arXiv:2304.07552v2 [math.RA] 5 Nov 2023

Gorenstein平坦维数与稳定性有限性判据

ILIAS KAPERONIS 和 DIMITRA-DIONYSIA STERGIOPOULOU

Abstract.Saroch 和 Stovicek 最近引入了投射余解 Gorenstein 平坦模，并证明它们是 Gorenstein 投射模。尽管 Gorenstein 投射模与 Gorenstein 平坦模之间的关系尚未得到充分理解，投射余解 Gorenstein 平坦模这一类仍包含于 Gorenstein 平坦模这一类之中。本文证明了有限 Gorenstein 平坦维数的模成为投射余解 Gorenstein 平坦模或具有有限平坦维数的充要条件。此外，本文还建立了投射余解 Gorenstein 平坦模类的稳定性结果。

1. Introduction

Auslander 和 Bridger [1] 为交换 Noetherian 环引入了 G-维数的概念。Enochs 和 Jenda [11, 12], 通过 Gorenstein 投射模的概念，将这一概念推广到任意环 R 上的模；他们还定义了 Gorenstein 内射模和 Gorenstein 平坦模的概念。基于这些模的相对同调维数在 [15], 中得到定义，该文献是这些概念的标准参考。随后，Saroch 和 Stovicek [18] 引入了射影余解 Gorenstein 平坦模（简称 PGF 模）的概念。在环 R上，这些模是投射模的无挠复形的 Syzygy；对每个内射模 I应用函子 $I \otimes_R$ 后，这些复形仍然无挠，因此它们是 Gorenstein 平坦模。正如 [18, 定理 4.4]所示，PGF 模类包含于 Gorenstein 投射模类中。

极大 Cohen-Macaulay 逼近由 Auslander 和 Buchweitz 在 [3] 中引入并研究，适用于交换 Gorenstein 局部环上的有限生成模。在 [6, 引理 2.17]和 [15, 定理 2.10],中，这些逼近得到了推广，其中证明了：对于任意环 R 以及任意具有有限 Gorenstein 投射维数的 R-模 M，都存在形如以下的 R-模逼近序列

$$0 \to K \to G \to M \to 0, \tag{1}$$

$$0 \to M \to A \to G' \to 0, \tag{2}$$

其中 G、G'是 Gorenstein 投射的，而 K、A具有有限投射维数。Emmanouil 和 Talelli [7] 证明，上述正合列满足一种较弱形式的唯一性，与经典的 Schanuel 引理类似。

关于 Gorenstein 平坦、PGF 和平坦模的类似逼近序列已在 [18, 定理 4.11] 中构造。更明确地说，对于任意环 R 以及任意 Gorenstein 平坦 R-模 N，都存在形如以下的 R-模短正合列

$$0 \to F \to L \to N \to 0, \tag{3}$$

$$0 \to N \to F' \to L' \to 0, \tag{4}$$

本研究由希腊研究与创新基金会（H.F.R.I.）通过“首轮 H.F.R.I. 研究项目征集（旨在支持教职人员和研究人员，并资助采购高成本研究设备）”提供资助，项目编号为 4226。

其中 L, L' 是 PGF， F, F' 是平坦的。

Emmanouil [9, 定理 2.1]研究了有限 Gorenstein 平坦维数模这一类，并为这类模构造了由 PGF 模和有限平坦维数模组成的逼近序列。更确切地说，他通过对每个环 R 以及每个有限 Gorenstein 平坦维数的 R-模 M 构造形如以下形式的R-模短正合列，将序列 (2)、(3) 推广了

$$0 \to F \to L \to M \to 0, \tag{5}$$

$$0 \to M \to F' \to L' \to 0, \tag{6}$$

其中 L, L' 是 PGF 模，而 F, F' 具有有限平坦维数。我们将证明，形如 (5) 或 (6) 的正合列也满足一种弱形式的唯一性，类似于经典的 Schanuel 引理。

本文证明了有限 Gorenstein 平坦维数模成为 PGF 模或具有有限平坦维数的必要且充分条件。此外，我们还为射影余解 Gorenstein 平坦模这一类建立了稳定性结果。本文的内容和结果可具体概述如下。

在第 2 节中，我们确立了后文将用到的记号、术语和预备结果。利用正合列 (5)，在第 3 节中，我们将阐明 L 可视为由 PGF 模对 M 作近似的确切含义。特别地，我们考虑相对于有限平坦维数模类的 $\mathfrak{FF}$-R-模范畴的稳定化，并将由有限 Gorenstein 平坦维数的模构成的 $\mathfrak{FF}$-R-模全子范畴（分别由 PGF 模构成的全子范畴）记为 $\mathfrak{FF}\text{-}\overline{\mathtt{GFlat}}(R)$ （分别记为 $\mathfrak{FF}\text{-}\mathtt{PGF}(R)$）。如定理 3.5 (ii) 所述，我们得到一个加性函子 $\mu' : \mathfrak{FF}\text{-}\overline{\mathtt{GFlat}}(R) \to \mathfrak{FF}\text{-}\mathtt{PGF}(R)$，它是包含函子$\mathfrak{FF}\text{-}\mathtt{PGF}(R) \hookrightarrow \mathfrak{FF}\text{-}\overline{\mathtt{GFlat}}(R)$的右伴随。此外，该伴随的余单位为零，可据此刻画有限平坦维数模中属于有限 Gorenstein 平坦维数模的那些模。

我们还考虑一个完备遗传余扭挠对 $(\mathscr{K}, \mathscr{L})$，其中 $\mathscr{L}$包含所有投射 R-模，并且 $\mathscr{L}$ 在满同态的核下封闭。此外，我们考虑关于类 $\mathscr{L}$ 的 R-模范畴的稳定化 $\mathfrak{L}$-R-Mod，并将由属于 $\mathscr{K}$的模组成的 $\mathfrak{L}$-R-Mod 的全子范畴记为 $\mathfrak{L}$-$\mathscr{K}$。然后，我们证明存在一个加性函子 $\mu : \mathfrak{L}$-R-Mod $\to \mathfrak{L}$-$\mathscr{K}$，它是包含函子 $\mathfrak{L}$-$\mathscr{K} \hookrightarrow \mathfrak{L}$-$R$-Mod 的右伴随（见定理 3.5 (i)），并得到类似的结果。此外，我们得到 Gorenstein 平坦模为平坦模的等价条件。

利用正合列 (6)，在第 4 节中，我们将 M 的 R-模 F' 视为由一个有限平坦维数模对其作近似。特别地，我们考虑关于 PGF 模类的 R-模范畴的稳定化$\mathfrak{PGF}$-R-Mod，并将由 Gorenstein 平坦维数有限的模（分别为平坦维数有限的模）组成的 $\mathfrak{PGF}$-R-Mod 的全子范畴分别记为 $\mathfrak{PGF}\text{-}\overline{\mathtt{GFlat}}(R)$（分别记为 $\mathfrak{PGF}\text{-}\overline{\mathtt{Flat}}(R)$）。如定理 4.3 (i) 所述，我们构造一个加性函子 $\nu : \mathfrak{PGF}\text{-}\overline{\mathtt{GFlat}}(R) \to \mathfrak{PGF}\text{-}\overline{\mathtt{Flat}}(R)$，它是包含函子 $\mathfrak{PGF}\text{-}\overline{\mathtt{Flat}}(R) \hookrightarrow \mathfrak{PGF}\text{-}\overline{\mathtt{GFlat}}(R)$ 的左伴随。该伴随的单位的消失给出了有限 Gorenstein 平坦维数模中 PGF 模的刻画。

Sather-Wagstaff、Sharif 和 White [19] 研究了通过反复应用导出 Gorenstein 投射模的同一过程而得到的模，并证明了 Gorenstein 投射模类和 Gorenstein 内射模类的稳定性。Bouchiba 和 Khaloui [5] 证明了 Gorenstein 平坦模类具有类似的稳定性。在

第 5 节，我们证明 PGF R-模类在这一 Gorenstein 过程中保持稳定。特别地，我们证明，对于任意由 PGF R-模构成的正合列

$$\mathbf{G} = \cdots \to G_1 \to G_0 \to G^0 \to G^1 \to \cdots$$

使得对于每个单射 R-模I， R-模 M 是 PGF（见定理 5.7），且 $M \cong \mathrm{Im}(G_0 \to G^0)$ and $I \otimes_R$ 保持 G 的正合性。在证明中起核心作用的是由满足以下条件的 R-模 M 构成的子范畴：存在形如 $0 \to M \to G \to M \to 0$的短正合列，其中 G 是一个 PGF R-模，并且对于每个右单射 R-模 I， $I \otimes_R$ 保持该正合列的正合性。这一稳定性结果的一个应用见 [17, 命题 2.15]。

2. Preliminaries

本节将确立后文会用到的记号、术语和预备结果。

术语。除非另有说明，本文所讨论的所有模均为任意环 R上的左模。我们用 R-Mod 表示 R-模的范畴，并用 $\mathtt{Proj}(R)$、$\mathtt{Flat}(R)$、 $\mathtt{Inj}(R)$ 分别表示投射、平坦和单射 R-模的范畴。

Gorenstein模。若由投射模构成的正合复形 P 满足：对于每个投射模 Q，阿贝尔群复形 $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}\ Q)$ 正合，则称其为完备投射分解。于是，若一个模是某个完备投射分解的上同调核，则称其为 Gorenstein 投射模。我们用 $\mathtt{GProj}(R)$ 表示 Gorenstein 投射 R-模的类。模 M 的 Gorenstein 投射维数 $\mathrm{Gpd}_R M$ 是由 Gorenstein 投射模对 M 作最短分解的长度。若不存在这样的有限长度分解，则记为 $\mathrm{Gpd}_R M = \infty$。若 M 是有限投射维数的模，则 M 也具有有限 Gorenstein投射维数，并且 $\mathrm{Gpd}_R M = \mathrm{pd}_R M$。

若由平坦模构成的正合复形 F 满足：对于每个右内射模 I，阿贝尔群复形 $I \otimes_R \mathbf{F}$ 正合，则称其为完备平坦分解。于是，若一个模是某个完备平坦分解的上同调核，则称其为 Gorenstein 平坦模。我们用 $\mathtt{GFlat}(R)$ 表示 Gorenstein 平坦 R-模的类。模 M 的 Gorenstein平坦维数 $\mathrm{Gfd}_R M$ 是由 Gorenstein 平坦模对 M 作最短分解的长度。若不存在这样的有限长度分解，则记为 $\mathrm{Gfd}_R M = \infty$。若 M 是有限平坦维数的模，则 M也具有有限 Gorenstein平坦维数，并且 $\mathrm{Gfd}_R M = \mathrm{fd}_R M$ （见推论 2.5）。

Saroch 和 Stovicek [18] 引入了射影余解 Gorenstein 平坦模（简称 PGF 模）的概念。PGF 模是一个正合投射模复形 P 的上同调核，并且对于每个内射模 I，阿贝尔群复形 $I \otimes_R \mathbf{P}$ 都是正合的。我们用 $\mathtt{PGF}(R)$ 表示 PGF R-模的类。显然，类 $\mathtt{PGF}(R)$ 包含于 $\mathtt{GFlat}(R)$。此外，我们有包含关系 $\mathtt{PGF}(R) \subseteq \mathtt{GProj}(R)$（见 [18, 定理 4.4]）。最后，PGF R-模的类在扩张、直和、直和项以及满同态的核下封闭。

余挠对。设 $\mathscr{L}$ 是一类 R-模。我们将其左正交类定义为 ${}^{\perp}\mathscr{L} = \{X \in R\text{-Mod} \mid \mathrm{Ext}^1(X, L) = 0, \forall L \in \mathscr{L}\}$。$\mathscr{L}$ 的右正交类通过对偶方式定义。若一对有序类 $(\mathscr{K}, \mathscr{L})$ 满足 $\mathscr{K}^{\perp} = \mathscr{L}$ 且 $K = {}^{\perp}\mathscr{L}$，则称其为余挠对。若对每个 R-模 M，都存在如下形式的逼近序列，则称余挠对 $(\mathscr{K}, \mathscr{L})$ 是完备的

$$0 \to L \to K \to M \to 0 \quad \text{and} \quad 0 \to M \to L' \to K' \to 0,$$

其中 $K, K' \in \mathscr{K}$ 和 $L, L' \in \mathscr{L}$。最后，若对每个 $L \in \mathscr{L}$ 和每个 $K \in \mathscr{K}$，都有 $\mathrm{Ext}^{i>0}(K, L) = 0$，则称余挠对 $(\mathscr{K}, \mathscr{L})$ 是遗传的。在这种情况下，类 $\mathscr{K}$ 对满同态的核封闭，而类 $\mathscr{L}$ 对单同态的余核封闭。

下面的命题给出了 PGF 模的一个刻画。

Propo命题 2.1. 对于一个 R-模 M，以下条件等价：

(i) M 是 PGF。(ii) M 满足以下两个条件：(a) 存在形如 $0 \to M \to P^0 \to P^1 \to \cdots$ 的 R-模正合列，其中每个 P^i 都是投射的，并且对于每个单射 R-模 I，$I \otimes_R$ 都保持该正合列的正合性。(b) 对于每个 $i > 0$ 和每个单射 R-模 I，$\mathrm{Tor}_i^R(I, M) = 0$。(iii) 存在形如 $0 \to M \to P \to G \to 0$ 的 R-模短正合列，其中 P 是投射的，且 G 是 PGF。

证明。利用标准论证即可立即得出。 □

相对 PGF 与 Gorenstein 平坦模。根据 [14] 和 [13]，可以考虑相对 Gorenstein 类。更确切地说，若 $\mathscr{B}$ 是一个包含所有内射模的右 R-模类，我们称模 M 为 Gorenstein $\mathscr{B}$-平坦模，若它是一个平坦模正合复形中的上同调核，并且该复形经任意 $\mathscr{B}$中的模张量后仍然正合。类似地，我们称模 M 为投射余解 Gorenstein $\mathscr{B}$-平坦模，若它是一个投射模正合复形中的上同调核，并且该复形经任意 $\mathscr{B}$中的模张量后仍然正合。注意，[14,注记 38]和 [13, 定理 2.14] 给出了 [18, 定理 4.11]的有趣推广。

命题 2.2。（[14, 注记 38]）设 $\mathtt{PGF}_{\mathscr{B}}(R)$ 为所有投射余解 Gorenstein $\mathscr{B}$-平坦模组成的类。另设 $(\mathtt{PGF}_{\mathscr{B}}(R), \mathtt{PGF}_{\mathscr{B}}^{\perp}(R))$ 是一个完备遗传余扭挠对。那么，对于模 M，以下条件等价。

(i) M 是 Gorenstein $\mathscr{B}$-平坦的，(ii) 存在如下形式的短正合列

$$0 \to F \to P \to M \to 0,$$

其中 $F \in \mathtt{Flat}(R)$ 和 $P \in \mathtt{PGF}_{\mathscr{B}}(R)$，对每个余挠[1] 模 C，应用函子$Hom_R(-, C)$ 后仍然正合，

(iii) $Ext^1(M, C) = 0$ 对每个属于 $\mathtt{PGF}_{\mathscr{B}}^{\perp}(R)$的余挠模 C 都成立，(iv) 存在如下形式的短正合列

$$0 \to M \to F' \to P' \to 0$$

其中 $F' \in \mathtt{Flat}(R)$ 和 $P' \in \mathtt{PGF}_{\mathscr{B}}(R)$。

注意，根据 [18, 推论 4.5 (3)]，投射余解 Gorenstein $\overline{{}_R R^{\mathrm{c}}}$-平坦模类恰好是 PGF 模类，其中 $\overline{{}_R R^{\mathrm{c}}}$ 是特征模 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_R R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 的可定义闭包（关于可定义类理论的简要介绍，参见 [18, 第 2], [16]节）。于是，命题 2.2 和 [18, 定理 4.11] 表明，Gorenstein $\overline{{}_R R^{\mathrm{c}}}$-平坦模类恰好是 Gorenstein 平坦模类。

在第 3、4 和 6 节中，我们将研究 PGF 模和 Gorenstein 平坦维数有限的模；不过，在假设 $(\mathtt{PGF}_{\mathscr{B}}(R), \mathtt{PGF}_{\mathscr{B}}^{\perp}(R))$ 是完备遗传余扭挠对的条件下，我们的结果也适用于相对情形。

[1]余挠模定义为 $\mathrm{Flat}(R)^{\perp}$ 中的模。

尽管正合列 (1)、(2)、(3)、(4)、(5) 和 (6) 并不唯一，但它们确实满足一种弱形式的唯一性，如下所示。

引理 2.3（Schanuel）。设 M 是一个 R-模。

(i) 假设 $0 \to F \to L \to M \to 0$ 和 $0 \to \overline{F} \to \overline{L} \to M \to 0$ 是两个 R-模的短正合列，且 $\mathrm{Ext}^1_R\big(L, \overline{F}\big) = 0$ 和 $\mathrm{Ext}^1_R\big(\overline{L}, F\big) = 0$。那么，存在一个同构 $L \oplus \overline{F} \simeq \overline{L} \oplus F$。

(ii) 假设 $0 \to M \to F' \to L' \to 0$ 和 $0 \to M \to \overline{F'} \to \overline{L'} \to 0$ 是两个 R-模的短正合列，且 $\mathrm{Ext}^1_R\big(L', \overline{F'}\big) = 0$ 和 $\mathrm{Ext}^1_R\big(\overline{L'}, F'\big) = 0$。那么，存在一个同构 $L' \oplus \overline{F'} \simeq \overline{L'} \oplus F'$。

证明。(i) 由于 $\mathrm{Ext}^1_R(L, \overline{F}) = 0$，存在一个 R-线性映射 $f\colon L \to \overline{L}$，使下图中右侧方块交换，其中各行均为正合列：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & F & \to & L & \to & M & \to & 0 \\ & & {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & \overline{F} & \to & \overline{L} & \to & M & \to & 0 \end{array}$$

于是，存在唯一的 R-线性映射 $g : F \to \overline{F}$，使图表中的左侧方块也交换。我们可以将映射对 (g, f) 视为复形 $0 \to F \to L \to 0$ 与 $0 \to \overline{F} \to \overline{L} \to 0$ 之间的拟同构，并考虑相应的映射锥，从而得到如下形式的短正合列

$$0 \to F \to L \oplus \overline{F} \to \overline{L} \to 0.$$

由于 $\mathrm{Ext}^1_R(\overline{L}, F) = 0$，上述正合列分裂。因此，存在一个同构 $L \oplus F \simeq \overline{L} \oplus F$，如所需。

(ii) 由于 $\mathrm{Ext}^1_R(L', \overline{F'}) = 0$，存在一个 R-线性映射 $g'\colon F' \to \overline{F'}$，使下图中左侧方块交换，其中各行均为正合列：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M & \to & F' & \to & L' & \to & 0 \\ & & \| & & {\scriptstyle g'}\downarrow & & {\scriptstyle f'}\downarrow & & \\ 0 & \to & M & \to & \overline{F'} & \to & \overline{L'} & \to & 0 \end{array}$$

那么，存在唯一的 R-线性映射 $f'\colon L' \to \overline{L'}$，使得图表右侧的方块也交换。我们可以将 (g', f') 视为复形 $0 \to F' \to L' \to 0$ 与 $0 \to \overline{F'} \to \overline{L'} \to 0$ 之间的拟同构，并考虑相应的映射锥，从而得到如下形式的短正合列

$$0 \to F' \to L' \oplus \overline{F'} \to \overline{L'} \to 0.$$

由于 $\mathrm{Ext}^1_R(\overline{L'}, F') = 0$，上述正合列分裂。因此，存在一个同构 $L' \oplus \overline{F'} \simeq \overline{L'} \oplus F'$，如所需。□

引理 2.4. 设 M 是有限平坦维数的 Gorenstein 平坦 R-模。那么 M 是平坦的 $t.$

证明。我们令 $\mathrm{fd}_R M = n < \infty$ 并假设 $n > 0$。由于 R-模 M 是 Gorenstein 平坦的，对于每个 $i > 0$ 以及每个内射右 R- 模 J，都有 $\mathrm{Tor}^R_i(J, M) = 0$ （见 $[4,$ 引理 2.4$]$）。由于 $\mathrm{fd}_R M = n$，存在一个右 R-模 N，使得 $\mathrm{Tor}^R_n(N, M) \neq 0$。考虑如下形式的 R-模正合列：$0 \to N \to I \to N' \to 0$，其中 R-模 I 是内射的。上述短正合列诱导出如下形式的长正合序列：

$$\cdots \to \mathrm{Tor}^R_{n+1}(N', M) \to \mathrm{Tor}^R_n(N, M) \to \mathrm{Tor}^R_n(I, M) \to \mathrm{Tor}^R_n(N', M) \to \cdots.$$

由于 $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(N', M) = 0$ 且 $\mathrm{Tor}_n^R(N, M) \neq 0$，我们得到 $\mathrm{Tor}_n^R(I, M) \neq 0$，这与假设矛盾。因此我们得出 $n = 0$，从而 R-模 M 是平坦的。□

推论 2.5. 设 M 是一个有限平坦维数的 R-模。则 $\mathrm{Gfd}_R M = \mathrm{fd}_R M$。

证明. 只需证明不等式 $\mathrm{fd}_R M \leqslant \mathrm{Gfd}_R M$，其中 $\mathrm{Gfd}_R M = n < \infty$。设 $\mathbf{F} = \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$ 是 M 的一个平坦分解。由于每个环 R 都是 GF-闭的（见[18, 推论 4.12]），根据 [4,定理 2.8]，n 阶上同调核 $M_n = \mathrm{Im}(F_n \to F_{n-1})$ 是 Gorenstein 平坦的，并且 $\mathrm{fd}_R M_n < \infty$。因此，根据引理 2.4，$R$-模 M_n 是平坦的，由正合列

$$0 \to M_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

可得 $\mathrm{fd}_R M \leqslant n$。 □

3. Stabilizing with respect to modules of finite flat dimension

设 M、N 为两个模。由于两个有限平坦维数模的直和仍具有有限平坦维数，由那些可经由有限平坦维数模分解的 R-线性映射 $f\colon M \to N$ 所组成的集合，是阿贝尔群 $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ 的一个子群。我们将相应的商群记为 $\mathfrak{FF}\text{-}\mathrm{Hom}_R(M, N)$，并令 $[f] = [f]_{\mathfrak{FF}}$ 表示其中任意一个 R-线性映射 $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ 的等价类。注意，对于任意三个模M、N 和 L，R-线性映射的复合诱导出一个良定义的双加性映射

$$\mathfrak{FF}\text{-}\mathrm{Hom}_R(N, L) \times \mathfrak{FF}\text{-}\mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathfrak{FF}\text{-}\mathrm{Hom}_R(M, L).$$

我们也用 $\mathfrak{FF}$-R-模表示这样一个范畴：其对象为所有模，态射集由阿贝尔群 $\mathfrak{FF}\text{-}\mathrm{Hom}_R(M, N)$ 给出（态射的复合由 R-线性映射的复合诱导）。于是，引理 2.3 表明，对于由式 (5) 为任意有限 Gorenstein 平坦维数的模 M 定义的 PGF 模 G，作为范畴 $\mathfrak{FF}$-R-模中的对象，它在同构意义下唯一确定。

设 $\mathscr{L}$ 是任意一个对有限直和封闭的模类。那么，由可经由该类中的某个模分解的 R-线性映射 $f\colon M \to N$ 构成的集合，是阿贝尔群 $\mathrm{Hom}_R(M, N)$的一个子群。我们将相应的商群记为 $\mathfrak{L}\text{-}\mathrm{Hom}_R(M, N)$，并将任意一个 $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$的类记为 $[f]_{\mathfrak{L}}$。此外，对于每个 R-模类$\mathscr{K}$，我们将对象为 $\mathscr{K}$中的所有模、态射集由阿贝尔群 $\mathfrak{L}\text{-}\mathrm{Hom}_R(M, N)$给出的范畴记为 $\mathfrak{L}$-$\mathscr{K}$。

引理 3.1. 设 $f\colon M \to N$ 是一个 R-线性映射，其中 M、N 是 R-模。考虑 R-模的两个类 $\mathscr{L}$、$\mathscr{K}$，满足 $\mathscr{K} \subseteq {}^{\perp}\mathscr{L}$、$\mathtt{Proj}(R) \subseteq \mathscr{L}$，且 $\mathscr{L}$ 对有限直和和满同态的核封闭。我们还考虑两个 R-模的正合列

$$0 \to L \xrightarrow{\iota} K \xrightarrow{p} M \to 0 \quad and \quad 0 \to L' \xrightarrow{\jmath} K' \xrightarrow{q} N \to 0,$$

其中 K、$K' \in \mathscr{K}$ 和 L、$L' \in \mathscr{L}$。那么，

(i) 存在一个 R-线性映射 $g\colon K \to K'$，使得 $qg = fp$。(ii) 若 g、$g'\colon K \to K'$ 是两个 R-线性映射，且满足 $qg = fp$ 和 $qg' = fp$，则 $[g] = [g'] \in \mathfrak{L}\text{-}\mathrm{Hom}_R(K, K')$。

(iii) 若 $[f] = [0] \in \mathfrak{L}\text{-}\mathrm{Hom}_R(M, N)$，且 $g\colon K \to K'$ 是一个 R-线性映射，满足 $qg = fp$，则 $[g] = [0] \in \mathfrak{L}\text{-}\mathrm{Hom}_R(K, K')$。

证明。(i) 由于 $\mathrm{Ext}_R^1(K, L') = 0$，加法映射 $q_*\colon \mathrm{Hom}_R(K, K') \to \mathrm{Hom}_R(K, N)$ 是满射。因此，存在一个 R-线性映射 $g\colon K \to K'$，使得 $fp = q_*(g)$，如所需。

(ii) 设 $g, g'\colon K \to K'$ 是两个 R-线性映射，且 $qg = fp$ 和 $qg' = fp$。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & L & \xrightarrow{\iota} & K & \xrightarrow{p} & M & \to & 0 \\ & & & & {\scriptstyle g}\downarrow\downarrow{\scriptstyle g'} & & {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ 0 & \to & L' & \xrightarrow{\jmath} & K' & \xrightarrow{q} & N & \to & 0 \end{array}$$

于是，$q(g'-g) = qg' - qg = fp - fp = 0$，因此存在一个 R-线性映射 $h\colon K \to L'$，使得 $g' - g = \jmath h$。由于 $L' \in \mathscr{L}$，我们得到 $[g] = [g'] \in \mathfrak{L}\text{-Hom}_R(K, K')$。

(iii) 不失一般性，我们可以假设 $\mathtt{Proj}(R) \subseteq \mathscr{K}$。设 f 是一个线性映射，它可分解为两个 R-线性映射 $M \xrightarrow{a} \Lambda \xrightarrow{b} N$的复合，其中模 Λ属于 $\mathscr{L}$。由于类 $\mathscr{L}$ 对满同态的核封闭，且每个投射模都属于 $\mathscr{L}$，我们构造一个形如以下形式的 R-模正合列

$$0 \to \Lambda' \to P \xrightarrow{\pi} \Lambda \to 0$$

其中 P 是投射的，且$\Lambda' \in \mathscr{L}$。利用上面的(i)，我们得到 R-线性映射 $\alpha\colon K \to P$ 和$\beta\colon P \to K'$，使得 $\pi\alpha = ap$ 且 $q\beta = b\pi$。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & L & \xrightarrow{\iota} & K & \xrightarrow{p} & M & \to & 0 \\ & & & & {\scriptstyle \alpha}\downarrow & & {\scriptstyle a}\downarrow & & \\ 0 & \to & \Lambda' & \to & P & \xrightarrow{\pi} & \Lambda & \to & 0 \\ & & & & {\scriptstyle \beta}\downarrow & & {\scriptstyle b}\downarrow & & \\ 0 & \to & L' & \xrightarrow{\jmath} & K' & \xrightarrow{q} & N & \to & 0 \end{array}$$

因此，$q(\beta\alpha) = (ba)p = fp$，从而对于每个满足$qg = fp$的 R-线性映射 $g\colon K \to K'$，我们得到 $[g] = [\beta\alpha] \in \mathfrak{L}\text{-Hom}_R(K, K')$（见上文 (ii)）。由于 $[\beta\alpha] = [0] \in \mathfrak{L}\text{-Hom}_R(K, K')$，我们得出 $[g] = [0] \in \mathfrak{L}\text{-Hom}_R(K, K')$。□

注 3.2. 令 $\overline{\mathtt{Flat}}(R)$ 为具有有限平坦维数的 R-模的类，并考虑一个 PGF R-模 K。由于对每个 $i > 0$，函子 $\mathrm{Ext}^i_R(K, _)$ 在类 $\mathtt{Flat}(R)$ 上均为零（见 *[18,* 定理 4.*11]*），一个简单的归纳论证表明，函子 $\mathrm{Ext}^i_R(K, _)$ 在类 $\overline{\mathtt{Flat}}(R)$ 上也为零，因此 $\mathtt{PGF}(R) \subseteq {}^{\perp}\overline{\mathtt{Flat}}(R)$。此外，$\mathtt{Proj}(R) \subseteq \overline{\mathtt{Flat}}(R)$，且类 $\overline{\mathtt{Flat}}(R)$ 对有限直和及满同态的核封闭。

引理3.3. 设 $f\colon M \to N$ 是一个 R-线性映射，其中 M, N 是有限 Goren- stein 平坦维数模。我们还考虑两个 R-模的正合列

$$0 \to F \xrightarrow{\iota} L \xrightarrow{p} M \to 0 \quad and \quad 0 \to F' \xrightarrow{\jmath} L' \xrightarrow{q} N \to 0,$$

其中 F, F' 是有限平坦维数模，且 L, L' 是 PGF 模。那么 ，

(i) 存在一个 R-线性映射 $g\colon L \to L'$，使得 $qg = fp$。(ii) 若 $g, g'\colon L \to L'$ 是两个 R-线性映射，且 $qg = fp$ 和 $qg' = fp$，则 $[g] = [g'] \in \mathfrak{FF}\text{-Hom}_R(L, L')$。(iii) 若 $[f] = [0] \in \mathfrak{FF}\text{-Hom}_R(M, N)$，且 $g\colon L \to L'$ 是一个 R-线性映射，使得 $qg = fp$，则 $[g] = [0] \in \mathfrak{FF}\text{-Hom}_R(L, L')$。

证明. 这是引理 3.1 和注 3.2 的直接推论。 □

接下来的命题表明，在适当的假设下，我们在本节开头定义的范畴 $\mathfrak{L}$-$\mathscr{K}$ 不过是众所周知的稳定范畴。

命题 3.4. 设 $\mathscr{L}, \mathscr{K}$ 是 R-模的两个类，且 $\mathscr{K} \subset {}^{\perp}\mathscr{L}$, $\mathtt{Proj}(R) \subset \mathscr{L}$ 和 $\mathscr{L}$ 对满同态的核封闭。考虑范畴 $\mathfrak{FF}\text{-}\mathtt{PGF}(R)$，其对象为所有 PGF 模，态射集为阿贝尔群 $\mathfrak{FF}\text{-Hom}_R(M, N)$。那么：

(i) $\mathfrak{L}$-$\mathscr{K}$ 恰为 $\mathscr{K}$ 的稳定范畴；**(ii)** $\mathfrak{FF}$-$\mathtt{PGF}(R)$ 恰为 PGF 模的稳定范畴；**(iii)** $\mathfrak{FF}$-$\mathtt{PGF}(R)$ 恰为 $\mathfrak{PGF}^{\perp}$-$\mathtt{PGF}(R)$，其中 $\mathfrak{PGF}^{\perp}$-$\mathtt{PGF}(R)$ 是 PGF 模关于 $\mathtt{PGF}(R)^{\perp}$ 的稳定化。

证明。（i）只需证明：若 $f\colon K \to K'$ 是一个 R-线性映射，且该映射经由 $\mathscr{L}$ 中的某个模分解，则对每个 $K, K' \in \mathscr{K}$， f 都经由一个投射模分解。只需证明，对每个 $L \in \mathscr{L}$，每个 R-线性映射 $g\colon K \to L$ 都经由一个投射模分解。与引理 3.1(ii) 的证明一样，我们构造一个形如 $0 \to L' \to P \to L \to 0$ 的 R-模正合列，其中 P 是投射的，且 $L' \in \mathscr{L}$。由于 $\mathrm{Ext}^1_R(K, L') = 0$，我们得到正合列 $0 \to \mathrm{Hom}_R(K, L') \to \mathrm{Hom}_R(K, P) \to \mathrm{Hom}_R(K, L) \to 0$，如所需。

（ii）这由（i）和注 3.2 得出。

(iii) 由 [18, 定理 4.9]， $(\mathtt{PGF}(R), \mathtt{PGF}(R)^{\perp})$ 构成一个完备余挠对，且$\mathtt{PGF}(R)^{\perp}$ 厚（特别地，它在满同态的核下封闭）。我们还有，每个 PGF 模都是 Gorenstein 投射的，并且 $\mathtt{Proj}(R) \subset \mathtt{PGF}(R)^{\perp}$ 由 [15, 命题 2.3]可知。结论现在由 **(i)** 和 **(ii)** 得出。□

设 $(\mathscr{K}, \mathscr{L})$ 是一个完备余挠对，满足 $\mathtt{Proj}(R) \subset \mathscr{L}$，且类 $\mathscr{L}$在满同态的核下封闭。我们注意到，引理 2.3、引理 3.1 和推论 3.3 表明存在定义良好的加性函子

$$\mu : \mathfrak{L}\text{-R-Mod} \to \mathfrak{L}\text{-}\mathscr{K}$$

and

$$\mu' : \mathfrak{FF}\text{-}\overline{\mathtt{GFlat}}(R) \to \mathfrak{FF}\text{-}\mathtt{PGF}(R),$$

其中， μ 将一个 R-模 M 映到一个 $\mathscr{K}$中的模，该模出现在 M 的一个逼近序列中； μ' 将一个有限 Gorenstein 平坦维数的模 M 映到引言中的正合列 (5) 所出现的 PGF 模。此外， μ 将一个 R-线性映射 $f\colon M \to N$的类 $[f] \in \mathfrak{L}\text{-}\mathrm{Hom}_R(M, N)$ 映到任何满足引理 3.1(i) 中所述条件的R-线性映射 $g\colon K \to K'$ 的类 $[g] \in \mathfrak{L}\text{-}\mathrm{Hom}_R(K, K')$；而$\mu'$将一个 R-线性映射 $f\colon M \to N$的类 $[f] \in \mathfrak{FF}\text{-}\mathrm{Hom}_R(M, N)$映到任何满足引理 3.3(i) 中所述条件的 R-线性映射 $g\colon L \to L'$ 的类$[g] \in \mathfrak{FF}\text{-}\mathrm{Hom}_R(L, L')$。

本节的主要结果陈述如下。

定理 3.5. **(i)** 加性函子 μ : $\mathfrak{L}$-R-模范畴 $\to \mathfrak{L}$-$\mathscr{K}$是包含函子 $\mathfrak{L}$-$\mathscr{K} \hookrightarrow \mathfrak{L}$-R-模范畴的右伴随。

(ii) 加性函子 $\mu'\colon \mathfrak{FF}\text{-}\overline{\mathtt{GFlat}}(R) \to \mathfrak{FF}\text{-}\mathtt{PGF}(R)$ 是包含函子 $\mathfrak{FF}\text{-}\mathtt{PGF}(R) \hookrightarrow \mathfrak{FF}\text{-}\overline{\mathtt{GFlat}}(R)$的右伴随。

证明. 我们只证明（i），因为（ii）的证明基本相同。设 N 是任意一个模，并且

$$0 \to L \xrightarrow{\jmath} K \xrightarrow{q} N \to 0,$$

是 N的一个逼近序列，其中 $K \in \mathscr{K}$和 $L \in \mathscr{L}$。注意，加法映射

$$[q]_* : \mathfrak{L}\text{-}\mathrm{Hom}_R(\Lambda, K) \to \mathfrak{L}\text{-}\mathrm{Hom}_R(\Lambda, N)$$

关于 $\Lambda \in \mathscr{K}$（这是显然的）和 N（这由引理 3.1 得出）都是自然的。我们将通过证明上文的加法映射 $[q]_*$ 是双射的，来确立定理陈述中的伴随。

加法映射

$$q_* : \mathrm{Hom}_R(\Lambda, K) \to \mathrm{Hom}_R(\Lambda, N)$$

是满射，因为 $\mathrm{Ext}^1_R(\Lambda, L) = 0$，由此可得 $[q]_*$ 的满射性。关于 $[q]_*$ 的单射性，设 $g: \Lambda \to K$ 是一个 R-线性映射，使得 $[qg] = [q][g] = [q]_*[g] = [0] \in \mathfrak{L}\text{-Hom}_R(\Lambda, N)$。于是，我们可以考虑交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & 0 & \to & \Lambda & = & \Lambda & \to & 0 \\ & & & & {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle qg}\downarrow & & \\ 0 & \to & L & \xrightarrow{\jmath} & K & \xrightarrow{q} & N & \to & 0 \end{array}$$

并应用引理 3.1(iii)，从而得出 $[g] = [0] \in \mathfrak{L}\text{-Hom}_R(\Lambda, K)$。 □

推论 3.6. 设 $(\mathscr{K}, \mathscr{L})$ 是一个完备遗传余扭挠对，使得 $\mathtt{Proj}(R) \subset \mathscr{L}$，且类 $\mathscr{L}$ 在满同态的核下封闭。则对任意 R-模 M，以下条件等价。

(i) $M \in \mathscr{L}$，(ii) 对所有 $K \in \mathscr{K}$，$\mathfrak{L}\text{-Hom}_R(K, M) = 0$，以及 (iii) 存在一个 R-模的短正合列 $0 \to L \to K \xrightarrow{q} M \to 0$，其中 $L \in \mathscr{L}$ 且 $K \in \mathscr{K}$，使得 $[q] = [0] \in \mathfrak{L}\text{-Hom}_R(K, M)$。

证明. 蕴含关系 (i)⇒(ii) 和 (ii)⇒(iii) 显然，因此只需证明 (iii)⇒(i)。为此，我们注意到定理 3.5(i) 所建立的伴随同构特别蕴含，加法映射

$$[q]_* : \mathfrak{L}\text{-Hom}_R(K, K) \to \mathfrak{L}\text{-Hom}_R(K, M)$$

是双射的。由于 $[q]_*[1_K] = [q][1_K] = [q1_K] = [q] = [0] \in \mathfrak{L}\text{-Hom}_R(K, M)$，我们得出 $[1_K] = [0] \in \mathfrak{L}\text{-Hom}_R(K, K)$；因此，$K$ 的恒等映射可经由一个模 $L' \in \mathscr{L}$ 分解。由于 $\mathscr{L}$ 对直和项封闭，且 K 是 L' 的一个直和项，我们也得到 K 属于 $\mathscr{L}$。此外，类 $\mathscr{L}$ 对单态射的余核封闭，因此短正合列 $0 \to L \to K \to M \to 0$ 得出 $M \in \mathscr{L}$。□

推论 3.7. 对于具有有限 Goren- stein 平坦维数的 R-模 M，以下条件等价。

(i) M 是有限平坦维数的 R-模；(ii) 对每个 PGF R-模 L，$\mathfrak{FF}\text{-Hom}_R(L, M) = 0$；(iii) 存在 R-模的短正合列 $0 \to F \to L \xrightarrow{q} M \to 0$，其中 F 是有限平坦维数的模，L 是 PGF，且满足 $[q] = [0] \in \mathfrak{FF}\text{-Hom}_R(L, M)$。

证明。(i)⇒(ii) 和 (ii)⇒(iii) 的蕴含关系显然，因此只需证明 (iii)⇒(i)。为此，我们注意到定理 3.5(ii) 所建立的伴随同构尤其表明，加法映射

$$[q]_* : \mathfrak{FF}\text{-Hom}_R(L, L) \to \mathfrak{FF}\text{-Hom}_R(L, M)$$

是双射的。由于 $[q]_*[1_L] = [q][1_L] = [q1_L] = [q] = [0] \in \mathfrak{FF}\text{-Hom}_R(L, M)$，我们得出 $[1_L] = [0] \in \mathfrak{FF}\text{-Hom}_R(L, L)$；因此，$L$ 的恒等映射可经由一个F'有限平坦维数的模进行分解。由此可知，L 是 F' 的直和项，因此 L 具有有限平坦维数。由于 L 是 PGF，因而是 Gorenstein 平坦的，引理 2.4 表明，R-模 L 是平坦的。利用短正合列 $0 \to F \to L \to M \to 0$，我们得到 $\mathrm{fd}_R M < \infty$。□

现在我们考虑平坦模 $\mathtt{Flat}(R)$ 的类，并注意到由那些可经由平坦模分解的 R-线性映射 $f: M \to N$ 组成的集合是阿贝尔群 $\mathrm{Hom}_R(M, N)$的一个子群。我们将相应的商群记为 $\mathfrak{F}\text{-Hom}_R(M, N)$

群，并将任意 $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$的类记为 $[f]_{\mathfrak{F}}$。此外，我们用 $\mathfrak{F}$-R-Mod表示这样一个范畴：其对象是所有 R-模，态射集由阿贝尔群 $\mathfrak{F}$-$\mathrm{Hom}_R(M,N)$给出。利用逼近序列 (3)、(4) 及类似的论证，可以立即得到以下结果。尽管如此，我们仍给出另一种证明。

命题 3.8。对于 Gorenstein 平坦 R-模 M，以下条件等价。

(i) M 是平坦的；(ii) 对每个 PGF R-模 L，$\mathfrak{F}$-$\mathrm{Hom}_R(L,M)=0$；以及 (iii) 存在 R-模的短正合列 $0 \to F \to L \xrightarrow{q} M \to 0$，其中 F 是平坦的，L 是 PGF，且满足 $[q]=[0] \in \mathfrak{F}$-$\mathrm{Hom}_R(L,M)$。

证明。由于蕴含关系 $(i) \Rightarrow (ii)$ 和 $(ii) \Rightarrow (iii)$ 显然成立，只需证明$(iii) \Rightarrow (i)$。考虑 M 的一个特殊平坦预覆盖 (F', f) 以及以下拉回图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & F & \to & L & \xrightarrow{q} & M & \to & 0 \\
 & & \| & & {\scriptstyle\pi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f} & & \\
0 & \to & F & \to & B & \to & F' & \to & 0 \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & C & = & C & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

由于 q 经过一个平坦模分解，我们可以将 q 写成复合 $L \to \Lambda \to M$，其中Λ是一个平坦模。因此，q经过特殊平坦预覆盖 (F', f)，可表示为如下形式的复合

$$L \to \Lambda \to F' \xrightarrow{f} M.$$

拉回的泛性质保证存在一个态射 $\Lambda \to B$，因此π 是 R-分裂的。此外，R-模 L 作为平坦 R-模 B的直和项是平坦的，这意味着 M 是一个 Gorenstein 平坦 R-模。由此可得 R-模 M 是平坦的（见引理 2.4）。□

注记 3.9. 命题 2.8 的证明表明，如果一个核平坦的满同态可分解为经过一个平坦模的复合，那么其余核的平坦维数至多为一。

4. 关于 PGF 模的稳定化

给定两个模 M、N，由那些可分解为经过一个 PGF 模的 R-线性映射 $f\colon M \to N$构成的集合，是阿贝尔群 $\mathrm{Hom}_R(M,N)$的一个子群。我们将相应的商群记为$\mathfrak{PGF}$-$\mathrm{Hom}_R(M,N)$，并令 $[f]=[f]_{\mathfrak{PGF}}$表示其中任意一个R-线性映射 $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ 的等价类。注意，对于任意三个模 M、N和 L，R-线性映射的复合诱导出一个定义良好的双加性映射

$$\mathfrak{PGF}\text{-}\mathrm{Hom}_R(N,L) \times \mathfrak{PGF}\text{-}\mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathfrak{PGF}\text{-}\mathrm{Hom}_R(M,L).$$

我们将对象为所有模、态射集由阿贝尔群 $\mathfrak{PGF}$-$\mathrm{Hom}_R(M,N)$ 给出的范畴记为 $\mathfrak{PGF}$-R-Mod（态射的复合由 R-线性映射的复合诱导）。于是，引理 2.3 表明，对于每个 Gorenstein 平坦维数有限的模 M，由 (6) 定义的模 F' 作为范畴 $\mathfrak{PGF}$-R-Mod 中的对象，在同构意义下唯一确定。

引理 4.1. 设 $f\colon M \to N$ 是一个 R-线性映射，其中 M, N 是两个 Gorenstein 平坦维数有限的模。我们还考虑两个形如以下形式的 R-模正合列

$$0 \to M \xrightarrow{\iota} F \xrightarrow{p} L \to 0 \quad and \quad 0 \to N \xrightarrow{\jmath} F' \xrightarrow{q} L' \to 0,$$

其中 F、F' 具有有限平坦维数，而 L、L' 是 PGF。于是，

(i) 存在一个 R-线性映射 $g\colon F \to F'$，使得 $g\iota = \jmath f$。(ii) 若 $g, g'\colon F \to F'$ 是两个 R- 线性映射，且 $g\iota = \jmath f$ 和 $g'\iota = \jmath f$，则 $[g] = [g'] \in \mathfrak{PGF}\text{-Hom}_R(F, F')$。(iii) 若 $[f] = [0] \in \mathfrak{PGF}\text{-Hom}_R(M, N)$，且 $g\colon F \to F'$ 是一个 R-线性映射，使得 $g\iota = \jmath f$，则 $[g] = [0] \in \mathfrak{PGF}\text{-Hom}_R(F, F')$。

证明。(i) 由于 $\text{Ext}^1_R(L, F') = 0$，加法映射 $\iota^*\colon \text{Hom}_R(F, F') \to \text{Hom}_R(M, F')$ 是满射。因此，存在一个 R-线性映射 $g\colon F \to F'$，使得 $\jmath f = \iota^*(g)$，如所需。

(ii) 设 $g, g'\colon F \to F'$ 是两个 R-线性映射，且满足 $g\iota = \jmath f$ 和 $g'\iota = \jmath f$。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M & \xrightarrow{\iota} & F & \xrightarrow{p} & L & \to & 0 \\ & & {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow\downarrow{\scriptstyle g'} & & & & \\ 0 & \to & N & \xrightarrow{\jmath} & F' & \xrightarrow{q} & L' & \to & 0 \end{array}$$

于是，$(g' - g)\iota = g'\iota - g\iota = \jmath f - \jmath f = 0$，因此存在一个 R-线性映射 $h\colon L \to F'$，使得 $g' - g = hp$。由于 R-模 L 是 PGF，我们得出 $[g] = [g'] \in \mathfrak{PGF}\text{-Hom}_R(F, F')$。

(iii) 假设 f 可分解为两个 R-线性映射 $M \xrightarrow{a} \Gamma \xrightarrow{b} N$ 的复合，其中模 Γ 是 PGF。根据 PGF 模的定义，存在如下形式的 R-模短正合列:

$$0 \to \Gamma \xrightarrow{k} P \to \Gamma' \to 0,$$

其中 P 是投射的，而 Γ' 是 PGF（另见命题 2.1）。然后，利用上面的 (i)，我们可以找到 R-线性映射 $\alpha\colon F \to P$ 和 $\beta\colon P \to F'$，使得 $\alpha\iota = ka$ 和 $\beta k = \jmath b$。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M & \xrightarrow{\iota} & F & \xrightarrow{p} & L & \to & 0 \\ & & {\scriptstyle a}\downarrow & & {\scriptstyle \alpha}\downarrow & & & & \\ 0 & \to & \Gamma & \xrightarrow{k} & P & \to & \Gamma' & \to & 0 \\ & & {\scriptstyle b}\downarrow & & {\scriptstyle \beta}\downarrow & & & & \\ 0 & \to & N & \xrightarrow{\jmath} & F' & \xrightarrow{q} & L' & \to & 0 \end{array}$$

我们得出 $(\beta\alpha)\iota = \jmath(ba) = \jmath f$，因此对于每个 R-线性映射 $g\colon F \to F'$，若满足$g\iota = \jmath f$，则有 $[g] = [\beta\alpha] \in \mathfrak{PGF}\text{-Hom}_R(F, F')$（见上文 (ii)）。这就完成了证明，因为显然我们有 $[\beta\alpha] = [0] \in \mathfrak{PGF}\text{-Hom}_R(F, F')$。□

在引理 4.1 的证明中，模 F, F' 具有有限平坦维数这一事实仅在 (i) 中用于得到群 $\text{Ext}^1_R(L, F')$ 的消失。我们可以放宽对 F, F' 平坦性的要求，具体如下列引理所述。

引理 4.2. 设 $f\colon M \to N$ 是一个 R-线性映射，其中 M, N 是两个 R-模，并考虑两个短正合列

$$0 \to M \xrightarrow{\iota} K \xrightarrow{p} L \to 0 \quad and \quad 0 \to N \xrightarrow{\jmath} K' \xrightarrow{q} L' \to 0,$$

其中 K、$K' \in \mathtt{PGF}(R)^{\perp}$ 和 L、$L' \in \mathtt{PGF}(R)$。于是，

(i) 存在一个 R-线性映射 $g\colon K \to K'$，使得 $g\iota = \jmath f$。

(ii) 若 $g, g' \colon K \to K'$ 是两个 R-线性映射，且 $g\iota = \jmath f$ 和 $g'\iota = \jmath f$，则 $[g] = [g'] \in \mathfrak{PGF}\text{-}\mathrm{Hom}_R(K, K')$。 **(iii)** 若 $[f] = [0] \in \mathfrak{PGF}\text{-}\mathrm{Hom}_R(M, N)$，且 $g \colon K \to K'$ 是一个 R-线性映射，使得 $g\iota = \jmath f$，则 $[g] = [0] \in \mathfrak{PGF}\text{-}\mathrm{Hom}_R(K, K')$。

证明。与引理 4.1 的证明相同。 □

如第 3 节所示，存在定义良好的加性函子

$$\nu : \mathfrak{PGF}\text{-}\overline{\mathtt{GFlat}}(R) \to \mathfrak{PGF}\text{-}\overline{\mathtt{Flat}}(R),$$

$$\nu' : \mathfrak{PGF}\text{-}R\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathfrak{PGF}\text{-}\mathtt{PGF}(R)^{\perp},$$

其中，ν 将有限 Gorenstein 平坦维数的 R-模 M 映射为短正合列 (6) 中出现的有限平坦维数的 R-模 F'，而 ν' 将一个 R-模 M 映射为 $\mathtt{PGF}(R)^{\perp}$ 中的一个模，该模出现在如下形式的 M 的逼近序列中

$$0 \to M \to K \to L \to 0$$

其中 $K \in \mathtt{PGF}(R)^{\perp}$ 和 $L \in \mathtt{PGF}(R)$。此外，ν 将一个 R-线性映射 $f \colon M \to N$ 的类 $[f] \in \mathfrak{PGF}\text{-}\mathrm{Hom}_R(M, N)$ 映射为任意满足引理 4.1(i) 中所述条件的 R-线性映射 $g \colon F \to F'$ 的类 $[g] \in \mathfrak{PGF}\text{-}\mathrm{Hom}_R(F, F')$；而 ν' 将一个 R-线性映射 $f \colon M \to N$ 的类 $[f] \in \mathfrak{PGF}\text{-}\mathrm{Hom}_R(M, N)$ 映射为任意满足引理 4.2(i) 中所述条件的 R-线性映射 $g : K \to K'$ 的类 $[g] \in \mathfrak{PGF}\text{-}\mathrm{Hom}_R(K, K')$。

本节的主要结果陈述如下。

定理 4.3. **(i)** 上文定义的加性函子 $\nu \colon \mathfrak{PGF}\text{-}\overline{\mathtt{GFlat}}(R) \to \mathfrak{PGF}\text{-}\overline{\mathtt{Flat}}(R)$ 是包含函子 $\mathfrak{PGF}\text{-}\overline{\mathtt{Flat}}(R) \hookrightarrow \mathfrak{PGF}\text{-}\overline{\mathtt{GFlat}}(R)$ 的左伴随。

(ii) 加性函子 $\nu' \colon \mathfrak{PGF}\text{-}R\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathfrak{PGF}\text{-}\mathtt{PGF}(R)^{\perp}$ 是包含函子 $\mathfrak{PGF}\text{-}\mathtt{PGF}(R)^{\perp} \hookrightarrow \mathfrak{PGF}\text{-}R\text{-}\mathrm{Mod}$ 的左伴随。

证明. 我们只证明 **(i)**，因为 **(ii)** 的证明本质上相同。设 F 是一个有限平坦维数的 R-模，M 是一个有限 Gorenstein 平坦维数的 R-模。我们还考虑一个由 R-模组成的短正合列

$$0 \to M \xrightarrow{\iota} F' \xrightarrow{p} L \to 0,$$

其中 F' 的平坦维数有限，且 L 是 PGF。注意，加法映射

$$[\iota]^* : \mathfrak{PGF}\text{-}\mathrm{Hom}_R(F', F) \to \mathfrak{PGF}\text{-}\mathrm{Hom}_R(M, F)$$

在 F 中自然（这显然成立），在 M 中也自然（由引理 4.1 可得）。我们将证明上述加法映射是双射，从而建立定理陈述中的伴随。事实上，由于 L 是一个 PGF 模，且 F 的平坦维数有限，群 $\mathrm{Ext}^1_R(L, F)$ 是平凡的。因此，加法映射

$$\iota^* : \mathrm{Hom}_R(F', F) \to \mathrm{Hom}_R(M, F)$$

是满射，因此 $[\iota]^*$ 也为满射。现在假设 $g \colon F \to F'$ 是一个 R-线性映射，满足 $[g\iota] = [g][\iota] = [\iota]^*[g] = [0] \in \mathfrak{PGF}\text{-}\mathrm{Hom}_R(M, F)$，并考虑以下交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M & \xrightarrow{\iota} & F' & \xrightarrow{p} & L & \to & 0 \\ & & {\scriptstyle g\iota}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & & & \\ 0 & \to & F & = & F & \to & 0 & \to & 0 \end{array}$$

应用引理 3.1(iii)，我们得到 $[g] = [0] \in \mathfrak{PGF}\text{-}\mathrm{Hom}_R(F', F)$，因此 $[\iota]^*$ 是单射的。□

推论 4.4. 对于一个 Goren- stein 平坦维数有限的 R-模 M，以下条件等价。

(i) M 是 PGF，(ii) 对每个有限平坦维数的 R-模 F，都有 $\mathfrak{PGF}\text{-Hom}_R(M, F) = 0$，(iii) 存在 R-模的短正合列 $0 \to M \xrightarrow{\iota} F \to L \to 0$，其中 F 具有有限平坦维数，且 L 是 PGF，使得 $[\iota] = [0] \in \mathfrak{PGF}\text{-Hom}_R(M, F)$。

证明。(i)⇒(ii) 和 (ii)⇒(iii) 的蕴含显然，因此只需证明 (iii)⇒(i)。为此，我们注意到前一定理中的伴随同构特别意味着，加法映射

$$[\iota]^* : \mathfrak{PGF}\text{-Hom}_R(F, F) \to \mathfrak{PGF}\text{-Hom}_R(M, F)$$

是双射的。由于 $[\iota]^*[1_F] = [1_F][\iota] = [1_F\iota] = [\iota] = [0] \in \mathfrak{PGF}\text{-Hom}_R(M, F)$，我们得出 $[1_F] = [0] \in \mathfrak{PGF}\text{-Hom}_R(F, F)$；因此，$F$的恒等映射可经由一个 PGF 模 L分解。由此可知，F 是 L 的一个直和项，因而 F 是 PGF。作为 PGF 模之间一个满同态的核，N 必然是 PGF。□

C推论 4.5. 对于一个 R-模 M，以下条件等价 .

(i) M 是 PGF，(ii) 对每个 $K \in \mathtt{PGF}(R)^{\perp}$，$\mathfrak{PGF}\text{-Hom}_R(M, K) = 0$，(iii) 存在一个 R-模的短正合列 $0 \to M \xrightarrow{\iota} K \to L \to 0$，其中$K \in \mathtt{PGF}(R)^{\perp}$ 且 L 是 PGF，使得 $[\iota] = [0] \in \mathfrak{PGF}\text{-Hom}_R(M, K)$。

证明。与推论 4.4 的证明相同。 □

5. Another stability of PGF modules

本节最后将证明，PGF R-模的类与类 $\mathtt{PGF}^{(2)}_{\mathcal{I}}(R)$ 相同，其中我们用 $\mathtt{PGF}^{(2)}_{\mathcal{I}}(R)$ 表示由满足以下条件的 R-模 M 构成的类：它们是 PGF 模构成的正合复形 G 中的 Syzygy，并且对于每个内射 R-模 I，$I \otimes_R$G 都是正合的。此外，我们用 $\mathtt{SPGF}^{(2)}_{\mathcal{I}}(R)$ 表示 R-模 M 构成的子范畴；对于其中的每个模，都存在形如 $0 \to M \to G \to M \to 0$ 的 R-模短正合列，其中 $\underline{G}$ 是 PGF，且每当 I 是内射 R-模时，$I \otimes_R$ 都保持该短正合列的正合性。

命题 5.1. 设 M是属于类 $\mathtt{PGF}^{(2)}_{\mathcal{I}}(R)$的 R-模。那么，对于每个 $i > 0$ 以及每个内射 R-模 I，$\mathrm{Tor}^R_i(I, M) = 0$。

证明. 设 $M \in \mathtt{PGF}^{(2)}_{\mathcal{I}}(R)$ 和 I 是一个内射 R-模。那么，存在一个由 PGF R-模构成的正合列

$$\cdots \to G_1 \to G_0 \to G^0 \to G^1 \to \cdots,$$

其中 $M \cong \mathrm{Im}(G_0 \to G^0)$，且函子 $J \otimes_R$ 对每个内射 R-模 J都保持该正合列的正合性。我们考虑一个形如$0 \to K \to G_0 \to M \to 0$的 R-模短正合列，其中 $K = \mathrm{Im}(G_1 \to G_0) \in \mathtt{PGF}^{(2)}_{\mathcal{I}}(R)$，并得到短正合列 $0 \to I \otimes_R K \to I \otimes_R G_0 \to I \otimes_R M \to 0$。由于模 G_0 是 PGF，命题 2.1(ii)给出，对于每个 $i > 0$，$\mathrm{Tor}^R_i(I, G_0) = 0$。于是，短正合列$0 \to K \to G_0 \to M \to 0$ 导出一个形如以下的长正合序列

$$\cdots \to \mathrm{Tor}^R_1(I, G_0) \to \mathrm{Tor}^R_1(I, M) \to I \otimes_R K \to I \otimes_R G_0 \to I \otimes_R M \to 0,$$

这意味着 $\mathrm{Tor}^R_1(I, M) = 0$。此外，长正合序列

$$\cdots \to \mathrm{Tor}^R_{i+1}(I, G_0) \to \mathrm{Tor}^R_{i+1}(I, M) \to \mathrm{Tor}^R_i(I, K) \to \mathrm{Tor}^R_i(I, G_0) \to \cdots,$$

其中 $i>0$，可得对每个 $i>0$，$\mathrm{Tor}_{i+1}^R(I,M)=\mathrm{Tor}_i^R(I,K)$。因此，利用对 i 的归纳法以及 K 属于 $\mathtt{PGF}_{\mathcal{I}}^{(2)}(R)$ 这一事实，我们得到对每个 $i>0$ 以及每个内射 R-模 I，$\mathrm{Tor}_i^R(I,M)=0$。□

下面的命题给出了子范畴 $\mathtt{SPGF}_{\mathcal{I}}^{(2)}(R)$ 的刻画。

命题 5.2. 对于一个 R-模 M，以下条件等价：

(i) $M\in\mathtt{SPGF}_{\mathcal{I}}^{(2)}(R)$。(ii) 存在一个形如 $0\to M\to G\to M\to 0$ 的 R-模短正合列，其中 G 是 PGF，且对于每个内射 R-模 I，$\mathrm{Tor}_1^R(I,M)=0$。(iii) 存在一个形如 $0\to M\to G\to M\to 0$ 的 R-模短正合列，其中 G 是 PGF，且对于每个 $i>0$ 以及每个内射 R-模 I，$\mathrm{Tor}_i^R(I,M)=0$。

证明. 这由类 $\mathtt{SPGF}_{\mathcal{I}}^{(2)}(R)$ 的定义和命题 5.1 立即得出，使用标准论证即可。□

命题 5.3。 $\mathtt{PGF}_{\mathcal{I}}^{(2)}(R)$ 中的每个模都是 $\mathtt{SPGF}_{\mathcal{I}}^{(2)}(R$中某个模的直和项).

证明。设 M 是 $\mathtt{PGF}_{\mathcal{I}}^{(2)}(R)$中的一个 R-模。于是，存在一个由 PGFR-模构成的正合列

$$\mathbf{G}=\cdots\to G_1\xrightarrow{d_1^G}G_0\xrightarrow{d_0^G}G_{-1}\xrightarrow{d_{-1}^G}G_{-2}\to\cdots,$$

使得 $M\cong\mathrm{Im}(d_0^G)$，且对每个内射模I，序列 $I\otimes_R$G都是正合的。对每个 $n\in\mathbb{Z}$，记 Σ^nG为将 G 的所有指标增加 n 后得到的正合列：$(\Sigma^n\mathbf{G})_i=G_{i-n}$，并且对每个 $i\in\mathbb{Z}$，$d_i^{\Sigma^nG}=d_{i-n}^G$。现在考虑正合列

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(\Sigma^n\mathbf{G})=\cdots\to\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}G_i\xrightarrow{\oplus_{i\in\mathbb{Z}}d_i^G}\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}G_i\xrightarrow{\oplus_{i\in\mathbb{Z}}d_i^G}\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}G_i\to\cdots.$$

由于 $\mathtt{PGF}(R)$ 对直和封闭，我们得到模$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}G_i$ 也是 PGF。此外，[2, 命题 20.2(3)] 给出了复形的同构$I\otimes_R(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(\Sigma^n\mathbf{G}))\cong\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(I\otimes_R\Sigma^n\mathbf{G})$，而对于每个内射模 I，这都是一个正合列。因此，$\mathrm{Im}(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}d_i^G)$属于 $\mathtt{SPGF}_{\mathcal{I}}^{(2)}(R)$，正如所需。□

定义 5.4. 设 M 是 $\mathtt{SPGF}_{\mathcal{I}}^{(2)}(R)$中的一个模。若存在形如 $0\to M\to N\to G\to 0$的 R模短正合列，其中 G是 PGF，则称模 N 为 M型。

命题 5.5. 设 M 是 $\mathtt{SPGF}_{\mathcal{I}}^{(2)}(R)$ 中的一个 R模，且 N 是一个 M型模。那么，以下结论成立：

(i) 对每个 $i>0$ 以及每个内射 R模 I，$\mathrm{Tor}_i^R(I,N)=0$。(ii) 存在形如 $0\to N\to P\to K\to 0$的 R模正合列，其中 P是投射的，K 是一个 M型模，并且对每个内射 R模 I，函子 $I\otimes_R$ 保持此正合列的正合性。

证明。(i) 设 I 是一个内射 R-模。由于 N 是一种 M-型，因此存在如下形式的 R-模短正合列：$0\to M\to N\to G\to 0$，其中 G 是 PGF。上述短正合列导出如下形式的长正合序列：

$$\cdots\to\mathrm{Tor}_i^R(I,M)\to\mathrm{Tor}_i^R(I,N)\to\mathrm{Tor}_i^R(I,G)\to\cdots,$$

其中 $i>0$。由于 $M\in \mathtt{SPGF}_{\mathcal{I}}^{(2)}(R)$，根据命题 5.2(iii)，对每个 $i>0$，都有 $\mathrm{Tor}_i^R(I,M)=0$。此外，命题 2.1(ii) 得出，对每个 $i>0$，都有 $\mathrm{Tor}_i^R(I,G)=0$。因此，对每个 $i>0$ 以及每个内射 R-模 I，都有 $\mathrm{Tor}_i^R(I,N)=0$。

(ii) 由于 $M\in \mathtt{SPGF}_{\mathcal{I}}^{(2)}(R)$，存在一个形如$0\to M\to G'\to M\to 0$的 R-模短正合列，其中 G' 是 PGF。由于 N 是一个 M-型，故也存在一个形如 $0\to M\to N\to G\to 0$的 R-模短正合列，其中 G 是 PGF。考虑上述短正合列的推出图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & M & \to & G' & \to & M & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \to & N & \to & F & \to & M & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & G & = & G & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

由于 $\mathtt{PGF}(R)$对扩张封闭，短正合列 $0\to G'\to F\to G\to 0$表明模 F 也是 PGF。因此，存在一个形如 $0\to F\to P\to F'\to 0$的 R-模短正合列，其中 P 是投射的，且 F' 是 PGF。现在考虑以下推出图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & N & \to & F & \to & M & \to & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & N & \to & P & \to & K & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & F' & = & F' & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

由于 F'是 PGF，模 K是一个 M-型。此外，(i) 蕴含对于每个内射 R-模 I，$\mathrm{Tor}_1^R(I,K)=0$，因此对于每个内射 R-模 I，序列 $0\to I\otimes_R N\to I\otimes_R P\to I\otimes_R K\to 0$ 都是正合的。□

推论 5.6. 设 M 是 $\mathtt{SPGF}_{\mathcal{I}}^{(2)}(R)$ 中的一个 R-模，且 N 是一个 M-型模。那么， N是 PGF。

证明. 由于 N 是一个 M-型模，命题 5.5(ii) 蕴含存在一个形如 $0\to N\to P^0\to K\to 0$的 R-模短正合列，其中 P^0是投射的，K 是一个 M-型，并且对于每个内射 R-模 I，函子 $I\otimes_R$ 保持该序列的正合性。重复这一过程可得到一个形如 $0\to N\to P^0\to P^1\to P^2\to\cdots$的 R-模正合列，其中对于每个 $i\geqslant 0$， P^i都是投射的，并且对于每个内射 R-模 I，函子 $I\otimes_R$ 保持该序列的正合性。利用命题 5.5(i)，我们还可得，对于每个 $i>0$ 以及每个内射 R-模I，$\mathrm{Tor}_i^R(I,N)=0$。根据命题 2.1(ii)，我们得出 N 是 PGF。□

定理 5.7. $\mathtt{PGF}(R)=\mathtt{PGF}_{\mathcal{I}}^{(2)}(R)$.

证明。只需证明 $\mathtt{PGF}^{(2)}_{\mathcal{I}}(R) \subseteq \mathtt{PGF}(R)$。由于类 $\mathtt{PGF}(R)$ 对直和项封闭，根据命题 5.3，只需证明 $\mathtt{SPGF}^{(2)}_{\mathcal{I}}(R) \subseteq \mathtt{PGF}(R)$。令 M 为 $\mathtt{SPGF}^{(2)}_{\mathcal{I}}(R)$中的一个 R-模。在定义 5.4 中令 $G = 0$，可得 M 是一个 M-型。因此，由推论 5.6 可知 M 是 PGF。□

注 5.8. (i) 我们用 $\mathtt{PGF}^{(2)}(R)$ 表示由满足以下条件的 R-模组成的子范畴 M：它们是 PGF 模的正合复形 G 中的 Syzygy，并且对每个 Goren- stein 内射 R-模 H，$H \otimes_R$G 都是正合的。于是有包含关系 $\mathtt{PGF}(R) \subseteq \mathtt{PGF}^{(2)}(R) \subseteq \mathtt{PGF}^{(2)}_{\mathcal{I}}(R)$，因此定理 5.7 得出 $\mathtt{PGF}(R) = \mathtt{PGF}^{(2)}(R) = \mathtt{PGF}^{(2)}_{\mathcal{I}}(R)$。

(ii) 在假设 $(\mathtt{PGF}_{\mathscr{B}}(R), \mathtt{PGF}^{\perp}_{\mathscr{B}}(R))$ 是完备遗传余扭挠对的条件下，本节的稳定性结果可以推广到相对情形。更准确地说，我们有 $\mathtt{PGF}_{\mathscr{B}}(R) = \mathtt{PGF}^{(2)}_{\mathscr{B}}(R)$，其中我们用 $\mathtt{PGF}^{(2)}_{\mathscr{B}}(R)$ 表示由满足以下条件的 R-模组成的类 M：它们是 $\mathtt{PGF}_{\mathscr{B}}(R)$ 中的模所构成的正合复形 G 中的 Syzygy，并且对每个 R- 模 $B \in \mathscr{B}$，$B \otimes_R$G 都是正合的。

(iii) 定理 5.7 的一个应用见 [17, 命题 2.15]。

Acknowledgements

作者谨向 Ioannis Emmanouil、Jan Saroch 以及匿名审稿人致谢，感谢他们提出的宝贵意见。

References

[1] M. Auslander，M. Bridger，《稳定模理论》，美国数学会回忆录第94卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1969年。[2] F. W. Anderson，K. R. Fuller，《环与模范畴》，《研究生数学教材》第13卷，第2版，施普林格出版社，纽约，1992年。[3]M. Auslander，R.-O. Buchweitz，《极大 Cohen–Macaulay 逼近的同调理论》，法国数学会回忆录（新系列）38（1989），5–37。[4] D. Bennis，《Gorenstein 平坦模类对扩张封闭的环》，《代数通讯》37（2009），855–868。[5] S. Bouchiba 和 M. Khaloui，《Gorenstein 平坦模的稳定性》，《格拉斯哥数学杂志》54（2012），169–175。[6]L.W. Christensen，A. Frankild，H. Holm，《关于 Gorenstein 投射、内射和平坦维数——一种函子性描述及其应用》，《代数杂志》302（2006），231–279。[7]I. Emmanouil，O. Talelli，《Gorenstein 同调代数中的有限性判据》，《美国数学会汇刊》366（2014），6329–6351。[8] I. Emmanouil，《Gorenstein 同调维数的有限性》，《代数杂志》372（2012），376–396。[9]I. Emmanouil，《Gorenstein 平坦维数有限的模与逼近》，http://users.uoa.gr/~emmanoui/files/gflat-dimension.pdf。[10] I. Emmanouil，O. Talelli，《具有群环系数的 Gorenstein 维数与群上同调》，《伦敦数学会杂志》97（2018），306–324。[11] E.E. Enochs，O.M.G. Jenda，《Gorenstein 内射模与投射模》，《数学杂志》220（1995），611–633。[12] E.E. Enochs，O.M.G. Jenda，B. Torrecillas，《Gorenstein 平坦模》，《南京大学学报（数学季刊）》10（1993），1–9。

[13]S. Estrada，A. Iacob，M.A. P´erez，《模型结构与相对 Gorenstein 平坦模及链复形》，《代数中的范畴、同调与组合方法》，《当代数学》第751卷，美国数学会（2020），135–175。[14] J. Gillespie，A. Iacob，《对偶对、广义Gorenstein模与Ding内射包络》，《数学报告》，第360卷（2022），381–398。[15] H. Holm，《Gorenstein 同调维数》，《纯粹与应用代数杂志》189（2004），167–193。[16] M. Prest，《纯性、谱与局部化》，《数学及其应用百科全书》第121卷，剑桥大学出版社，2009年。[17]D.-D. Stergiopoulou，《群的投射余解Gorenstein平坦维数》，arXiv:2302.06022v2。[18] J. ˇ Saroch，J. ˇS´tov´ıˇcek，《奇异紧致性与 Σ-余挠模及Gorenstein模的可定义性》，《数学精选新系列》26（2020），论文第23号。[19] S. Sather-Wagstaff，T. Sharif 和 D. White，《Gorenstein范畴的稳定性》，《伦敦数学会杂志》77（2008），481–502。

Department of Mathematics, University of Athens, Athens 15784, Greece电子邮箱： kaperonn@math.uoa.grDepartment of Mathematics, University of Athens, Athens 15784, Greece电子邮箱：dstergiop@math.uoa.gr