖族。(ii) $\mathcal{D}$ 的每个对象 d 都有一个 K-覆盖筛 $\{d_i\to d\mid i\in I\}$，使得对于每个 $i\in I$，d_i 都有一个态射 $d_i\to F(c_i)$ 指向某个 $c_i\in\mathcal{C}$ 的像。(iii) 对于 $\mathcal{C}$ 中的任意一对对象 c_1、c_2，以及任意一对态射

$$g_1\colon d\to F(c_1),\ g_2\colon d\to F(c_2)$$

$\mathcal{D}$ 中的，存在一个 K-覆盖族

$$\{h_i\colon d_i\to d\mid i\in I\}$$

$\mathcal{D}$ 中的态射，一对族

$$\{f_i^1\colon c_i\to c_1\mid i\in I\},\ \{f_i^2\colon c_i\to c_2\mid i\in I\}$$

of $\mathcal{C}$ 中的态射，并且对于每个 $i\in I$，存在一个态射 $k_i\colon d_i\to F(c_i')$，使得这些方块

$$\begin{array}{ccc} d_i & \xrightarrow{h_i} & d \\ \downarrow{\scriptstyle k_i} & & \downarrow{\scriptstyle g_1} \\ F(c_i) & \xrightarrow{F(f_i^1)} & F(c_1) \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} d_i & \xrightarrow{h_i} & d \\ \downarrow{\scriptstyle k_i} & & \downarrow{\scriptstyle g_2} \\ F(c_i) & \xrightarrow{F(f_i^2)} & F(c_2) \end{array}$$

交换。

(iv) 对任意一对平行箭头 $f_1, f_2\colon c'\to c$ of $\mathcal{C}$，以及任意箭头 $g\colon d\to F(c')$ of $\mathcal{D}$ such that $F(f_1)\circ g=F(f_2)\circ g$，存在一个 K-覆盖族

$$\{h_i\colon d_i\to d\mid i\in I\}$$

of morphisms of $\mathcal{D}$，一个态射族

$$\{e_i\colon c_i\to c'\mid i\in I\}$$

of $\mathcal{C}$ such that $f_1\circ e_i=f_2\circ e_i$ for all $i\in I$，并且对每个 $i\in I$，存在一个态射 $k_i\colon d_i\to F(c_i)$，使得方框

$$\begin{array}{ccc} d_i & \xrightarrow{h_i} & d \\ \downarrow{\scriptstyle k_i} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ F(c_i) & \xrightarrow{F(e_i)} & F(c') \end{array}$$

对每个 $i\in I$ 都交换。

位点态射 $F\colon(\mathcal{C},J)\to(\mathcal{D},K)$ 诱导一个几何态射 $\mathrm{Sh}(F):\mathrm{Sh}(\mathcal{D},K)\to\mathrm{Sh}(\mathcal{C},J)$（参见 [32, 定理 VII.10.2]），其直接像 $\mathrm{Sh}(F)_*$ 将 $\mathrm{Sh}(\mathcal{D},K)$ 中的层 $P\colon\mathcal{D}^{op}\to\mathrm{Sets}$ 送到 $P\circ F^{op}$。与位点余态射一样，两个位点态射 F 和 G 的复合仍然是一个位点态射，并且满足 $\mathrm{Sh}(F\circ G)=\mathrm{Sh}(G)\circ\mathrm{Sh}(F)$。

一个稠密位点态射 是一个函子 $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，它诱导出一个等价 $\mathrm{Sh}(\mathcal{C},J)\simeq\mathrm{Sh}(\mathcal{D},K)$。根据[45, 定理 11.2]，，每个稠密位点态射都是位点态射。

定义 2.3 (§2 [29]). 一个稠密位点态射 $F\colon(\mathcal{C},J)\to(\mathcal{D},K)$ 是一个函子 $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，满足：

(i) S 是 $\mathcal{C}$ 中的 J-覆盖族，当且仅当 $F(S)$ 在 $\mathcal{D}$ 中是 K-覆盖的，

(ii) 对每个 $d \in \mathcal{D}$，都存在一个态射的 K-覆盖族 $F(c_i) \to d$；(iii) 对每个 c_1、$c_2 \in \mathcal{C}$ 以及 $\mathcal{D}$ 中的箭头 $g\colon F(c_1) \to F(c_2)$，都存在一个箭头的 J-覆盖族 $f_i\colon c_i' \to c_1$ 和一个箭头族 $k_i\colon c_i' \to c_2$，使得 $g \circ F(f_i) = F(k_i)$；(iv) 对于 $\mathcal{C}$ 中满足 $F(f_1) = F(f_2)$ 的任意箭头 f_1、$f_2\colon c_1 \to c_2$，都存在一个箭头的 J-覆盖族$k_i\colon c_i' \to c_1$，使得 $f_1 \circ k_i = f_2 \circ k_i$。

我们可以通过稠密位点态射 $F\colon (\mathcal{C}, J) \to (\mathcal{D}, K)$ 的特殊情形来恢复比较引理（参见 [29, §2] 或 [23, 定理 C2.2.3]），其中 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个子范畴的包含关系。

定义 2.4。位点 $(\mathcal{D}, K)$ 的子范畴 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ 对 K 是稠密的，当且仅当：

(i) 对每个 $d \in \mathcal{D}$，都存在由定义域属于 $\mathcal{C}$ 的态射生成的覆盖族 $S \in K(d)$；(ii) 对每个箭头 $c \xrightarrow{g} d \in \mathcal{D}$，都存在由满足 $g \circ f$ 属于 $\mathcal{C}$ 的态射 $b \xrightarrow{f} c$ 生成的覆盖族 $S \in J(c)$。

引理 2.5（比较引理）。设（$\mathcal{D}$，K）是一个位点，且 $\mathcal{C}$ 是一个稠密子范畴。存在一个等价$\mathbf{Sh}$（$\mathcal{D}$，K）$\simeq$ $\mathbf{Sh}$（$\mathcal{C}$，$K|_{\mathcal{C}}$）。

位点态射与余态射构成的混合图表。最后，我们回顾一下 [51]的引理 2.5，该引理涉及某个由位点态射与余态射构成的混合图表的交换性。

回顾 [23, 定义 B1.3：4] 纤维化 $A\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ 是一个函子，使得对于$\mathcal{C}$ 中的每个对象 c 以及一个箭头 $e \xrightarrow{f} A(c)$，都存在一个 f的笛卡尔提升 $d \xrightarrow{g} c$，也就是说，存在 $\mathcal{C}$ 中的一个箭头，使得 $A(g) = f$，并且对于 $\mathcal{C}$ 中的任意箭头 $d' \xrightarrow{h} c$ 以及 $\mathcal{E}$ 中的箭头 $A(d') \xrightarrow{k} A(d)$，若

$$\begin{array}{ccc} A(d') & \xrightarrow{k} & A(d) \\ & \searrow^{A(h)} & \downarrow{\scriptstyle A(g)} \\ & & A(c) \end{array}$$

交换，则存在 $\mathcal{C}$ 中的一个箭头 $d' \xrightarrow{k'} d$，使得 $A(k') = k$（请注意，我们使用“笛卡尔箭头”这一术语，而 Johnstone 使用“prone”）。具有此性质的 $\mathcal{C}$ 中的箭头 $d \xrightarrow{g} c$ 称为笛卡尔箭头。还要回顾，给定一对纤维化 $A\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ 和 $B\colon \mathcal{D} \to \mathcal{F}$，纤维化的一个态射 $A \to B$ 由一对函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 和 $G\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 组成，使得该方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ \downarrow{\scriptstyle A} & & \downarrow{\scriptstyle B} \\ \mathcal{E} & \xrightarrow{G} & \mathcal{F} \end{array}$$

可交换；若 $d \xrightarrow{g} c \in \mathcal{C}$是笛卡尔的，则 $F(d) \xrightarrow{F(g)} F(c)$ 也是。

引理 2.6 (引理 2.5 [51])。设 $(\mathcal{C}, J)$、$(\mathcal{D}, K)$、$(\mathcal{E}, L)$和 $(\mathcal{F}, M)$ 都是位点。设 $A\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$和 $B\colon \mathcal{D} \to \mathcal{F}$都是纤维化，并设 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 和 $G\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 是函子，使得该方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ \downarrow{\scriptstyle A} & & \downarrow{\scriptstyle B} \\ \mathcal{E} & \xrightarrow{G} & \mathcal{F} \end{array} \tag{2}$$

是一个纤维化态射。假设函子 A和 B给出位点余态射 $A\colon (\mathcal{C}, J) \to (\mathcal{E}, L)$ 和 $B\colon (\mathcal{D}, K) \to (\mathcal{F}, M)$，且函子 F 和 G 给出位点态射 $F\colon (\mathcal{C}, J) \to (\mathcal{D}, K)$ 和 $G\colon (\mathcal{E}, L) \to (\mathcal{F}, M)$。那么由此诱导的几何态射方形

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J) & \xleftarrow{\mathbf{Sh}(F)} & \mathbf{Sh}(\mathcal{D}, K) \\ \downarrow{\scriptstyle C_A} & & \downarrow{\scriptstyle C_B} \\ \mathbf{Sh}(\mathcal{E}, L) & \xleftarrow{\mathbf{Sh}(G)} & \mathbf{Sh}(\mathcal{F}, M) \end{array}$$

也交换。

记号2.7。 我们将只研究由函子 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 预序 导出的纤维化，因此先花些时间固定记号。给定一个函子 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 预序，我们用 $\mathcal{C} \rtimes P$ 表示格罗滕迪克构造（一般定义见 [23, 定义 B1.3.1] ），即具有以下内容的范畴：

(i) 对象为序对 (c, x)，其中 c 是 $\mathcal{E}$ 中的一个对象，且 x 是 $P(c)$ 的一个元素；
(ii) 对于 $\mathcal{E}$ 中的每个箭头 $f\colon c \to d$，若满足 $x \leqslant P$，则有一个箭头 $f\colon (c, x) \to (d, y)(f)(y)$.

给定第二个函子 $Q\colon \mathcal{D} \to$ 预序、一个函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 以及一个自然变换 $a\colon P \to A \circ F^{op}$，我们用

$$F \rtimes a\colon \mathcal{C} \rtimes P \to \mathcal{D} \rtimes Q$$

表示这样的函子：它将对象 $(c, x) \in \mathcal{C} \rtimes P$ 映到 $(F(c)\ a_c(x)) \in \mathcal{D} \rtimes Q$，并将箭头 $(c, x) \xrightarrow{f} (d, y) \in \mathcal{C} \rtimes P$ 映到 $(F(c)\ a_c(x)) \xrightarrow{F(f)} (F(d)\ a_d(y)) \in \mathcal{D} \rtimes Q$。显然，投影函子 $p_P\colon \mathcal{C} \rtimes P \to \mathcal{C}$ 和 $p_Q\colon \mathcal{D} \rtimes Q \to \mathcal{D}$ 都是纤维化，而交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} \rtimes P & \xrightarrow{F \rtimes a} & \mathcal{D} \rtimes Q \\ \downarrow{\scriptstyle p_P} & & \downarrow{\scriptstyle p_Q} \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D}, \end{array}$$

构成一个纤维化态射。

2.2 内部局部

本小节列举一些关于内部局部的事实，这些事实对于我们的论述将是必要的。拓扑斯 $\mathcal{E}$ 的一个内局部 $\mathbb{L}$ 是一个对象，按照 $\mathcal{E}$ 的内部逻辑，它表现得像一个局部。当然，内部局部也是内框架（尽管它们的态射有所不同）。我们还将使用“几何教义”这一术语（几何教义的 2-范畴 GeomDoc 定义于 §3.2），以强调它们在解释几何逻辑中的作用；这与使用局部和框架来建模几何命题逻辑相呼应，并可区分我们所比较的、分别内在于不同拓扑斯的内部局部／几何教义。

我们首先回顾 p. 528 [23, §C1.6] 中提及的以下事实：对于每个几何态射 $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{E}$，直接像函子 $f_*\colon \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ 保持内局部。特别地， $\mathcal{E}$ 的每个内局部都具有 $f_*(\Omega_{\mathcal{F}})$ 的形式，其中 $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ 是某个几何态射。

此外，我们还回顾任意格罗滕迪克拓扑斯的内部局部及其内部局部态射的刻画。

预层拓扑斯的内部局部。 我们首先需要对格罗滕迪克拓扑斯 $\mathcal{E}$ 的内部局部进行外部分类；也就是说，如果 $(\mathcal{C}, J)$ 是 $\mathcal{E}$ 的一个位点，则需要分类哪些 $\mathcal{C}$ 上的 J-层定义了内部局部。

回忆 [25, §V.1]，框架同态 $f^{-1}\colon L \to K$ 若 f^{-1} 具有满足弗罗贝尼乌斯条件的左伴随，则称其为开的；等价地，根据 [25, 命题 V.1.1]， f^{-1} 是完备海廷代数的态射。我们将框架与开框架同态组成的范畴记为 $\mathbf{Frm}^{\mathrm{open}}$。

设 $\mathbb{L}\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Frm}^{\mathrm{open}}$ 是一个教义。对于每个箭头 $d \xrightarrow{f} c \in \mathcal{C}$，我们将 $\mathbb{L}(f)\colon \mathbb{L}(c) \to \mathbb{L}(d)$ 的左伴随记为 $\exists_{\mathbb{L}(f)}$；在不致混淆时，简称为 $\exists_f$。拓扑斯 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ 的每个内部局部都具有如下形式：$\mathbb{L}\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Frm}^{\mathrm{open}}$，其中 $\mathbb{L}$；但反过来并不成立。当 $\mathcal{C}$ 为笛卡尔时，这一分类最早在 [25], 中建立；而在任意基范畴上的分类则在 [8] 中建立。

命题 2.8 (命题 5.10 [8] & 命题 VI.2.2 [25])。 预层拓扑斯集合 $\mathcal{C}^{op}$ 的内部局部恰好是满足相对贝克-切瓦利条件的函子 $\mathbb{L}\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 框架^{open}：给定 $\mathcal{C}$ 中的一个箭头 $e \xrightarrow{h} d$，以及 $\mathcal{C} \rtimes \mathbb{L}$ 中以对象 (d, V) 为底的一个筛 S，若 $V = \bigvee_{f \in S} \exists_f U$，则

$$h^{-1}(V) = \bigvee_{g \in h^*(S)} \exists_g W,$$

其中， $h^*(S)$ 是 $(e, h^{-1}(V))$ 上由满足如下条件的箭头 $(c, W) \xrightarrow{g} (e, h^{-1}(V))$ 构成的筛：复合 $(c, W) \xrightarrow{g} (e, h^{-1}(V)) \xrightarrow{h} (d, V)$ 属于 S（如果 S 是一个大筛，我们写 $V = \bigvee_{f \in S} \exists_f U$ 时，意指存在一个小的 $S' \subseteq S$，使得 $V = \bigvee_{f \in S'} \exists_f U$）。

若 $\mathcal{C}$ 具有所有拉回，则 $\mathbb{L}$ 的相对贝克-切瓦利条件等价于贝克-切瓦利条件：对每个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} c \times_e d & \xrightarrow{g} & d \\ \downarrow{\scriptstyle k} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ c & \xrightarrow{f} & e \end{array}$$

范畴 $\mathcal{C}$ 中的，方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}(c \times_e d) & \xrightarrow{\exists_{\mathbb{L}(g)}} & \mathbb{L}(d) \\ {\scriptstyle \mathbb{L}(k)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathbb{L}(h)} \\ \mathbb{L}(c) & \xrightarrow{\exists_{\mathbb{L}(f)}} & \mathbb{L}(e) \end{array}$$

可交换。

相对贝克-切瓦利条件是更广泛的存在性位理论中的一个分量，该理论在 [8, §5], 中提出；我们将在 §5.1 中回顾其教义情形。

设 $\mathbb{L}\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 框架$_{\text{open}}$ 是一个任意函子。我们用 $K_{\mathbb{L}}$ 表示如下函数：它将每个 $(d, V) \in \mathcal{C} \rtimes \mathbb{L}$ 映射到由筛 $\{(c_i, U_i) \xrightarrow{f_i} (d, V) \mid i \in I\}$ 组成的集合 $K_{\mathbb{L}}(d, V)$，其中这些筛属于 $\mathcal{C} \rtimes \mathbb{L}$，且满足

$$V = \bigvee_{i \in I} \exists_{f_i} U_i.$$

函数 $K_{\mathbb{L}}$ 不一定是范畴 $\mathcal{C} \rtimes \mathbb{L}$ 上的格罗滕迪克拓扑。显然，它满足定义 III.2.1 [32] 中的极大性条件和传递性条件。然而， $K_{\mathbb{L}}$ 的稳定性等价于相对贝克-切瓦利条件（见 [8, 定理 5.1]），因此 $\mathbb{L}$ 是集合上的内局部，当且仅当 $K_{\mathbb{L}}$ 在 $\mathcal{C} \rtimes \mathbb{L}$ 上定义了一个格罗滕迪克拓扑。

定义 2.9。设 $\mathbb{L}\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 框架$_{\text{open}}$ 是预层拓扑斯 集合$^{\mathcal{C}^{op}}$中的一个内部局部。拓扑斯 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C} \rtimes \mathbb{L}, K_{\mathbb{L}})$ 称为 $\mathbb{L}$ 上的内部层拓扑斯，我们将用简写 $\mathbf{Sh}(\mathbb{L})$ 表示这个拓扑斯。

局部化几何态射。投影 $p_{\mathbb{L}}\colon \mathcal{C} \rtimes \mathbb{L} \to \mathcal{C}$ 导出一个位点余态射

$$p_{\mathbb{L}}\colon (\mathcal{C} \rtimes \mathbb{L}, K_{\mathbb{L}}) \to (\mathcal{C}, J_{\text{triv}})$$

因此得到一个几何态射 $C_{p_{\mathbb{L}}}\colon \mathbf{Sh}(\mathbb{L}) \to$ 集合$^{\mathcal{C}^{op}}$。由于投影函子 $p_{\mathbb{L}}$ 是忠实的，根据[7, 命题 7.11] 可知， $C_{p_{\mathbb{L}}}$ 是一个局部化几何态射。事实上，上文给出的 [8] 中内部局部的刻画，正是通过利用内部局部与局部化几何态射之间的双射证明的。

定义 2.10。几何态射 $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ 称为局部化的，如果 $\mathcal{F}$ 中的每个对象 F 都是 $f^*(E)$ 的一个子商，其中 $E \in \mathcal{E}$，也就是说，存在 $F' \in \mathcal{F}$和一个图表

$$F \twoheadleftarrow F' \rightarrowtail f^*(E).$$

定理 2.11 (定理 5.37 [20], 引理 1.2 [21], 与命题 4.2 [8])。设 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ 是一个格罗滕迪克拓扑斯。除等价外，$\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ 的内部局部与局部化几何态射 $f\colon \mathcal{F} \to \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ 之间存在双射对应，其对应方式如下：

(i) 将每个局部化几何态射 $f\colon \mathcal{F} \to \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ 与内部局部 $f_*(\Omega_{\mathcal{F}})\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 框架$_{\text{open}}$ 联系起来，它属于 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$，

(ii) 以及每个 内局部 $\mathbb{L}\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 框架$_{\text{open}}$ 的 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$，其具有局部化几何态射

$$C_{p_{\mathbb{L}}}\colon \mathbf{Sh}(\mathbb{L}) \to \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J).$$

层拓扑斯的内部局部。 虽然我们的主要论证并未用到这一点，但为了完整起见，我们给出任意格罗滕迪克拓扑斯 $\mathrm{Sh}(\mathcal{C},J)$ 的内部局部的外部分类。由于 $\mathrm{Sh}(\mathcal{C},J) \rightarrowtail$ 集合$^{\mathcal{C}^{op}}$ 的包含关系是局部化的（见 [23, 例 A4.6.2(a)]），我们可以根据上文提到的集合$^{\mathcal{C}^{op}}$ 的分类，推导出 $\mathrm{Sh}(\mathcal{C},J)$ 的内部局部分类。

推论 2.12 (命题 5.10 [8] & 推论 C1.6.10 [23]**).** 设 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C},J)$ 是一个格罗滕迪克拓扑斯。$\mathbf{Sh}(\mathcal{C},J)$ 的内部局部，恰好是满足以下某个等价条件的范畴 集合$^{\mathcal{C}^{op}}$ 上的内部局部 $\mathbb{L}\colon \mathcal{C}^{op}\to$ 框架$_{\mathrm{open}}$:

(i) $\mathbb{L}$ 是集合$^{\mathcal{C}^{op}}$ 的一个内部局部，也是一个 J-层；*(ii)* $K_{\mathbb{L}}$ 是稳定的，且包含吉罗拓扑 $J_{p_{\mathbb{L}}}$ （参见 *[14,* 命题 *2.1]*）；*(iii)* $K_{\mathbb{L}}$ 是稳定的，并且存在一个分解

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{Sh}(\mathbb{L}) \\ & \swarrow & \downarrow{\scriptstyle C_{p_{\mathbb{L}}}} \\ \mathrm{Sh}(\mathcal{C},J) & \longrightarrow & \text{集合}^{\mathcal{C}^{op}}. \end{array}$$

内部局部态射。 我们还需要对内部局部态射进行外部分类。 [25, 命题 VI.2.1], 中已经辨认出内部局部态射，而它们与局部化的几何态射之间的联系众所周知。我们还将用到 [51]中所确立的它们与位点态射之间的联系。

定义 2.13 (命题 VI.2.1 [25]**)**。 拓扑斯 $\mathrm{Sh}(\mathcal{C},J)$ 中，内部局部 $\mathbb{L}_1$、$\mathbb{L}_2\colon \mathcal{C}^{op}\to \mathrm{Frm}^{\mathrm{open}}$ 之间的内部局部态射 $\mathfrak{f}\colon \mathbb{L}_1\to\mathbb{L}_2$，是一个自然变换 $\mathfrak{f}^{-1}\colon \mathbb{L}_2\to\mathbb{L}_1$ （作为取值于集合的函子，或实际上取值于框架的函子），满足：对于 $\mathcal{C}$ 中的每个对象 c， $\mathbb{L}_2(c)\to\mathbb{L}_1(c)$ 是框架同态；并且对于 $\mathcal{C}$ 中的每个态射 $g\colon c\to d$，图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}_2(d) & \overset{\exists_{\mathbb{L}_2(g)}}{\underset{\mathbb{L}_2(g)}{\leftarrow\!\!\rightarrow}} & \mathbb{L}_2(c) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{f}_d^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{f}_c^{-1}} \\ \mathbb{L}_1(d) & \overset{\exists_{\mathbb{L}_1(g)}}{\underset{\mathbb{L}_1(g)}{\leftarrow\!\!\rightarrow}} & \mathbb{L}_1(c) \end{array}$$

是一个 伴随态射：也就是说， $\mathbb{L}_1(g)\circ\mathfrak{f}_d^{-1}=\mathfrak{f}_c^{-1}\circ\mathbb{L}_2(g)$ 以及 $\exists_{\mathbb{L}_1(g)}\circ\mathfrak{f}_c^{-1}=\mathfrak{f}_d^{-1}\circ\exists_{\mathbb{L}_2(g)}$。

命题 2.14 (命题 4.2 & 命题 4.3 [51]**)**。 设 $\mathbb{L}_1$， $\mathbb{L}_2\colon \mathcal{C}^{op}\to$ 框架$_{\mathrm{open}}$ 是拓扑斯 $\mathrm{Sh}(\mathcal{C},\ J)$ 中的内局部。将内部局部之间的态射 $\mathfrak{f}\colon \mathbb{L}_1\to\mathbb{L}_2$ 映射为位点态射的映射

$$\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\rtimes\mathfrak{f}^{-1}\colon (\mathcal{C}\rtimes\mathbb{L}_2,K_{\mathbb{L}_2})\to(\mathcal{C}\rtimes\mathbb{L}_1,K_{\mathbb{L}_1})$$

将位点态射 $G\colon (\mathcal{C}\rtimes\mathbb{L}_2,K_{\mathbb{L}_2})\to(\mathcal{C}\rtimes\mathbb{L}_1,K_{\mathbb{L}_1})$ 映射到几何态射$\mathbf{Sh}(G)\colon \mathbf{Sh}(\mathbb{L}_2)\to\mathbf{Sh}(\mathbb{L}_1)$ 的映射，在以下对象之间诱导出一个双射对应：

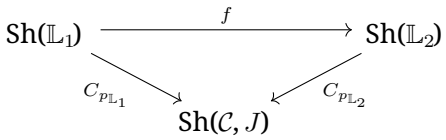
(i) 内局部态射 $\mathfrak{f}\colon \mathbb{L}_1\to\mathbb{L}_2$；*(ii)* 位点态射 $G\colon (\mathcal{C}\rtimes\mathbb{L}_2,K_{\mathbb{L}_2})\to(\mathcal{C}\rtimes\mathbb{L}_1,K_{\mathbb{L}_1})$，

其中三角形

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}\rtimes\mathbb{L}_2 & \xrightarrow{\ G\ } & \mathcal{C}\rtimes\mathbb{L}_1 \\ & {\scriptstyle p_{\mathbb{L}_2}}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p_{\mathbb{L}_1}} & \\ & \mathcal{C} & \end{array}$$

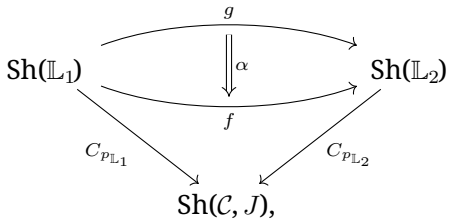
交换，

（*iii*）满足以下三角形的几何态射 $f\colon\ \mathbf{Sh}(\mathbb{L}_1) \to \mathbf{Sh}(\mathbb{L}_2)$

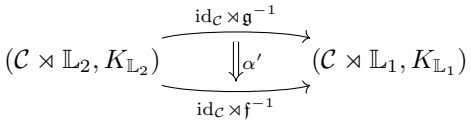


交换。

设 $\mathcal{E}$ 是一个格罗滕迪克拓扑斯。我们用 Loc($\mathcal{E}$) 表示 $\mathcal{E}$ 的内部局部及其内局部态射所构成的 2-范畴，而 2-胞则等价地是相应几何态射之间的 2-胞。



即逆像函子之间的一个自然变换 $g^* \to f^*$，或者自然变换



对应的位点态射之间（见 [51, 定理 4.4]）。

3 教义与教义站点

自 Lawvere 最初于 [30] 引入教义以来，教义已有许多不同形式。对我们而言，教义就是任意函子 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 预序，其中对 $\mathcal{C}$ 不作任何限制（这也称为纤维化预序）。作为纤维化范畴，教义自然构成如下的 2-范畴 Doc。

(i) Doc 的对象是教义 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to$ PreOrd。(ii) Doc 中两个教义 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to$ PreOrd 和 $Q\colon \mathcal{D}^{op} \to$ PreOrd 之间的箭头由序对 (F, a) 构成，其中 F是函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，而 a是自然变换 $a\colon P \to Q \circ F^{op}$。(iii) 2-胞 $\alpha\colon (F, a) \to (F', a')$ 是自然变换 $\alpha\colon F \to F'$，满足对于每个对象 $c \in \mathcal{C}$ 和 $x \in P(c)$，都有 $a_c(x) \leqslant Q(\alpha_c)(a'_c(x))$。

按目前的表述，任意教义都不解释任何特定的逻辑语法。要建模某种逻辑语法，我们可以要求教义具备适当的范畴结构。

例 3.1。(i) 主教义是一个教义 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 预序，其中 $\mathcal{C}$ 是笛卡尔的，且 P通过交半格及交半格同态的子范畴 MSLat $\subseteq$预序进行分解（在本文中，交半格具有所有有限交，包括空交——即具有最大元）。因此，主教义具备解释逻辑符号 $\{\wedge, \top\}$所需的范畴结构。若两个主教义之间的态射 $(F, a)\colon P \to Q$ 属于 Doc，且保持有限极限数据，即 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是左正合的，并且对每个 $c \in \mathcal{C}$，$a_c\colon P(c) \to Q(F(c))$ 是交半格同态，则称其为主教义态射。我们用 PrimDoc 表示由主教义及主教义态射构成的 Doc 的 2-全 2-子范畴（所谓 2-全，是指该 2-子范畴在 2-胞腔上是满的）。

(ii) 存在教义是这样一种主教义：此外，对每个箭头 $d \xrightarrow{f} c \in \mathcal{C}$， $P(f)$ 都有一个左伴随 $\exists_{P(f)}$，并且满足弗罗贝尼乌斯条件和贝克-切瓦利条件，因此能够解释逻辑符号 $\{\wedge, \top, \exists, =\}$。存在教义的态射 (F, a)：$P \to Q$ 是保持这些符号之解释的态射，即满足下图交换的主教义态射

$$\begin{array}{ccc} P(c) & \xleftarrow{\exists_{P(f)}} & P(d) \\ \downarrow{\scriptstyle a_c} & & \downarrow{\scriptstyle a_d} \\ Q(F(c)) & \xleftarrow{\exists_{Q(f)}} & Q(F(d)) \end{array}$$

对 $\mathcal{C}$ 的每个箭头 $d \xrightarrow{f} c$ 都交换。我们将 Doc 中由此得到的 2-全 2-子范畴记为 ExDoc。

(iii) 相干教义是取值于分配格及格同态范畴 DLat 的存在教义，因而能够解释符号 $\{\wedge, \top, \exists, =, \vee, \bot\}$。相干教义的态射是存在教义的态射 (F, a)，其中 a 是取值于 DLat 的函子之间的自然变换。我们将 Doc 中由此得到的 2-全 2-子范畴记为 CohDoc。

(iv) 布尔（经典）教义是取值于布尔代数及布尔代数同态范畴 Bool 的相干教义，并且对每个箭头 $d \xrightarrow{f} c \in \mathcal{C}$， $P(f)$ 还有一个右伴随 $\forall_{P(f)}$。布尔教义能够解释经典一阶逻辑。布尔教义的态射是相干教义的态射 (F, a)，且保持对经典一阶逻辑的解释。我们将 Doc 中由此得到的 2-全 2-子范畴记为 BoolDoc。

注 3.2. 我们要求存在教义和相干教义都是初等教义的例子，但我们将在例5.6中看到，如何在非笛卡尔基范畴上定义存在教义等。

说某个教义“解释”某个逻辑理论，究竟是什么意思？定理6.1和定理 6.2阐明了教义与逻辑理论之间的确切关系：简而言之，给定一个属于某个逻辑片段的理论 $\mathbb{T}$，例 1.1中的教义 $F^{\mathbb{T}}$ 具有适当的形式（例如，若$\mathbb{T}$ 是相干理论，也就是说，它是直觉主义一阶逻辑片段中的一个理论，且包含符号$\{\wedge, \top, \exists, =, \vee, \bot\}$，那么 $F^{\mathbb{T}}$ 就是相干教义）；反过来，给定某种形式的教义 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 预序，例如布尔教义，就存在一个属于相应逻辑片段的理论 $\mathbb{T}'$，在此情形下即经典一阶逻辑，并且存在一个同构 $P \cong F^{\mathbb{T}'}$。

虽然可以针对不同情形，要求具备特定的范畴结构，从而有效地刻画逻辑语法的某个特定片段，但要描述教义的几何完备化，我们需要一种统一的方法，来追踪教义旨在解释逻辑语法的哪个片段。为此，在接下来的小节中，我们将讨论格罗滕迪克拓扑在这方面的用途。众所周知，我们将说明，例 3.1 中提到的所有教义类，都可以通过为该类中的每个教义指定某些格罗滕迪克拓扑来完整描述。

我们首先在 §3.1 中通过讨论教义的模型，说明为何要从范畴语法转向格罗滕迪克拓扑；随后在 §3.2 中定义教义站点的 2-范畴 DocSites，并介绍几何教义的 2-子范畴 GeomDoc $\subseteq$ DocSites。

3.1 期望模型

除了逻辑理论 $\mathbb{T}$ 的句法数据（由教义 $F^{\mathbb{T}}\colon \mathrm{Con}_{\Sigma} \to$ PoSet 表示）之外，我们还对理论 $\mathbb{T}$ 的语义 有一个直观的概念，它由一个模型范畴及模型同态构成。同样，我们也可以为解释特定语法的教义定义模型及模型同态。重要的是，教义的模型这一概念取决于我们希望该教义解释哪种语法。

定义 3.3 (定义 3.5 [27]). 一个（primary/existential/coherent/Boolean）教义 P 是一个（primary/existential/coherent/Boolean）教义态射

$$(F, a)\colon P \to \mathscr{P},$$

其中 $\mathscr{P}$: 集合$^{op} \to$ CBool 是幂集教义。

我们将主教义 P 的模型范畴 $\mathrm{Mod}_{\mathrm{Prim}}(P)$（相应地，相干教义 P 的模型范畴 $\mathrm{Mod}_{\mathrm{Ex}}(P)$，等等）定义为主教义态射 $P \to \mathscr{P}$ 的范畴 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{PrimDoc}}(P, \mathscr{P})$（相应地，$\mathrm{Hom}_{\mathbf{ExDoc}}(P, \mathscr{P})$，等等）。

设 $\mathbb{T}$ 是签名 Σ上的一个理论。容易看出，$\mathbb{T}$ 的模型与 $F^{\mathbb{T}}$的模型相同，后者被视为适当范畴中的一个教义：对于一个模型 (F, a)：$F^{\mathbb{T}} \to \mathscr{P}$，函子 $F\colon \mathsf{Con}_{\Sigma} \to \mathsf{Sets}$ 选取模型中每个上下文的解释，而 $a_{\vec{x}}$：$F^{\mathbb{T}}(\vec{x}) \to \mathscr{P}(F(\vec{x}))$ 则将上下文 $\vec{x}$ 中的命题映射为其在 $F(\vec{x})$ 中的子集解释。

注意，假如 P 是一个相干教义，那么就存在一个包含链

$$\mathbf{Mod}_{\mathrm{Coh}}(P) \subseteq \mathbf{Mod}_{\mathrm{Ex}}(P) \subseteq \mathbf{Mod}_{\mathrm{Prim}}(P).$$

我们进一步注意到，如果 P 是一个布尔教义，那么就存在一个等价

$$\mathbf{Mod}_{\mathrm{Coh}}(P) \simeq \mathbf{Mod}_{\mathrm{Bool}}(P).$$

这是因为，教义态射 $(F, a)\colon P \to \mathscr{P}$ 相干，当且仅当它是布尔的。一方面，每个布尔教义的态射必然是相干的。反过来，设 $(F, a)\colon P \to \mathscr{P}$ 是一个相干教义态射。我们推知，由于补元唯一（见 [12, §4.13]），并且对于每个 $x \in P(c)$，

$$a_c(x \wedge \neg x) = a_c(\bot) = \bot, \quad a_c(x \vee \neg x) = a_c(1) = 1,$$

格同态 $a_c\colon P(c) \to \mathscr{P}(F(c))$ 还必须保持否定，因此是布尔代数同态。然后，利用布尔教义的这一性质，$\forall_{P(f)} = \neg\exists_{P(f)}\neg$ 对 $\mathcal{C}$ 中的每个箭头 $d \xrightarrow{f} c$，我们得出结论：(F, a) 也保持全称量化的解释，从而完成了等价。

作为平坦函子的模型。拓扑斯理论家或许更熟悉以连续平坦函子来描述理论的模型。我们简要说明主教义 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to$MSLat 的两种方法之间的等价。设 $(F, a)\colon P \to \mathscr{P}$ 是如上所述的 Kock 和 Reyes 意义下的教义模型。我们可以构造一个函子

$$F \rtimes a\colon \mathcal{C} \times P \to \mathbf{Sets}$$

其中，对象 $(c, x) \in \mathcal{C} \rtimes P$ 被映射到子集 $a_c(x) \subseteq F(c)$，而态射 $(c, x) \xrightarrow{f} (d, y)$ 被映射到$F(f)|_{a_c(x)}\colon a_c(x) \to a_d(y)$。如果 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to$集合 是一个主教义，那么形如 $F \rtimes a$ 的函子 $G\colon \mathcal{C} \rtimes P \to$集合，对于一个模型

$$(F, a)\colon P \to \mathscr{P}$$

作为主教义的 P，其模型恰好是左正合函子（即保有限极限的函子），我们也称之为平坦 函子。容易验证，对于每个主教义 $P \to \mathscr{P}$of P 的模型 (F, a)，函子 $F \rtimes a\colon \mathcal{C} \rtimes P \to$Sets 都是平坦函子。反过来，给定一个平坦函子 $G\colon \mathcal{C} \rtimes P \to$ Sets，我们可以构造一个模型 $(F^G, a^G)\colon P \to \mathscr{P}$of P，方法是令 $F^G\colon \mathcal{C} \to$ Sets 为如下函子：它将 $c \in \mathcal{C}$ 发送到 $G(c, \top_c) \in$Sets（其中$\top_c$是 $P(c)$ 中的最大元）；并令 $a^G_c\colon P(c) \to \mathscr{P}(G(c, \top_c))$ 将 $x \in P(c)$ 发送到 $G(c, x) \subseteq G(c, \top_c)$。容易证明，这些构造可扩展为一个等价。

命题 3.4（参见定理 D1.4。7 [23]）。对于每个主教义 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{MSLat}$，都存在一个范畴等价

$$\mathbf{Flat}(\mathcal{C} \rtimes P, \mathbf{Sets}) \simeq \mathbf{Mod}_{\mathrm{Prim}}(P) \tag{3}$$

其中，$\mathbf{Flat}(\mathcal{C} \rtimes P,$集合$)$ 表示平坦函子 $G\colon \mathcal{C} \rtimes P \to$集合 及其之间自然变换所构成的范畴。

作为连续平坦函子的模型。如果 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to$ MSLat 解释了更丰富的句法，例如 P 是一个存在教义，那么将模型的（全）子范畴 $\mathrm{Mod}_{\mathrm{Ex}}(P) \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathrm{Prim}}(P)$ 限制为 P 作为存在教义的模型，等同于将 $\mathrm{Flat}(\mathcal{C} \rtimes P,$集合$)$ 限制为连续平坦函子的全子范畴，其中连续性是相对于范畴 $\mathcal{C} \rtimes P$ 上的某个格罗滕迪克拓扑而言的。

回想一下t 帽，对于一个赋予格罗滕迪克拓扑 K 的笛卡尔范畴 $\mathcal{D}$，一个平坦函子 r

$$G\colon \mathcal{D} \to \mathbf{Sets}$$

若每个 K 覆盖筛都被映为一族联合满射函数，则称其为 K-连续。我们在例 3.1 中见到的教义类，其模型可由某些格罗滕迪克拓扑下的连续平坦函子表示。由于这些等价相对广为人知，且可通过限制等价式 (3) 轻易得到，我们省略证明。

命题 3.5（参见定理 D3.1.4 和定理 D3.1.9 [23]）。设 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{MSLat}$ 是一个初等教义。

(*i*) 若 P 是存在教义，则存在一个等价

$$J_{\mathrm{Ex}}\text{-}\mathbf{Flat}(\mathcal{C} \rtimes P, \mathbf{Sets}) \simeq \mathbf{Mod}_{\mathrm{Ex}}(P),$$

其中 J_{Ex} 是由以下形式的覆盖族生成的 $\mathcal{C} \rtimes P$ 上的格罗滕迪克拓扑

$$(d, x) \xrightarrow{\ g\ } (c, \exists_g x),$$

对于 $x \in P(d)$ 以及 $d \xrightarrow{g} c \in \mathcal{C}$。

(*ii*) 若 P 是相干教义，则存在一个等价

$$J_{\mathrm{Coh}}\text{-}\mathbf{Flat}(\mathcal{C} \rtimes P, \mathbf{Sets}) \simeq \mathbf{Mod}_{\mathrm{Coh}}(P),$$

其中 J_{Coh} 是由形如以下形式的覆盖族生成的 $\mathcal{C} \rtimes P$ 上的格罗滕迪克拓扑

$$(d, x) \xrightarrow{\ g\ } (c, \exists_g x \vee \exists_h y) \xleftarrow{\ h\ } (e, y),$$

对于 $x \in P(d)$、$y \in P(d)$以及箭头 $d \xrightarrow{g} c$，$e \xrightarrow{h} c \in \mathcal{C}$。

(iii) 若 P 是一个布尔教义，则存在一个等价

$$J_{\mathrm{Coh}}\text{-}\mathbf{Flat}(\mathcal{C} \rtimes P, \mathbf{Sets}) \simeq \mathbf{Mod}_{\mathrm{Coh}}(P) \simeq \mathbf{Mod}_{\mathrm{Bool}}(P).$$

期望模型。由于人们希望考察的教义 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{PreOrd}$ 的模型取决于该教义旨在解释的句法，因此下文将有意保持模糊，仅提及 P的期望模型，记作 $\mathbf{Mod}(P)$，其中范畴 $\mathbf{Mod}(P)$ 被认为已凭直觉定义；只有在需要时，才会进一步说明期望模型是什么。

3.2 教义站点

由于我们希望利用赋予格罗滕迪克拓扑所带来的教义及其期望模型的统一处理方式，因此选择研究教义站点范畴。我们概述 PrimDoc、ExDoc、CohDoc 和 BoolDoc 构成教义站点范畴的 1-满 2-子范畴（这里的 1-满是指该 2-子范畴在 1-胞腔和 2-胞腔上都是满的）。最后，还定义了几何教义范畴。

设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是范畴。若 $\mathcal{C}$ 是非笛卡尔的，我们称函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是平坦的，若它定义了一个位点态射

$$F\colon (\mathcal{C}, J_{\mathrm{triv}}) \to (\mathcal{D}, J_{\mathrm{triv}})$$

当 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 都赋予平凡拓扑时。我们注意到，这推广了我们先前采用的定义，即将平坦视为左正合的同义词。平坦函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 诱导出一个几何态射 $\mathbf{Sh}(F)$，使得该方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\ F\ } & \mathcal{D} \\ \downarrow{\scriptstyle よ_{\mathcal{C}}} & & \downarrow{\scriptstyle よ_{\mathcal{D}}} \\ \mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{op}} & \xrightarrow{\mathbf{Sh}(F)^*} & \mathbf{Sets}^{\mathcal{D}^{op}} \end{array}$$

可交换，其中 $よ_{\mathcal{C}}$ 和 $よ_{\mathcal{D}}$ 是约内达嵌入，它们都保持并反映极限。因此，平坦函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 保留 $\mathcal{C}$ 中存在的任意有限极限（参见 [32, 推论 VII.6.4]）。

定义 3。 **6.** (i) 教义站点（在 [8] 中也称为纤维预序站点）由一个教义构成

$$P\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{PreOrd}$$

以及范畴 $\mathcal{C} \rtimes P$ 上的格罗滕迪克拓扑 J。

(ii) 教义站点的 *2*-范畴记为 DocSites，其对象为教义站点。DocSites 的一个箭头

$$(P, J) \to (Q, K)$$

是一个二元组 (F, a)，由一个平坦 函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 和一个自然变换$a\colon P \to Q \circ F$组成，且其诱导函子

$$F \rtimes a\colon (\mathcal{C} \rtimes P, J) \to (\mathcal{D} \rtimes Q, K)$$

是一个位点态射。两个教义态射 (F, a)、$(F', a')\colon (P, J) \to (Q, K)$ 之间的一个 2-胞是一个自然变换 $\alpha\colon F \to F'$，满足对于每个对象 $c \in \mathcal{C}$ 和 $x \in P(c)$，都有 $a_c(x) \leqslant Q(\alpha_c)(a'_c(x))$。

我们也可以选择自然变换 $F \rtimes a \to F' \rtimes a'$ 作为 DocSites 的 2-胞。我们注意到，在非病态情形下，两者是一致的。首先，DocSites 中每个 2-胞 $\alpha\colon (F, a) \to (F', a')$ 都会诱导一个自然变换 $\breve{\alpha}\colon F \rtimes a \to F' \rtimes a'$，其分量为 $\breve{\alpha}_{(c,x)}\colon (F(c)\ a_c(x)) \to (F'(c)\ a'_c(x))$，该分量由箭头 $\alpha_c\colon F(c) \to F'(c)$ 命名。反过来，若 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 预序具有非空纤维（对于所有 $c \in \mathcal{C}$，$P(c) \neq \emptyset$），那么任意自然变换 $\beta\colon F \rtimes a \to F' \rtimes a'$ 都会产生一个自然变换 $\beta'\colon F \to F'$，使得 $a_c(x) \leqslant Q(\beta'_c)(a'_c(x))$；具体做法是取 $\beta'_c\colon F(c) \to F'(c)$ 作为 $\mathcal{D}$-箭头 $\beta_{(c,x)}\colon (F(c)\ a_c(x)) \to (F'(c)\ a'_c(x))$，其中 $x \in P(c)$。

例3.7. 尽管在标准教义理论的上下文中，教义站点态射的定义乍看之下似乎缺乏动机，但我们注意到，对于我们所遇到的许多教义例子而言，这一定义与已有的教义态射概念一致。

若 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to$ MSLat 和 $Q\colon \mathcal{D}^{op} \to$ MSLat 都是主教义，那么一个

$$(P, J) \xrightarrow{(F,a)} (Q, K) \in \mathbf{DocSites}$$

教义站点态射是例3.1(i)意义下的主教义态射，并且

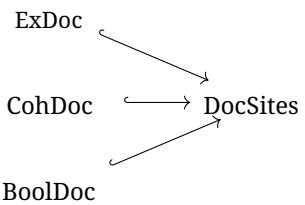
$$F \rtimes a\colon (\mathcal{C} \rtimes P, J) \to (\mathcal{D} \rtimes Q, K)$$

保持覆盖。特别地，DocSites 中的态射 $(P, J_{\mathrm{triv}}) \to (Q, J_{\mathrm{triv}})$ 恰好就是主教义态射。因此，存在一个全忠实 2-嵌入

$$\mathbf{PrimDoc} \hookrightarrow \mathbf{DocSites}$$

它将主教义 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to$ MSLat 映射到教义站点 (P, J_{triv})。

类似地，存在全忠实 2-嵌入



它们将存在（分别为相干/布尔）教义 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to$ MSLat 映射到教义站点 (P, J_{Ex})（分别为 (P, J_{Coh})）。

几何教义。 最后，我们描述几何教义，并将几何教义范畴定义为 DocSites 的满 2-子范畴。

定义3.8。 几何教义是一种教义 $\mathbb{L}\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 框架$_{\mathrm{open}}$ ，它定义了预层拓扑斯 集合$^{\mathcal{C}^{op}}$的一个内局部；等价地，$\mathbb{L}$ 它满足相对贝克-切瓦利条件（见 [8, 定义5.1(e)(i)] 或定义5.1(ii)）。

如果 $\mathcal{C}$ 具有所有拉回，回顾§2.2可知，几何教义 $\mathbb{L}\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 框架$_{\mathrm{open}}$ 满足相对贝克-切瓦利条件，当且仅当标准贝克-切瓦利条件成立。因此，在笛卡尔范畴 $\mathcal{C}$上，几何教义 $\mathbb{L}\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 框架$_{\mathrm{open}}$ 就是一个取值于框架中的相干教义。根据 Seely 的定理 [44, 定理6.1和定理6.2], ，若 $\mathcal{C}$ 是一个笛卡尔范畴，则几何教义 $\mathbb{L}\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 框架$_{\mathrm{open}}$同构于某个几何一阶逻辑理论 $\mathbb{T}$ 对应的 $F^{\mathbb{T}}$ 。

回顾一下，对于每个几何教义 $\mathbb{L}\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 框架$_{\mathrm{open}}$，我们都可以在范畴 $\mathcal{C} \rtimes \mathbb{L}$ 上赋予格罗滕迪克拓扑 $K_{\mathbb{L}}$。我们将 DocSites 中由形如 $(\mathbb{L}, K_{\mathbb{L}})$ 的对象构成的全子范畴记为 GeomDoc，其中 $\mathbb{L}$ 是一个几何教义。另请注意，根据命题 2.14，给定纤维化在同一范畴 $\mathcal{C}$ 上的两个几何教义$\mathbb{L}, \mathbb{L}'\colon \mathcal{C}^{op} \to$框架$_{\mathrm{open}}$，DocSites 中的态射 $(\mathbb{L}, K_{\mathbb{L}}) \to (\mathbb{L}', K_{\mathbb{L}'}) \in$，恰好对应一个内部局部之间的态射 $\mathbb{L}' \to \mathbb{L} \in$ 局部$\left(\text{集合}^{\mathcal{C}^{op}}\right)$；也就是说，对每个范畴 $\mathcal{C}$，都存在一个全忠实 2-嵌入

$$\mathbf{Loc}\left(\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{op}}\right)^{op} \longhookrightarrow \mathbf{GeomDoc} \subseteq \mathbf{DocSites}.$$

类比分类托扑理论（见 [6, §2.1.2]），我们还规定，几何教义 $\mathbb{L}\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 框架$_{\mathrm{open}}$ 的期望模型 Mod($\mathbb{L}$) 应为以下等价范畴之一：

- HomGeomDoc($\mathbb{L}$, $\mathscr{P}$),
- $K_{\mathbb{L}}$-平坦($\mathcal{C} \rtimes \mathbb{L}$, 集合),
- 或几何态射范畴 Sets $\to$Sh($\mathbb{L}$) 及其自然变换

(上述范畴的等价可由命题 2.14 和 [51, 定理 4.4] 推出)。

4 教义的几何完备化

本节将描述教义站点的几何完备化。如前所述，这是对 [8] 中所建立的纤维化理想完备化的应用，它将预序及其覆盖系统的理想完备化推广了。我们只需利用 §2.2 中回顾的关于内部局部的结果，就能定义教义站点的几何完备化。

令 $(P, J) \in$DocSites 为一个教义站点。由于 J是范畴 $\mathcal{C} \rtimes P$上的格罗滕迪克拓扑，我们可以构造层拓扑斯 Sh($\mathcal{C} \rtimes P, J$)。投影 $p_P\colon \mathcal{C} \rtimes P \to \mathcal{C}$ 给出一个站点余态射

$$(\mathcal{C} \rtimes P) \xrightarrow{p_P} (\mathcal{C}, J_{\mathrm{triv}})$$

其诱导的几何态射 $C_{p_P}\colon$ Sh($\mathcal{C} \rtimes P, J$) $\to$ 集合$^{\mathcal{C}^{op}}$ 可分解为

$$\mathbf{Sh}(\mathcal{C} \rtimes P, J) \rightarrowtail \mathbf{Sets}^{(\mathcal{C} \rtimes P)^{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{op}}.$$

由于两个因子都是局部化的（见 [23, 例 A4.6.2(a) 和 (c)]），根据 [21, 引理 1.1]， C_{p_P} 也是局部化的（或者，仅凭 [7, 命题 7.11]， C_{p_P}也是局部化的）。因此，根据定理 2.11，拓扑斯 Sh($\mathcal{C} \rtimes P, J$) 是集合$^{\mathcal{C}^{op}}$上的一个内局部（即几何教义） $C_{p_P *}(\Omega^{\mathbf{Sh}(\mathcal{C} \rtimes P, J)})$的层拓扑斯。

定义 4.1 （参见定义 6.2 [8]）。 教义站点 (P, J) 的几何完备化 是几何教义

$$C_{p_P *}(\Omega_{\mathbf{Sh}(\mathcal{C} \rtimes P, J)})\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Frm}_{\mathrm{open}}.$$

我们用 $\mathfrak{Z}(P, J)$ 表示 (P, J) 的几何完备化。回顾（见 [8, 命题 4.2] 或 [51, §3.1]），教义 $\mathfrak{Z}(P, J)\colon \mathcal{C}^{op} \to$框架$_{\mathrm{open}}$同构于函子

$$\mathrm{Sub}_{\mathbf{Sh}(\mathcal{C} \rtimes P, J)}(C_{p_P}^* \circ \text{よ}_{\mathcal{C}}(-))\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Frm}_{\mathrm{open}}.$$

我们断言，这种几何完备化的选取在 DocSites 中具有 2-函子性，并且是普适的、幂等的且语义不变的。这些事实的证明留待 §4.2 和 §4.3。我们按如下方式展开。

- 紧接着，在 §4.1 中，我们回顾教义站点 (P, J) 的几何完备化 $\mathfrak{Z}(P, J)$ 的显式描述，该描述见于 [8, §6]。我们还将说明，在每个纤维都有最大元且这些最大元在过渡映射下保持不变这一特殊情形中，几何完备化可以有更简单的描述。通过证明自由顶元完备化 是次几何的，我们便可以恢复任意教义的几何完备化。

- 在 §4.2 中，我们定义几何完备化的单位，并证明其泛性质。
- 我们在 §4.3 中展示几何完备化的 2-单子方面，并将该单子的代数刻画为几何教义。

4.1 几何完备化的计算

教义站点 (P, J) 的几何完备化 $\mathfrak{Z}(P, J)$: $\mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Frm}_{\mathrm{open}}$ 的显式描述，可以直接利用格罗滕迪克拓扑斯子对象分类器的描述计算得出，该描述见于 [32,§III.7],，如 [8, 命题 6.2] 中所做。由此得到的 $\mathfrak{Z}(P, J)$: $\mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Frm}_{\mathrm{open}}$ 是如下教义：

(i) 对于 每个 $c \in \mathcal{C}$，$\mathfrak{Z}(P, J)(c)$ 都是 $\mathbf{Sets}^{(\mathcal{C} \rtimes P)^{op}}$ of the preshea 中 J-闭子对象 的帧 f

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(p_P(-), c) \colon (\mathcal{C} \rtimes P)^{op} \to \mathbf{Sets}$$

（关于 J-闭子对象的描述，参见 [7, §2.1]），

（ii）对于 $\mathcal{C}$ 的每个箭头 $d \xrightarrow{f} c$，转移映射 $\mathfrak{Z}(P, J)(f)$: $\mathfrak{Z}(P, J)(c) \to \mathfrak{Z}(P, J)(d)$ 将一个 J-闭子对象

$$\varsigma \rightarrowtail \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(p_P(-), c)$$

映到拉回

$$\begin{array}{ccc} f^*(\varsigma) & \longrightarrow & \varsigma \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(p_P(-), d) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(p_P(-), c). \end{array}$$

展开定义后，这等价于下面给出的具体描述 w.

构造 4.2。 设 P: $\mathcal{C}^{op} \to$ 预序是一个教义，且 J 是 $\mathcal{C} \rtimes P$上的一个格罗滕迪克拓扑。几何完备化 $\mathfrak{Z}(P, J)$: $\mathcal{C}^{op} \to$ 框架 $_{\mathrm{open}}$ 有如下描述。

(i) 对于 $\mathcal{C}$中的每个对象 c，$\mathfrak{Z}(P, J)(c)$的一个元素 S是由序对 (f, x) 构成的集合，其中 $d \xrightarrow{f} c$是一个箭头 $\mathcal{C}$，且 $x \in P(d)$，并满足：

(a) 若 $(f, x) \in S$，则对于 $\mathcal{C}$中的每个箭头 $e \xrightarrow{g} d$以及满足 $y \leqslant P(g)(x)$的 $y \in P(e)$，都有 $(f \circ g, y) \in S$；

(b) 对于 $\mathcal{C}$中的每个箭头 $d \xrightarrow{f} c$，给定一个子集 $\{(g_i, y_i) \mid i \in I\} \subseteq S$，使得对于每个 $i \in I$， g_i分解为

$$\begin{array}{ccc} e_i & & \\ \downarrow{\scriptstyle h_i} & \searrow{\scriptstyle g_i} & \\ d & \xrightarrow{f} & c, \end{array}$$

若存在一个 $x \in P(d)$，且对于所有 $i \in I$，满足 $y_i \leqslant P(h_i)(x)$，其中该族

$$\{(e_i, y_i) \xrightarrow{h_i} (d, x) \mid i \in I\}$$

若 $\mathcal{C} \rtimes P$ 中的态射是 J-覆盖的，则 $(f, x) \in S$。

然后，我们根据包含关系对 $\mathfrak{Z}(P, J)(c)$ 排序。

(ii) 对于范畴 C 中的每个箭头 $d \xrightarrow{f} c$，$\mathcal{Z}(P,J)(f)\colon \mathcal{Z}(P,J)(c) \to \mathcal{Z}(P,J)(d)$ 将 $S \in \mathcal{Z}(P,J)(c)$ 映射到 $f^*(S)$，其中

$$f^*(S) = \{\, (g,y) \mid (f\circ g, y) \in S \,\} \in \mathcal{Z}(P,J)(d).$$

显然，如果 J 和 J' 是 $\mathcal{C}\rtimes P$ 上满足 $J' \subseteq J$ 的 Grothendieck 拓扑，那么对于 $\mathcal{C}$ 的每个对象 c，都有 $\mathcal{Z}(P,J)(c) \subseteq \mathcal{Z}(P,J')(c)$。因此，对于每个 J，$\mathcal{Z}(P,J)(c)$ 都是 $\mathcal{Z}(P,J_{\mathrm{triv}})(c)$ 的子集，其中 J_{triv} 是 $\mathcal{C}\rtimes P$ 上的平凡拓扑。若元素 $S \in \mathcal{Z}(P,J_{\mathrm{triv}})(c)$ 包含在子集 $\mathcal{Z}(P,J)(c) \subseteq \mathcal{Z}(P,J_{\mathrm{triv}})(c)$ 中，即 S 满足上文的性质 (b)，则称其为 J-闭的。这恰好意味着，与 S 对应的子对象 $\varsigma \rightarrowtail \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(p_P(-)\ c)$ 按照 [7] 的意义是 J-闭的。

§2.1 [7] 中介绍了子对象的闭包运算。对于预层 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(p_P(-)\ c)$ 的子对象这一特殊情形，也就是说，对于元素 $S \in \mathcal{Z}(P,J)(c)$，$J$-闭包完全可以用内部局部格理论来理解。由于嵌入 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}\rtimes P, J) \rightarrowtail \mathbf{Sets}^{(\mathcal{C}\rtimes P)^{op}}$ 是一个几何态射，且三角形

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Sh}(\mathcal{C}\rtimes \mathcal{Z}(P,J)\ K_{\mathcal{Z}(P,J)}) & \simeq & \mathbf{Sh}(\mathcal{C}\rtimes P, J) & \rightarrowtail & \text{集合}^{(\mathcal{C}\rtimes P)^{op}} \simeq \mathbf{Sh}(\mathcal{C}\rtimes \mathcal{Z}(P,J_{\mathrm{triv}}) K_{\mathcal{Z}(P,J_{\mathrm{triv}})}) \\ & \searrow^{C_{p_P}} & & & \swarrow \\ & & \text{集合}^{\mathcal{C}^{op}} & & \end{array}$$

可交换；根据定理 5.7], ，该几何态射由内部局部 $\mathcal{Z}(P,J) \rightarrowtail \mathcal{Z}(P,J_{\mathrm{triv}})$ 的嵌入诱导：也就是说，对于每个 $c \in \mathcal{C}$，都有一个满射框架同态

$$\overline{(-)}_c\colon \mathcal{Z}(P,J_{\mathrm{triv}})(c) \to \mathcal{Z}(P,J)(c)$$

使得对于每个箭头 $d \xrightarrow{g} c \in \mathcal{C}$，图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}(P,J_{\mathrm{triv}})(d) & \underset{\mathcal{Z}(P,J_{\mathrm{triv}})(f)}{\overset{\exists_{\mathcal{Z}(P,J_{\mathrm{triv}})(f)}}{\rightleftarrows}} & \mathcal{Z}(P,J_{\mathrm{triv}})(c) \\ \downarrow{\scriptstyle \overline{(-)}_d} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{(-)}_c} \\ \mathcal{Z}(P,J)(d) & \underset{\mathcal{Z}(P,J)(f)}{\overset{\exists_{\mathcal{Z}(P,J)(c)}}{\rightleftarrows}} & \mathcal{Z}(P,J)(c) \end{array}$$

是一个伴随态射。

定义 4.3。设 S 是 $\mathcal{Z}(P,J_{\mathrm{triv}})(c)$ 的一个元素。我们称 S 在

$$\overline{(-)}_c\colon \mathcal{Z}(P,J_{\mathrm{triv}})(c) \to \mathcal{Z}(P,J)(c)$$

S 的 J-闭包 为 $\overline{S}$，并记作 $\overline{S}$。$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(p_P(-)\ c)$ 的相应子对象 $\overline{\varsigma}$恰好是 ς 的 J-闭包。

当最大元存在时。在本小节余下部分中，我们将说明，在特殊情形下，对于一个教义 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 预序，其中每个对象 $c \in \mathcal{C}$ 对应的 $P(c)$ 都有一个最大元，且 $P(f)$ 保持该最大元，对于 $\mathcal{C}$ 中的每个箭头 $d \xrightarrow{f} c$，构造 4.2 中给出的几何完备化描述还可以进一步简化。

随后我们将说明，如何通过向教义 P 自由添加（保持的）最大元，恢复任意教义位点 (P,J) 的构造 4.2 中的描述。这样做是为了展示我们的第一个次几何完备化例子。次几何完备化是对几何教义数据的一种部分完备化，它可以被几何完备化“涵盖”。我们将在第 7 节进一步探讨这一点。为避免后续段落中产生混淆，在证明同构 $\mathcal{Z}(P,J) \cong \mathcal{Z}'(P,J)$ 的过程中，我们暂时将构造 4.2 中描述的教义重新记为 $\mathcal{Z}'(P,J)\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 框架$_{\mathrm{open}}$。

若对于 $\mathcal{C}$ 的每个对象 c，$P(c)$ 都有一个最大元 $\top_c$，且对于 $\mathcal{C}$ 的每个箭头 $d \xrightarrow{f} c$，该最大元在 $P(f)$ 下保持不变，那么投影 $p_P\colon \mathcal{C}\rtimes P \to \mathcal{C}$ 有一个右伴随：函子

$$t_P\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}\rtimes P$$

它将 $c \in \mathcal{C}$ 映为 $(c, \top_c) \in \mathcal{C} \rtimes P$。因此，我们可以应用 [32, 定理 VII.10.4]，中给出的 C_{p_P} 的直接像描述，从而得到

$$\exists(P, J) \cong C_{p_P *}(\Omega_{\mathbf{Sh}(\mathcal{C} \rtimes P, J)}) = \Omega_{\mathbf{Sh}(\mathcal{C} \rtimes P, J)} \circ t_P^{op} \colon \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Frm}_{\mathrm{open}}.$$

因此，利用 [32, §III.7]，中对 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C} \rtimes P, J)$ 的子对象分类器的描述，对于每个 $c \in \mathcal{C}$，$\exists(P, J)(c)$ 的一个元素是 $(c, \top_c)$ 上的 J-闭筛 S，并且对于每个 $d \xrightarrow{f} c \in \mathcal{C}$，$\exists(P, J)(f)$ 将 S 送至

$$f^*(S) = \{\, g \colon (e, V) \to (d, \top_d) \mid f \circ g \colon (e, V) \to (c, \top_c) \in S \,\}.$$

因此我们注意到，$\exists(P, J)$ 确实同构于构造 4.2 中所描述的教义 $\exists'(P, J)$。给出该同构的映射是将 $(c, \top_c)$ 上的 J-闭筛 S 映至集合

$$\left\{ (f, x) \,\middle|\, (d, x) \xrightarrow{f} (c, \top_c) \in S \right\} \in \exists'(P, J)(c).$$

自由顶元完备化。在缺少（保留的）顶元时，我们可以自由地将它们添加到教义 P 中：$\mathcal{C}^{op} \to$ 预序，并证明，通过仔细选择一个格罗滕迪克拓扑，我们得到一个教义站点，其几何完备化同构于 $\exists(P, J)$——也就是说，添加顶元是一种次几何完备化。

定义 4.4。设 $P \colon \mathcal{C}^{op} \to$ 预序是一个教义，并设 J 是 $\mathcal{C} \rtimes P$上的一个格罗滕迪克拓扑。

(i) 将 $P^\top \colon \mathcal{C}^{op} \to$ 集合记为自由顶元完备化，即如下教义：

(a) 对于 $\mathcal{C}$中的每个对象 c，$P^\top(c)$ 是预序 $P(c) \oplus \top_c$，其中向 $P(c)$ 自由添加了一个最大元 $\top_c$；

(b) 对于 $\mathcal{C}$中的每个箭头 $d \xrightarrow{f} c$，$P^\top(f)$: $P^\top(c) \to P^\top(d)$ 是单调映射

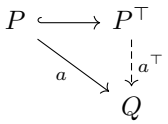
$$P^\top(f)(x) = \begin{cases} P(f)(x) & \text{if } x \in P(c), \\ \top_d & \text{if } x = \top_c. \end{cases}$$

(ii) 我们按以下方式定义 $\mathcal{C} \rtimes P^\top$ 上的格罗滕迪克拓扑 $J^\top$：

(a) 对于形如 (c, x) 且满足 $x \in P(c)$ 的对象，(c, x) 上的筛 S 是 $J^\top$-覆盖，当且仅当S 是 J-覆盖；

(b) 对于形如 $(c, \top_c)$ 的对象，$(c, \top_c)$ 上的筛 S 是 $J^\top$-覆盖，当且仅当对于每个满足 $x \in P(d)$ 的箭头 $(d, x) \xrightarrow{f} (c, \top_c)$，$(d, x)$ 上的筛 $f^*(S)$ 都是 J- 覆盖。

“自由顶元完备化”这一术语是恰当的，因为它显然满足如下泛性质：对于任意自然变换 $a \colon P \to Q$，即教义 $P, Q \colon \mathcal{C}^{op} \to$预序之间的自然变换，其中 $Q(c)$ 对每个$c \in \mathcal{C}$都有最大元，且该最大元在每个 $d \xrightarrow{f} c \in \mathcal{C}$ 下均由 $Q(f)$ 保持，存在唯一的自然变换 $a^\top \colon P^\top \to Q$，使得三角形



可交换，并且对于每个 $c \in \mathcal{C}$，$a_c^\top$都将 $\top_c \in P^\top(c)$ 映到 $Q(c)$ 的最大元。

注意，$\mathcal{C} \rtimes P$定义了 $\mathcal{C} \rtimes P^\top$ 的一个子范畴，而 J 是 $J^\top$ 在该子范畴上的限制。还要注意，对于每个 $c \in \mathcal{C}$，族

$$\{\, (c, x) \xrightarrow{\mathrm{id}_c} (c, \top_c) \mid c \in P(c) \,\}$$

生成一个 $J^\top$-覆盖筛。

引理 4.5. 对于每个教义 $P \colon \mathcal{C}^{op} \to$ 预序 以及 *Grothendieck* 拓扑 J 在 $\mathcal{C} \rtimes P$上，$J^\top$ 是 $\mathcal{C} \rtimes P^\top$上的 *Grothendieck* 拓扑。

证明. $J^\top$ 的极大性和稳定性条件显然成立，因为 J 是 $\mathcal{C} \rtimes P$上的 Grothendieck 拓扑；对于形如 (d, x) 且满足 $x \in P(d)$ 的对象上的筛，传递性条件 $J^\top$ 也显然成立。

因此，剩下要证明的是：若 S是 $(c, \top_c)$ 上的 $J^\top$覆盖筛，且 R是 $(c, \top_c)$ 上的筛，并且对于 S 中的每个箭头 $(e, y) \xrightarrow{h} (c, \top_c)$，都有 $h^*(R) \in J^\top(d, x)$，那么 R就是 $J^\top$覆盖的，也就是说，对于满足 $x \in P(d)$ 的每个箭头 $(d, x) \xrightarrow{f} (c, \top_c)$，都有 $f^*(R) \in J(d, x)$。由于 $f^*(S) \in J(d, x)$，并且对于 $f^*(S)$ 中的每个箭头 $(e, y) \xrightarrow{k} (d, x)$，也就是说，对于满足 $(e, y) \xrightarrow{k} (d, x) \xrightarrow{f} (c, \top_c)$ 属于 S 的每个箭头，我们有 $f^*(R)$ 是 J覆盖的，因为 $k^*(f^*(R)) = (f \circ k)^*(R)$ 是 $J^\top$覆盖的（因此也是 J覆盖的），这是由 J 的传递性条件得出的。因此，根据定义， R 是 $J^\top$覆盖的。 □

引理 4.6. 位点 $(\mathcal{C} \rtimes P, J)$ 是 $(\mathcal{C} \rtimes P^\top, J^\top)$的稠密子位点。

证明。 这是显然的，因为 $\mathcal{C} \rtimes P$是 $\mathcal{C} \rtimes P^\top$ 的满子范畴，而未包含在 $\mathcal{C} \rtimes P$中的唯一对象，即形如（c， $\top_c$）的对象，都被该子范畴中包含的对象所覆盖。 □

自由顶元完备化是次几何的。 在为一个教义站点构造了自由顶元完备化之后，我们终于可以看到，按照当前较宽松的意义，它构成了一种次几何完备化，即 $\mathfrak{Z}(P, J) \cong \mathfrak{Z}(P^\top, J^\top)$（次几何性的形式化定义见 §7.2）。因此，我们如愿得到同构 $\mathfrak{Z}(P, J) \cong \mathfrak{Z}'(P, J)$。

命题 4.7. 存在一串教义同构：

$$\mathfrak{Z}(P, J) \cong \mathfrak{Z}(P^\top, J^\top) \cong \mathfrak{Z}'(P^\top, J^\top) \cong \mathfrak{Z}'(P, J).$$

证明。 由于拓扑斯 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C} \rtimes P, J)$ 与 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C} \rtimes P^\top, J^\top)$ 根据引理 4.6 等价，因此有 $\mathfrak{Z}(P, J) \cong \mathfrak{Z}(P^\top, J^\top)$。由于 $P^\top$ 具有（保留了）最大元，因此有 $\mathfrak{Z}(P^\top, J^\top) \cong \mathfrak{Z}'(P^\top, J^\top)$。

我们将概述 $\mathfrak{Z}'(P^\top, J^\top)$ 与 $\mathfrak{Z}'(P, J)$ 之间的同构。我们注意到，$(c, \top_c)$ 上的每个 $J^\top$-闭筛S 都由集合唯一确定

$$l_c(S) = \{\, (f, x) \mid (d, x) \xrightarrow{f} (c, \top_c) \in S,\, x \in P(d) \,\} \in \mathfrak{Z}'(P, J).$$

如果 $l_c(S) = l_c(S')$，那么 S和 S'在形如 $(d, x) \xrightarrow{f} (c, \top_c)$ 且满足 $x \in P(d) \subseteq P^\top(d)$ 的箭头上相同。反过来，如果 $(d, \top_d) \xrightarrow{f} (c, \top_c) \in S$，那么 S和 S'都包含这一族

$$R = \{\, (d, x) \xrightarrow{\mathrm{id}_d} (d, \top_d) \xrightarrow{f} (c, \top_c) \mid x \in P(d) \,\}$$

其覆盖了 $(d, \top_d) \xrightarrow{f} (c, \top_c)$。因此，$(d, \top_d) \xrightarrow{f} (c, \top_c) \in S'$ 也成立。将 S与 S'互换后应用同样的论证，即可完成证明：$l_c(S) = l_c(S')$ 蕴含 $S = S'$。因此，对于每个 $c \in \mathcal{C}$，映射 l_c 显然构成了 $\mathfrak{Z}'(P^\top, J^\top)$ 与 $\mathfrak{Z}'(P, J)$ 之间的自然同构的各个分量。 □

4.2 几何完备化的泛性质

现在我们能够证明，正如所声称的，教义站点的几何完备化在 DocSites 中具有泛性、幂等性且语义不变。我们首先回顾几何完备化的单位的构造；不出所料，它与 [8,命题 6.2]，中定义的纤维化理想完备化的单位相同；然后转向几何完备化的泛性质，它扩展了 [8] 的泛性质。最后，我们讨论单位的一些基本保持性质。

几何完备化的单位。对于带有覆盖系统的预序，单位将取主下集的闭包这一概念加以推广。设 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 范畴 $\mathbf{C}$ 是一个教义，且 J 是 $\mathcal{C} \rtimes P$上的一个格罗滕迪克拓扑。对于每个对象 $c \in \mathcal{C}$ 和 $x \in P(c)$，集合

$$\downarrow x = \{\, (g, y) \mid e \xrightarrow{g} c \in \mathcal{C},\, y \in P(e) \text{ and } y \leqslant P(g)(x) \,\}$$

是 $\mathfrak{Z}(P, J_{\mathrm{triv}})(c)$ 的一个对象。对于每个箭头 $d \xrightarrow{f} c$，$\mathfrak{Z}(P, J_{\mathrm{triv}})(f)$ 对该元素的作用为

$$\begin{aligned}\mathfrak{Z}(P, J_{\mathrm{triv}})(f)(\downarrow x) &= \{\, (h, y) \mid (f \circ h, y) \in \downarrow x \,\},\\ &= \{\, (h, y) \mid e \xrightarrow{h} c \in \mathcal{C},\, y \in P(e) \text{ and } y \leqslant P(f \circ g)(x) \,\},\\ &= \{\, (h, y) \mid e \xrightarrow{h} c \in \mathcal{C},\, y \in P(e) \text{ and } y \leqslant P(g)P(f)(x) \,\} = \downarrow P(f)(x).\end{aligned}$$

因此，我们得到一个自然变换 $\downarrow(-)\colon P \to \mathfrak{Z}(P, J_{\mathrm{triv}})$。

定义 4.8. 设 (P, J) 是一个教义站点。我们用 $\eta^{(P,J)}\colon P \to \mathfrak{Z}(P, J)$ 表示复合自然变换

$$P \xrightarrow{\downarrow(-)} \mathfrak{Z}(P, J_{\mathrm{triv}}) \xrightarrow{\overline{(-)}} \mathfrak{Z}(P, J).$$

自然变换 $\eta^{(P,J)}$ 导出一个教义站点态射

$$(\mathrm{id}_{\mathcal{C}}, \eta^{(P,J)})\colon (P, J) \to (\mathfrak{Z}(P, J), K_{\mathfrak{Z}(P,J)}).$$

事实上，如 [8, 命题 7.2]，所示，可以证明一个更强的结论。

命题 4.9 (命题 7.2 [8])**.** 诱导出的函子 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \rtimes \eta^{(P,J)}\colon \mathcal{C} \rtimes P \to \mathcal{C} \rtimes \mathfrak{Z}(P, J)$ 导出一个稠密位点态射

$$\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \rtimes \eta^{(P,J)}\colon (\mathcal{C} \rtimes P, J) \to (\mathcal{C} \rtimes \mathfrak{Z}(P, J), K_{\mathfrak{Z}(P,J)}).$$

由命题 4.9，我们立即推得，对于 $\mathcal{C}$ 中的每个对象 c 以及每个 $S \in \mathfrak{Z}(P, J)(c)$，

$$S = \bigvee_{(f,x) \in S} \exists_{\mathfrak{Z}(P,J)(f)} \left(\eta_d^{(P,J)}(x) \right). \tag{4}$$

我们将频繁滥用记号，用 $\eta^{(P,J)}$ 表示自然变换、教义站点态射 $(\mathrm{id}_{\mathcal{C}}, \eta^{(P,J)})\colon (P, J) \to (\mathfrak{Z}(P, J), K_{\mathfrak{Z}(P,J)})$，以及函子 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \rtimes \eta^{(P,J)}\colon \mathcal{C} \rtimes P \to \mathcal{C} \rtimes \mathfrak{Z}(P, J)$。

几何完备化的泛性质。

定理 4.10。 对每个教义 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 预序 以及 $\mathcal{C} \rtimes P$上的格罗滕迪克拓扑 J，自然变换 $\eta^{(P,J)}\colon P \to \mathfrak{Z}(P, J)$ 构成了 $P, J)$ 的几何完备化的单位，并满足以下性质。

(i) **普遍性：** 对于每个到几何教义 $\mathbb{L}\colon \mathcal{D}^{op} \to$框架$_{\mathrm{open}}$的教义站点态射 $(F, a)\colon (P, J) \to (\mathbb{L}, K_{\mathbb{L}})$，存在唯一的几何教义态射 $(F, \mathfrak{a})\colon \mathfrak{Z}(P, J) \to \mathbb{L}$，使得三角形

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\eta^{(P,J)}} & \mathfrak{Z}(P, J) \\ & \searrow^{a} & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{a}} \\ & & \mathbb{L} \circ F^{op} \end{array}$$

可交换；

(ii) **语义不变性：** 如果 P 的期望模型 $\mathbf{Mod}(P)$ 等价于 J-**平坦**$(\mathcal{C} \rtimes P,$集合$)$，那么 $\mathbf{Mod}(P) \simeq \mathbf{Mod}(\mathfrak{Z}(P, J))$；

(iii) **幂等性：** 对于每个教义站点 (P, J)，我们有 $\mathfrak{Z}(P, J) \cong \mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}(P, J)\ K_{\mathfrak{Z}(P,J)})$。

证明。 设 $(F, a)\colon (P, J) \to (\mathbb{L}, K_{\mathbb{L}})$ 是一个教义站点态射。根据引理 2.6，存在一个交换的几何态射方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Sh}(\mathbb{L}) \simeq \mathbf{Sh}(\mathcal{D} \rtimes \mathbb{L}, K_{\mathbb{L}}) & \xrightarrow{\mathbf{Sh}(F \rtimes a)} & \mathbf{Sh}(\mathcal{C} \rtimes P, J) \\ \downarrow{\scriptstyle C_{p_{\mathbb{L}}}} & & \downarrow{\scriptstyle C_{p_P}} \\ \mathbf{Sets}^{\mathcal{D}^{op}} & \xrightarrow{\mathbf{Sh}(F)} & \mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{op}}. \end{array}$$

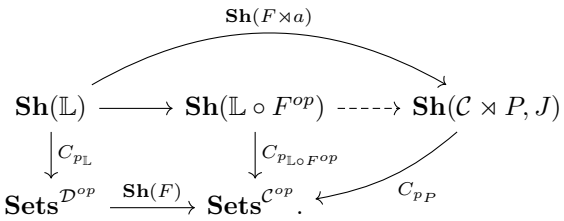
令 g: Sh(𝕃) $\to$ 集合$^{\mathcal{C}^{op}}$ 表示该复合几何态射

$$\mathbf{Sh}(\mathbb{L}) \xrightarrow{C_{p_{\mathbb{L}}}} \mathbf{Sets}^{\mathcal{D}^{op}} \xrightarrow{\mathbf{Sh}(F)} \mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{op}}.$$

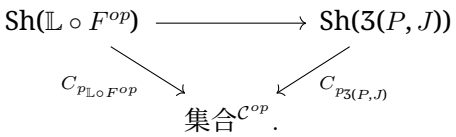
根据 [8, 命题 7.2], , g 的超连通-局部化分解中的分解拓扑斯由内局部 $g_*(\Omega_{\mathbf{Sh}(\mathbb{L})})$ ∈集合$^{\mathcal{C}^{op}}$上的层拓扑斯给出。因此，我们有

$$\begin{aligned} g_*(\Omega_{\mathbf{Sh}(\mathbb{L})}) &= \mathbf{Sh}(F)_* \circ C_{p_{\mathbb{L}}*}(\Omega_{\mathbf{Sh}(\mathbb{L})}), \\ &= C_{p_{\mathbb{L}}*}(\Omega_{\mathbf{Sh}(\mathbb{L})}) \circ F^{op}, \\ &\cong \mathbb{L} \circ F^{op}. \end{aligned}$$

因此，由于 C_{p_P} 是局部化的，Sh($F \rtimes a$)存在如下分解:



因此，由于 Sh($\mathcal{C} \rtimes P, J$) $\simeq$ Sh(ℨ(P, J))，存在一个由几何态射构成的交换三角形



因此，根据命题 ositon 2.14，我们得到一个内部局部之间的态射 $\mathbb{L} \circ F^{op} \to$ ℨ(P, J)，或者更确切地说 a morphism of geomet ric 教义 ($F, \mathfrak{a}$): ℨ(P, J) $\to \mathbb{L}$，满足所需条件。

几何 完备化在语义上不变，这一点可由 Diaconescu 等价 e:

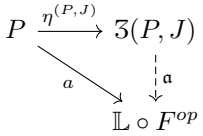
$$\begin{aligned} \mathbf{Mod}(P) \simeq J\text{-}\mathbf{Flat}(\mathcal{C} \rtimes P, \mathbf{Sets}) &\simeq \mathbf{Geom}(\mathbf{Sets}, \mathbf{Sh}(\mathcal{C} \rtimes P, J)), \\ &\simeq \mathbf{Geom}(\mathbf{Sets}, \mathbf{Sh}(\mathcal{C} \rtimes \mathfrak{Z}(P, J), K_{\mathfrak{Z}(P,J)})), \\ &\simeq K_{\mathfrak{Z}(P,J)}\text{-}\mathbf{Flat}(\mathcal{C} \rtimes \mathfrak{Z}(P, J), \mathbf{Sets}) \simeq \mathbf{Mod}(\mathfrak{Z}(P, J)). \end{aligned}$$

几何完备化是幂等的，这一点可由以下事实推出:

$$\mathfrak{Z}(P, J) \cong C_{p_{\mathfrak{Z}(P,J)}*}(\Omega_{\mathbf{Sh}(\mathfrak{Z}(P,J))}) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}(P, J), K_{\mathfrak{Z}(P,J)}).$$

□

注记 4.11. 也可以给出定理 4.10 的直接证明，而无需提及内部局部。给定一个教义站点态射 $(F, a) : (P, J) \to (\mathbb{L}, K_{\mathbb{L}})$，其中 $\mathbb{L}$: $\mathcal{D}^{op} \to$框架$_{\text{open}}$ 是一个几何教义，我们得到唯一的几何教义态射 ($F, \mathfrak{a}$): ℨ(P, J) $\to \mathbb{L}$，使得三角形



通过为每个 $S \in$ ℨ(P, J)(c) 定义，使其交换，

$$\mathfrak{a}_c(S) = \bigvee_{(g,x) \in S} \exists_{\mathbb{L}(F(g))} a_d(x).$$

注 4.12。 给定签名 Σ 上的一个理论 $\mathbb{T}$，上下文范畴 Con_Σ 通常被认为完全是代数 性的。也就是说，签名 Σ 上空理论 $\mathbb{O}_\Sigma$ 的语义等价于平坦函子 $\mathrm{Flat}(\mathrm{Con}_\Sigma, \text{集合})$（参见 [23, 推论 D3.1.2] 或 [23, §D3.2]）。为了进一步凸显与理论的类比，我们选择采用教义站点 (P, J)，其中只有范畴 $\mathcal{C} \rtimes P$ 配备了格罗滕迪克拓扑 J，以表示更丰富的句法；而基范畴$\mathcal{C}$ 则实际上被视为配备了平凡拓扑。

如果愿意，我们可以通过考虑 2-范畴 $\mathrm{DocSites}_{\mathrm{WTB}}$ 来纠正这种视野狭隘的问题；它是由基范畴上带有拓扑的教义站点构成的 2-范畴，

(i) 其对象是四元组 $(\mathcal{C}, J, P, K)$，其中 J是范畴 $\mathcal{C}$上的格罗滕迪克拓扑，$P\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 预序是纤维化在 $\mathcal{C}$ 上的教义，并且 K 是 $\mathcal{C} \rtimes P$ 上的格罗滕迪克拓扑，且包含吉罗拓扑 J_{p_P}（见 [14, 命题 2.1]），

(ii) $\mathrm{DocSites}_{\mathrm{WTB}}$ 中的一个 1-胞 $(F, a)\colon (\mathcal{C}, J, P, K) \to (\mathcal{D}, J', Q, K')$ 由一个位点态射的数据构成，

$$F\colon (\mathcal{C}, J) \to (\mathcal{D}, J')$$

以及一个自然变换 $a\colon P \to Q \circ F^{op}$，使得

$$F \rtimes a\colon (\mathcal{C} \rtimes P, K) \to (\mathcal{D} \rtimes Q, K')$$

也是一个位点态射。我们纳入的 2-胞腔与 DocSites 中的相同。

注意到，对于每个对象 $(\mathcal{C}, J, P, K) \in \mathrm{DocSites}_{\mathrm{WTB}}$，几何态射

$$C_{p_P}\colon \mathbf{Sh}(\mathcal{C} \rtimes P, K) \to \mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{op}}$$

可经由 $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J) \rightarrowtail$ 集合$^{\mathcal{C}^{op}}$分解。由推论 2.12，$\mathcal{C} \rtimes \mathfrak{Z}(P, K)$ 上的格罗滕迪克拓扑 $K_{\mathfrak{Z}(P,K)}$ 包含吉罗拓扑 $J_{p_{\mathfrak{Z}(P,K)}}$，其中 $\mathfrak{Z}(P, K)$ 表示按照定义 4.1 对 (P, K) 作几何完备化。因此，$(\mathcal{C}, J, \mathfrak{Z}(P, K)\ K_{\mathfrak{Z}(P,K)})$ 定义了 $\mathrm{DocSites}_{\mathrm{WTB}}$ 的一个对象。

现在，对于 $\mathrm{DocSites}_{\mathrm{WTB}}$ 中的每个箭头 $(F, a)\colon (\mathcal{C}, J, P, K) \to (\mathcal{D}, J', Q, K')$，存在一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} \rtimes P & \xrightarrow{F \rtimes a} & \mathcal{D} \rtimes Q \\ \downarrow{\scriptstyle p_P} & & \downarrow{\scriptstyle p_Q} \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \end{array}$$

使得当每个范畴都赋予相应的格罗滕迪克拓扑时，竖直箭头 p_P,p_Q 成为位点余态射，而水平箭头 $F \rtimes a$ 和 F 按定义是位点态射。因此，应用引理 2.6 可得一个几何态射的交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Sh}(\mathcal{C} \rtimes P, K) & \xleftarrow{\mathbf{Sh}(F \rtimes a)} & \mathbf{Sh}(\mathcal{D} \rtimes Q, K') \\ \downarrow{\scriptstyle C_{p_P}} & & \downarrow{\scriptstyle C_{p_Q}} \\ \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J) & \xleftarrow{\mathbf{Sh}(F)} & \mathbf{Sh}(\mathcal{D}, J'). \end{array}$$

因此，通过采用与定理 4.10 中类似的方法，我们可以推导出

$$(\mathcal{C}, J, \mathfrak{Z}(P, K), K_{\mathfrak{Z}(P,K)})$$

是将 $(\mathcal{C}, J, P, K)$ 泛完备化为 $\mathrm{DocSites}_{\mathrm{WTB}}$ 中形如 $(\mathcal{D}, J', \mathbb{L}, K_{\mathbb{L}})$ 的对象，其中该对象对应于 $\mathrm{Sh}(\mathcal{D}, J')$ 的一个内局部 $\mathbb{L}$: $\mathcal{D} \to$ 框架^{open}。

因此，定理 4.10 中所述的几何完备化的泛性质，是将这一更一般的陈述限制到 $\mathrm{DocSites}_{\mathrm{WTB}}$ 的 1-满 2-子范畴所得，其中的对象形如 $(\mathcal{C}, J_{\mathrm{triv}}, P, K)$，也就是说，定义 3.6 中的 2-范畴 DocSites。不过，如上所述，就我们预期的应用而言，并不需要这种额外的一般性。

单位的保持性质。 单位 $\eta^{(P,J)}\colon\ P \to \exists(P,J)$ 保持有限交。这一点可以直接看出。若两个元素 $x, y \in P(c)$ 的交 $x \wedge y$ 存在，或者 $P(c)$ 有最大元 $\top_c$，那么交 $\downarrow x \wedge \downarrow y \in \exists(P, J_{\mathrm{triv}})(c)$ 由 $\downarrow(x \wedge y)$ 给出，而 $\downarrow \top_c$ 定义了 $\exists(P, J_{\mathrm{triv}})(c)$ 的最大元。因此，由于 $(-)_c\colon \exists(P, J_{\mathrm{triv}}) \to \exists(P, J)$ 也保持有限交，它们的复合 $\eta_c^{(P,J)}$ 也保持有限交。

也很容易看出，单位 $\eta^{(P,J)}$ 保持上确界和存在量词，当且仅当格罗滕迪克拓扑 J 具有某种特定形式。给定一个子集 $\{\, y_i \mid i \in I \,\} \subseteq P(c)$，其上确界 $\bigvee_{i\in I} y_i$ 在 $P(c)$ 中存在，由于

$$\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \rtimes \eta^{(P,J)}\colon (\mathcal{C} \rtimes P, J) \to (\mathcal{C} \rtimes \exists(P,J), K_{\exists(P,J)})$$

根据命题 4.9，它保持覆盖且反映覆盖，因此我们有

$$\eta_c^{(P,J)}\left(\bigvee_{i\in I} y_i\right) = \bigvee_{i\in I} \eta_c^{(P,J)}(y_i)$$

当且仅当

$$\left\{ (c, y_i) \xrightarrow{\mathrm{id}_c} \left(c, \bigvee_{i\in I} y_i\right) \,\middle|\, i \in I \right\}$$

是一个 J-覆盖族。同样地，如果 $P(f)\colon\ P(c) \to P(d)$ 有一个左伴随 $\exists_{P(f)}$，那么对于每个 $x \in P(d)$，

$$\eta_c^{(P,J)} \circ \exists_{P(f)}(x) = \exists_{\exists(P,J)} \circ \eta_d^{(P,J)}(x),$$

当且仅当单元素集合

$$\left\{ (d, x) \xrightarrow{f} (c, \exists_{P(f)} x) \right\}$$

是一个 J-覆盖箭头。

4.3 几何完备化作为单子

在 [46], 第 5 节中，我们使用 2-单子理论的语言来描述存在完备化的泛性质。在 [47] 中，我们进一步通过 2-单子理论，对初等教义的逻辑完备化进行了丰富的描述。受此启发，我们将使用 2-单子理论的语言来研究几何完备化。

回顾一下，2-范畴 $\mathcal{C}$ 上的 2-单子是一个三元组（T、η、μ），由一个 2-自函子 $T\colon\ \mathcal{C} \to \mathcal{C}$，以及 2-自然变换 $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to T$ 和 $\mu\colon\ T \circ T \to T$ 组成，并满足图表

$$\begin{array}{ccc} T^3 & \xrightarrow{T\mu} & T^2 \\ \downarrow{\scriptstyle \mu T} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ T^2 & \xrightarrow{\mu} & T, \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccccc} \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \circ T & \xrightarrow{\eta T} & T^2 & \xleftarrow{T\eta} & T \circ \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle \mu} & \swarrow & \\ & & T & & \end{array} \tag{5}$$

严格 交换。几何完备化将是 2-范畴 DocSites 上的一个 2-单子 .

我们将首先构建 1-幺半结构，并在命题 4.13 中加入 2-幺半结构。对于任意一个教义站点的态射（F、a）：（P、J）→（Q、K），根据几何完备化的泛性质，存在一个几何教义站点的态射（F、$\mathfrak{a}$）：$\exists$（P、J）→$\exists$（Q、K）：

$$\begin{array}{ccc} (P, J) & \xrightarrow{(\mathrm{id}_{\mathcal{C}}, \eta^{(P,J)})} & (\exists(P,J), K_{\exists(P,J)}) \\ \downarrow{\scriptstyle (F,a)} & & \vdots{\scriptstyle (F,\mathfrak{a})} \\ (Q, K) & \xrightarrow{(\mathrm{id}_{\mathcal{D}}, \eta^{(Q,K)})} & (\exists(Q,K), K_{\exists(Q,K)}). \end{array}$$

因此，几何完备化具有*1*-函子性，因为它给出了一个 1-函子

$$\exists\colon \mathbf{DocSites} \to \mathbf{GeomDoc}.$$

几何完备化的泛性质确保函子 $\mathfrak{Z}$ 是将几何教义包含到教义站点中的左 1-伴随：

$$\mathbf{DocSites} \underset{\longleftarrow}{\overset{\mathfrak{Z}}{\longrightarrow}} \mathbf{GeomDoc}. \tag{6}$$

伴随的单位由自然变换 $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathbf{DocSites}} \to \mathfrak{Z}$ 给出；其在一个教义站点 $(P, J) \in \mathbf{DocSites}$ 处的分量为 $\eta^{(P,J)}\colon (P, J) \to (\mathfrak{Z}(P, J)\ K_{\mathfrak{Z}(P,J)})$。伴随的余单位是自然变换，其在几何教义 $\mathbb{L}$ 处的分量是由拓扑斯等价诱导的几何教义同构 $\mathbb{L} \cong \mathfrak{Z}(\mathbb{L}, K_{\mathbb{L}})$

$$\mathbf{Sh}(\mathbb{L}) \simeq \mathbf{Sh}(\mathfrak{Z}(\mathbb{L}, K_{\mathbb{L}})).$$

在下面的命题 4.13 中，我们加入 2-单子方面。我们证明的严格 2-伴随扩展了 [8, 定理 7.1]，中的 2-伴随；该定理给出了不带基变换的几何完备化的泛性质（即所考虑的所有教义都纤维化在同一个基范畴上）。

命题 4.13 （参见定理 7.1 [8]）。几何完备化 $\mathfrak{Z}\colon \mathbf{DocSites} \to \mathbf{GeomDoc}$ 可以赋予一个 *2*-函子结构，使得

$$\mathbf{DocSites} \underset{\longleftarrow}{\overset{\mathfrak{Z}}{\longrightarrow}} \mathbf{GeomDoc}.$$

是一个严格 *2*-伴随。

证明。我们首先证明可以使 $\mathfrak{Z}$ 具有 2-函子性。设 (F, a)、$(F', a')\colon (P, J) \rightrightarrows (Q, K)$ 是教义站点之间的态射。我们将证明，每个定义教义站点之间态射的 2-胞的自然变换 $\alpha\colon F \to F'$

$$(P, J) \underset{(F',a')}{\overset{(F,a)}{\Downarrow \alpha}} (Q, K)$$

也导出几何教义态射之间的一个 2-胞

$$\mathfrak{Z}(P, J) \underset{(F',\mathfrak{a}')}{\overset{(F,\mathfrak{a})}{\Downarrow \alpha}} \mathfrak{Z}(Q, K).$$

也就是说，我们必须证明，对于每个 $c \in \mathcal{C}$ 和 $S \in \mathfrak{Z}(P, J)(c)$，

$$\mathfrak{a}_c(S) \leqslant \mathfrak{Z}(Q, K)(\alpha_c)(\mathfrak{a}'_c(S)). \tag{7}$$

若 S 的形式为 $\eta_c^{(P,J)}(x)$，其中 $x \in P(c)$，则将单调映射 $\eta_c^{(Q,K)}$ 应用于现有不等式 $a_c(x) \leqslant Q(\alpha_c)(a'_c(x))$ 两边，即可得到不等式 (7)。

对于任意的 $S \in \mathfrak{Z}(P, J)$，我们使用注记 4.11 中给出的 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{a}'$ 的描述。对于每个 $(f, x) \in S$，我们有

$$\begin{aligned} \eta^{(Q,K)}_{F(d)}(a_c(x)) \leqslant \mathfrak{Z}(Q, K)(\alpha_d)\left(\eta^{(Q,K)}_{F'(d)}(a'_c(x))\right) &\implies \exists_{\alpha_d}\eta^{(Q,K)}_{F(d)}(a_c(x)) \leqslant \eta^{(Q,K)}_{F'(d)}(a'_c(x)), \\ &\implies \exists_{F'(f)}\exists_{\alpha_d}\eta^{(Q,K)}_{F(d)}(a_c(x)) \leqslant \exists_{F'(f)}\eta^{(Q,K)}_{F'(d)}(a'_c(x)). \end{aligned}$$

由于 $\alpha\colon F \to F'$ 是自然的，$F'(f) \circ \alpha_d = \alpha_c \circ F(f)$，因此

$$\exists_{\alpha_c}\exists_{F(f)}\eta^{(Q,K)}_{F(d)}(a_c(x)) \leqslant \exists_{F'(f)}\eta^{(Q,K)}_{F'(d)}(a'_c(x)),$$

由此我们推得 $\exists_{F(f)}\eta^{(Q,K)}_{F\ d}{}_{()}(a_c(x)) \leqslant \mathfrak{Z}(Q, K)(\alpha_c)\left(\exists_{F'(f)}\eta^{(Q,K)}_{F'\ d}{}_{()}(a'_c(x))\right)$。因此，我们得到所需的不等式：

$$\mathfrak{a}_c(S) = \bigvee_{(f,x)\in S} \exists_{F(f)}\eta^{(Q,K)}_{F(d)}(a_c(x)) \leqslant \bigvee_{(f,x)\in S} \mathfrak{Z}(Q, K)(\alpha_c)\left(\exists_{F'(f)}\eta^{(Q,K)}_{F'(d)}(a'_c(x))\right) = \mathfrak{Z}(Q, K)(\alpha_c)(\mathfrak{a}'_c(S)).$$

接下来需要证明，对于每个教义站点 $(P, J) \in \mathbf{DocSites}$ 和几何教义 $\mathbb{L} \in \mathbf{GeomDoc}$，都存在一个范畴的自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{DocSites}}((P,J),(\mathbb{L},K_{\mathbb{L}})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{GeomDoc}}(\mathfrak{Z}(P,J),\mathbb{L}). \tag{8}$$

对象上的同构由几何完备化的泛性质给出。给定一对教义态射 $(F,a),(F',a')\colon (P,J) \to (\mathbb{L},K_{\mathbb{L}})$ 以及自然变换 $\alpha\colon F \to F'$，若对所有 $c \in \mathcal{C}$ 和 $x \in P(c)$ 都有 $a_c(x) \leqslant \mathbb{L}(\alpha_c)(a'_c(x))$，即 α 定义了一个 2-胞 $\alpha\colon (F,a) \to (F',a')$，那么根据上述结果，$\alpha$ 也定义了一个 2-胞 $\alpha\colon (F,\mathfrak{a}) \to (F',\mathfrak{a}')$。反之，若对所有 $c \in \mathcal{C}$ 和 $S \in \mathfrak{Z}(P,J)(c)$ 都有 $\mathfrak{a}_c(S) \leqslant \mathbb{L}(\alpha_c)(\mathfrak{a}'_c(S))$，那么

$$a_c(x) = \mathfrak{a}_c(\eta_c^{(P,J)}(x)) \leqslant \mathbb{L}(\alpha_c)(\mathfrak{a}'_c(\eta_c^{(P,J)}(x))) = \mathbb{L}(\alpha_c)(a'_c(x)),$$

因此，α 定义了一个 2-胞 $\alpha\colon (F,a) \to (F',a')$。由此，我们得到同构 (8)。 □

注记 4.14. 同构 (8) 也可由以下更一般的观察得到：只要 (Q,K) 是一个教义站点，且单位的每个分量 $\eta_d^{(Q,K)}\colon Q(d) \to \mathfrak{Z}(Q,K)(d)$ 都是单射，那么对于任意其他教义站点 (P,J) 以及一对教义站点之间的态射

$$(F,a),(F,a')\colon (P,J) \rightrightarrows (Q,K),$$

自然变换 $\alpha\colon F \to F'$ 当且仅当 α 定义一个 2-胞 $(F,\mathfrak{a}) \to (F',\mathfrak{a}')$ 时，才定义一个 2-胞 $(F,a) \to (F',a')$。证明与命题 4.13 几乎相同。命题 4.13 展示了一个方向，而反向则由以下蕴含得出

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}_c\left(\eta_c^{(P,J)}(x)\right) \leqslant \mathfrak{Z}(Q,K)(\alpha_c)\left(\mathfrak{a}'_c\left(\eta_c^{(P,J)}(x)\right)\right) &\implies \eta_c^{(Q,K)}(a_c(x)) \leqslant \eta_c^{(Q,K)}(Q(\alpha_c)(a_c(x))),\\ &\implies a_c(x) \leqslant Q(\alpha_c(x)),\end{aligned}$$

对于所有 $c \in \mathcal{C}$ 和 $x \in P(c)$。

因此，诱导出的同态范畴之间的函子

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{DocSites}}((P,J),(Q,K)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{GeomDoc}}(\mathfrak{Z}(P,J),\mathfrak{Z}(Q,K))$$

是全忠实的。注意到对于任意几何教义 $\mathbb{L}$，$\eta^{(\mathbb{L},K_{\mathbb{L}})}\colon \mathbb{L} \to \mathfrak{Z}(\mathbb{L},K_{\mathbb{L}})$ 是一个同构，即可得到具体的同构 (8)。

接下来要描述伴随 (6) 的几何完备化单子 $(\mathfrak{Z}\ \eta,\mu)$ 的代数。由于几何完备化是一个幂等单子，简单应用 [4, 推论 4.2.4，第2] 卷（推广到 2-范畴框架）即可得到以下推论。

推论 4.15. 单子 $(\mathfrak{Z}\ \eta,\mu)$ 的代数与几何教义相一致：

$$\mathbf{DocSites}^{\mathfrak{Z}} \simeq \mathbf{GeomDoc}.$$

特别地，通过限制伴随 *(6)*，对每个范畴 $\mathcal{C}$，都有一个 *2*-等价

$$(\mathbf{DocSites}/\mathcal{C})^{\mathfrak{Z}} \simeq \mathbf{Loc}\left(\mathbf{Sets}^{\mathcal{C}^{op}}\right)^{op},$$

其中，$(\mathbf{DocSites}/\mathcal{C})$ 表示 $\mathbf{DocSites}$ 的 *1*-满 *2*-子范畴，其对象是纤维化在范畴 $\mathcal{C}$ 上的教义站点。

5 句法位点与几何完备化

到目前为止，我们一直用教义来对逻辑理论进行范畴化表示。不过，理论也常用句法范畴表示（例如，见 [23, §D1.4]）。直观地说，一阶理论 $\mathbb{T}$ 的句法范畴，是一个对象为上下文中的公式、箭头为表达函数关系的公式的范畴。更一般地，对于任何表达正则逻辑的教义 P，都可以定义其「句法范畴」$\mathrm{Syn}(P)$，即 P 的句法范畴；定义 5.7 中回顾了这一概念。

因此，研究教义的几何完备化与取其句法范畴之间的相互作用颇有意义。在 §5.4 中，我们将看到，教义站点的几何完备化会产生正则位点的几何完备化；正则位点是指那些底层范畴 $\mathcal{C}$ 为正则范畴，且所有正则满态射都是 K-覆盖的位点 $(\mathcal{C}, K)$。

我们按如下方式展开。

- 在 §5.1 中，我们回顾 [8] 中的存在性位点理论，具体讨论在教义这一语境下的情形，我们正是借助这种语言来表述本文的研究。我们观察到，存在性教义站点的几何完备化可以逐点计算。

- 底层教义也是主教义的存在性教义站点，具有构造“句法范畴”所需的表达能力。§5.2 回顾了这一构造，以及句法范畴构造与取子对象教义之间的拟 2-伴随 $\mathsf{Syn} \dashv \mathsf{Sub}_{(-)}$。

- 在 §5.3 中，我们将拟 2-伴随 $\mathsf{Syn} \dashv \mathsf{Sub}_{(-)}$ 扩展为存在性教义站点与正则位点之间的拟 2-伴随。在本小节中，我们还比较了现在可以与一个存在性教义站点相关联的两个层拓扑斯——$\mathsf{Sh}(\mathcal{C} \rtimes P, J_{\rtimes})$ 和 $\mathsf{Sh}(\mathsf{Syn}(P)\ J_{\mathbf{Syn}})$。对于一个存在教义 P，我们构造一个函子 $\zeta^P\colon \mathcal{C} \rtimes P \to \mathsf{Syn}(P)$，它给出一个稠密位点态射 $\zeta^P\colon (\mathcal{C} \rtimes P, J_{\rtimes}) \to (\mathsf{Syn}(P)\ J_{\mathbf{Syn}})$，从而得到一个等价 $\mathsf{Sh}(\mathcal{C} \rtimes P, J_{\rtimes}) \simeq \mathsf{Sh}(\mathsf{Syn}(P)\ J_{\mathbf{Syn}})$。
- 最后，我们将在 §5.4 描述正则位点的几何完备化。

5.1 存在性教义站点

我们已经看到，给定一个几何教义 $\mathbb{L}\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 框架$_{\mathrm{open}}$，范畴 $\mathcal{C} \rtimes \mathbb{L}$ 可赋予一个格罗滕迪克拓扑 $K_{\mathbb{L}}$，其覆盖筛是满足以下条件的筛 $\{ (c_i, U_i) \xrightarrow{f_i} (d, V) \mid i \in I \}$：

$$V = \bigvee_{i \in I} \exists_{f_i} U_i.$$

现在，我们使用存在性纤维化站点 这一术语，来考察其他教义 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 预序上的这种拓扑的变体，该术语在 [8]中引入。我们将在命题 5.5 中看到，这些教义站点的几何完备化可以按“逐点”方式计算。

首先，我们回顾 [8, §5]中的一些定义。请注意， [8] 中的论述采用了更一般的指标范畴框架 $F\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathsf{Cat}$，而我们选择只研究指标预序（或用我们的术语来说，教义）。

定义 5.1 (定义 5.1 [8])。 设 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 预序是一个教义，并且对每个箭头 $d \xrightarrow{f} c \in \mathcal{C}$，映射 $P(f)\colon P(c) \to P(d)$ 都有一个左伴随 $\exists_f$。再假设，对于每个 $c \in \mathcal{C}$，我们还给定预序 $P(c)$ 上的一个格罗滕迪克拓扑 J_c，使得 $\exists_f\colon P(c) \to P(d)$ 将 J_c-覆盖映为 J_d-覆盖。

(i) 我们称对 $(P, (J_c)_{c \in \mathcal{C}})$ 满足**相对弗罗贝尼乌斯条件**，如果对于对象 $(d, y) \in \mathcal{C} \rtimes P$ 上的每个筛 S，若该筛

$$\left\{ \exists_f z \leqslant y \;\middle|\; (c, z) \xrightarrow{f} (d, y) \in S \right\}$$

是 J_d-覆盖，则筛

$$\left\{ \exists_f z \leqslant x \;\middle|\; (c, z) \xrightarrow{f} (d, y) \in S,\ z \leqslant P(f)(x) \right\}$$

对于任何满足 $x \leqslant y$ 的 $x \in P(d)$，也都是 J_d-覆盖。

(ii) 若对每个关于 (d, y) 的筛 S （$\in \mathcal{C} \rtimes P$），只要该筛是 P-覆盖，

$$\left\{ \exists_f z \leqslant y \;\middle|\; (c, z) \xrightarrow{f} (d, y) \in S \right\}$$

我们就称这对 $(J_d, (e \xrightarrow{h} d \in \mathcal{C}))$ 满足相对贝克-切瓦利条件；给定一个箭头 $e \xrightarrow{h} d \in \mathcal{C}$，筛

$$\left\{ \exists_g z \leqslant P(h)(y) \,\middle|\, (c,z) \xrightarrow{f} (d,y) \in S,\, h \circ g = f \right\}$$

也是 J_d-覆盖。

若相对弗罗贝尼乌斯条件和相对贝克-切瓦利条件均成立，则称这对 $(P,(J_c)_{c\in\mathcal{C}})$ 为 存在性教义站点 。

设 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{PreOrd}$ 是一个教义，使得每个纤维 $P(c)$ 都带有一个格罗滕迪克拓扑 J_c，并且对每个箭头 $d \xrightarrow{f} c \in \mathcal{C}$，映射 $P(f)\colon P(c) \to P(d)$ 都有一个保覆盖左伴随 $\exists_f$。根据命题 3.5，我们希望在范畴 $\mathcal{C} \rtimes P$ 上定义一个格罗滕迪克拓扑 $J_\rtimes$，使得 $J_\rtimes$-覆盖筛恰好是那些满足 $\{(d, \exists_{f_i} x_i) \xrightarrow{f_i} (d,y) \mid i \in I\}$ 为 J_d-覆盖的筛 $\{(c_i, x_i) \xrightarrow{f_i} (d,y) \mid i \in I\}$。这种将筛赋给对象的方式具有自反性和传递性，但未必稳定。我们注意到，$J_\rtimes$ 在形如 $(d,x) \xrightarrow{\mathrm{id}} (d,y)$（分别地，$(e, P(h)(y)) \xrightarrow{h} (d,y)$）的箭头下的稳定性，恰好由相对弗罗贝尼乌斯条件（分别地，相对贝克-切瓦利条件）给出；并且由于任意箭头 $(e,x) \xrightarrow{h} (d,y) \in \mathcal{C} \rtimes P$ 都可以分解为

$$(e,x) \xrightarrow{\mathrm{id}_e} (e, P(h)(y)) \xrightarrow{h} (d,y)$$

我们得到以下命题。

命题 5.2（定理 5.1 [8]）。 对于上述教义 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 预序， $J_\rtimes$ 定义了范畴 $\mathcal{C} \rtimes P$ 上的一个格罗滕迪克拓扑，当且仅当序对 $(P, (J_c)_{c\in\mathcal{C}})$ 同时满足相对弗罗贝尼乌斯条件和相对贝克-切瓦利条件。

定义 5.3（定理 5.1 [8]）。 设 $(P, (J_c)_{c\in\mathcal{C}})$ 是一个存在性教义站点。我们将 $\mathcal{C} \rtimes P$ 上的格罗滕迪克拓扑 $J_\rtimes$ 称为序对 $(P, (J_c)_{c\in\mathcal{C}})$ 的存在性拓扑： 其中， $J_\rtimes$-覆盖筛恰好是满足 $\{(d, \exists_{f_i} x_i) \xrightarrow{f_i} (d,y) \mid i \in I\}$ 为 J_d-覆盖的那些筛 $\{(c_i, x_i) \xrightarrow{f_i} (d,y) \mid i \in I\}$。

相对弗罗贝尼乌斯条件和相对贝克-切瓦利条件与通常的弗罗贝尼乌斯条件和贝克-切瓦利条件之间的关系，由以下命题给出。

命题 5.4 (命题 5.3 [8])。 对于一个存在性教义站点$(P,(J_c)_{c\in\mathcal{C}})$，

(i) 若 $P(c)$ 对每个 $c \in \mathcal{C}$ 都有有限交，则有序对$(P, (J_c)_{c\in\mathcal{C}})$ 满足相对弗罗贝尼乌斯条件，当且仅当 P 满足弗罗贝尼乌斯条件——也就是说 $\exists_f z \wedge x = \exists_f (z \wedge P(f)(x))$。*(ii)* 若 $\mathcal{C}$ 有所有拉回，则有序对$(P, (J_c)_{c\in\mathcal{C}})$ 满足相对贝克-切瓦利条件，当且仅当 P 满足贝克-切瓦利条件——也就是说，对于每个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} c \times_e d & \xrightarrow{g} & d \\ \downarrow{\scriptstyle k} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ c & \xrightarrow{f} & e \end{array}$$

对于 $\mathcal{C}$，方块

$$\begin{array}{ccc} P(c \times_e d) & \xrightarrow{\exists_g} & P(d) \\ {\scriptstyle P(k)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle P(h)} \\ P(c) & \xrightarrow{\exists_f} & P(e) \end{array}$$

可交换。

因此我们注意到，对于任意存在性教义站点（P,（J_c）$_{c\in\mathcal{C}}$），如果 P 是一个主教义，那么 P 会自动成为一个存在教义，并且存在性拓扑 $J_\rtimes$ 包含拓扑 J_{Ex}。这样的存在性教义站点应理解为一种解释正则逻辑的教义，除非还解释更丰富的句法。

存在性教义站点的几何完备化。由于对于 $\mathcal{C}$ 的任意箭头 $d \xrightarrow{f} c$，箭头 $(d, x) \xrightarrow{f} (c, \exists_f x)$ 是一个 $J_{\rtimes}$-覆盖，元素 $S \in \mathfrak{Z}(P, J)(c)$ 完全由其形如 $(\mathrm{id}_c, x) \in S$ 的元素所确定。因此，根据构造 4.2，我们得到如下结果。

命题 5.5。对于一个存在性教义站点 $(P, (J_c)_{c\in\mathcal{C}})$，其几何完备化 $\mathfrak{Z}(P, J_{\rtimes})$ 同构于其逐点理想完备化，即：

(i) 对于 $\mathcal{C}$ 中的每个对象 c，$\mathfrak{Z}(P, J)(c)$ 都是帧 J_c-$\mathbf{Idl}(P(c))$，

(ii) 对于 $\mathcal{C}$ 中的每个箭头 $d \xrightarrow{f} c$，$\mathfrak{Z}(P, J)(f) : \mathfrak{Z}(P, J)(c) \to \mathfrak{Z}(P, J)(d)$ 将一个 J_c-理想 I 映射为 J_d-理想

$$f^*(I) = \{\, y \in P(d) \mid \exists_f y \in I \,\}.$$

例 5.6。设 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{PreOrd}$ 是一个教义，使得对于每个箭头 $d \xrightarrow{f} c \in \mathcal{C}$，映射 $P(f)\colon P(c) \to P(d)$ 有一个左伴随 $\exists_f$。特别值得关注的情形是：赋予存在性教义站点 $(P, (J_c)_{c\in\mathcal{C}})$ 的每个纤维 $P(c)$ 的格罗滕迪克拓扑 J_c 都是子正则的，也就是说，$P(c)$ 中一族不等式 $\{\, x_i \leqslant y \mid i \in I \,\}$ 是 J_c-覆盖的，当且仅当其上确界 $\bigvee_{i\in I} x_i$ 存在且 $y \leqslant \bigvee_{i\in I} x_i$（若 $P(c)$ 是偏序集，则 $y = \bigvee_{i\in I} x_i$）。对于 $\mathcal{C}$ 中的每个箭头 $d \xrightarrow{f} c$，由于 $\exists_f$ 是左伴随，它保留 $P(d)$ 中所有存在的上确界，因此当 J_d 和 J_c 都是子正则的时，$\exists_f$ 自动保持覆盖。考察某些情形将使我们能够把存在教义和相干教义推广到非笛卡尔情形，正如注 3.2 中所述。

(i) 存在一个存在性教义站点 $(P, (J_{\mathrm{triv}})_{c\in\mathcal{C}})$，其中每个纤维 $P(c)$ 都赋予了平凡拓扑 J_{triv}，当且仅当：

(a) *(相对弗罗贝尼乌斯条件)* 对于 $\mathcal{C}$, $x, y \in P$ 中的每个箭头 $d \xrightarrow{f} c(c)$，满足 $x \leqslant y$ 且 $z \in P(d)$，使得

$$\exists_f z \leqslant y \text{ and } y \leqslant \exists_f z,$$

存在某个 $w \in P(d)$，满足 $w \leqslant z$，使得

$$\exists_f w \leqslant x \text{ and } x \leqslant \exists_f w;$$

(b) *(相对贝克-切瓦利条件)* 对于每对箭头

$$\begin{array}{ccc} & & e \\ & & \downarrow h \\ d & \xrightarrow{f} & c \end{array}$$

$\mathcal{C}$, $y \in P(c)$ 和 $z \in P(d)$ 中的箭头，使得

$$\exists_f z \leqslant y \text{ and } y \leqslant \exists_f z,$$

存在一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} e' & \xrightarrow{g} & e \\ \downarrow k & & \downarrow h \\ d & \xrightarrow{f} & c \end{array}$$

在 $\mathcal{C}$ 中，使得

$$\exists_g P(k)(z) \leqslant x \text{ and } x \leqslant \exists_g P(k)(z).$$

注意，若 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{MSLat}$ 是一个存在教义，则 $(P, (J_{\mathrm{triv}})_{c\in\mathcal{C}})$ 是一个存在性教义站点。我们将由存在性教义站点 $(P, (J_{\mathrm{triv}})_{c\in\mathcal{C}})$ 在 $\mathcal{C} \rtimes P$ 上诱导的存在性拓扑记作 J_{Ex}，即由以下形式的覆盖族生成的格罗滕迪克拓扑

$$(d, x) \xrightarrow{g} (c, \exists_g x),$$

对于 $x \in P(d)$ 和 $d \xrightarrow{g} c \in \mathcal{C}$，与命题 3.5(i) 类似。我们将 RelExDoc（相对存在教义的 2-范畴）定义为 DocSites 的满 2-子范畴，其对象具有 (P, J_{Ex}) 的形式，其中 $(P, (J_{\mathrm{triv}})_{c\in\mathcal{C}})$ 是一个存在性教义站点。因此，存在教义的范畴 ExDoc 现在是 RelExDoc 的一个满 2-子范畴。

(ii) 假设我们可以为每个纤维 $P(c)$ 赋予格罗滕迪克拓扑 J_{Coh}，其中 $y \in P(c)$ 上的筛 S 是 J_{Coh}-覆盖，当且仅当 S 包含一个有限族

$$\{\, x_i \leqslant y \mid i \in I \,\} \subseteq S$$

使得 $y \leqslant \bigvee_{i\in I} x_i$。若 $P(c)$ 是一个格，则 J_{Coh} 在 $P(c)$ 上定义格罗滕迪克拓扑，当且仅当 $P(c)$ 是一个分配格。序对 $(P, (J_{\mathrm{Coh}})_{c\in\mathcal{C}})$ 定义一个存在性教义站点，当且仅当：

(a) *(相对弗罗贝尼乌斯条件)* 对于每个满足 $x \leqslant y$ 的序对 $x, y \in P(c)$，以及以 $i \in I$ 为指标、满足以下条件的每个由序对 $d_i \xrightarrow{f_i} c$ 和 $z \in P(d_i)$ 组成的有限集：

$$\bigvee_{i\in I} \exists_{f_i} z_i \leqslant y \text{ and } y \leqslant \bigvee_{i\in I} \exists_{f_i} z_i,$$

对于每个 $i \in I$，存在某个满足 $w_i \leqslant z_i$ 的 $w_i \in P(d_i)$，使得

$$\bigvee_{i\in I} \exists_{f_i} w_i \leqslant x \text{ and } x \leqslant \bigvee_{i\in I} \exists_{f_i} w_i;$$

(b) *(相对贝克-切瓦利条件)* 对于 $\mathcal{C}$, $y \in P(c)$ 中的每个箭头 $e \xrightarrow{h} c$，以及以 $i \in I$ 为指标、满足以下条件的每个由序对 $d_i \xrightarrow{f_i} c$ 和 $z \in P(d_i)$ 组成的有限集：

$$\bigvee_{i\in I} \exists_{f_i} z_i \leqslant y \text{ and } y \leqslant \bigvee_{i\in I} \exists_{f_i} z_i,$$

对于每个 $i \in I$，存在由 $j \in J_i$ 索引的有限组箭头序对 g_j 和 k_j，使得存在一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} e'_j & \xrightarrow{g_j} & e \\ \downarrow{\scriptstyle k_j} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ d & \xrightarrow{f} & c \end{array}$$

的 $\mathcal{C}$，其次

$$\bigvee_{i\in I} \bigvee_{j\in J_i} \exists_{g_j} P(k_j)(z_i) \leqslant x \text{ and } x \leqslant \bigvee_{i\in I} \bigvee_{j\in J_i} \exists_{g_j} P(k_j)(z_i).$$

与相对存在教义类似，类比命题 3.5(ii)，我们将由存在性教义站点 $(P, (J_{\mathrm{Coh}})_{c\in\mathcal{C}})$ 诱导的 $\mathcal{C} \rtimes P$ 上的存在性拓扑记为 J_{Coh}，即由下列形式的覆盖族生成的格罗滕迪克拓扑

$$(d, x) \xrightarrow{g} (c, \exists_g x \vee \exists_h y) \xleftarrow{h} (e, y),$$

对于 $x \in P(d)$、$y \in P(d)$ 以及箭头 $d \xrightarrow{g} c$、$e \xrightarrow{h} c \in \mathcal{C}$。我们将所得的教义站点 (P, J_{Coh}) 称为相对相干教义，并将 DocSites 中由相对相干教义构成的满 2-子范畴记为 RelCohDoc。再次可知，CohDoc 是 RelCohDoc 的满 2-子范畴。

当 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to$ DLat 是一个相干教义，且 $\mathcal{C} \rtimes P$ 配备了拓扑 J_{Coh} 时，由命题 5.5 可知，几何完备化 $\mathsf{3}(P, J_{\mathrm{Coh}})(c)$ 的纤维是与分配格 $P(c)$ 相关联的相干局部；这是在分配格的（无点）斯通对偶下得到的（参见 [22, §II.3.3]）。

特别是，若 $\mathbb{B}\colon \mathcal{C}^{op} \to$ Bool 是一个布尔教义，那么 $\mathsf{3}(\mathbb{B}, J_{\mathrm{Coh}})\colon \mathcal{C}^{op} \to$ StFrm^{open} 会将 $c \in \mathcal{C}$ 映射到与布尔代数 $\mathbb{B}(c)$ 相对应的 Stone 框架。若存在一个同构 $\mathbb{B} \cong F^{\mathbb{T}}$

对于某个定义在签名 Σ 上的单排序经典理论 $\mathbb{T}$，则 $\mathfrak{Z}(\mathbb{B}, J_{\mathrm{Coh}})(\vec{x})$（其中 $\vec{x} \in \mathsf{Con}_\Sigma$ 是一个长度为 n 的变量上下文/元组）与该理论 $\mathbb{T}$ 熟知的第 n 个斯通空间的开集框架一致（见 [17, §6.3]）。这种形式的教义（或者更确切地说，由于 Stone 框架是空间的，其教义 $\mathsf{Pt} \circ \mathfrak{Z}(\mathbb{B}, K_{\mathbb{B}}^{\mathrm{fin}}) \colon \mathsf{Con}_\Sigma \to \mathsf{StSpace}$）在文献 [24] 中被称为 多元空间，并被建议用于以范畴论方式证明经典逻辑的标准定理；这一愿望已在 [15] 中实现。

5.2 句法范畴

我们总能从具有所有有限极限的范畴 $\mathcal{C}$ 中得到一个主教义，方法是取其子对象教义 $\mathsf{Sub}_{\mathcal{C}} \colon \mathcal{C}^{op} \to \mathsf{MSLat}$，即满足以下条件的教义：

(i) 对每个 $\mathcal{C}$ 的对象 c，$\mathsf{Sub}_{\mathcal{C}}(c)$ 是 c 的子对象所构成的交半格，

(ii) 对每个 $\mathcal{C}$ 的箭头 $d \xrightarrow{f} c$，$\mathsf{Sub}_{\mathcal{C}}(f) \colon \mathsf{Sub}_{\mathcal{C}}(c) \to \mathsf{Sub}_{\mathcal{C}}(d)$ 是将子对象 $e \rightarrowtail c$ 映射到其拉回的映射

$$\begin{array}{ccc} f^*(e) & \longrightarrow & e \\ \downarrow & & \downarrow \\ d & \xrightarrow{f} & c. \end{array}$$

取笛卡尔范畴的子对象教义，自然会定义一个 2-函子

$$\mathrm{Sub}_{(-)} \colon \mathbf{Cart} \to \mathbf{PrimDoc}.$$

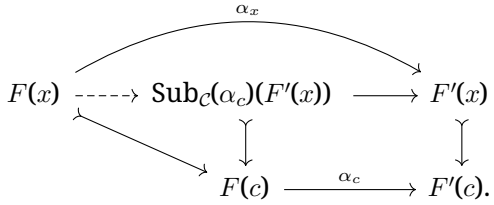
(i) 每个笛卡尔函子 $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 限制为一个交半格同态

$$a_c^F \colon \mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(c) \to \mathrm{Sub}_{\mathcal{D}}(F(c))$$

在 $c \in \mathcal{C}$ 中自然。因此，二元组 (F, a^F) 定义了一个主教义态射

$$(F, a^F) \colon \mathrm{Sub}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{Sub}_{\mathcal{D}}.$$

(ii) 每个自然变换 $\alpha \colon F \to F'$ 都定义了 PrimDoc 中的一个 2-胞 $\alpha \colon (F, a^F) \to (F', a^{F'})$。对于每个 $c \in \mathcal{C}$ 和 $x \in \mathsf{Sub}_{\mathcal{C}}(c)$，所需的不等式 $a^F(x) \leqslant \mathsf{Sub}_{\mathcal{C}}(f)(a^{F'}(x))$ 根据拉回的泛性质成立：



此外，很容易验证 2-函子 $\mathsf{Sub}_{(-)}$ 是全忠实的。

对于一个教义 $P \colon \mathcal{C}^{op} \to \mathsf{PreOrd}$，可以构造一个句法范畴 $\mathsf{Syn}(P)$；从子对象教义出发的构造与此互为逆构造，因为对于某个笛卡尔范畴子类（正则范畴，见下文），$\mathsf{Syn}(\mathsf{Sub}_{\mathcal{C}}) \simeq \mathcal{C}$。只有当教义 P 足够丰富，能够解释可证明函数关系时，才可能构造该教义的句法范畴。这些谓词根据教义的内部逻辑（见 [19, §4.3]），编码了两个其他谓词之间某个函数的函数图。为此，我们至少需要正则逻辑。本小节回顾[41], [42] 和 [43] 中有关句法范畴构造的材料。我们的阐述与 [11,§3]中的说明类似。

构建句法范畴。 无需赘述：给定两个子集 $A \subseteq X$ 和 $B \subseteq Y$，函数 $f \colon A \to B$ 的函数图由一个子集 $f \subseteq X \times Y$ 构成，使得

$$(x, y) \in f \implies x \in A,\, y \in B, \quad (x, y), (x, y') \in f \implies y = y', \quad x \in A \implies \exists y \in B\ (x, y) \in f.$$

可证明函数关系背后的构想，是将这些蕴涵翻译成教义的内语言，如下文所示。回顾 [31] ，存在教义P: $\mathcal{C}^{op} \to$ MSLat 对象 $c \in \mathcal{C}$的内部等号谓词由 $\exists_{\Delta_c} \top_c$给出，其中 Δ_c: $c \to c \times c$ 是对角线。

定义 5.7。 设 P: $\mathcal{C}^{op} \to$ MSLat 是一个存在教义。 P的句法范畴 Syn(P)定义如下:

(i) 对象为序对 (c, U)，其中 c是 $\mathcal{C}$的一个对象，且 $U \in P(c)$,
(ii) 每个箭头 $(c, U) \to (d, V)$ 都由某个 $W \in P(c \times d)$ 给出，该式定义了一个可证明函数关系，即满足以下不等式:

$$W \leqslant P(\mathrm{pr}_1)(U) \wedge P(\mathrm{pr}_2)(V), \quad P(\mathrm{pr}_{1,2})(W) \wedge P(\mathrm{pr}_{1,3})(W) \leqslant P(\mathrm{pr}_{2,3})\exists_{\Delta_d} \top_d, \quad U \leqslant \exists_{\mathrm{pr}_1} W,$$

其中 pr_1 和 pr_2 是投影

$$c \xleftarrow{\mathrm{pr}_1} c \times d \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} d,$$

$\mathrm{pr}_{1,2}$, $\mathrm{pr}_{1,3}$ 和 $\mathrm{pr}_{2,3}$ 是投影

$$\begin{array}{ccccc} & \overset{\mathrm{pr}_{1,3}}{\swarrow} & c \times d \times d & \overset{\mathrm{pr}_{2,3}}{\searrow} & \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_{1,2}} & & \\ c \times d & & c \times d & & d \times d, \end{array}$$

且 Δ_d: $d \to d \times d$ 是对角线。

(c, U) 上的恒等态射由 $\exists_{\Delta_c} U \in P(c \times c)$ 给出，而两个箭头的复合

$$(c, U) \xrightarrow{W} (d, V) \xrightarrow{W'} (e, V')$$

由 $\exists_{\mathrm{pr}_{1,\ 3}}(P(\mathrm{pr}^{1,2})(W) \wedge P(\mathrm{pr}^{2,3})(W'))$ 给出。

注 5.8. 我们已经介绍了存在教义的句法范畴构造。这类似于寓言范畴的映射范畴 构造（见 [13, §2.132]）。事实上，对于每个存在教义 P，这两种构造一致，即 Syn(P) $\simeq \mathcal{MAP}$(A(P))，其中 A(P) 是 P 上的关系寓言范畴，也就是其对象为元素 $x \in P(c \times d)$ 的寓言范畴（注意， P 必须是正则教义，才能表达 $x \in P(c \times d)$ 与 $y \in P(d \times e)$ 的关系复合）。

例 5.9. 设 $\mathbb{T}$ 是签名 Σ 上的一个理论，属于包含正则逻辑的某个一阶逻辑片段（见 [23, 定义 D1.1.3]）。由例 1.1 中的正则教义 $F^{\mathbb{T}}$: $\mathrm{Sort}_\Sigma \to$ MSLat 定义的句法范畴 Syn($F^{\mathbb{T}}$)，按定义与 $\mathbb{T}$ 的通常句法范畴一致，详见 [23,§D1.4]。

句法—子对象伴随。 对存在教义取句法范畴，可得到 2-函子 Sub(−): Cart $\to$ PrimDoc 在一个适当的 2-子范畴——正则范畴的 2-范畴——上的限制的左逆。

定义 5.10 (§A1.3 [23]). 我们用 Reg 表示以下 2-范畴:

(i) 其对象是正则范畴 ——具有有限极限且像分解在拉回下稳定的范畴（我们还要求正则范畴是良基数）；(ii) 其 1-胞腔是正则函子 （在 [3] 和 [10]中也称为正合函子 ）——保有限极限且也保正则满态射的函子；(iii) 其 2-胞腔是正则函子之间的自然变换。

对于每个正则范畴 $\mathcal{C}$，子对象教义 $\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 预序是一个存在教义（见[19, 定理 4.4.4]）。对于范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个箭头 f，$\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(f)$ 的左伴随由像的存在性给出（见 [23, 引理 A1.3.1]）。因此，上文的子对象 2-函子 $\mathrm{Sub}(-)\colon \mathbf{Cart} \to \mathbf{PrimDoc}$ 限制为一个 2-函子

$$\mathrm{Sub}_{(-)}\colon \mathbf{Reg} \to \mathbf{ExDoc}.$$

句法范畴构造还诱导出一个 2-函子 $\mathrm{Syn}\colon \mathbf{ExDoc} \to \mathbf{Reg}$。对于存在教义 P，范畴 $\mathrm{Syn}(P)$ 是正则的：它具有有限极限，而箭头 $(c,U) \xrightarrow{W} (d,V) \in \mathrm{Syn}(P)$ 的像分解为

$$(c,U) \xrightarrow{W} (d, \exists_{\mathrm{pr}_2} W) \rightarrowtail (d,V)$$

（见 [41, §2.4 & 2.5]）。由于存在主义教义的态射 $(F,a)\colon P \to Q$ 保持正则逻辑的解释，(F,a) 诱导出一个正则函子 $\mathrm{Syn}(F,a)\colon \mathrm{Syn}(P) \to \mathrm{Syn}(Q)$。

这两个函子构成一个拟 2-伴随

$$\mathbf{ExDoc} \underset{\mathrm{Sub}_{(-)}}{\overset{\mathbf{Syn}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Reg} \tag{9}$$

使得，由于 $\mathrm{Sub}(-)$ 是全忠实的，对每个 $\mathcal{C} \in \mathbf{Reg}$，余单位都是范畴 $\mathrm{Syn}(\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}) \simeq \mathcal{C}$ 的自然等价。拟 2-伴随 (9) 可由 [42, 命题 1.3] 和 [43, 定理 3.6] 中的类似拟 2- 伴随推导得出。

5.3 句法位点

为了将目前表述的几何完备化应用于正则范畴，我们需要一个准 2-伴随（9）的版本，该版本还纳入了格罗滕迪克拓扑。本小节前半部分将介绍这一扩展。

我们将引入正则位点的 2-范畴，以及一个特定的存在性教义位点 2-范畴，并将其记作 $\mathbf{ExDocSites}$。接着，我们将扩展 2-函子

$$\mathbf{Syn}\colon \mathbf{ExDoc} \to \mathbf{Reg}, \quad \mathrm{Sub}_{(-)}\colon \mathbf{Reg} \to \mathbf{ExDoc}$$

具体而言，我们将证明，对于每个存在性教义站点 $(P, (J_c)_{c\in\mathcal{C}})$（分别地，对于正则位点 $(\mathcal{C}, K)$），都存在一个自然选取的格罗滕迪克拓扑 $J_{\mathbf{Syn}}$，定义在 $\mathrm{Syn}(P)$ 上，使得 $(\mathrm{Syn}(P)\ J_{\mathbf{Syn}})$ 成为正则位点（分别地，对于每个 $c \in \mathcal{C}$，在 $\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(c)$ 上都存在一个自然选取的格罗滕迪克拓扑 $K|_{\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(c)}$，使得 $(\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}, (K|_{\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(c)})_{c\in\mathcal{C}})$ 成为存在位点）。最后，我们证明这些扩展后的 2-函子构成拟 2-伴随。

对于每个存在性教义站点 $(P, (J_c)_{c\in\mathcal{C}}) \in \mathbf{ExDocSites}$，现在有两种选择：$\mathrm{Sh}(\mathcal{C} \rtimes P, J_{\rtimes})$ 和 $\mathrm{Sh}(\mathrm{Syn}(P)\ J_{\mathbf{Syn}})$，可作为与该教义站点关联的拓扑斯。特别地，如果 $\mathbb{T}$ 是包含正则逻辑的某个逻辑片段中的理论，那么 $\mathbb{T}$的分类拓扑斯也有两种选择。本小节的后半部分将通过证明拓扑斯等价，说明这是一种二分选择

$$\mathbf{Sh}(\mathcal{C} \rtimes P, J_{\rtimes}) \simeq \mathbf{Sh}(\mathbf{Syn}(P), J_{\mathbf{Syn}}),$$

在 $(P, (J_c)_{c\in\mathcal{C}}) \in \mathbf{ExDocSites}$ 中自然。

正则网站。

定义 5.11。 (i) 令 $\mathbf{RegSites}$ 为一个 2-范畴，其对象是正则网站，即由一对 $(\mathcal{C}, K)$ 构成，其中 $\mathcal{C}$ 是正则范畴，K 是 $\mathcal{C}$ 上的格罗滕迪克拓扑，并且每个正则满态射 $c \twoheadrightarrow d$ 生成的筛都是 K-覆盖。$\mathbf{RegSites}$ 的 1-胞腔是保持覆盖的正则函子，2-胞腔则是它们之间的所有自然变换。

(ii) 我们用 $\mathbf{ExDocSites}$ 表示 $\mathbf{DocSites}$ 中由形如 $(P, J_{\rtimes})$ 的对象构成的满 2-子范畴，其中这些对象对应于一个存在性教义站点 $(P,(J_c)_{c\in\mathcal{C}})$，且其底层教条 P 也是一个主教义（因此，根据命题 5.4，它也是一个存在教义）。

注 5.12. 设 $(\mathcal{C}, K) \in \mathbf{RegSites}$ 是一个正则位点。由于每个态射 $d \xrightarrow{f} c \in \mathcal{C}$ 都可以分解为一个正则满态射后接一个单态射

$$d \twoheadrightarrow f(d) \rightarrowtail c,$$

格罗滕迪克拓扑 K 在 $\mathcal{C}$ 上完全由哪些子对象族

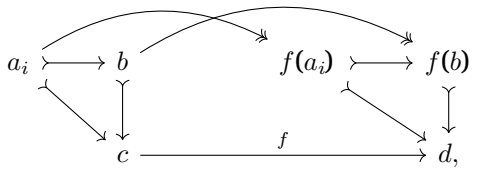
$$\{ e_i \rightarrowtail c \mid i \in I \}$$

对每个 $c \in \mathcal{C}$都是 K-覆盖来确定。

对于正则位点 $(\mathcal{C}, K)$，通过为每个子对象格 $\mathbf{Sub}_{\mathcal{C}}(c)$赋予格罗滕迪克拓扑$K|_{\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(c)}$，我们得到一个存在位点 $(\mathcal{C}, (K|_{\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(c)})_{c\in\mathcal{C}})$。注意，左伴随

$$\exists_f \colon \mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(c) \to \mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(d),$$

对每个箭头 $c \xrightarrow{f} d \in \mathcal{C}$，都保留覆盖，因为若箭头族 $\{ a_i \rightarrowtail b \mid i \in I \}$ 属于 $\mathbf{Sub}_{\mathcal{C}}(c)$且是$K$-覆盖，那么利用图表



鉴于 $a_i \twoheadrightarrow f(a_i)$ 和 $b \twoheadrightarrow f(b)$ 都是 K-覆盖，且 K-覆盖具有传递性，我们注意到$\{ f(a_i) \rightarrowtail f(b) \mid i \in I \}$ 也是一个 K-覆盖族。我们将 $\mathcal{C} \rtimes \mathbf{Sub}_{\mathcal{C}}$ 上的相应拓扑记为 K_{Sub}。容易验证，给定正则位点 $(\mathcal{C}, K)$ 和 $(\mathcal{D}, K')$，以及正则函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，$F$ 将K-覆盖映射为 K'-覆盖，当且仅当诱导的教义态射

$$(F, a^F) \colon \mathrm{Sub}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{Sub}_{\mathcal{D}}$$

将 K_{Sub}-覆盖映射为 K'_{Sub}-覆盖。因此，我们得到一个 2-函子 $\mathbf{Sub}(-)\colon \mathbf{RegSites} \to \mathbf{ExDocSites}$；此外，由于 $\mathbf{Sub}(-)\colon \mathbf{Reg} \to \mathbf{ExDoc}$ 是全忠实的，该 2-函子也是全忠实的。

反过来，对于每个存在位点 $(P, (J_c)_{c\in\mathcal{C}}) \in \mathbf{ExDocSites}$，我们可以在句法位点 $\mathbf{Syn}(P)$ 上赋予格罗滕迪克拓扑 $J_{\mathbf{Syn}}$，其中一族箭头

$$\left\{ (c_i, U_i) \xrightarrow{W_i} (d, V) \,\middle|\, i \in I \right\}$$

是 $J_{\mathbf{Syn}}$-覆盖，当且仅当该族

$$\{ \exists_{\mathrm{pr}_2} W_i \leqslant V \mid i \in I \}$$

是 J_d-覆盖。回想一下，箭头 $(c, U) \xrightarrow{W} (d, V) \in \mathbf{Syn}(P)$ 的像分解为

$$(c, U) \xrightarrow{W} (d, \exists_{\mathrm{pr}_2} W) \rightarrowtail (d, V),$$

其左因子 $(c, U) \xrightarrow{W} (d, \exists_{\mathrm{pr}_2} W)$ 显然是一个 $J_{\mathbf{Syn}}$-覆盖。因此，正则满态射是 J_{Syn}-覆盖，所以 $(\mathbf{Syn}(P)\ J_{\mathbf{Syn}})$ 是一个正则位点。同样显然，如果 $(F, a)\colon (P, J_{\rtimes}) \to (Q, J'_{\rtimes})$ 是 ExDocSites 的一个态射，那么诱导函子

$$\mathbf{Syn}(F, a) \colon \mathbf{Syn}(P) \to \mathbf{Syn}(Q)$$

将 $J_{\mathbf{Syn}}$-覆盖映为 $J'_{\mathbf{Syn}}$-覆盖，因此存在一个函子 $\mathbf{Syn} : \mathbf{ExDocSites} \to \mathbf{RegSites}$。

命题 5.13。 拟 *2*-伴随 *(9)* 可扩展为另一个拟 *2*-伴随以及一个伴随态射

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{ExDoc} & \xleftarrow{U} & \mathbf{ExDocSites} \\ {\scriptstyle \mathbf{Syn}}\downarrow \dashv \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Sub}_{(-)}} & & {\scriptstyle \mathbf{Syn}}\downarrow \dashv \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Sub}_{(-)}} \\ \mathbf{Reg} & \xleftarrow{U'} & \mathbf{RegSites}, \end{array}$$

即 $\mathbf{Syn} \circ U = U' \circ \mathbf{Syn}$和 $\mathrm{Sub}_{(-)} \circ U' = U \circ \mathrm{Sub}^{(-)}$，其中 U和 U'是遗忘 *2*-函子。

命题 5.13 是通过限制等价

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Reg}}(\mathbf{Syn}(P), \mathcal{C}) & \simeq & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ExDoc}}(P, \mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{RegSites}}((\mathbf{Syn}(P), J_{\mathbf{Syn}}), (\mathcal{C}, K)) & \simeq & \mathrm{Hom}_{\mathbf{ExDocSites}}((P, J_{\rtimes}), (\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}, K_{\mathrm{Sub}})). \end{array} \tag{10}$$

比较层拓扑斯。现在我们希望比较两个层拓扑斯 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C} \rtimes P, J_{\rtimes})$ 和 $\mathbf{Sh}(\mathbf{Syn}(P)\ J_{\mathbf{Syn}})$，其中的存在性教义站点为 $(P, (J_c)_{c\in\mathcal{C}}) \in \mathbf{ExDocSites}$。由自然等价 (10)，对于一个格罗滕迪克拓扑斯 $\mathcal{E}$，我们已经得到一个自然等价

$$\begin{aligned} \mathbf{Geom}(\mathcal{E}, \mathbf{Sh}(\mathbf{Syn}(P), J_{\mathbf{Syn}})) &\simeq J_{\mathbf{Syn}}\text{-}\mathbf{Flat}(\mathbf{Syn}(P), \mathcal{E}) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{RegSites}}((\mathbf{Syn}(P), J_{\mathbf{Syn}}), (\mathcal{E}, J_{\mathrm{can}})), \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{ExDocSites}}((P, J_{\rtimes}), (\mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}, K_{\mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}})), \\ &\simeq J_{\rtimes}\text{-}\mathbf{Flat}(\mathcal{C} \rtimes P, \mathcal{E}), \\ &\simeq \mathbf{Geom}(\mathcal{E}, \mathbf{Sh}(\mathcal{C} \rtimes P, J_{\rtimes})) \end{aligned}$$

因此得到层拓扑斯 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C} \rtimes P, J_{\rtimes}) \simeq \mathbf{Sh}(\mathbf{Syn}(P)\ J_{\mathbf{Syn}})$ 之间的等价。不过，了解这个等价是如何产生的颇有启发。

对于每个 $(P, (J_c)_{c\in\mathcal{C}}) \in \mathbf{ExDocSites}$，我们将构造一个函子 $\zeta^P\colon \mathcal{C} \rtimes P \to \mathbf{Syn}(P)$，然后证明

$$\zeta^P\colon (\mathcal{C} \rtimes P, J_{\rtimes}) \to (\mathbf{Syn}(P), J_{\mathbf{Syn}})$$

是稠密位点态射。因此，我们得到一个拓扑斯等价

$$\mathbf{Sh}(\mathcal{C} \rtimes P, J_{\rtimes}) \simeq \mathbf{Sh}(\mathbf{Syn}(P), J_{\mathbf{Syn}}).$$

由于 $\mathcal{C} \rtimes P$和 $\mathbf{Syn}(P)$ 具有相同的对象，我们显然知道希望 ζ^P如何作用于对象。因此，我们的首要任务是从 $\mathcal{C} \rtimes P$中的一个箭头 $(c, U) \xrightarrow{f} (d, V)$ 构造一个可证明函数关系。对于存在教义 $F^{\mathbb{T}}$，这很简单：与正则理论$\mathbb{T}$相关联的 $\mathsf{Con}_{\Sigma} \to \mathbf{MSLat}$。对于 $\mathsf{Con}_{\Sigma} \rtimes F^{\mathbb{T}}$中的每个箭头 $\{\vec{x}\colon \varphi\} \xrightarrow{\sigma} \{\vec{y}\colon \psi\}$，公式 $\varphi \wedge \bigwedge_{y_i\in\vec{y}} y_i = \sigma(y_i)$ 在上下文 $\vec{x}, \vec{y}$中，很容易证明是一个可证明函数公式

$$\{\vec{x} : \varphi\} \xrightarrow{\varphi\wedge\bigwedge_{y_i\in\vec{y}} y_i=\sigma(y_i)} \{\vec{y} : \psi\}.$$

我们将在下文证明，同样的直觉也适用于任意存在教义。

引理 5.14。 设 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{MSLat}$ 为一个存在教义。对于每个箭头 $(c, U) \xrightarrow{f} (d, V)$ 属于 $\mathcal{C} \rtimes P$，也就是说，只要 $U \leqslant P(f)(V)$，命题

$$\exists_{\mathrm{id}_c \times f} U \in P(c \times d)$$

是一个可证明函数关系 $(c, U) \to (d, V) \in \mathbf{Syn}(P)$。

证明。 我们必须检查定义 5.7(ii) 中的三个条件是否都满足。使 g

$$U \leqslant U = P(\mathrm{pr}_1 \circ \mathrm{id}_c \times f)(U) \text{ and } U \leqslant P(f)(V) = P(\mathrm{pr}_2 \circ \mathrm{id}_c \times f)(V),$$

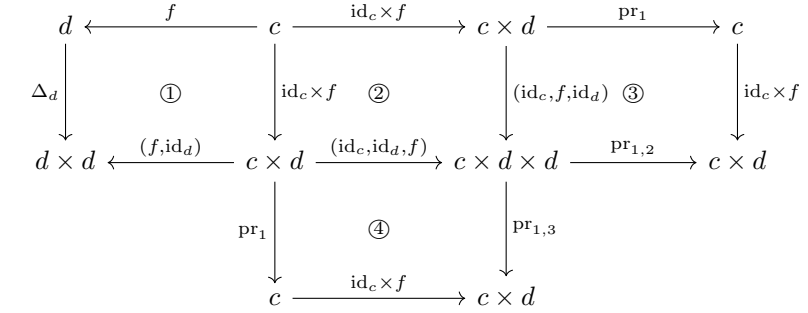
我们得到第一个不等式

$$\begin{aligned} U \leqslant P(\mathrm{pr}_1 \circ \mathrm{id}_c \times f)(U),\ P(\mathrm{pr}_2 \circ \mathrm{id}_c \times f)(V) &\implies U \leqslant P(\mathrm{id}_c \times f)P(\mathrm{pr}_1)(U),\ P(\mathrm{id}_c \times f)P(\mathrm{pr}_2)(V), \\ &\implies \exists_{\mathrm{id}_c \times f}(U) \leqslant P(\mathrm{pr}_1)(U) \wedge P(\mathrm{pr}_2)(V). \end{aligned}$$

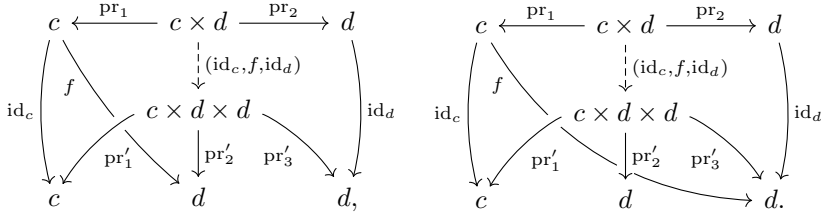
第二个所需的不等式,

$$P(\mathrm{pr}_{1,2})\exists_{\mathrm{id}_c \times f} U \wedge P(\mathrm{pr}_{1,3})\exists_{\mathrm{id}_c \times f} U \leqslant P(\mathrm{pr}_{2,3})\exists_{\Delta_d} \top_d,$$

实质上是内部等号谓词的传递性。我们首先注意到，图表中的所有方块



都是拉回，其中 $(\mathrm{id}_c, f, \mathrm{id}_d)$ 和 $(\mathrm{id}_c, \mathrm{id}_d, f)$ 表示普遍得到的映射



我们还注意到 $(f, \mathrm{id}_d) = \mathrm{pr}_{2,\ 3} \circ (\mathrm{id}_c, f, \mathrm{id}_d)$。从恒等不等式 $\exists_{\mathrm{id}_c \times f} \top_c \leqslant \exists_{\mathrm{id}_c \times f} \top_c$ 出发，我们得出

$$\begin{aligned}
& & \exists_{\mathrm{id}_c \times f} P(\mathrm{id}_c \times f)(\top_{c \times d}) &\leqslant \exists_{\mathrm{id}_c \times f} P(f)(\top_d), & \\
\implies & & P(\mathrm{id}_c, f, \mathrm{id}_d)\exists_{(\mathrm{id}_c, \mathrm{id}_d, f)} \top_{c \times d} &\leqslant P(f, \mathrm{id}_d)\exists_{\Delta_d} \top_d & \text{by ①, ② and B.-C.,} \\
\implies & & P(\mathrm{id}_c, f, \mathrm{id}_d)\exists_{(\mathrm{id}_c, \mathrm{id}_d, f)} \top_{c \times d} &\leqslant P(\mathrm{id}_c, f, \mathrm{id}_d)P(\mathrm{pr}_{2,3})\exists_{\Delta_d} \top_d, & \\
\implies & \exists_{(\mathrm{id}_c, f, \mathrm{id}_d)}(\top_{c \times d} \wedge P(\mathrm{id}_c, f, \mathrm{id}_d)\exists_{(\mathrm{id}_c, \mathrm{id}_d, f)} \top_{c \times d}) &\leqslant P(\mathrm{pr}_{2,3})\exists_{\Delta_d} \top_d & & \\
\implies & & \exists_{(\mathrm{id}_c, f, \mathrm{id}_d)} \top_{c \times d} \wedge \exists_{(\mathrm{id}_c, \mathrm{id}_d, f)} \top_{c \times d} &\leqslant P(\mathrm{pr}_{2,3})\exists_{\Delta_d} \top_d & \text{by Frobenius,} \\
\implies & \exists_{(\mathrm{id}_c, f, \mathrm{id}_d)} P(\mathrm{pr}_1)(\top_c) \wedge \exists_{(\mathrm{id}_c, \mathrm{id}_d, f)} P(\mathrm{pr}_1)(\top_c) &\leqslant P(\mathrm{pr}_{2,3})\exists_{\Delta_d} \top_d, & & \\
\implies & & P(\mathrm{pr}_{1,2})\exists_{\mathrm{id}_c \times f} \top_c \wedge P(\mathrm{pr}_{1,3})\exists_{\mathrm{id}_c \times f} \top_c &\leqslant P(\mathrm{pr}_{2,3})\exists_{\Delta_d} \top_d, & \text{by ③, ④ and B.-C.}
\end{aligned}$$

现在我们只需注意到 $U \leqslant \top_c$，即可得到所需的不等式

$$P(\mathrm{pr}_{1,2})\exists_{\mathrm{id}_c \times f} U \wedge P(\mathrm{pr}_{1,3})\exists_{\mathrm{id}_c \times f} U \leqslant P(\mathrm{pr}_{2,3})\exists_{\Delta_d} \top_d.$$

最后一个不等式通过以下方式得到

$$U = \exists_{\mathrm{pr}_1 \circ (\mathrm{id}_c \times f)} U = \exists_{\mathrm{pr}_1}\exists_{\mathrm{id}_c \times f} U.$$

□

这种箭头赋值具有函子性，也就是说，对于给定的可复合箭头

$$(c,U) \xrightarrow{f} (d,V) \xrightarrow{g} (e,W)$$

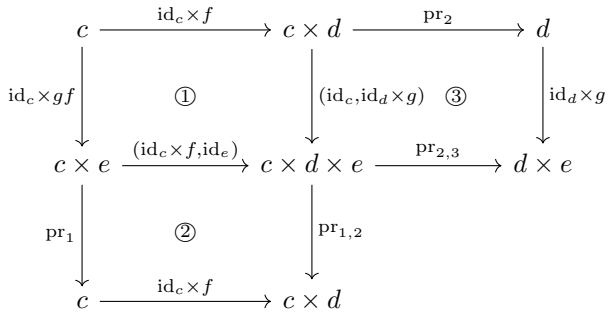
在 $\mathcal{C} \rtimes P$ 中，复合

$$(c,U) \xrightarrow{\exists_{\mathrm{id}_c \times f} U} (d,V) \xrightarrow{\exists_{\mathrm{id}_d \times g} V} (e,W)$$

在 $\mathsf{Syn}(P)$ 中，即谓词

$$\exists_{\mathrm{pr}_{1,3}}(P(\mathrm{pr}_{1,2})\exists_{\mathrm{id}_c \times f} U \wedge P(\mathrm{pr}_{2,3})\exists_{\mathrm{id}_d \times g} V),$$

等于 $\exists_{\mathrm{id}_c \times gf} U$。为证明这一相等，我们首先注意到，图表中的所有方块



都是拉回。因此，我们有 $\exists_{\mathrm{pr}_{1,3}}(P(\mathrm{pr}_{1,2})\exists_{\mathrm{id}_c \times f} U \wedge P(\mathrm{pr}_{2,3})\exists_{\mathrm{id}_d \times g} V)$ 等于

$$\begin{aligned}
&\exists_{\mathrm{pr}_{1,3}}(\exists_{(\mathrm{id}_c \times f, \mathrm{id}_e)} P(\mathrm{pr}_1)(U) \wedge \exists_{(\mathrm{id}_c, \mathrm{id}_d \times g)} P(\mathrm{pr}_2)(V)), && \text{by ②, ③ and B.-C.,}\\
=\ &\exists_{\mathrm{pr}_{1,3}} \exists_{(\mathrm{id}_c \times f, \mathrm{id}_e)} (P(\mathrm{pr}_1)(U) \wedge P((\mathrm{id}_c \times f, \mathrm{id}_e)) \exists_{(\mathrm{id}_c, \mathrm{id}_d \times g)} P(\mathrm{pr}_2)(V)), && \text{by Frobenius,}\\
=\ &P(\mathrm{pr}_1)(U) \wedge P((\mathrm{id}_c \times f, \mathrm{id}_e)) \exists_{(\mathrm{id}_c, \mathrm{id}_d \times g)} P(\mathrm{pr}_2)(V)),\\
=\ &P(\mathrm{pr}_1)(U) \wedge \exists_{\mathrm{id}_c \times gf} P(\mathrm{id}_c \times f) P(\mathrm{pr}_2)(V), && \text{by ② and B.-C.,}\\
=\ &\exists_{\mathrm{id}_c \times gf} (P(\mathrm{id}_c \times gf) P(\mathrm{pr}_1)(U) \wedge P(\mathrm{id}_c \times f) P(\mathrm{pr}_2)(V)), && \text{by Frobenius,}\\
=\ &\exists_{\mathrm{id}_c \times gf} (U \wedge P(f)(V)),\\
=\ &\exists_{\mathrm{id}_c \times gf} U, && \text{since } U \leqslant P(f)(V).
\end{aligned}$$

由此，我们得到所需的相等式 $\exists_{\mathrm{pr}_{1,3}}(P(\mathrm{pr}_{1,2})\exists_{\mathrm{id}_c \times f} U \wedge P(\mathrm{pr}_{2,3})\exists_{\mathrm{id}_d \times g} V) = \exists_{\mathrm{id}_c \times gf} U$。我们还注意到，范畴 C 中的恒等箭头 $(c,U) \xrightarrow{\mathrm{id}} (c,U)$ 被映射到 $\mathsf{Syn}(P)$ 中的恒等箭头 $(c,U) \xrightarrow{\exists_{\Delta_c} U} (c,U)$。因此，我们得到一个函子 $\mathcal{C} \rtimes P \to \mathsf{Syn}(P)$。

定义 5.15. 我们将 $\zeta^P \colon \mathcal{C} \rtimes P \to \mathsf{Syn}(P)$ 记为这样的函子：它将$\mathcal{C} \rtimes P$的箭头 $(c,U) \xrightarrow{f} (d,V)$ 映为 $\mathsf{Syn}(P)$ 的箭头 $(c,U) \xrightarrow{\exists_{\mathrm{id}_c \times f} U} (d,V)$。

直观地说，函子 $\zeta^P \colon \mathcal{C} \rtimes P \to \mathsf{Syn}(P)$ 是“添入那些理应存在的箭头”（即存在可证明函数关系的箭头），并“识别那些理应相同的箭头”（即 P 的内语言能够证明相等的箭头）。

命题 5.16. 设$(P, (J_c)_{c \in \mathcal{C}})$ 为一个存在性教义站点。函子 $\zeta^P \colon \mathcal{C} \rtimes P \to \mathbf{Syn}(P)$定义了一个稠密位点态射

$$\zeta^P \colon (\mathcal{C} \rtimes P, J_\rtimes) \to (\mathbf{Syn}(P), J_{\mathbf{Syn}}),$$

因此，存在拓扑斯等价 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C} \rtimes P, J_\rtimes) \simeq \mathbf{Sh}(\mathbf{Syn}(P)\ J_{\mathbf{Syn}})$。

证明。 我们逐一检验定义 2.3 的四个条件。

(i) 态　　第一个条件，即定义 2.3(i)，只要回想一下态射族　　s

$$\{\,(c_i, U_i) \xrightarrow{f_i} (d, V) \mid i \in I\,\} \text{ in } \mathcal{C} \rtimes P$$

是 $J_{\rtimes}$-覆盖的，当且仅当 $\{\,\exists_{f_i} U_i \to V \mid i \in I\,\}$ 是 J_d-覆盖的；与此同时，态射族

$$\{\,(c_i, U_i) \xrightarrow{\exists_{\mathrm{id}_{c_i} \times f_i} U_i} (d, V) \mid i \in I\,\} \text{ in } \mathbf{Syn}(P)$$

是 $J_{\mathbf{Syn}}$-覆盖的，当且仅当 $\{\,\exists_{f_i} U_i = \exists_{\mathrm{pr}_2} \exists_{\mathrm{id}_{c_i} \times f_i} U_i \to V \mid i \in I\,\}$ 是 J_d-覆盖的。

(ii) 条件 (ii) 成立，因为函子 ζ^P 在对象上是满射。

(iii) 设 $(c, U) \xrightarrow{W} (d, V)$ 是一个可证明函数关系，即 Syn(P) 的一个箭头。由于 $W \leqslant P(\mathrm{pr}_1)(U)$，存在一个 $\mathcal{C} \rtimes P$ 中的箭头 $(c \times d, W) \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} (c, U)$。考虑图表

$$(c \times d, W) \xrightarrow{\zeta^P(\mathrm{pr}_1) = \exists_{\mathrm{id}_{c\times d} \times \mathrm{pr}_1} W} (c, U) \xrightarrow{W} (d, V) \tag{11}$$

Syn(P) 的图表。为满足条件 (iii)，只需证明箭头 $(c \times d, W) \xrightarrow{\zeta^P(\mathrm{pr}_1)} (c, U)$ 是$J_{\mathbf{Syn}}$-覆盖的，并且 (11) 的复合属于 ζ^P 的像。前者由不等式可得

$$U \leqslant \exists_{\mathrm{pr}_1} W = \exists_{\mathrm{pr}_2} \exists_{\mathrm{id}_{c\times d} \times \mathrm{pr}_1} W.$$

(11) 的复合为 $\exists_{\mathrm{pr}_{1,2,4}}(\mathrm{pr}_{1,2,3}^{*} \exists_{\mathrm{id}_{c\times d} \times \mathrm{pr}_1}(W) \wedge \mathrm{pr}_{2,4}^{*}(W))$。我们首先汇集必要的观察：这两个方块

$$\begin{array}{ccc} c \times d \times d & \xrightarrow{\mathrm{pr}_{1,2}} & c \times d \\ {\scriptstyle (\mathrm{id}_{c\times d} \times \mathrm{pr}_1, \mathrm{id}_d)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{c\times d} \times \mathrm{pr}_1} \\ c \times d \times c \times d & \xrightarrow{\mathrm{pr}_{1,2,3}} & c \times d \times c \end{array} \tag{12}$$

and

$$\begin{array}{ccc} c \times d & \xrightarrow{\mathrm{id}_{c\times d} \times \mathrm{pr}_2} & c \times d \times d \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_{2,3}} \\ d & \xrightarrow{\Delta_d} & d \times d \end{array} \tag{13}$$

都是拉回，并且存在不等式

$$P(\mathrm{pr}_{1,2})(W) \wedge P(\mathrm{pr}_{1,3})(W) \leqslant P(\mathrm{pr}_{2,3}) \exists_{\Delta_d} \top_d. \tag{14}$$

因此　，我们可以证明 $\exists_{\mathrm{pr}_{1,2,4}}(P(\mathrm{pr}_{1,2,3}^{*}) \exists_{\mathrm{id}_{c\times d} \times \mathrm{pr}_1}(W) \wedge P(\mathrm{pr}_{2,4}^{*})(W))$ 等于

$$\begin{aligned}
&\exists_{\mathrm{pr}_{1,2,4}}(\exists_{(\mathrm{id}_{c\times d} \times \mathrm{pr}_1, \mathrm{id}_d)} P(\mathrm{pr}_{1,2})(W) \wedge P(\mathrm{pr}_{2,4})(W)), && \text{by (12) and B.-C.,} \\
&= \exists_{\mathrm{pr}_{1,2,4}} \exists_{(\mathrm{id}_{c\times d} \times \mathrm{pr}_1, \mathrm{id}_d)} (P(\mathrm{pr}_{1,2}^{*})(W) \wedge P(\mathrm{id}_{c\times d} \times \mathrm{pr}_1, \mathrm{id}_d) P(\mathrm{pr}_{2,4}^{*})(W)) && \text{根据弗罗贝尼乌斯,} \\
&= P(\mathrm{pr}_{1,2})(W) \wedge P(\mathrm{pr}_{1,3})(W), \\
&= P(\mathrm{pr}_{1,2})(W) \wedge P(\mathrm{pr}_{1,3})(W) \wedge P(\mathrm{pr}_{2,3}) \exists_{\Delta_d} \top_d, && \text{利用 (14),} \\
&= P(\mathrm{pr}_{1,2})(W) \wedge P(\mathrm{pr}_{1,3})(W) \wedge \exists_{\mathrm{id}_{c\times d} \times \mathrm{pr}_2} P(\mathrm{pr}_2)(\top_d), && \text{by (13) and B.-C.,} \\
&= P(\mathrm{pr}_{1,2})(W) \wedge P(\mathrm{pr}_{1,3})(W) \wedge \exists_{\mathrm{id}_{c\times d} \times \mathrm{pr}_2} \top_{c\times d}, \\
&= \exists_{\mathrm{id}_{c\times d} \times \mathrm{pr}_2} (P(\mathrm{id}_{c\times d} \times \mathrm{pr}_2) P(\mathrm{pr}_{1,2})(W) \wedge P(\mathrm{id}_{c\times d} \times \mathrm{pr}_2) P(\mathrm{pr}_{1,3})(W) \wedge \top_{c\times d}), && \text{由弗罗贝尼乌斯,} \\
&= \exists_{\mathrm{id}_{c\times d} \times \mathrm{pr}_2} (P(\mathrm{id}_{c\times d})(W) \wedge P(\mathrm{id}_{c\times d})(W)), \\
&= \exists_{\mathrm{id}_{c\times d} \times \mathrm{pr}_2} W.
\end{aligned}$$

因此，由于 $\exists_{\mathrm{pr}_{1,\ 2,\ 4}}(P(\mathrm{pr}^{1,2,3})\exists_{\mathrm{id}_{c\times d}\times \mathrm{pr}_1}(W)\ \wedge\ P(\mathrm{pr}^{2,4})(W)) = \exists_{\mathrm{id}_{c\times d}\times \mathrm{pr}_2}W$，我们得出 (11) 的复合是箭头在 ζ^P 下的像

$$(c\times d, W)\xrightarrow{\mathrm{pr}_2}(d,V)\in \mathcal{C}\rtimes P.$$

(iv) 令

$$(c,U)\ \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}}\ (d,V)$$

是 $\mathcal{C}\rtimes P$中的一对平行箭头，它们在 ζ^P的像中相等，即 $\exists_{\mathrm{id}_c\times f}U = \exists_{\mathrm{id}_c\times g}U$。为满足条件 (iv)，我们旨在找到 (c,U) 的一个 $J_{\rtimes}$ 覆盖 S，使得对于所有 $h\in S$, $f\circ h = g\circ h$。令

$$e\xrightarrow{h} c\ \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}}\ d$$

是 $\mathcal{C}$中的一个等化子图表，因此方块

$$\begin{array}{ccc} e & \xrightarrow{h} & c \\ \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_c\times f} \\ c & \xrightarrow{\mathrm{id}_c\times g} & c\times d \end{array}$$

是一个拉回。叉图

$$(c,P(h)(U))\xrightarrow{h}(c,U)\ \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}}\ (d,V)$$

在 $\mathcal{C}\rtimes P$中交换，并且箭头 $(c,P(h)(U))\xrightarrow{h}(c,U)$ 是 $J_{\rtimes}$-覆盖的，因为

$$\begin{aligned}\exists_{\mathrm{id}_c\times f}U = \exists_{\mathrm{id}_c\times g}U &\implies U\leqslant P(\mathrm{id}_c\times f)\exists_{\mathrm{id}_c\times g}U,\\ &\implies U\leqslant \exists_h P(h)(U).\end{aligned}$$

□

我们还注意到，函子 ζ^P 的选择在以下意义下具有恰当的自然性。令 Sites 表示由位点、位点态射及它们之间的自然变换构成的 2-范畴。根据上述内容，有两种方式可以将位点赋予一个存在性教义站点 $(P,(J_c)_{c\in\mathcal{C}})\in$ ExDocSites：

$$(P,(J_c)_{c\in\mathcal{C}})\mapsto(\mathcal{C}\rtimes P, J_{\rtimes})\text{ and }(P,(J_c)_{c\in\mathcal{C}})\mapsto(\mathbf{Syn}(P),J_{\mathbf{Syn}}),$$

此外，这些对应还给出了两个 2-函子 ExDocSites $\rightrightarrows$ Sites，我们分别记作

$$\rtimes\colon \mathbf{ExDocSites}\to\mathbf{Sites},\quad \mathbf{Syn}\colon\mathbf{ExDocSites}\to\mathbf{RegSites}\subseteq\mathbf{Sites}.$$

容易验证，对于每个存在性教义站点 $(P,(J_c)_{c\in\mathcal{C}})\in$ ExDocSites，位点态射 $\zeta^P\colon(\mathcal{C}\rtimes P, J_{\rtimes})\to(\mathrm{Syn}(P)$ $J_{\mathbf{Syn}})$ 构成一个自然变换的分量

$$\mathbf{ExDocSites}\ \underset{\mathbf{Syn}}{\overset{\rtimes}{\Downarrow\zeta}}\ \mathbf{Sites}.$$

注 5.17. 设 $\mathbb{T}$ 是签名 Σ上的一个几何理论。教科书中对 $\mathbb{T}$的分类拓扑斯 $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ 的构造可见于 [23, §D1.4], [32, §X] 或 [6, §1.4], , 该构造使用了该理论的句法位点 $(\mathcal{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}})$。回忆

(i) $\mathbb{T}$ 的句法范畴 $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ 是范畴

（a）其对象是公式 $\{\vec{x}$ 的 $\mathbb{T}$-可证明等价类：$\varphi\}$ 在 Σ 上，

（b）其箭头 $[\theta]\colon\ \{\,\vec{x}\colon\ \varphi\,\}\to\{\,\vec{y}\colon\ \psi\,\}$ 是 $\mathbb{T}$-可证明等价类，其中的公式是 $\mathbb{T}$-可证明函数式的，也就是说，在上下文 $\vec{x}$ 中的公式 θ，满足 $\mathbb{T}$ 证明序列 $\vec{y}$

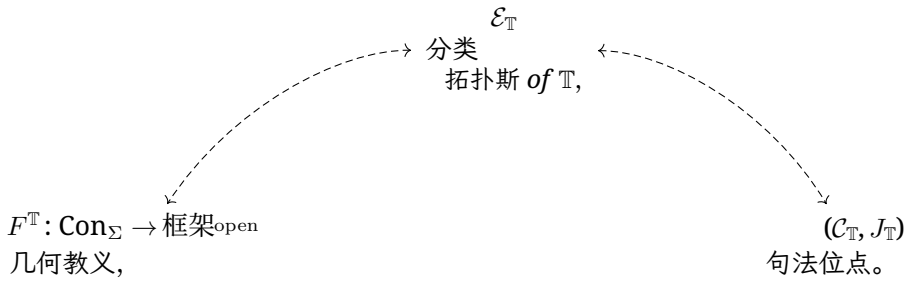
$$\theta\vdash_{\vec{x},\vec{y}}\varphi\wedge\psi,\ \varphi\vdash_{\vec{x}}\exists\vec{y}\theta,\ \theta\wedge\theta[\vec{z}/\vec{y}]\vdash_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}}\vec{y}=\vec{z};$$

(ii) 在句法拓扑 $J_{\mathbb{T}}$ 上，$\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$，一族箭头 $\{\,[\theta_i]\colon\{\,\vec{x_i}\colon\varphi_i\,\}\to\{\,\vec{y}\colon\psi\,\}\mid i\in I\,\}$ 是 $J_{\mathbb{T}}$-覆盖，当且仅当 $\mathbb{T}$ 证明序列式

$$\psi\vdash_{\vec{y}}\bigvee_{i\in I}\exists\vec{x}_i\,\theta_i.$$

我们认出范畴 $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ 是几何教义$F^{\mathbb{T}}\colon\mathsf{Con}_\Sigma\to\mathsf{Frm}^{\mathrm{open}}$的句法范畴构造 $\mathsf{Syn}(F^{\mathbb{T}})$，该几何教义在例 1.1 中有所讨论。类似地，句法拓扑 $J_{\mathbb{T}}$ 恰好是从存在性教义站点 $(F^{\mathbb{T}},(J_{\vec{x}})_{\vec{x}\in\mathbf{Con}_\Sigma})$ 得到的拓扑 $J_{\mathbf{Syn}}$，其中每个纤维 $F^{\mathbb{T}}(\vec{x})$ 都赋予了典范拓扑（$\mathsf{Con}_\Sigma\rtimes F^{\mathbb{T}}$ 上的诱导拓扑 $J_\rtimes$ 恰好就是我们已经遇到过的拓扑$K_{F^{\mathbb{T}}}$）。

因此，由命题 5.16 可知，$(\mathsf{Con}_\Sigma\rtimes F^{\mathbb{T}},K_{F^{\mathbb{T}}})$ 和 $(\mathcal{C}_{\mathbb{T}},J_{\mathbb{T}})$ 都是分类拓扑斯 $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ 的定义位，如“桥接”图表所示：



回忆一下，集合$^{\mathbf{Con}_\Sigma}$ 中的每个内部局部都具有形式 $F^{\mathbb{T}}$，其中 Σ是某个理论的签名，且该理论与之具有相同的排序。因此，我们恢复了集合$^{\mathbf{Con}_\Sigma}$ 中的内部局部与几何理论之间的双射（模莫里塔等价），这些理论与 Σ 具有相同的排序；这一点在单排序情形（当 $\mathsf{Con}_\Sigma\simeq\mathsf{FinSets}$ 时）中已于 [23, 定理 D3.2.5]观察到。借助局部空间扩张 理论（见 [6, §7.1]），也可以推导出这一等价性，因为每个与 Σ 具有相同排序的理论 $\mathbb{T}$ 都是 $\mathbb{O}_\Sigma$ 的局部空间扩张；$\mathbb{O}_\Sigma$ 是 Σ的排序上的空理论，其分类拓扑斯为集合$^{\mathbf{Con}_\Sigma}$。

位点 $(\mathsf{Con}_\Sigma\rtimes F^{\mathbb{T}},K_{F^{\mathbb{T}}})$ 在 [50]中被称为理论 $\mathbb{T}$的替代句法位 。在某些计算中，位点 $(\mathsf{Con}_\Sigma\rtimes F^{\mathbb{T}},K_{F^{\mathbb{T}}})$ 可能比标准句法位点更方便。值得注意的是，每个箭头 $(\vec{x},\varphi)\xrightarrow{\sigma}(\vec{y},\psi)$ 都是以下箭头的限制

$$\begin{array}{ccc}(\vec{x},\varphi)&\xrightarrow{\sigma}&(\vec{y},\psi)\\ \downarrow&&\downarrow\\ (\vec{x},\top)&\xrightarrow{\sigma}&(\vec{y},\top),\end{array}$$

此外，由于（$\vec{z}$，$\top$）是 $\mathsf{Con}_\Sigma\rtimes F^{\mathbb{T}}$ 中的积 $\prod_{z_i\in\vec{z}}(z_i,\ \top)$，因此标记为重新标记 $\sigma\colon\ \vec{y}\to\vec{x}$ 的箭头（$\vec{x}$，$\top$）$\xrightarrow{\sigma}$（$\vec{y}$，$\top$）——即有限集合之间的保排序映射——如图表所示，由泛性质诱导而得

$$\begin{array}{ccc}(\vec{x},\top)&\dashrightarrow^{\sigma}&(\vec{y},\top)\\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_{\sigma(y_i)}}&&\downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_{y_i}}\\ (\sigma(y_i),\top)&\xrightarrow{\mathrm{id}_{\sigma(y_i)}=\mathrm{id}_{y_i}}&(y_i,\top).\end{array}$$

当然，句法位点 $(\mathcal{C}_{\mathbb{T}},J_{\mathbb{T}})$ 具有一些正则位点 $(\mathsf{Con}_\Sigma\rtimes F^{\mathbb{T}},K_{F^{\mathbb{T}}})$ 所不具备的理想性质。例如，拓扑 $J_{\mathbb{T}}$是子正则的（见 [32,引理 X.4.5]），而 $\mathsf{Con}_\Sigma\rtimes F^{\mathbb{T}}$上的拓扑$K_{F^{\mathbb{T}}}$则不是（见 [51,注 3.11]）。

5.4 正则位点的几何完备化

最后，我们能够结合上述内容，定义正则位点的几何完备化，它将正则位点映射到几何范畴。不出所料，这相当于为每个正则位点 $(\mathcal{C}, K)$ 指定 $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, K)$ 中由可表示对象的子对象所张成的全子范畴。

定义 5.18。 我们将 GeomCat 记为由几何范畴构成的 2-范畴，即

(i) 其对象是几何范畴——子对象格具有任意上确界且这些上确界在拉回下保持不变的正则范畴；(ii) 其 1-胞腔是几何函子 ——同时保持子对象上确界的正则函子；(iii) 其 2-胞腔是这些函子之间的自然变换。

每个几何范畴 $\mathcal{G}$ 都可以赋予几何拓扑 J_{Geom}，即覆盖族为联合满态族的格罗滕迪克拓扑，从而得到一个正则位点 $(\mathcal{G}, J_{\mathrm{Geom}})$。根据注 5.12，这是这样一个拓扑：其到子对象格 $\mathrm{Sub}_{\mathcal{G}}(g)$（ $g \in \mathcal{G}$）的限制 $J_{\mathrm{Geom}}|_{\mathrm{Sub}_{\mathcal{G}}(g)}$ 是其中

$$\{ e_i \rightarrowtail h \mid i \in I \} \text{ is a } J_{\mathrm{Geom}}|_{\mathrm{Sub}_{\mathcal{G}}(g)}\text{-cover} \iff h = \bigvee_{i \in I} e_i.$$

将正则位点赋予几何范畴 $\mathcal{G}$ 的这一对应关系，很容易观察到它确定了一个全忠实 2-嵌入 $\mathbf{GeomCat} \hookrightarrow \mathbf{RegSites}$。

定理 5.19. 存在一个拟 *2*-伴随

$$\mathbf{RegSites} \underset{}{\overset{\mathfrak{Z}^{\mathrm{Cat}}}{\underset{}{\hookleftarrow}}} \mathbf{GeomCat}$$

使得图表中的每个方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{ExDocSites} & \overset{\mathfrak{Z}}{\underset{}{\hookleftarrow}} & \mathbf{GeomDoc}_{\mathrm{cart}} \\ \mathbf{Syn} \downarrow \dashv \uparrow \mathrm{Sub}_{(-)} & & \mathbf{Syn} \downarrow \dashv \uparrow \mathrm{Sub}_{(-)} \\ \mathbf{RegSites} & \overset{\mathfrak{Z}^{\mathrm{Cat}}}{\underset{}{\hookleftarrow}} & \mathbf{GeomCat} \end{array} \tag{15}$$

都交换。

证明。 为了得到 (15) 的交换性，我们定义 $\mathfrak{Z}^{\mathrm{Cat}} \colon \mathbf{RegSites} \to \mathbf{GeomCat}$ 为复合 $\mathbf{Syn} \circ \mathfrak{Z} \circ \mathrm{Sub}_{(-)}$。然后通过以下自然等价得到该拟 2-伴随：对于每个正则位点 $(\mathcal{C}, K) \in \mathbf{RegSites}$ 和几何范畴 $\mathcal{G} \in \mathbf{GeomCat}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{GeomCat}}(\mathbf{Syn}(\mathfrak{Z}(\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}, K_{\mathrm{Sub}})), \mathcal{G}) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{GeomDoc}_{\mathrm{cart}}}(\mathfrak{Z}(\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}, K_{\mathrm{Sub}}), \mathrm{Sub}_{\mathcal{G}}), \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{ExDocSites}}((\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}, K_{\mathrm{Sub}}), (\mathrm{Sub}_{\mathcal{G}}, K_{\mathrm{Sub}_{\mathcal{G}}})), \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{RegSites}}((\mathcal{C}, K), (\mathcal{G}, J_{\mathrm{Geom}})), \end{aligned}$$

其中在最后一个等 价中，我们用到了 $\mathrm{Sub}_{(-)} \colon \mathbf{RegSites} \to \mathbf{ExDocSites}$ 是全忠实的这一事实。 □

6 粗几何完备化

由于几何完备化将一个格罗滕迪克拓扑作为第二个参数，因此它是一种幂等完备化（见定理 4.10）。这与文献中讨论的许多其他教义完备化不同（例如 Trotta 的存在完备化 [46]）。如果不能将适当的拓扑作为第二个参数，几何完备化就不会是幂等的。

考虑二元框架 2。由于它是一个帧，有一个同构 J_{can}-Idl(2)$\cong$ **2**，但很容易算出， J_{triv}-Idl(2) 是三元框架 3（即谢尔宾斯基空间的开集）。我们可以将这一行为理解为：在 2 上取一个更粗的格罗滕迪克拓扑 $J_{\mathrm{triv}} \subseteq J_{\mathrm{can}}$，从而“丢失信息”。为了将几何完备化与文献中讨论的其他教义完备化联系起来，本节将考察教义的几何完备化在以下情形下的表现：对于每个几何教义 $\mathbb{L}$，我们有意在范畴 $\mathcal{C} \rtimes \mathbb{L}$ 上选取一个更粗的格罗滕迪克拓扑 $J^A_{\mathbb{L}} \subseteq K_{\mathbb{L}}$（或者，直接为 $\mathcal{C} \rtimes \mathbb{L}$赋予平凡拓扑 J_{triv}，从而完全忽略格罗滕迪克拓扑）。

由此我们得到了粗几何完备化 这一概念——一个作用于 DocSites 的 2-全 2-子范畴上的单子 $\mathfrak{Z}_A$ 。如上面的例子所示，与几何完备化单子 $\mathfrak{Z}$ 不同，这个单子 $\mathfrak{Z}_A$ 不再是幂等的（除非每个 $J^A_{\mathbb{L}}$ 都选为 $K_{\mathbb{L}}$）。我们将看到，每个粗几何完备化实际上都是松弛幂等的。在推论 6.5 中证明粗几何完备化的松弛幂等性之后，我们将在推论 6.7 中说明，这如何为笛卡尔范畴、正则范畴和相干范畴带来松弛幂等的几何完备化。

定义 6.1。 粗几何完备化 由以下数据构成。

(i) 给定一个 2-全 2-子范畴 A-Doc $\subseteq$ DocSites。我们称 A-Doc 的对象为 A-教义，称其态射为 A-教义态射。(ii) 存在一个 2-子范畴 GeomDoc$_A$ $\subseteq$GeomDoc，它在 1-胞腔和 2-胞腔上是满的，并满足以下条件。

(a) 对于每个 $\mathbb{L} \in$ GeomDoc$_A$，都存在范畴 $\mathcal{C} \rtimes \mathbb{L}$ 上的一个格罗滕迪克拓扑 $J^A_{\mathbb{L}}$，它比拓扑 $K_{\mathbb{L}}$ 更粗，即 $J^A_{\mathbb{L}} \subseteq K_{\mathbb{L}}$，使得 $(\mathbb{L}, J^A_{\mathbb{L}})$ 是 A-Doc 的一个对象。此外，拓扑 $J^A_{\mathbb{L}}$ 的选择具有函子性：对于每个几何教义态射 $(F, a)\colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}'$，都存在一个 A-教义态射

$$(F, a)\colon (\mathbb{L}, J^A_{\mathbb{L}}) \to (\mathbb{L}', J^A_{\mathbb{L}'}).$$

换言之，存在一个 2-满 2-嵌入 GeomDoc$_A \hookrightarrow A$-Doc。

(b) 对于每个 $\in A$-Doc 的对象 (P, J)，其几何完备化 $\mathfrak{Z}(P, J)$: $\mathcal{C}^{op} \to \mathrm{Frm}^{\mathrm{open}}$ 包含于 GeomDoc$_A$ 中，且单位 $\eta^{(P,J)}\colon P \to \mathfrak{Z}(P, J)$ 定义了一个 A-教义态射：

$$\eta^{(P,J)}\colon (P, J) \to (\mathfrak{Z}(P, J), J^A_{\mathfrak{Z}(P,J)}).$$

定理 6.2。 令 A-**Doc** $\subseteq$ **DocSites** 和 **GeomDoc**$_A \subseteq$ **GeomDoc** 定义一个粗几何完备化。存在一个严格 *2*-伴随

$$A\text{-}\mathbf{Doc} \underset{\hookleftarrow}{\xrightarrow{\mathfrak{Z}_A}} \mathbf{GeomDoc}_A$$

其中$\mathfrak{Z}_A$ 是 *2*-函子

$$A\text{-}\mathbf{Doc} \hookrightarrow \mathbf{DocSites} \xrightarrow{\mathfrak{Z}} \mathbf{GeomDoc}.$$

证明。 对于每个 $(P, J) \in A$-Doc 和 $\mathbb{L} \in$GeomDoc$_A$，范畴中对象上的自然同构 s

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathbf{Doc}}((P, J), (\mathbb{L}, J^A_{\mathbb{L}})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{GeomDoc}_A}(\mathfrak{Z}_A(P, J), \mathbb{L}) \tag{16}$$

通过将几何教义态射 $(F, a)\colon \mathfrak{Z}_A(P, J) \to \mathbb{L}$ 映射为复合

$$(P, J) \xrightarrow{\eta^{(P,J)}} (\mathfrak{Z}_A(P, J), J^A_{\mathfrak{Z}_A(P,J)}) \xrightarrow{(F,a)} (\mathbb{L}, J^A_{\mathbb{L}})$$

反过来，将箭头 $(F, a)\colon (P, J) \to (\mathbb{L}, J^A_{\mathbb{L}})$ 映射为由图表诱导的几何教义态射 $(F, \mathfrak{a})$

$$\begin{array}{ccccc} (P, J) & \xrightarrow{\eta^{(P,J)}} & (\mathfrak{Z}(P, J), J^A_{\mathfrak{Z}(P,J)}) & \longrightarrow & (\mathfrak{Z}(P, J), K_{\mathfrak{Z}(P,J)}) \\ & \searrow^{(F,a)} & \downarrow{\scriptstyle (F,\mathfrak{a})} & & \downarrow{\scriptstyle (F,\mathfrak{a})} \\ & & (\mathbb{L}, J^A_{\mathbb{L}}) & \longrightarrow & (\mathbb{L}, K_{\mathbb{L}}) \end{array}$$

以及定理 4.10。由命题 4.13 以及 A-Doc $\subseteq$ DocSites 和 $\mathbf{GeomDoc}_A \subseteq \mathbf{GeomDoc}$ 在 2-胞腔上都是满的这一事实可知，该映射扩展为箭头上的同构，进而得到范畴同构 (16)。 □

当然，2 是 3 的一个商框架（或子局部）。类似地，几何教义 $\mathbf{3}(\mathbb{L}, J_{\mathbb{L}}^A)$ 的粗几何完备化通过一个几何教义的逐点满态射 $\mathbf{3}(\mathbb{L}, J_{\mathbb{L}}^A) \to \mathbb{L}$（或内部子局部嵌入）与几何教义 $\mathbb{L}$ 相关联，该态射对应于包含关系

$$\mathbf{Sh}(\mathcal{C} \rtimes \mathbb{L}, K_{\mathbb{L}}) \rightarrowtail \mathbf{Sh}(\mathcal{C} \rtimes \mathbb{L}, J_{\mathbb{L}}^A)$$

（参见 [51, 定理 5.7] ——如果 $J_{\mathbb{L}}^A$是平凡拓扑，则态射 $\mathbf{3}(\mathbb{L}, J_{\mathrm{triv}}) \to \mathbb{L}$ 恰好是定义 4.3 中的 $K_{\mathbb{L}}$-闭包运算）。

松弛幂等性　　**用于粗几何完备化**。如前所述，严格 2-伴随

$$A\text{-}\mathbf{Doc} \underset{\longleftarrow}{\overset{\mathfrak{Z}_A}{\longrightarrow}} \mathbf{GeomDoc}_A$$

粗几何完备化的严格 2-伴随不一定是幂等的。本节余下部分将说明 $\mathfrak{Z}_A$ 满足一种较弱形式的幂等性：松弛幂等性。

设 $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$是一个 2-单子，其单位为 $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to T$，乘法为 $\mu\colon T^2 \to T$。如果图表的复合

$$TA \underset{\eta_{TA}}{\overset{\mu_A}{\leftleftarrows}} T^2A,$$

尽管可能并不严格等于恒等态射 id_{TA}和 id_{T^2A}，但它们可以通过典范 2-胞关联起来，从而存在一个伴随 $\mu_A \dashv \eta_{TA}$（见 [28, 命题 1.2]）。具体而言，我们要求一个 2-胞

$$TA \underset{\eta_{TA}}{\overset{T\eta_A}{\Downarrow \lambda_A}} T^2A,$$

对 A 自然，使得复合

$$A \xrightarrow{\eta_A} TA \underset{\eta_{TA}}{\overset{T\eta_A}{\Downarrow \lambda_A}} T^2A, \quad TA \underset{\eta_{TA}}{\overset{T\eta_A}{\Downarrow \lambda_A}} T^2A \xrightarrow{\mu_A} A$$

都是恒等 2-胞（见 [28, 定义 1.1]）。

通常，若要证明松弛幂等性，通过关于单子代数的等价条件来论证，虽然较为迂回，却可能更容易处理。回顾 [26]，给定一对（严格的）T-代数（A，a）和（B，a），T-代数的松弛态射是一对（f，α），其中 $f\colon A \to B$是范畴 $\mathcal{C}$中的一个箭头，而 α是一个 2-胞$\alpha\colon b \circ Tf \to f \circ a$，它使方块

$$\begin{array}{ccc} TA & \xrightarrow{Tf} & TB \\ {\scriptstyle a}\downarrow & \Downarrow \alpha & \downarrow{\scriptstyle b} \\ A & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

并满足相容条件

$$\begin{array}{ccc} T^2A & \xrightarrow{T^2f} & T^2B \\ {\scriptstyle \mu_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_B} \\ TA & \xrightarrow{Tf} & TB \\ {\scriptstyle a}\downarrow & \Downarrow \alpha & \downarrow{\scriptstyle b} \\ A & \xrightarrow[f]{} & B \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} T^2A & \xrightarrow{T^2f} & T^2B \\ {\scriptstyle Ta}\downarrow & \Downarrow T\alpha & \downarrow{\scriptstyle TB} \\ TA & \xrightarrow{Tf} & TB \\ {\scriptstyle a}\downarrow & \Downarrow \alpha & \downarrow{\scriptstyle b} \\ A & \xrightarrow[f]{} & B \end{array} \tag{17}$$

[1]在 [28] 中，松弛幂等单子称为 *KZ*-教义。在 Lawvere 意义下的教义这一上下文中使用这一术语容易造成混淆。

and

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle \eta_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_B} \\ TA & \xrightarrow{Tf} & TB \\ {\scriptstyle a}\downarrow & \Downarrow{\scriptstyle \alpha} & \downarrow{\scriptstyle b} \\ A & \xrightarrow[f]{} & B \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_B} \\ A & \xrightarrow{f} & B. \end{array} \tag{18}$$

[26, 定理 6.2] 表明， T 是松弛幂等的，当且仅当对于每一对（A, a）和（B, b）的（严格） T-代数，以及一个态射 $f\colon A \to B$，都存在唯一的 2- 胞 $\alpha\colon b \circ Tf \to f \circ a$，使得（$f, \alpha$）：（$A, a$） $\to$ （B, b）是 T- 代数的松弛态射。

我们需要两个关于 $\mathfrak{Z}_A$ 的代数的引理，以证明粗几何完备化 $\mathfrak{Z}_A\colon A\text{-}\mathbf{Doc} \to A\text{-}\mathbf{Doc}$ 是松弛幂等的。由于在我们将在例 6.6 中考察的每个粗几何完备化示例中，赋予 $\mathcal{C} \rtimes P$ 的格罗滕迪克拓扑 J 是针对一个 A-教义 $(P, J) \in A\text{-}\mathbf{Doc}$ 为我们选定的，所以下文将简化记法，用 P 简称 $A\text{-}\mathbf{Doc}$ 中的对象 (P, J)。此外，为了便于阅读，若 $(G, b) = \xi\colon P \to Q$ 是 A-教义之间的一个态射，我们将滥用记法，将自然变换 $b\colon P \to Q \circ G^{op}$ 记作 ξ。

引理 6.3. 设 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 预序 和 $Q\colon \mathcal{D}^{op} \to$ 预序 是一对 A-教义，并设 $\xi\colon \mathfrak{Z}_A(P) \to P$ 和 $\zeta\colon \mathfrak{Z}_A(Q) \to Q$ 是自然变换，使得这些三角形

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\eta^P} & \mathfrak{Z}_A(P) \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle \xi} \\ & & P, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\eta^Q} & \mathfrak{Z}_A(Q) \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle \zeta} \\ & & Q \end{array}$$

交换。给定函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$和自然变换 $a\colon P \to Q \circ F^{op}$，对于每个箭头$d \xrightarrow{f} c \in \mathcal{C}$ 和 $x \in P(d)$，都有一个不等式

$$\zeta_c \circ \exists_{\mathfrak{Z}_A(Q)(F(f))} \circ \eta^Q_d \circ a_d(x) \leqslant a_c \circ \xi_c \circ \exists_{\mathfrak{Z}_A(P)(f)} \circ \eta^P_d(x).$$

证明。 首先，利用不等式 $\eta^P_d(x) \vdash \mathfrak{Z}_A(P)(f) \circ \exists_{\mathfrak{Z}_A(P)(f)} \circ \eta^P_d(x)$，我们推得

$$\begin{aligned} \eta^Q_d \circ a_d(x) = \eta^Q_d \circ a_d \circ \xi_d \circ \eta^P_d(x) &\leqslant \eta^Q_d \circ a_d \circ \xi_d \circ \mathfrak{Z}_A(P)(f) \circ \exists_{\mathfrak{Z}_A(P)(f)} \circ \eta^P_d(x), \\ &= \mathfrak{Z}_A(Q)(F(f)) \circ \eta^Q_c \circ a_c \circ \xi_c \circ \exists_{\mathfrak{Z}_A(P)(f)} \circ \eta^P_d(x). \end{aligned}$$

因此，由伴随 $\exists_{\mathfrak{Z}(Q)(F(f))} \dashv \mathfrak{Z}(Q)(F(f))$，可得

$$\exists_{\mathfrak{Z}_A(Q)(F(f))} \circ \eta^Q_d \circ a_d(x) \leqslant \eta^Q_c \circ a_c \circ \xi_c \circ \exists_{\mathfrak{Z}_A(P)(f)} \circ \eta^P_d(x),$$

于是我们得到所需的不等式

$$\begin{aligned} \zeta_c \circ \exists_{\mathfrak{Z}_A(Q)(F(f))} \circ \eta^Q_d \circ a_d(x) &\leqslant \zeta_c \circ \eta^Q_c \circ a_c \circ \xi_c \circ \exists_{\mathfrak{Z}_A(P)(f)} \circ \eta^P_d(x), \\ &= a_c \circ \xi_c \circ \exists_{\mathfrak{Z}_A(P)(f)} \circ \eta^P_d(x). \end{aligned}$$

□

Lemma 6.4. 若(P, ξ) 是一个 $\mathfrak{Z}_A$-代数，则 $\xi_c\colon \mathfrak{Z}_A(P)(c) \to P(c)$ 对所有 $c \in \mathcal{C}$ 保持上确界。

证明。 我们首先证明， $P(c)$ 必须具有所有上确界。对于 $P(c)$ 的子集 $\{ x_i \mid i \in I \}$，我们断言其上确界 $\bigvee_{i \in I} x_i$ 由 $\xi_c \left(\bigvee_{i \in I} \eta^P_c(x) \right)$ 给出。对于每个 $i \in I$，

$$x_i = \xi_c \circ \eta^P_c(x) \leqslant \xi_c \left(\bigvee_{i \in I} \eta^P_c(x) \right)$$

另一方面，若给定 $y \in P(c)$，且对于所有 $i \in I$ 都有 $x_i \leqslant y$，

$$\xi_c\left(\bigvee_{i\in I} \eta_c^P(x)\right) \leqslant \xi_c \circ \eta_c^P(y) = y.$$

为证明 ξ_c 保持这些上确界，我们首先注意到这些图表

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{Z}_A\mathfrak{Z}_A(P) & \xrightarrow{\mathfrak{Z}_A(\xi)} \mathfrak{Z}_A(P) \\ {\scriptstyle \eta^{\mathfrak{Z}_A(P)}}\nearrow & \downarrow{\scriptstyle \mu^P} & \downarrow{\scriptstyle \xi} \\ \mathfrak{Z}_A(P) & = \mathfrak{Z}_A(P) & \xrightarrow{\xi} P, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathfrak{Z}_A(P) & \xrightarrow{\xi} & P \\ \downarrow{\scriptstyle \eta^{\mathfrak{Z}_A(P)}} & & \downarrow{\scriptstyle \eta^P} \\ \mathfrak{Z}_A\mathfrak{Z}_A(P) & \xrightarrow{\mathfrak{Z}_A(\xi)} & \mathfrak{Z}_A(P) \end{array}$$

都可交换——右侧图表可交换，是因为 $\mathfrak{Z}_A$ 是一个单子，且 (P,ξ) 是一个 $\mathfrak{Z}_A$-代数；而左侧方块可交换，是因为 η 是自然的。还要注意，μ^P 和 $\mathfrak{Z}_A(\xi)$都是几何教义的态射。特别地，对每个 $c \in \mathcal{C}$，μ_c^P和 $\mathfrak{Z}_A(\xi)_c$ 都与所有上确界可交换。

因此，给定一个子集 $\{ S_i \mid i \in I \} \subseteq \mathfrak{Z}_A(P)(c)$，我们注意到

$$\begin{aligned} \bigvee_{i\in I} \xi_c(S_i) = \xi_c\left(\bigvee_{i\in I} \eta_c^P \circ \xi_c(S_i)\right) &= \xi_c\left(\bigvee_{i\in I} \mathfrak{Z}_A(\xi)_c \circ \eta_c^{\mathfrak{Z}_A(P)}(S_i)\right), \\ &= \xi_c \circ \mathfrak{Z}_A(\xi)_c\left(\bigvee_{i\in I} \eta_c^{\mathfrak{Z}_A(P)}(S_i)\right), \\ &= \xi_c \circ \mu_c^P\left(\bigvee_{i\in I} \eta_c^{\mathfrak{Z}_A(P)}(S_i)\right), \\ &= \xi_c\left(\bigvee_{i\in I} \mu_c^P \circ \eta_c^{\mathfrak{Z}_A(P)}(S_i)\right) = \xi_c\left(\bigvee_{i\in I} S_i\right) \end{aligned}$$

因此，上确界确实得以保持。 □

最后，我们完成 $\mathfrak{Z}_A$ 是松弛幂等的证明。这个论证与 [46, 定理 5.6]中的论证相似。

推论 6.5。每个粗几何完备化 $\mathfrak{Z}_A$：A-**Doc** $\to$ A-**Doc** 都是松弛幂等的。

证明。设 (P,ξ) 和 (Q,ζ) 是 2-单子 $\mathfrak{Z}_A$ 的代数。对于每个 A-教义态射 (F,a)，我们首先证明恒等变换 id_F 定义了一个填充该方形的 2-胞

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Z}_A(P) & \xrightarrow{(F,\mathfrak{a})} & \mathfrak{Z}_A(Q) \\ {\scriptstyle \xi}\downarrow & \Downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_F} & \downarrow{\scriptstyle \zeta} \\ P & \xrightarrow[(F,a)]{} & Q. \end{array}$$

因此，我们需要证明，对所有 $S \in \mathfrak{Z}_A(P)(c)$，以下不等式成立

$$\zeta_c \circ \mathfrak{a}_c(S) \leqslant a_c \circ \xi_c(S).$$

By 结合注记 4.11、引理 6.3 和引理 6.4，我们得到所需的不等式 :

$$\begin{aligned}\zeta_c \circ \mathfrak{a}_c(S) &= \zeta_c \left(\bigvee_{(f,x)\in S} \exists_{\mathfrak{Z}_A(Q)(F(f))} \circ \eta_d^Q \circ a_d(x) \right), \\ &= \bigvee_{(f,x)\in S} \zeta_c \circ \exists_{\mathfrak{Z}_A(Q)(F(f))} \circ \eta_d^Q \circ a_d(x), \\ &\leqslant \bigvee_{(f,x)\in S} a_c \circ \xi_c \circ \exists_{\mathfrak{Z}_A(P)(f)} \circ \eta_d^P(x), \\ &\leqslant a_c \circ \xi_c \left(\bigvee_{(f,x)\in S} \exists_{\mathfrak{Z}_A(P)(f)} \circ \eta_d^P(x) \right) = a_c \circ \xi_c(S).\end{aligned}$$

显然可证明 $((F,a)^{,\ \mathrm{id}_F})$ 满足相容条件 (17) and (18).

对于任何其他满足相容条件的 2-胞 $\alpha\colon \zeta \circ (F,\mathfrak{a}) \to (F,a) \circ \xi$

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{(F,a)} & Q \\ {\scriptstyle \eta^P}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta^Q} \\ \mathfrak{Z}_A(P) & \xrightarrow[\Downarrow \alpha]{(F,\mathfrak{a})} & \mathfrak{Z}_A(Q) \\ {\scriptstyle \xi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \zeta} \\ A & \xrightarrow[(F,a)]{} & B \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{(F,a)} & Q \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_P}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_Q} \\ P & \xrightarrow{(F,a)} & Q, \end{array}$$

相等 $\alpha = \mathrm{id}_F$ 是必然的，因此 $((F,a), \mathrm{id}_F)$ 是唯一这样的松弛 $\mathfrak{Z}_A$-代数态射。

□

例 6.6。 作为定理 6.2 和命题 6.5 的直接应用，我们得到以下弱幂等 2-单子。

(i) 用 $\mathbf{Doc}_{\mathrm{flat}}$ 表示 DocSites 中对象形如 (P, J_{triv}) 的全 2-子范畴。等价地，$\mathbf{Doc}_{\mathrm{flat}}$ 是由教义及其 平坦教义态射构成的 Doc 的 2-子范畴。将平凡拓扑 J_{triv} 赋予每个几何教义 $\mathbb{L} \in \mathbf{GeomDoc}$ 的赋值，诱导出一个满足定义 6.1 条件的 2-嵌入 $\mathbf{GeomDoc} \hookrightarrow \mathbf{Doc}$。因此，我们得到一个粗几何完备化，并将其称为< style id='10'>自由几何完备化：

$$\mathbf{Doc}_{\mathrm{flat}} \underset{\hookleftarrow}{\overset{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}}{\longrightarrow}} \mathbf{GeomDoc}.$$

特别地，这限制为一个严格 2-伴随：

$$\mathbf{PrimDoc} \underset{\hookleftarrow}{\overset{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}}{\longrightarrow}} \mathbf{GeomDoc}_{\mathrm{cart}},$$

它存在于初等教义的 2-范畴与以笛卡尔基范畴为指标的几何教义的 2-范畴之间。

(ii) 存在一个从 GeomDoc 到相对存在教义的 2-子范畴 RelExDoc $\subseteq$ DocSites 的 2-嵌入，它将一个几何教义 $\mathbb{L} \in \mathbf{GeomDoc}$ 映射到 $(\mathbb{L}, J_{\mathrm{Ex}}) \in \mathbf{RelExDoc}$，并满足定义 6.1 的条件。因此，我们得到一种粗几何完备化，称为存在几何完备化：

$$\mathbf{RelExDoc} \underset{\hookleftarrow}{\overset{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Ex}}}{\longrightarrow}} \mathbf{GeomDoc},$$

这个严格 2-伴随限制在笛卡尔基底范畴上的存在教义与几何教义这两个 2-子范畴之间：

$$\mathbf{ExDoc} \underset{\hookleftarrow}{\overset{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Ex}}}{\longrightarrow}} \mathbf{GeomDoc}_{\mathrm{cart}}.$$

(iii) 类似地，我们为相对相干教义得到一种粗相干完备化，即相干几何完备化：

$$\mathbf{RelCohDoc} \underset{\hookleftarrow}{\overset{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Coh}}}{\longrightarrow}} \mathbf{GeomDoc},$$

其中，GeomDoc $\hookrightarrow$ RelCohDoc 是一个 2-嵌入，它将几何教义 $\mathbb{L} \in$ GeomDoc 映射为 $(\mathbb{L}, J_{\mathrm{Coh}}) \in$ RelCohDoc。同样，这限制为一个严格 2-伴随：

$$\mathbf{CohDoc} \underset{\hookleftarrow}{\overset{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Coh}}}{\longrightarrow}} \mathbf{GeomDoc}_{\mathrm{cart}}.$$

范畴的粗几何完备化。现在我们来说明例 6.6 中所考察的粗几何完备化与 §5 中的句法范畴构造之间的相互作用。我们将为笛卡尔范畴、正则范畴和相干范畴得到（粗）几何完备化。

相干范畴（见 [23, §A1.4], , 在 [38] 中也称为逻辑范畴）是这样一种正则范畴：其子对象格 $\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(c)$ 具有有限并，并且对于 $\mathcal{C}$ 中的每个箭头 $d \xrightarrow{f} c$，$\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}(f)$ 都保持这些有限并。相干函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$（定义在相干范畴之间）是保持有限并的正则函子。我们用 Coh 表示由相干范畴、相干函子及它们之间的自然变换构成的 2-范畴。

下文推论 6.7 中构造的 2-函子 $\mathfrak{Z}^{\mathrm{Cat}}_{\mathrm{Ex}}\colon$ Reg $\to$ GeomCat 和 $\mathfrak{Z}^{\mathrm{Cat}}_{\mathrm{Coh}}\colon$ Coh $\to$ GeomCat 显然由以下复合给出

$$\mathbf{Reg} \hookrightarrow \mathbf{RegSites} \xrightarrow{\mathfrak{Z}^{\mathrm{Cat}}} \mathbf{GeomCat} \quad \text{and} \quad \mathbf{Coh} \hookrightarrow \mathbf{RegSites} \xrightarrow{\mathfrak{Z}^{\mathrm{Cat}}} \mathbf{GeomCat},$$

其中，Reg $\hookrightarrow$ RegSites（分别地，Coh $\hookrightarrow$ RegSites）是一个 2-嵌入，它将正则（分别地，相干）范畴 $\mathcal{C}$ 映射到正则位点（$\mathcal{C}, J_{\mathrm{Reg}}$）（分别地，（$\mathcal{C}, J_{\mathrm{Coh}}$））。这里，$J_{\mathrm{Reg}}$ 表示正则拓扑，而 J_{Coh} 表示相干拓扑（参见 [23, 例 A2.1.11]）。

推论 6.7. *存在松幂等拟2-伴随：*

$$(i)\quad \mathbf{Cart} \underset{\hookleftarrow}{\overset{\mathfrak{Z}^{\mathrm{Cat}}_{\mathrm{Fr}}}{\longrightarrow}} \mathbf{GeomCat},$$

$$(ii)\quad \mathbf{Reg} \underset{\hookleftarrow}{\overset{\mathfrak{Z}^{\mathrm{Cat}}_{\mathrm{Ex}}}{\longrightarrow}} \mathbf{GeomCat},$$

$$(iii)\quad \mathbf{Coh} \underset{\hookleftarrow}{\overset{\mathfrak{Z}^{\mathrm{Cat}}_{\mathrm{Coh}}}{\longrightarrow}} \mathbf{GeomCat}.$$

证明。 我们仅详细说明 (i) 的证明，其余拟 2-伴随的构造方式类似。按照图表所示，我们将 $\mathfrak{Z}^{\mathrm{Cat}}_{\mathrm{Fr}}\colon$ Cart $\to$ GeomCat 定义为复合 Syn $\circ \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}} \circ \mathrm{Sub}(-)$。

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{PrimDoc} & \underset{\hookleftarrow}{\overset{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}}{\longrightarrow}} & \mathbf{GeomDoc}_{\mathrm{cart}} \\
{\scriptstyle \mathrm{Sub}(-)}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{Syn}} \dashv \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Sub}(-)} \\
\mathbf{Cart} & \underset{\hookleftarrow}{\overset{\mathfrak{Z}^{\mathrm{Cat}}_{\mathrm{Fr}}}{\longrightarrow}} & \mathbf{GeomCat}.
\end{array}$$

所需的范畴自然等价，针对 $\mathcal{C} \in$Cart 和 $\mathcal{G} \in$ GeomCat,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cart}}(\mathcal{C}, \mathcal{G}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{GeomCat}}(\mathbf{Syn}(\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}})), \mathcal{G})$$

由这一系列等价可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cart}}(\mathcal{C}, \mathcal{G}) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{PrimDoc}}(\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}, \mathrm{Sub}_{\mathcal{G}}),\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{GeomDoc}_{\mathrm{cart}}}(\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}), \mathrm{Sub}_{\mathcal{G}}),\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{GeomCat}}(\mathbf{Syn}(\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}})), \mathcal{G}),\end{aligned}$$

这里我们用到了 Sub(−) 是全忠实的这一事实。 □

7 次几何完备化

前文已多次暗示次几何完备化的存在，现在我们终于开始系统地研究它们。次几何完备化这一术语旨在传达以下模糊含义：如果教义 P 的完备化TP所添加的数据 T能够被范畴 $\mathcal{C} \rtimes TP$ 上的某个格罗滕迪克拓扑 J^T「看见」，并且具有这样的性质：$\mathfrak{Z}(P, J_{\mathrm{triv}}) \cong \mathfrak{Z}(TP, J^T)$——也就是说，自由地对 P 作几何完备化，与按照 T 对 P 作完备化、通过 J^T 跟踪这些新信息，然后再作几何完备化，是同一回事。我们已在 §4.1 中通过自由顶元完备化观察到这一现象，下面还会看到更多例子。本节旨在将这种关于「次几何性」的模糊概念形式化。

我们按以下方式展开。紧接着在 §7.1 中，我们介绍另一个关于次几何完备化理论的启发性例子：我们证明，Trotta [46] 所给出的初等教义的存在完备化，符合我们上文对次几何性的模糊理解。我们以此以及在 §4.1 中对自由顶元完备化的研究为直觉基础，在 §7.2 中引入次几何完备化的形式定义。我们还讨论了充分条件，在这些条件下，可以自动推导出次几何完备化是松弛幂等的。

在接下来的两个小节 §7.3 和 §7.4 中，我们讨论若干次几何完备化的例子。前一小节讨论通过考察自由几何完备化的特殊"相容"子教义而得到的次几何完备化。借此，我们为初等教义重新得到存在完备化和相干完备化。我们还将初等教义的这些完备化与笛卡尔范畴对应的正则完备化和相干完备化联系起来（见 [9]）。最后，在后一小节中，我们给出"逐点"次几何完备化的例子。

7.1 自由几何完备化与存在完备化

我们首先明确描述主教义 $P \in$ PrimDoc 的自由几何完备化 $\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)$，其定义见例 6.6(i)。这是几何教义 $\mathfrak{Z}(P, J_{\mathrm{triv}})$：$\mathcal{C}^{op} \to$ 框架$_{\mathrm{open}}$，因此根据构造 4.2，可以按以下方式描述。

(i) 对于 $\mathcal{C}$ 的每个对象 c，$\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)(c)$ 的一个元素 S 是由序对 (f, x) 构成的集合，其中 $d \xrightarrow{f} c$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个箭头，且 $x \in P(d)$；并且如果 $(f, x) \in S$，那么对于 $\mathcal{C}$ 的每个箭头 $e \xrightarrow{g} d$ 和 $y \in P(e)$，若 $y \leqslant P(g)(x)$，则 $(f \circ g, y) \in S$ 也成立。我们按包含关系对 $\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)(c)$ 排序。

(ii) 对于 $\mathcal{C}$ 的每个箭头 $d \xrightarrow{f} c$，$\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)(f)$：$\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)(c) \to \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)(d)$ 将 $S \in \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)(c)$ t o

$$f^*(S) = \{\, (g, y) \mid (f \circ g, y) \in S \,\} \in \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)(d).$$

上文给出的自由几何完备化 $\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)$ 的描述，与 [46, §4]，中确立的主教义的存在完备化 十分相似，下面我们将对此作回顾。我们将能够建立二者之间的联系：主教义的自由几何完备化可以通过先进行存在完备化，再进行存在几何完备化来计算（见例 6.6(ii)）。

存在完备化。回顾 [46] 中的内容：主教义P: $\mathcal{C}^{op} \to$ MSLat 的存在完备化是函子 $P^{\exists}$: $\mathcal{C}^{op} \to$ MSLat，其定义如下。

(i) 设 c 是 $\mathcal{C}$ 中的一个对象。考虑这样一个集合，其元素为序对 (f, x)，其中 $d \xrightarrow{f} c$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个箭头，且 $x \in P(d)$。若存在箭头 $e \xrightarrow{h} d$ 使三角形交换，则规定 $(g, y) \mathrel{6} (f, x)$，从而在该集合上定义序关系

$$\begin{array}{ccc} e & & \\ \downarrow{\scriptstyle h} & \searrow^{g} & \\ d & \xrightarrow{f} & c, \end{array}$$

使得 $y \leqslant P(h)(x)$。将满足 $(f, x) \mathrel{6} (g, y)$ 且 $(g, y) \mathrel{6} (f, x)$ 的两个元素视为相同，由此得到偏序集 $P^{\exists}(c)$。与 [46], 中一样，我们将沿用一种简便记法，不区分序对 (f, x) 与其等价类。

(ii) 给定 $\mathcal{C}$ 中的一个箭头 $e \xrightarrow{g} c$，映射 $P^{\exists}(g)$: $P^{\exists}(c) \to P^{\exists}(e)$ 将元素 $(f, x) \in P^{\exists}(c)$ 映至 $(k, P(h)(x)) \in P^{\exists}(e)$，其中

$$\begin{array}{ccc} e \times_c d & \xrightarrow{k} & e \\ \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ d & \xrightarrow{f} & c \end{array}$$

是范畴 $\mathcal{C}$中的一个拉回方块。

这就是 P 的"存在完备化"，其意义如下。

(i) 对于范畴 $\mathcal{C}$中的每个箭头 $e \xrightarrow{g} c$，映射 $P^{\exists}(g)$: $P^{\exists}(c) \to P^{\exists}(e)$ 都有一个左伴随 $\exists_{P^{\exists}(g)}$，它将 $(f, x) \in P^{\exists}(e)$ 映射为 $(g \circ f, x) \in P^{\exists}(d)$。借助这些左伴随，教义 $P^{\exists}$满足弗罗贝尼乌斯条件和贝克-切瓦利条件（参见 [46, 命题 4.2 和定理 4.3]）。

(ii) 存在一个自然变换 ι_P: $P \to P^{\exists}$，它将 $x \in P(c)$ 映射为 $(\mathrm{id}_c, x) \in P^{\exists}(c)$（参见 [46,命题 4.10]）。

(iii) 给定一个存在教义 Q: $\mathcal{D}^{op} \to$ MSLat，对于每个左正合函子 F: $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 和自然变换 α: $P \to Q \circ F^{op}$，存在唯一的自然变换 $\alpha^{\exists}$: $P^{\exists} \to Q$，使得:

(a) 三角形

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\iota_P} & P^{\exists} \\ & \searrow^{\alpha} & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{\exists}} \\ & & Q \circ F^{op} \end{array}$$

可交换,

(b) 对于范畴 $\mathcal{C}$ 中的每个箭头 $e \xrightarrow{g} c$，方形

$$\begin{array}{ccc} P^{\exists}(c) & \xleftarrow{\exists_{P^{\exists}(g)}} & P^{\exists}(e) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha^{\exists}{}_c} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{\exists}{}_e} \\ Q(F(c)) & \xleftarrow{\exists_{Q(F(g))}} & Q(F(e)) \end{array}$$

可交换（参见 [46, 定理 4.14]）。

这里给出的构造比 [46] 中的构造略作简化。具体而言，我们为范畴 $\mathcal{C}$ 中的所有箭头 $e \xrightarrow{g} c$ 添加了一个左伴随 $\exists_{P^{\exists}(g)}$，使其伴随于 $P^{\exists}(g)$；而在 [46] 中，给出了一种广义构造，它对所选的态射类 Λ 中的箭头自由地添加一个左伴随 $\exists_{P^{\exists}(g)}$，使其伴随于 $P^{\exists}(g)$。该态射类是范畴 $\mathcal{C}$ 中对拉回和复合封闭且包含所有恒等态射的类。[46, 命题 4.9], 证明了存在完备化定义了一个 2-函子

$$(-)^{\exists}\colon \mathbf{PrimDoc} \to \mathbf{ExDoc}.$$

我们现在不能我们注意到，存在完备化满足我们对"次几何性"的宽泛定义 '.

命题 **定理 7.1.** 对于每个主教义 $P\colon\ \mathcal{C}^{op}\to\mathbf{MSLat}$，都存在一个自然同构 m

$$\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)\cong\mathfrak{Z}_{\mathrm{Ex}}(P^{\exists})=\mathfrak{Z}(P^{\exists},J_{\mathrm{Ex}}).$$

证明。这显然成立，因为 $P^{\exists}(c)$ 的下闭集数据，也就是由命题 5.5 可知的 $\mathfrak{Z}_{\mathrm{Ex}}(P^{\exists})$ 的一个元素，恰好就是一个元素 $S\in\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)(c)$ 的数据。 □

7.2 广义次几何完备化

我们现在建立一个抽象框架，以刻画次几何完备化的概念。我们还给出若干充分条件，使得次几何完备化自动成为松弛幂等的。在后续的 §7.3 和 7.4 小节中，我们将证明迄今遇到的次几何完备化的例子都满足这一广义定义。

定义 7.2。 设 A-Doc 是 Doc 的一个 2-全 2-子范畴（ A-Doc 的一个对象称为 A-教义， A-Doc 的一个箭头称为 A-教义之间的态射），使得 2-函子的像

$$A\text{-}\mathbf{Doc}_{\mathrm{flat}}\hookrightarrow\mathbf{Doc}_{\mathrm{flat}}\xrightarrow{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}}\mathbf{GeomDoc}\subseteq\mathbf{Doc}_{\mathrm{flat}}$$

包含于 A-Doc 中，单位 $\eta^{(P,J_{\mathrm{triv}})}$ 也是如此：对于每个 A-教义 $P\in A\text{-Doc}$，都有 $P\to\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)$；这里，$A\text{-Doc}_{\mathrm{flat}}$ 表示 A-Doc 的 2-全 2-子范畴，其对象为 A-教义，1-胞腔为同时也是平坦的 A-教义态射。若将范畴 A-Doc 上的 2-单子 (T,ε,ν) 视为 A-教义的完备化，则称其为次几何的，如果它满足以下条件。

(i) 对于 A-Doc 中的每个 A-教义 $P\colon\ \mathcal{C}^{op}\to$ 预序，都存在一个 A-教义态射的选取

$$\xi_P\colon T\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)\to\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)$$

使得 $(\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)\ \xi_P)$ 定义一个 T-代数。

(ii) 对于每个 A-教义 $P\colon\ \mathcal{C}^{op}\to$ 预序，都存在范畴$\mathcal{D}\rtimes TP$上的一个格罗滕迪克拓扑 J_P^T，使得：

(a) 单位 $\varepsilon^P\colon\ P\to TP$ 单子给出一个教义站点态射

$$\varepsilon^P\colon(P,J_{\mathrm{triv}})\to(TP,J_P^T),$$

(b) 对于每个 A-教义 $P\colon\ \mathcal{C}^{op}\to$ 预序，上述 A-教义态射

$$\xi_P\colon T\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)\to\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)$$

由上文给出一个教义站点态射

$$\xi_P\colon(T\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P),J^T_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)})\to(\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P),K_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}),$$

(c) 并且，将一个 A-教义 $P\colon\ \mathcal{C}^{op}\to$ 预序映射到教义站点（TP， J^T）的映射可以做成函子性的，即每个 A-教义态射 $\theta\colon\ P\to Q$ 都会给出一个教义站点态射

$$T\theta\colon(TP,J_P^T)\to(TQ,J_Q^T).$$

因此存在一个函子 A-Doc $\to$ DocSites，其在对象上的作用为 $P\mapsto(TP,\ J_P^T)$（我们将此函子记为 J^T）。事实上，由于两个态射 $T\theta$、$T\theta'\colon\ TP\rightrightarrows TQ$ 在 Doc 和 DocSites 中共享相同的 2-胞腔， J^T 可以取为一个 2-函子。

定义 7.2 的条件 (i) 表明， T A-教义的完备化会将一个 A-教义P完备化为几何教义数据的某个片段。显然，如果 $\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)$ 已经具有 T要自由添加的结构，那么 $\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)$ 就是一个 T-代数。条件 (ii) 表明，新增数据可以通过选择一个格罗滕迪克拓扑来“观察”。

在定义 7.2 中，我们还区分了范畴 A-Doc（次几何完备化的单子 (T, ε, ν) 作用于其上）与范畴 A-$\mathbf{Doc}_{\mathrm{flat}}$。这种吹毛求疵是必要的，这样才能将所有我们预期属于次几何完备化的例子都纳入其中。例如，自由顶元完备化不会在 $\mathbf{Doc}_{\mathrm{flat}}$ 上诱导出一个单子：对于一个预序 P，从 $P \hookrightarrow P \oplus \top = P^{\top}$ P 到其自由顶元完备化的包含关系，即完备化的单位，并不会诱导出一个教义站点态射 $(P, J_{\mathrm{triv}}) \to (P^{\top}, J_{\mathrm{triv}})$，但会诱导出一个教义站点态射 $(P, J_{\mathrm{triv}}) \to (P^{\top}, J_{\mathrm{triv}}^{\top})$（见引理 4.6）。

定理 7.3。对于 每个定义在 2-子范畴 A-$\mathbf{Doc} \subseteq \mathbf{Doc}$ 上的次几何完备化(T, ε, ν)，方块

$$\begin{array}{ccc} A\text{-}\mathbf{Doc}_{\mathrm{flat}} & \hookrightarrow & \mathbf{Doc}_{\mathrm{flat}} \\ {\scriptstyle J^T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}} \\ \mathbf{DocSites} & \xrightarrow{\mathfrak{Z}} & \mathbf{GeomDoc} \end{array}$$

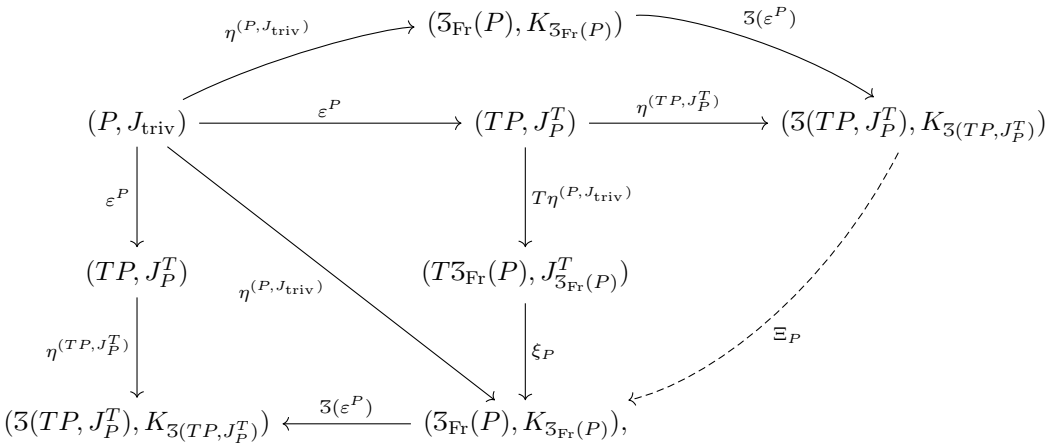
在 2-自然同构意义下交换。特别地，对于每个 A-教义 $P\colon\ \mathcal{C}^{op} \to$ 预序，存在一个同构 $\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P) \cong \mathfrak{Z}(T(P)\ J_P^T)$。

证明。 2-自然同构 $\mathfrak{Z} \circ J^T \cong \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}$ 的分量由 $\mathfrak{Z}(\varepsilon^P)$ 给出——即箭头

$$\begin{array}{ccc} (P, J_{\mathrm{triv}}) & \xrightarrow{\eta^{(P, J_{\mathrm{triv}})}} & (\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P), K_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}) \\ \downarrow{\scriptstyle \varepsilon^P} & & \vdots{\scriptstyle \mathfrak{Z}(\varepsilon^P)} \\ (TP, J_P^T) & \xrightarrow{\eta^{(TP, J_P^T)}} & (\mathfrak{Z}(TP, J_P^T), K_{\mathfrak{Z}(TP, J_P^T)}) \end{array}$$

这是由几何完备化的泛性质所诱导的。根据 ε 的 2-自然性，显然箭头 $\mathfrak{Z}(\varepsilon^P)$ 是一个 2-自然变换的分量。

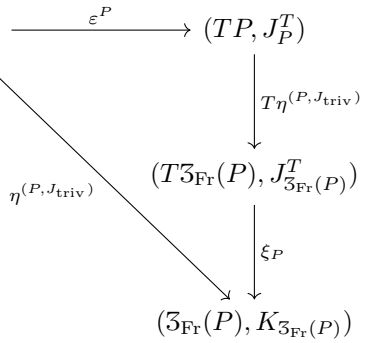
还需证明，对于每个 A-教义 $P \in A$-Doc，$\mathfrak{Z}(\varepsilon^P)$ 是一个同构。我们利用几何完备化的泛性质构造其逆映射。考虑图表



(19)

其中箭头 $\Xi_P\colon (\mathfrak{Z}(TP, J_P^T)\, K_{\mathfrak{Z}(TP, J_P^T)}) \to (\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)\, K_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)})$ 是由该对象的泛性质诱导的

几何完备化　　n。我们声称图表 (19) 可交换——只需检查三角形　　e



(20)

交换（其他子图表由定义可知也交换）。三角形 (20) 交换，因为

$$\begin{aligned}\xi_P \circ T\eta^{(P,J_{\mathrm{triv}})} \circ \varepsilon^P &= \xi_P \circ \varepsilon^{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)} \circ \eta^{(P,J_{\mathrm{triv}})} && \text{since } \varepsilon \text{ is natural,}\\ &= \eta^{(P,J_{\mathrm{triv}})} && \text{since } (\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P), \xi_P) \text{ is a } T\text{-algebra.}\end{aligned}$$

因此，　　根据几何完备化的泛性质，我们得到所需的等式　　：

$$\mathfrak{Z}(\varepsilon^P) \circ \Xi_P = \mathrm{id}_{\mathfrak{Z}(TP, J_P^T)}, \quad \Xi_P \circ \mathfrak{Z}(\varepsilon^P) = \mathrm{id}_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}.$$

□

注 7.4. 我们在 §4.1 中看到，对于每个教义 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 预序和 Grothendieck 拓扑 J 在$\mathcal{C} \rtimes P$上，都存在一个 Grothendieck 拓扑 $J^\top$在范畴 $\mathcal{C} \rtimes P^\top$上，其中 $P^\top$是自由（保留的）拓扑完备化，使得 $\mathfrak{Z}(P, J) \cong \mathfrak{Z}(P^\top, J^\top)$。不难看出，次几何完备化的概念以及定理 7.3 的结果可以扩展到涵盖 2-子范畴 A-Doc $\subseteq$ DocSites，以及目前所述的 2-子范畴 A-Doc $\subseteq$ Doc。下面给出修改后的结果。

令 A-Doc 为 DocSites 的一个 2-全 2-子范畴，并赋予一个 2-单子 (T, ε, ν)。用 $\mathbf{GeomDoc}_A$表示复合的像

$$A\text{-}\mathbf{Doc} \hookrightarrow \mathbf{DocSites} \xrightarrow{\mathfrak{Z}} \mathbf{GeomDoc}.$$

假设对于每个 $(P, J) \in A$-Doc，都存在一种选择 $J^A_{(P,J)}$，即在范畴$\mathcal{C} \rtimes \mathfrak{Z}(P, J)$ 上选取格罗滕迪克拓扑，使得 $(\mathfrak{Z}(P, J)\ J^A_{(P,J)}) \in A$-Doc，并且 $\mathfrak{Z}(P, J)$ 也满足以下性质。

(i) 拓扑的选择 $J^T_{(P,J)}$ 具有 2-函子性，即将 $\mathfrak{Z}(P, J) \in \mathbf{GeomDoc}_A$ 映射到 $(\mathfrak{Z}(P, J)\ J^A_{(P,J)}) \in A$-Doc 的函数可以扩展为一个 2-函子 $J^T\colon \mathbf{GeomDoc}_A \to A$-Doc。

(ii) 对于每个 $(P, J) \in A$-Doc，都存在一个态射

$$\xi_{(P,J)}\colon T(\mathfrak{Z}(P, J), J^T_{(P,J)}) \to (\mathfrak{Z}(P, J), J^T_{(P,J)})$$

A-Doc 中满足 $((\mathfrak{Z}(P, J)\ J^T_{(P,J)})\ \xi_{(P,J)})$ 是一个 T-代数，且此外，$\xi_{(P,J)}$ 的底层函子与自然变换对定义了一个教义态射

$$\xi_{(P,J)}\colon T(\mathfrak{Z}(P, J), J^T_{(P,J)}) \to (\mathfrak{Z}(P, J), K_{\mathfrak{Z}(P,J)}).$$

那么这个方块



在自然同构意义下交换。

次几何完备化何时是松弛幂等的? 我们在推论 6.5 中看到，自由几何完备化 $\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}$ 是松弛幂等的。我们或许会想知道，这是否意味着任意次几何完备化也都是松弛幂等的。在一些额外假设下，这一推论成立。

Pr命题 7.5. 设 (T,ε,ν) 是作用于 A-**Doc** 上的次几何完备化，使得 t:

(i) 对每个 A-教义 P，自然变换 $\eta^{(P,J_P^T)}\colon TP\to\mathfrak{Z}(TP,J_P^T)$ 逐点单射；*(ii)* 并且对每个 A-教义 P，自由几何完备化的乘法

$$\mu^P\colon \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)\to\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)$$

给出一个 T-代数之间的态射 $(\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)\,\xi_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)})\to(\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)\ \xi_P)$，

那么 (T,ε,ν) 是松弛幂等的。

证明。R 回顾一下，$\mathcal{D}$ 上的 2-单子 (τ,e,m) 是松弛幂等的，当且仅当对每个 $d\in\mathcal{D}$，存在一个 2- ll

$$\lambda_d\colon \tau e_d\to e_{\tau d},$$

在 d 中自然，使得这两个复合

$$d\xrightarrow{e_d}\tau d\ \underset{e_{\tau d}}{\overset{\tau e_d}{\Downarrow\lambda_d}}\ \tau\tau d,\qquad\qquad \tau d\ \underset{e_{\tau d}}{\overset{\tau e_d}{\Downarrow\lambda_d}}\ \tau\tau d\xrightarrow{m_d}\tau_c$$

是恒等 2-胞。

由于对于每个 A-教义 P，自然变换 $\eta^{(P,J_P^T)}\colon TP\to\mathfrak{Z}(TP,J_P^T)$ 都是逐点单射，由注记 4.14 可知函子

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{DocSites}}((TP,J_P^T),(TTP,J_{TP}^T))\to\mathrm{Hom}_{\mathbf{GeomDoc}}(\mathfrak{Z}(TP,J_P^T),\mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}(TP,J_P^T),J^T_{\mathfrak{Z}(TP,J_P^T)}))$$

由 $\eta^{(TP,J_P^T)}$ 诱导的函子是全忠实的。因此，由此诱导的函子也同样是全忠实的:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{DocSites}}((TP,J_P^T),(TTP,J_{TP}^T))\to\mathrm{Hom}_{\mathbf{GeomDoc}}(\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P),\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)) \tag{21}$$

由复合 $\Xi_P\circ\eta^{(TP,J_P^T)}$ 诱导（其中 Ξ_P是定理 7.3 中构造的 $\mathfrak{Z}(\varepsilon^P)$ 的逆映射）。我们将 $\Xi_P\circ\eta^{(TP,J_P^T)}$的复合记作 Θ_P。因此，由于 $\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}$ 是松弛幂等的，相应的 2-胞腔

$$\lambda_P\colon \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(\eta^{(P,J_{\mathrm{triv}})})\to\eta^{(\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P),J_{\mathrm{triv}})}$$

由于 (21) 是全的，故可提升为一个 2-胞腔 $\lambda_P\colon T\varepsilon^P\to\varepsilon^{TP}$（当然，这个 2-胞腔标记为 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$，其中 P纤维化在范畴 $\mathcal{C}$ 之上——但这不应与它是恒等 2-胞相混淆）。

请注意，根据定义，对于每个 A-教义 P，图表

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\varepsilon^P}{\nearrow} & TP \\ & & \downarrow{\scriptstyle \eta^{(TP,J_P^T)}} \\ P & & \mathfrak{Z}(TP,J_P^T) \\ & {\scriptstyle \eta^{(P,J_{\mathrm{triv}})}}\searrow & \uparrow{\scriptstyle \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(\varepsilon^P)}\ \downarrow{\scriptstyle \Xi_P} \\ & & \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P) \end{array}$$

是可交换的。因此，图表

$$\begin{array}{ccccc} P & \xrightarrow{\varepsilon^P} & TP & \underset{\varepsilon^{TP}}{\overset{T\varepsilon^P}{\Downarrow\lambda_P}} & TTP \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle \Theta_P} & & \downarrow{\scriptstyle \Theta_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}\circ T\Theta_P} \\ P & \xrightarrow[\eta^{(P,J_{\mathrm{triv}})}]{} & \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P) & \underset{\eta^{(\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P),J_{\mathrm{triv}})}}{\overset{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(\eta^{(P,J_{\mathrm{triv}})})}{\Downarrow\lambda_P}} & \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P), \end{array}$$

也具有交换性。由于

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{DocSites}}((P, J_{\mathrm{triv}}), (TTP, J_{TP}^T)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{DocSites}}((P, J_{\mathrm{triv}}), (\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P), K_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}))$$

是忠实的，再次根据注记 4.14，我们得出 $\lambda_P * \varepsilon^P$ 确实是恒等 2-胞。

我们利用对称论证得出，$\nu^P * \lambda_P$ 也是恒等 2-胞。我们声称图表

$$\begin{array}{ccccc}
TP & \overset{T\varepsilon^P}{\underset{\varepsilon^{TP}}{\Downarrow \lambda_P}} & TTP & \xrightarrow{\nu^P} & TP \\
\downarrow{\scriptstyle \Theta_P} & & \downarrow{\scriptstyle \Theta_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)} \circ T\Theta_P} & & \downarrow{\scriptstyle \Theta_P} \\
\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P) & \overset{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(\eta^{(P, J_{\mathrm{triv}})})}{\underset{\eta^{(\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P), J_{\mathrm{triv}})}}{\Downarrow \lambda_P}} & \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P) & \xrightarrow{\mu^P} & \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)
\end{array} \tag{22}$$

也具有交换性。利用

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{DocSites}}((TP, J_P^T), (TP, J_P^T)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{GeomDoc}}(\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P), \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P))$$

是忠实的，再次根据注记 4.14，我们得出 $\nu^P * \lambda_P$ 确实是所需的恒等 2-胞。

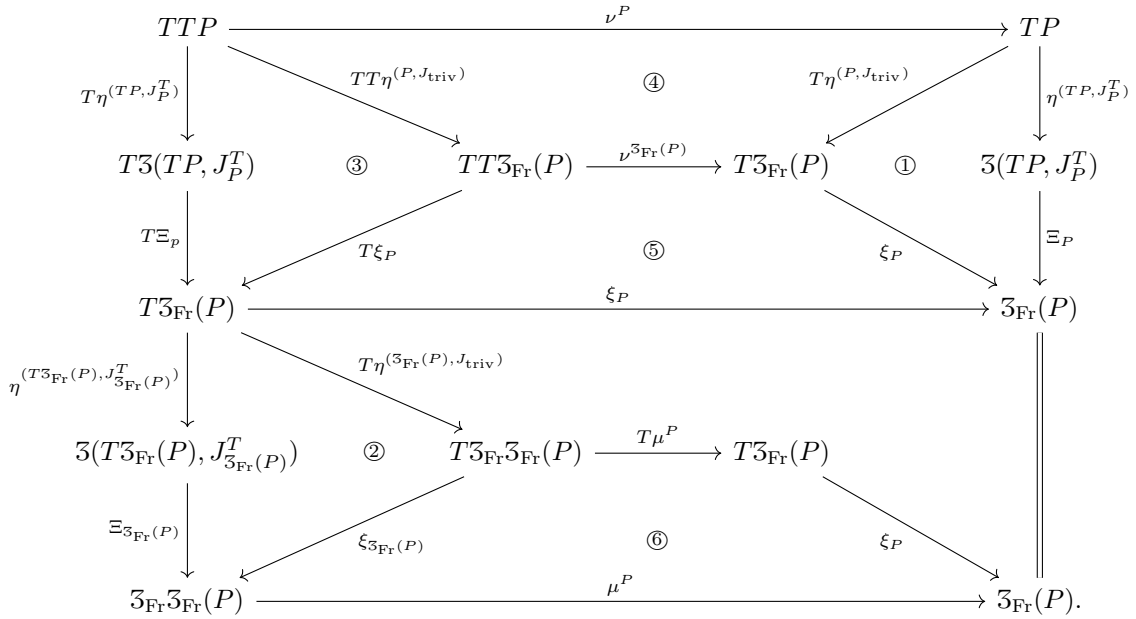
然而，证明（22）的交换性，即所需方形图的交换性

$$\begin{array}{ccc}
TTP & \xrightarrow{\nu^P} & TP \\
{\scriptstyle \Theta_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)} \circ T\Theta_P}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Theta_P} \\
\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P) & \xrightarrow{\mu^P} & \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P),
\end{array} \tag{23}$$

则更加复杂。首先，回顾定理 7.3：对于每个 A-教义 P，方形图

$$\begin{array}{ccc}
TP & \xrightarrow{\eta^{(TP, J_P^T)}} & \mathfrak{Z}(TP, J_P^T) \\
\downarrow{\scriptstyle T\eta^{(P, J_{\mathrm{triv}})}} & & \downarrow{\scriptstyle \Xi_P} \\
T\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}} & \xrightarrow{\xi_P} & \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)
\end{array} \tag{24}$$

可交换。我们可以通过将方形（23）分解如下，证明它可交换：



方形 1◯ 和 2◯ 根据（24）可交换，而方形 3◯ 只是将 T 应用于（24）。方形 4◯ 根据 ν 的自然性：$TT \to T$，可交换。方形 5◯ 可交换，因为 $(\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)\ \xi_P)$ 是一个 T-代数。方形 6◯ 可交换，这是基于如下假设：μ^P 给出一个 T-代数之间的态射 $(\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)\,\xi_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}) \to (\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)\ \xi_P)$。最后，待验证的剩余等式 $\xi_P \circ T\mu^P \circ T\eta^{(\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)\ J_{\mathrm{triv}})} = \xi_P$，由 $(\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}, \eta, \mu)$ 的单位律推出：

$$\mu^P \circ \eta^{(\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P), J_{\mathrm{triv}})} = \mathrm{id}_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}.$$

□

7.3 通过子教义实现的次几何完备化

设 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{MSLat}$ 是一个主教义。命题 7.1 的另一种表述是，$P^{\exists}(c)$ 可以还原为 $\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)(c)$ 中由形如 $\exists_f \eta_d^{(P,J_{\mathrm{triv}})}(x)$ 的元素组成的子集，其中 $d \xrightarrow{f} c$ 是 $\mathcal{C}$ 的箭头，且 $x \in P(d)$。此外，元素 $\exists_f \eta_d^{(P,J_{\mathrm{triv}})}(x) \in \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)(c)$ 可以刻画为位点 $(\mathcal{C} \rtimes \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)\, K_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)})$ 的超紧对象。

引理 7.6。元素 $S \in \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)(c)$ 具有 $\exists_f \eta_d^{(P,J_{\mathrm{triv}})}(x)$ 的形式，当且仅当 (c, S) 是超紧的，即 (c, S) 的每个 $K_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}$-覆盖都包含一个单元素子覆盖。

证明。首先，若 S 是超紧的，那么由于（c，S）具有 $K_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}$-覆盖

$$\left\{ (d, \eta_d^{(P,J_{\mathrm{triv}})}(x)) \xrightarrow{f} (c, S) \,\middle|\, (f, x) \in S \right\},$$

S 必须等于 $\exists_f \eta_d^{(P,J_{\mathrm{triv}})}(x)$，其中 $(f, x) \in S$。

对象（$c, \exists_f \eta_d^{(P,J_{\mathrm{triv}})}(x)$）是超紧的，因为如果

$$\left\{ (e_i, T_i) \xrightarrow{g_i} (c, \exists_f \eta_d^{(P,J_{\mathrm{triv}})}(x)) \,\middle|\, i \in I \right\}$$

是一个 $K_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}$-覆盖，那么 $\bigcup \exists_{g_i} T_i = \exists_f \eta_d^{(P,J_{\mathrm{triv}})}(x)$，因此对于某个 $i' \in I$，$(f, x) \in \exists_{g_{i'}} T_{i'}$。因此，$\exists_{g_{i'}} T_{i'} = \exists_f \eta_d^{(P,J_{\mathrm{triv}})}(x)$，所以单元素箭头 $\{(e_{i'}, T_{i'}) \xrightarrow{g_{i'}} (c, \exists_f \eta_d^{(P,J_{\mathrm{triv}})}(x))\}$ 是一个 $K_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}$-覆盖。 □

本小节研究以类似方式通过取自由几何完备化的某些子教义而得到的教义完备化。我们将为通过子教义得到的这类完备化建立一般理论，并证明它们在定义 7.2 的意义下是次几何的，从而提供一大类次几何完备化的例子。此外，我们证明所诱导的 2-单子都是松弛幂等的。

我们以这种方式得到的次几何完备化的例子包括存在完备化 $T^{\exists}\colon \mathbf{PrimDoc} \to \mathbf{PrimDoc}$，已在 [46] 中建立。我们还将为初等教义得到一种松弛幂等的**自由相干完备化**。最后，我们将把由此得到的存在完备化和相干完备化，与笛卡尔范畴的正则完备化和相干完备化联系起来。

相容子完备化我们首先针对通过自由几何完备化的子教义得到的教义完备化，发展一般理论。我们将其称为**相容子完备化**，这是类比于拓扑斯论研究 Stone 型对偶时所用的术语“相容性质”而得，详见 [5,§3]。给定一个教义 $Q\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 预序，Q 的一个子教义是指一个教义 $Q'\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 预序，它也以 $\mathcal{C}$ 为指标范畴，并且有一个自然变换 $Q' \hookrightarrow Q$，其每个分量都是子集包含关系 $Q'(c) \subseteq Q(c)$。

在本小节中，对于我们遇到的每个教义站点（P, J），拓扑 J 都取为平凡拓扑 J_{triv}。因此，我们简化记号，将 η^P 记作 $\eta^{(P,J_{\mathrm{triv}})}$，将 μ^P 记作 $\mu^{(P,J_{\mathrm{triv}})}$，等等。

定义 7.7. 设 A-**Doc** 是 $\mathbf{Doc}_{\mathrm{flat}}$ 的一个 2-全 2-子范畴，且包含函子的像

$$A\text{-}\mathbf{Doc} \hookrightarrow \mathbf{Doc}_{\mathrm{flat}} \xrightarrow{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}} \mathbf{GeomDoc} \subseteq \mathbf{Doc}_{\mathrm{flat}},$$

以及一个对每个 A-教义 $P \in A$-Doc，单位 $\eta^P\colon P \to \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)$。对子教义的一种选择

$$H^P\colon TP \hookrightarrow \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P),$$

for e个 A-教义 P，称为 A-相容，如果满足以下条件。

(i) 对于每个 A-教义 $P\colon\ \mathcal{C}^{op} \to$预序，$TP$是子教义 $TP \hookrightarrow \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)$，且包含单位 η^P 的像，即存在一个分解

$$P \xrightarrow{\varepsilon^P} TP \xhookrightarrow{H^P} \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P),\qquad \eta^P = H^P\varepsilon^P$$

使得分解态射 $\varepsilon^P\colon P \to TP$ 是一个 A-教义态射。

(ii) 该选择是自然的，即对于每个 A-教义态射 $(F,a)\colon P \to Q$，诱导的几何教义态射 $\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(F,a)\colon \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P) \to \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(Q)$ 限制到 $TP \to TQ$，如图表所示

$$\begin{array}{ccccc} P & \xrightarrow{\varepsilon^P} & TP & \xhookrightarrow{H^P} & \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P) \\ \downarrow{\scriptstyle (F,a)} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(F,a)} \\ Q & \xrightarrow{\varepsilon^Q} & TQ & \xhookrightarrow{H^Q} & \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(Q), \end{array} \tag{25}$$

并且限制 $TP \to TQ$ 是一个 A-教义态射（也就是说，我们得到一个 (1-)自函子$T\colon\ A$-Doc $\to A$-Doc）。

(iii) 对每个 $P \in A$-Doc，子教义 $H^P\colon TP \hookrightarrow \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)$ 与乘法$\mu^P\colon \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P) \to \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)$ 是“相容”的，其含义是复合

$$TTP \xrightarrow{TH^P} T\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P) \xrightarrow{H^{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}} \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P) \xrightarrow{\mu^P} \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P) \tag{26}$$

可经由子教义 $H^P\colon TP \hookrightarrow \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)$ 分解，而此分解 $\nu^P\colon TTP \to TP$是一个 A-教义态射。

例 7.8。有两个基本例子值得牢记，它们有助于阐明我们的发展思路。在这两种情况下，2-范畴 A-Doc 都取为初等教义的 2-范畴 PrimDoc。

(i) 我们已经见过第一个例子。对于每个初等教义 P，取 $T^{\exists}P \hookrightarrow \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)$ 为由超紧元素构成的子教义，这与 PrimDoc 相容。虽然并非每个几何教义态射 $(G,b)\colon \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P) \to \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(Q)$ 都会将超紧元素 $S \in \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)(c)$ 映至超紧元素 $b_c(S) \in \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(Q)(G(c))$，但对于形如 $\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(F,a)$ 的态射，这一点确实成立，其中 $(F,a)\colon P \to Q$ 是一个初等教义态射。

$TTP(c)$中的元素具有如下形式

$$\exists_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)(g)}\eta_e^{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}\left(\exists_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)(f)}\eta_d^P(x)\right),$$

其中，$d \xrightarrow{f} e$、$e \xrightarrow{g} c \in \mathcal{C}$是一对可复合的箭头，且 $x \in P(d)$是一个元素。可以计算得出

$$\mu_e^P\left(\exists_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)(g)}\eta_e^{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}\left(\exists_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)(f)}\eta_d^P(x)\right)\right) = \exists_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)(g\circ f)}\eta_d^P(x).$$

因此，μ^P限制为一个态射 $\nu^P\colon TTP \to TP$。关于 $T^{\exists}$的其他必要条件很容易验证。

(ii) 现在考虑将 $T_{\mathrm{Coh}}P$ 取为 $\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)$ 中由紧元构成的子教义，即 $T_{\mathrm{Coh}}P(c)$ 是 $\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)(c)$ 中满足以下条件的那些元素 $S \in\colon$ (c,S) 的每个 $K_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}$ 覆盖都有有限子覆盖。验证 $\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)$ 的这一子教义选择满足所需条件，与$T^{\exists}$的情形类似。

(1-)自函子 $T\colon A\text{-}\mathbf{Doc}\to A\text{-}\mathbf{Doc}$ 具有 2-函子性。范畴 $P\rightrightarrows Q$ 之间的教义态射 (F,a)、(F',a') 所构成的每个 2- 胞 $\alpha\colon (F,a)\to(F',a')$（即适当的自然变换 $\alpha\colon F\to F'$）都会给出一个 2- 胞

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(F,a)}{\curvearrowright} & \\ \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P) & \Downarrow\alpha & \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(Q) \\ & \underset{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(F',a')}{\curvearrowright} & \end{array}$$

因为 $\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}$ 是 2-f 函子性。因此，α 也定义了一个从子教义上的限制之间的 2-胞 s

$$\begin{array}{ccc} & \overset{T(F,a)}{\curvearrowright} & \\ TP & \Downarrow\alpha & TQ. \\ & \underset{T(F',a')}{\curvearrowright} & \end{array}$$

我们还注意到，由于三元组 (T,ε,ν) 是 2-单子 $(\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}},\eta,\mu)$ 的一个限制，(T,ε,ν) 的单子方程自动成立。

引理 7.9。三元组 $(T,\ \varepsilon,\ \nu)$ 是 A-**Doc** 上的一个 *2*-单子。

我们将这个 2-单子称为相容子完备化。

命题 7.10. 每个相容子完备化 $T\colon A\text{-}\mathbf{Doc}\to A\text{-}\mathbf{Doc}$ 都是次几何的。

证明. 对于每个 A-教义 P，态射

$$T\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)\xrightarrow{H^{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)\xrightarrow{\mu^P}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)$$

是赋予 $\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)$ 一个 T-代数结构的自然方式。单位条件，即三角形的交换性

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P) & \xrightarrow{\varepsilon^{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}} & T\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P) \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle H^{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}} \\ & & \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mu^P} \\ & & \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P), \end{array}$$

成立，因为 $H^{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}\circ\varepsilon^{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}=\eta^{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}$ 且 $\mu^P\circ\eta^{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}=\mathrm{id}_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}$。作用性质，即

$$\mu^P\circ H^{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}\circ T(\mu^P\circ H^{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)})=\mu^P\circ H^{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}\circ\nu^{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)},$$

由图表的交换性可得

$$\begin{array}{ccccc} TT\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P) & \xrightarrow{TH^{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}} & T\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P) & \xrightarrow{T\mu^P} & T\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P) \\ \downarrow{\scriptstyle \nu^{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}} & ③ & \downarrow{\scriptstyle H^{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}} & ② & \downarrow{\scriptstyle H^{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}} \\ & & \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P) & \xrightarrow{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}\mu^P} & \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mu^{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}} & ① & \downarrow{\scriptstyle \mu^P} \\ T\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P) & \xrightarrow{H^{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}} & \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P) & \xrightarrow{\mu^P} & \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P). \end{array} \tag{27}$$

方块 1○ 的交换性是有保证的，因为 $(\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}, \eta, \mu)$ 是一个 2-单子，而方块 2○ 和 3○ 根据定义可交换（见方程 (25) 和 (26)）。

现在我们要在 $\mathcal{C} \rtimes TP$ 上寻找一个满足定义 7.2 所要求条件的格罗滕迪克拓扑 J_P^T。我们采取显而易见的选择：由于 TP 是 $\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)$ 的子教义，$\mathcal{C} \rtimes TP$ 是 $\mathcal{C} \rtimes \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)$ 的子范畴，因此我们将 J_P^T 定义为 $K_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}$ 在 $\mathcal{C} \rtimes P$ 上的限制。我们验证定义 7.2(ii) 的三个条件均成立。

(a) 回顾一下，自由几何完备化的单位给出了一个稠密位点态射

$$\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \rtimes \eta^P \colon (\mathcal{C} \rtimes P, J_{\mathrm{triv}}) \to (\mathcal{C} \rtimes \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P), K_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}).$$

函子 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \rtimes \eta^P$ 分解为

$$(\mathcal{C} \rtimes P, J_{\mathrm{triv}}) \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \rtimes \varepsilon^P} (\mathcal{C} \rtimes TP, J_P^T) \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \rtimes H^P} (\mathcal{C} \rtimes \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P), K_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}).$$

右因子 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \rtimes H^P$ 是稠密子范畴的包含关系，因此也是稠密位点态射。因此，根据 [45, 推论 11.6], $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \rtimes \varepsilon^P$ 是位点态射，于是

$$\varepsilon^P \colon (P, J_{\mathrm{triv}}) \to (TP, J_P^T)$$

正如所需，这是一个教义站点态射。

(b) 首先，函子 μ^P 定义了一个教义站点态射

$$\mu^P \colon (\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P), K_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}) \to (\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P), K_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}).$$

其次，$\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \rtimes H^{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)} : (\mathcal{C} \rtimes \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)\, J^T_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}) \to (\mathcal{C} \rtimes \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)\, K_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)})$ 是一个稠密子范畴的包含关系，因此是一个位点态射，从而

$$H^{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)} \colon (\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P), J^T_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}) \to (\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P), K_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)})$$

是一个教义站点态射。因此，复合 $\mu^P \circ H^{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}$ 定义了一个教义站点态射

$$\mu^P \circ H^{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)} \colon (T\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P), J^T_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}) \to (\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P), K_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}).$$

(c) 最后，我们希望证明，对于每个 A-教义态射 $\theta\colon P \to Q$，$T\theta\colon (TP, J_P^T) \to (TQ, J_Q^T)$ 都是一个教义站点态射。根据假设，由于 $T\theta$ 是一个 A-教义态射，它已经是平坦的。$T\theta$ 将 J_P^T-覆盖映射到 J_Q^T 覆盖这一点，可以由 $\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(\theta)\colon \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P) \to \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(Q)$ 将 $K_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}$-覆盖映射到 $K_{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(Q)}$-覆盖得出。

□

现在应用命题 7.5 可知，每个相容子完备化都是松弛幂等的。命题 7.5 的两个条件显然都满足。每个分量 $\eta_c^{(TP, J_P^T)}\colon TP(c) \to \mathfrak{Z}(TP, J_P^T)(c)$ 都是单射——事实上，它与包含关系 $H_c^P\colon TP(c) \subseteq \mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)(c) \cong \mathfrak{Z}(TP, J_P^T)(c)$ 同构，而

$$\mu^P \colon (\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P), \mu^{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)} \circ H^{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)}) \to (\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P), \mu^P \circ H^{\mathfrak{Z}_{\mathrm{Fr}}(P)})$$

根据等式 (27) 右侧的交换性，它是一个 T-代数态射。

推论 7.11. 每个相容子完备化 (T, ε, ν) 都是一个松弛幂等 *2*-单 *d.*

正则完备化与相干完备化。让我们重新考察例 7.8 中给出的相容子完备化示例。正如引理 7.6 中所述，我们已将 [46], 中建立的存在完备化，即松弛幂等 2-单子 $T^{\exists}\colon \mathbf{PrimDoc} \to \mathbf{PrimDoc}$，恢复为一个相容子完备化。

2-单子 $T^{\exists}$ 的代数的 2-范畴，恰好就是存在教义的 2-范畴 **ExDoc**（见 [46, 推论 5.5]）。类似地，我们可以将以下对象的代数的 2-范畴识别为

松弛幂等 2-单子 T^{Coh}：PrimDoc $\to$PrimDoc，即相干教义的 2-范畴 CohDoc。利用内在的 2-伴随

$$\tau\text{-}\mathbf{Alg} \underset{\hookrightarrow}{\overset{\tau}{\longleftarrow}} \mathcal{C}$$

对于 2-范畴 $\mathcal{C}$ 上的 2-单子 (τ, e, m)，我们可以得到以下教义完备化。

推论 7.12(§5 [46])**.** *(i) 2-*嵌入 $\mathbf{ExDoc} \hookrightarrow \mathbf{PrimDoc}$ 具有一个松弛幂等的左 *2-*伴随 .
*(ii) 2-*嵌入 $\mathbf{CohDoc} \hookrightarrow \mathbf{PrimDoc}$ 具有一个松弛幂等的左 *2-*伴随。

仿照 [36], ，我们转而利用教义的完备化来描述范畴的完备化。我们在推论 6.7 中已经看到，自由几何完备化将一个笛卡尔范畴完备化为一个几何范畴。据此我们推断，以类似方式构造的本小节中的次几何完备化，将给出笛卡尔范畴的其他完备化。

如 [46, §6], 中所述，主教义的存在完备化可用于得到笛卡尔范畴的正则完备化 。对于笛卡尔范畴 $\mathcal{C}$, Carboni 在 [9] 中如下描述正则完备化 Reg($\mathcal{C}$)：

(i) Reg($\mathcal{C}$) 的对象是 $\mathcal{C}$ 中的箭头 $d \xrightarrow{f} c$；
(ii) Reg($\mathcal{C}$) 中的一个箭头 $[g]$: $f_1 \to f_2$ 是满足以下条件的箭头 g: $d_1 \to d_2$ 的一个等价类

$$e \underset{k}{\overset{h}{\rightrightarrows}} d_1 \xrightarrow{f_2 \circ g} c_2$$

图表交换，其中 (h, k) 是 f_1 的核对，即

$$\begin{array}{ccc} e & \xrightarrow{h} & d_1 \\ \downarrow{\scriptstyle k} & & \downarrow{\scriptstyle f_1} \\ d_1 & \xrightarrow{f_1} & c_1 \end{array}$$

是一个拉回。若满足以下条件，则两个这样的箭头 g, g': $d_1 \rightrightarrows d_2$ 等价（$[g] = [g']$）：

$$d_1 \underset{g'}{\overset{g}{\rightrightarrows}} d_2 \xrightarrow{f_2} c_2$$

图表交换。
在 [9, §5] 中证明了，这定义了拟 2-伴随在对象上的作用，该拟 2-伴随对应于 2-嵌入

$$\mathbf{Reg} \hookrightarrow \mathbf{Cart}$$

从笛卡尔范畴到正则范畴。类似于推论 6.7，我们推得 Syn($T^{\exists}\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}$) 满足与 Reg($\mathcal{C}$) 相同的泛性质，因此 Syn($T^{\exists}\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}$) $\simeq$Reg($\mathcal{C}$)。类似地，考虑笛卡尔范畴 $\mathcal{C}$ 的范畴 Syn($T^{\mathrm{Coh}}\mathrm{Sub}_{\mathcal{C}}$)，我们得到 $\mathcal{C}$的相干完备化。

推论 7.13。 *2-*嵌入 $\mathbf{Coh} \hookrightarrow\mathbf{Cart}$ 具有一个左拟 *2-*伴随——即笛卡尔范畴的相干完备化。

注 7.14。 正如在 [46, §6], 中所观察到的，通过复合来自存在完备化、句法范畴构造以及正则范畴的精确完备化的（拟）2-伴随（见 [10,§2.3]），如图表所示

$$\mathbf{PrimDoc} \underset{\hookleftarrow}{\longrightarrow} \mathbf{ExDoc} \underset{\hookleftarrow}{\longrightarrow} \mathbf{Reg} \underset{\hookleftarrow}{\longrightarrow} \mathbf{Exact},$$

我们由此得到 [36] 意义下的主教义的精确完备化。Maietti、Pasquali 和 Rosolini [36], [33] 的工作对于通过一系列

教义完成来理解教义的精确完备化具有开创性。函子 ExDoc $\to$ Exact 是所谓的*"tripos"*构造（见 [18], [43]），也称为部分等价关系构造，因为所得范畴的对象是在教义内语言中的部分等价关系。

由于主教义的几何完备化诠释了几何逻辑，我们也可以考虑取一个类似的范畴，其对象是内部部分等价关系的有限（或无限）元组。这样便可得到预拓扑斯完成的教义版本（参见 [38, §8.4]）。几何完备化在关联各种「类 tripos」构造时所发挥的统一作用，将是未来研究的主题。

7.4 逐点次几何完备化

在本小节最后，我们根据定义 7.2，重新审视自由顶元完备化，将其视为一种次几何完备化。由于几何逻辑的句法通常由符号 $\{\top, \exists, \bigvee, \wedge\}$ 表示，我们不妨「补全集合」，并简要说明自由上确界完备化和自由二元交完备化也构成次几何完备化（相对于符号 $\{\exists\}$ 的完备化即前文讨论过的存在完备化）。定义 7.2 的条件很容易验证，只是过程繁琐，因此我们省略许多细节。

由于本小节所考虑的完备化具有"逐点"性质，我们先陈述一些关于此类完备化的易于推导的事实。假设给定一个 PreOrd 的 2-全 2-子范畴 A-PreOrd，其包含关系 A-PreOrd $\hookrightarrow$ PreOrd 有一个左（严格）2-伴随 T^A: PreOrd $\to A$-PreOrd；等价地，对于每个预序 P，完备化 $T^A P$具有如下泛性质：对于任意单调映射 a: $P \to Q$，其中 $Q \in A$-PreOrd，存在唯一的态射 a^A: $T^A P \to Q$，它属于 A-PreOrd，且使下述三角形

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\varepsilon} & T^A P \\ & \searrow^{a} & \downarrow{\scriptstyle a^A} \\ & & Q \end{array}$$

交换（其中 ε 是 2-伴随的单位）。显然可以推导出，函子 T^A 可扩展为一个（严格）2-伴随

$$[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{PreOrd}] \underset{\longleftarrow}{\xrightarrow{T'^A}} [\mathcal{C}^{op}, A\text{-}\mathbf{PreOrd}],$$

从而得到一个（严格）2-伴随

$$\mathbf{Doc} \underset{\longleftarrow}{\xrightarrow{T''^A}} A\text{-}\mathbf{Doc},$$

其中 A-Doc 是 A-PreOrd 值教义的范畴。

自由顶元完备化。令 $T^\top$: Doc $\to$ Doc 表示在 §4.1 中构造的自由（保持）顶元完备化单子。由于保持顶元，每个几何教义 $\mathbb{L}$: $\mathcal{C}^{op} \to \mathrm{Frm}^{\mathrm{open}}$ 都可以自然地转化为该单子的代数。我们也已经遇到过范畴 $\mathcal{C} \rtimes P^\top$ 上的拓扑 $J^\top_{\mathrm{triv}}$，其中 P 是一个教义 P: $\mathcal{C}^{op} \to$ PreOrd。很容易证明，这一格罗滕迪克拓扑的选取满足定义 7.2 的条件：例如，单位 $(P, J_{\mathrm{triv}}) \hookrightarrow (P^\top, J^\top_{\mathrm{triv}})$ 是位点态射，这一点可由引理 4.6 得出。因此，我们可以应用定理 7.3 推出命题 4.7。

自由并完备化。如前所述，2-函子 $\mathsf{3}_{\mathrm{Ex}}$: ExDoc $\to$ GeomDoc 将存在教义 P: $\mathcal{C}^{op} \to$ MSLat 映射到其"逐点"并完备化 $2^{(-)^{op}} \circ P$: $\mathcal{C}^{op} \to$ 框架^{open}，也就是说，$\mathsf{3}_{\mathrm{Ex}}(P)(c)$ 是由 $P(c)$ 的下闭集构成、按包含关系排序的偏序集。我们也可以考虑对任意教义 $P \in$ Doc 取其"逐点"并完备化 $2^{(-)^{op}} \circ P$。因此，元素 $J \in 2^{(-)^{op}} \circ P(c)$ 是 $P(c)$ 的一个下闭集。根据上述讨论，这给出了一个左伴随 $T^\vee$，对应于将取值于 SupSLat 的教义包含到 Doc 中的包含关系；其中 SupSLat 是由上半格（即具有所有上确界的偏序集）、它们的同态以及它们之间的自然变换构成的 2-范畴。根据 $T^\vee$ 的泛性质，对于每个几何教义 $\mathbb{L} \in$ GeomDoc，都存在一个自然变换 $\mathrm{id}^\vee_{\mathbb{L}}$: $T^\vee \mathbb{L} \to \mathbb{L}$，使得 $(\mathbb{L}, \mathrm{id}^\vee_{\mathbb{L}})$ 是一个 $T^\vee$-代数。

对于每个教义 $P\colon \mathcal{C}^{op} \to$ 集合，选择拓扑 $J_P^\vee$，其中 $J_P^\vee$ 是由形如以下形式的覆盖族生成的 $\mathcal{C} \rtimes T^\vee P$ 上的格罗滕迪克拓扑

$$\left\{ (c, J_i) \xrightarrow{\mathrm{id}_c} \left(c, \bigcup_{i \in I} J_i \right) \,\middle|\, i \in I \right\},$$

很容易证明它满足定义 7.2 的条件。因此，根据定理 7.3，对于每个教义 P，都有一个自然同构 $\mathsf{3}_{\mathrm{Fr}}(P) \cong \mathsf{3}(T^\vee P, J_P^\vee)$。

自由二元交完备化。最后，我们构造教义的自由二元交完备化，并指出它同时也是一种次几何完备化。我们先定义预序的自由二元交完备化。

定义 7.15。设 P 是一个预序。考虑由 P 的非空有限子集组成的集合 $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(P) \setminus \emptyset$。我们通过规定 $\{ x_1, x_2, \dots, x_n \} \leqslant \{ y_1, y_2, \dots, y_m \}$ 当且仅当每个 y_i 都大于某个 x_j，来定义 $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(P) \setminus \emptyset$ 上的序。我们将 $P^\wedge$ 定义为通过对 $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(P) \setminus \emptyset$ 中的两个元素 $\{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$、 $\{ y_1, y_2, \dots, y_m \}$ 作如下等同而得到的偏序集:

$$\{ x_1, x_2, \dots, x_n \} \leqslant \{ y_1, y_2, \dots, y_m \} \text{ and } \{ y_1, y_2, \dots, y_m \} \leqslant \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}.$$

我们用 $[\![x_1、\ x_2、\ \dots\dots、\ x_n]\!]$ 表示 $\{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$ 的等价类。或者， $P^\wedge$ 也可以描述为由 P 的非空有限生成上闭集按包含关系构成的偏序集。

很容 易验证，两个元素 $[\![x_1、\ \dots\dots、\ x_n]\!]$ 和 $[\![y_1、\ \dots\dots、\ y_m]\!] \in P^\wedge$ 的交由 y

$$[\![x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]\!],$$

因此，偏序集 $P^\wedge$ 具有所有二元交。显然，映射 $[\![-]\!]_P\colon P \to P^\wedge$ 将 $x \in P$映射到 $[\![x]\!] \in P^\wedge$，是单调的。由于每个元素 $[\![x_1、\ \dots\dots、\ x_n]\!] \in P^\wedge$ 都是元素 $[\![x_i]\!] \in P^\wedge$ 的有限交，我们得到了所需的泛性质：对于每个预序 P 以及任意单调映射 $a\colon P \to Q$，其中 Q具有二元交，都存在唯一的单调映射 $a^\wedge\colon P^\wedge \to Q$，它保持二元交，使得三角形

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{[\![-]\!]_P} & P^\wedge \\ & \searrow^{a} & \downarrow{\scriptstyle a^\wedge} \\ & & Q \end{array}$$

可交换。

因此，根据上述讨论，存在一个左 2-伴随 $T^\wedge$ ，它对应于 BMSLat 值教义到 Doc 的包含关系；其中 BMSLat 是由二元交半格、它们的同态以及这些同态之间的自然变换构成的 2-范畴。显然，由 $T^\wedge$ 的泛性质诱导出一个自然变换 $\mathrm{id}_{\mathbb{L}}^\wedge\colon T^\wedge \mathbb{L} \to \mathbb{L}$，从而为每个几何教义 $\mathbb{L} \in$ GeomDoc 赋予一个 $T^\wedge$ 代数 $(\mathbb{L}, \mathrm{id}_{\mathbb{L}}^\wedge)$。

我们用 $J_P^\wedge$ 表示 $\mathcal{C} \rtimes T^\wedge P$ 上由以下形式的覆盖族生成的格罗滕迪克拓扑

$$\{ (c, [\![y]\!]) \xrightarrow{\mathrm{id}_c} (c, [\![x_1, x_2, \dots, x_n]\!]) \mid y \in P(c),\, y \leqslant x_1, x_2, \dots, x_n \}.$$

要得出所选拓扑 $J_P^\wedge$ 满足定义 7.2 的条件，并无太多障碍。因此，由定理 7.3 可得，对于每个教义 P，存在一个自然同构 $\mathsf{3}_{\mathrm{Fr}}(P) \cong \mathsf{3}(T^\wedge P, J_P^\wedge)$。

致谢

我感谢导师 Olivia Caramello 的支持，并谨此致谢 Insubria-Huaweistudentship 对“面向信息与计算的格罗滕迪克拓扑斯”项目提供的经费支持。

参考文献

[1] S. Abramsky，《域理论与可观测性质逻辑》，博士学位论文，玛丽女王学院，伦敦大学，1987年。arXiv：1112.0347 [cs.LO].[2] M. Artin、A. Grothendieck 和 J. Verdier，《拓扑斯理论与概形的*étale*上同调》第三卷，布瓦-马里代数几何研讨班 1963—1964年，丛书《数学讲义》305。施普林格，柏林、海德堡，1973年。[3] M. Barr，《正合范畴》，载于《正合范畴与层范畴》。柏林、海德堡：施普林格柏林海德堡出版社，1971年，第1–120页。[4] F. Borceux，《范畴代数手册》，丛书《数学及其应用百科全书》。剑桥大学出版社，1994年，第2卷。[5] O. Caramello，《Stone 型对偶的拓扑斯理论方法》，2011年。arXiv：arXiv:1103.3493 [math.CT].[6] ——，《理论、位点、拓扑斯：通过拓扑斯理论“桥接”关联并研究数学理论。牛津大学出版社，2018年。[7] ——，《稠密条件、态射与拓扑斯等价》，2020年。arXiv：1906.08737 [math.CT].[8] ——，《纤维化位点与存在拓扑斯》，2022年。arXiv：2212.11693 [math.AG].[9] A. Carboni，《可实现性与证明论中的若干自由构造》，《纯粹与应用代数杂志》，第103卷，第2期，第117–148页，1995年。[10] A. Carboni 和 E. Vitale，《正则完备化与正合完备化》，《纯粹与应用代数杂志》，第125卷，第1期，第79–116页，1998年。[11] D. Coumans，《将典范扩张推广至范畴框架》，《纯粹与应用逻辑年刊》，第163卷，第12期，第1940–1961页，2012年。[12] B. Davey 和 H. Priestley，《格与序导论》，丛书《剑桥数学教材》。剑桥大学出版社，2002年。[13] P. J. Freyd 和 A. Scredrov，《范畴、寓言范畴。北荷兰出版公司，1991年。[14] J. Giraud，《分类拓扑斯》，载于《拓扑斯、代数几何与逻辑，F. W. Lawvere 编，柏林、海德堡：施普林格柏林海德堡出版社，1972年，第43–56页。[15] S. van Gool 和 J. Marquès，《多元空间的对偶与模型论》，2022年。arXiv：2210.01018 [math.LO

].

[16] J. W. Gray，形式范畴论：*2*-范畴的伴随性，《数学讲义》丛书。施普林格，柏林、海德堡，1974年，第391卷。[17] W. Hodges，模型论，《数学及其应用百科全书》丛书。剑桥大学出版社，1993年。[18] J. M. E. Hyland、P. T. Johnstone 和 A. M. Pitts，“Tripos 理论”，剑桥哲学学会数学学报，第88卷，第2期，第205–232页，1980年。[19] B. Jacobs，范畴逻辑与类型论，《逻辑与数学基础研究》丛书。Elsevier，1999年，第141卷。[20] P. T. Johnstone，托普斯理论。学术出版社，1977年。[21] ——，“几何态射的因子分解定理 I”，《范畴拓扑与微分几何札记》，第22卷，第1期，第3–17页，1981年。[22] ——，斯通空间，《剑桥高等数学研究》丛书。剑桥大学出版社，1982年。[23] ——，大象素描：托普斯理论纲要，第*1*卷和第*2*卷。牛津大学出版社，2002年。[24] A. Joyal，“多元空间与初等理论”，载于美国数学学会通报，第18卷，1971年，第563页。[在线]。可访问：https://www.ams.org/journals/notices/197104/197104FullIssue.p

df.

[25] A. Joyal 和 M. Tierney，《Grothendieck 伽罗瓦理论的扩展》，美国数学学会回忆录 , vol. 51, 1984.

[26] G. Kelly 和 S. Lack，《论类性质结构》，《范畴理论与应用》，第 3 卷，第 213–250 页，1997年。[27] A. Kock 和 G. Reyes，《范畴逻辑中的教义》，载于《数学逻辑手册》，《逻辑与数学基础研究》丛书，J. Barwise 编，第 90 卷，Elsevier，1977年，第 283–313 页。[28] A. Kock，《结构与单位相伴随的单子》，《纯粹与应用代数杂志》，第 104 卷，第 1 期，第 41–59 页，1995年。[29] A. Kock 和 I. Moerdijk，《étale层的呈示》，《范畴拓扑与微分几何笔记》，第 32 卷，第 2 期，第 145–164 页，1991年。[30] F. W. Lawvere，《基础中的伴随性》，《Dialectica》，第 23 卷，第 3/4 期，第 281–296 页，1969年。[31] ——，《超教条中的相等与作为伴随函子的概括模式》，载于《纽约范畴代数应用研讨会》丛书，A. Heller 编，第 2 卷，美国数学学会，1970年，第 1–14 页。[32] S. MacLane 和 I. Moerdijk，《几何与逻辑中的层：拓扑斯理论初步导论》。Springer New York，1994年。[33] M. E. Maietti、F. Pasquali 和 G. Rosolini，《三重态、精确完备化与 Hilbert 的 ε-算子》，《第比利斯数学杂志》，第 10 卷，第 3 期，第 141–166 页，2017 年。[34] M. E. Maietti 和 G. Rosolini，《初等商完备化》，《范畴理论与应用》，第 27 卷，第 17 期，第 445–463 页，2013年。[35] ——，《为构造性数学奠基的商完备化》，《普适逻辑》，第 7 卷，第 371–402 页，2013年。[36] ——，《统一精确完备化》，《应用范畴结构》，第 23 卷，第 43–52 页，2015年。[37] ——，《通过范畴逻辑关联商完备化》，载于《数学、哲学与计算机科学中的证明概念》，D. Probst 和 P. Schuster 编。柏林、波士顿：De Gruyter，2016年，第 229–250 页。[38] M. Makkai 和 G. Reyes，《一阶范畴逻辑：拓扑斯理论及相关范畴中的模型论方法》，《数学讲义》丛书。Springer-Verlag，1977年。[39] F. Pasquali，《初等教义的余自由构造》，《应用范畴结构》，第 23 卷，第 29–41 页，2015年。[40] J. Picado 和 A. Pultr，《框架与局部：无点拓扑》。Springer Basel，2012年。[41] A. M. Pitts，《三重态理论》，博士论文，剑桥大学，1981年。[42] ——，《开映射在范畴逻辑中的一种应用》，《纯粹与应用代数杂志》，第 29 卷，第 3 期，第 313–326 页，1983年。[43] ——，《回顾 Tripos 理论》，《计算机科学中的数学结构》，第 12 卷，第 265–279 页，2002年。[44] R. A. G. Seely，《超教条、自然演绎与贝克条件》，《数理逻辑季刊》，第 29 卷，第 10 期，第 505–542 页，1983年。[45] M. Shulman，《精确完备化与小层》，《范畴理论与应用》，第 27 卷，第 7 期，第 97–173 页，2012年。[46] D. Trotta，《存在完备化》，《范畴理论与应用》，第 35 卷，第 1576–1607 页，2020年。[47] ——，《初等教义完备化的代数方法》，2021年。arXiv：2108.03415 [mat

h.CT]。

[48] D. Trotta 和 M. Spadetto，《量词完备化、选择原理及其应用》，2020年。arXiv：2010.09111 [math.CT].[49] S. Vickers，《连续性与几何逻辑》，应用逻辑杂志，第12卷，第1期，第14–27页，2014年。[50] J. L. Wrigley，《局部化态射的逻辑与几何》，在 *Toposes Online* 上的演讲，2021年。 [在线]。可访问：https://aroundtoposes.com/wp-content/uploads/2021/07/WrigleySlidesToposesOnli

ne.pdf。

[51] ——，《外化内局部态射的一些性质》，2023年。arXiv：2301.00961 [math.AG]。