类型 E_7 和 E_8 的魏尔室所关联的实托里克簇的贝蒂数

SUYOUNG CHOI、YOUNGHAN YOON 和 SEONGHYEON YU

Abstract. 我们计算了类型 E_7 和 E_8 的魏尔室所关联的实托里克簇的有理贝蒂数，从而完成了所有类型根系的计算。

arXiv:2304.07564v1 [math.AT] 15 Apr 2023

1. Introduction

根系是有限维欧几里得空间中的一个有限向量集，并且在 Weyl 群 [7] 的作用下封闭。已知 [9]，类型为 R 的根系由其魏尔室和余权格生成一个非奇异完备扇 Σ_R，并且根据环面几何的基本定理，Σ_R 对应于一个光滑紧致（复）环面簇 X_R。特别地，X_R 的实点集称为与魏尔室相关联的实托里克簇，记作 $X_R^{\mathbb{R}}$。

自然会想要了解 $X_R^{\mathbb{R}}$ 的拓扑不变量。根据 [6], ，可以完全根据 Σ_R 的面数计算出 $X_R^{\mathbb{R}}$ 的 $\mathbb{Z}_2$-贝蒂数。然而，一般而言，计算实环面簇的有理贝蒂数要困难得多。2012 年，Henderson [8]计算了 $X_{A_n}^{\mathbb{R}}$ 的有理贝蒂数。其他经典类型和例外类型的计算，则采用了 [12] 或[5]中提出的有理贝蒂数公式。截至本文撰写时，除E_7 和 E_8外，所有类型的 $X_R^{\mathbb{R}}$ 均已有结果。

对于经典类型 $R = A_n$、B_n、C_n 和 D_n，已知 $X_R^{\mathbb{R}}$ 的 k 阶贝蒂数 β_k 如下（见 [3], [4], [8]）：

$$\begin{aligned}
\beta_k(X_{A_n}^{\mathbb{R}};\mathbb{Q}) &= \binom{n+1}{2k} a_{2k},\\
\beta_k(X_{B_n}^{\mathbb{R}};\mathbb{Q}) &= \binom{n}{2k} b_{2k} + \binom{n}{2k-1} b_{2k-1},\\
\beta_k(X_{C_n}^{\mathbb{R}};\mathbb{Q}) &= \binom{n}{2k-2}\left(2^n - 2^{2k-2}\right) a_{2k-2} + \binom{n}{2k}(2b_{2k} - 2^{2k} a_{2k}), \text{ and}\\
\beta_k(X_{D_n}^{\mathbb{R}};\mathbb{Q}) &= \binom{n}{2k-4}\left(2^{2k-4} + (n-2k+2)2^{n-1}\right) a_{2k-4} + \binom{n}{2k}(2b_{2k} - 2^{2k} a_{2k}),
\end{aligned}$$

其中，a_r 是第 r 个欧拉锯齿数（ [10] 中的 A000111），b_r 是第 r 个广义欧拉数（ [10] 中的 A001586）。

对于例外类型 $R = G_2$、F_4 和 E_6，$X_R^{\mathbb{R}}$ 的贝蒂数如表 1 所示（见[2, 命题 3.3]）。

本文旨在计算其余例外类型E_7 和 E_8的贝蒂数。正如[2], 中所述，这些情形至今仍未解决，是因为相应的扇过于庞大，难以处理。我们提出了一种分解考克斯特复形的技术方法；利用该方法，我们得到了若干明确的子复形 K_S，它们在我们的主要计算中发挥着重要作用。此外，我们还得到了一个更小的单纯

Date: 2023 年 4 月 18 日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 57S12、14M25、55U10、57N65。
Key words and phrases. 同调群、环面拓扑、实环面簇、根系、Weyl群、 E_7型、E_8型、考克斯特复形。作者获得了韩国政府资助的韩国国家研究基金会项目支持（NRF-2019R1A2C2010989）。

$\beta_k(X_R^{\mathbb{R}})$	$R=G_2$	$R=F_4$	$R=E_6$
$k=0$	1	1	1
$k=1$	9	57	36
$k=2$	0	264	1,323
$k=3$	0	0	4,392

TABLE 1. $X_{G_2}^{\mathbb{R}}$、 $X_{F_4}^{\mathbb{R}}$ 和 $X_{E_6}^{\mathbb{R}}$ 的非零贝蒂数

复形：通过移除 K_S 中的顶点，同时不改变其同调群，从而可以计算贝蒂数。

定理 1.1。 $X_{E_7}^{\mathbb{R}}$ 和 $X_{E_8}^{\mathbb{R}}$ 的第 k个贝蒂数 β_k 如下。

$$\beta_k(X_{E_7}^{\mathbb{R}};\mathbb{Q})=\begin{cases}1, & if\ k=0\\ 63, & if\ k=1\\ 8{,}127, & if\ k=2\\ 131{,}041, & if\ k=3\\ 122{,}976, & if\ k=4\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$

$$\beta_k(X_{E_8}^{\mathbb{R}};\mathbb{Q})=\begin{cases}1, & if\ k=0\\ 120, & if\ k=1\\ 103{,}815, & if\ k=2\\ 6{,}925{,}200, & if\ k=3\\ 23{,}932{,}800, & if\ k=4\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$

2. Real toric varieties associated to the Weyl chambers

除非另有说明，我们沿用 [2] 中的记号，回顾与魏尔室相关的实托里克簇的一些已知事实。

设 Φ_R 是有限维欧几里得空间 E 中的一个 R 型不可约根系，且W_R 是其 Weyl群。反射，也就是 W_R 的元素，在 E 中形成连通分支，称为魏尔室。我们固定一个特定的魏尔室，称为基本韦伊尔室 Ω；其射线 ω_1、.....、ω_n 称为基本余权。于是， $\mathbb{Z}(\{\omega_1,\ldots,\omega_n\})$ 具有格结构，称为余权格。将魏尔室的集合视为相对于余权格的光滑完备扇 Σ_R。由张成 Σ_R 的射线集合 $V=\{v_1,\ldots,v_m\}$，可得到单纯复形 K_R，称为定义在V上的 R 型考克斯特复形；其在 K_R 中的面由 Σ_R 中对应的面得到（更多细节见 [1] ）。余权格上射线的方向给出一个线性映射 λ_R: $V\to\mathbb{Z}^n$。此外，复合映射 Λ_R: $V\xrightarrow{\lambda_R}\mathbb{Z}^n\xrightarrow{模}{}^{2}\mathbb{Z}_2^n$可表示为一个 $n\times m$ （模 2）矩阵，称为（模 2）特征矩阵。设 S 是 Λ_R 的行空间 $Row(\Lambda_R)$ 中的一个元素。由于 Λ_R 的每一列都对应一个顶点 $v\in V$，因此 S 可视为 V的一个子集。考虑相对于 S的 K_R 的诱导子复形 K_S 。已知 K_S 的约化贝蒂数与 $X_R^{\mathbb{R}}$ 的贝蒂数有着密切联系。

定理 2.1. [2] 对于任意类型为 R 的根系 Φ_R，设 W_R 为 Φ_R 的 Weyl群。那么，存在一个 W_R-模同构

$$H_*(X_R^{\mathbb{R}})\cong\bigoplus_{S\in Row(\Lambda_R)}\widetilde{H}_{*-1}(K_S),$$

其中， K_S 是相对于 S的 K_R 诱导子复形。

由于根据定理 2.1， $K_S \cong K_{gS}$ 对于 $S \in Row$（Λ_R）和 $g \in W_R$成立，因此我们只需考察 Row（Λ_R）中 W_R轨道的代表元 K_S 。

命题 2.2。 [2] 对于 E_7型，行空间 Row(Λ_{E_7}) 中有 127 个非零元素。此外，恰有三个轨道（其代表元分别记为 S_1、S_2 和 S_3），各轨道中的元素数分别为 63、63 和 1。

对于 E_8型，行空间 Row(Λ_{E_8}) 中有 255 个非零元素。这里只有两个轨道（其代表元分别记为 S_4 和 S_5），各轨道中的元素数分别为 120 和 135。

因此，就我们的目的而言，只需计算 K_{S_i} 关于$1 \leq i \leq 5$的（约化）贝蒂数。出于内存错误、时间复杂度过高等实际原因，难以通过计算机程序直接获得 K_S 。本节余下部分将介绍一种有效的方法来获得 K_S。

对于固定的基本余权 ω，令 H_ω 为 W_R 对 ω 的各向同性子群。

引理 2.3. 对于类型 R，令 K_ω 为由集合 $\{g \cdot \Omega \mid g \in H_\omega\}$ 诱导的 K_R 的子复形，其中 Ω 是基本韦伊尔室。则考克斯特复形 K_R 可分解如下：

$$K_R = \bigsqcup_{g \in W_R/H_\omega} K^g,$$

其中 $K^g = g \cdot K_\omega$。

证明。对于任意极大单纯形 $\sigma \in K_R$，根据 [7] 中的命题 8.23 和 8.27，存在唯一的 $h \in W_R$ 使得 $h \cdot \Omega = \sigma$。由此可知， h 唯一地包含于某个 $g \in W_R$ 的 $g \cdot H_\omega$ 中。因此， $\sigma = h \cdot \Omega$ 是 K^g 的一个极大单纯形，并且所有 K^g 两两不相交。□

根据上述引理， K_S 也分解为 $K_S^g := K^g \cap K_S$，其中遍历所有陪集代表 $g \in W_R/H_\omega$。于是， K_S 的所有极大单纯形的集合可以表示为对所有 $g \in W_R/H_\omega$， K_S^g 的所有极大单纯形的集合之并。然而，对于类型 E_7 和 E_8，由于 K^g 仍有许多面，因此无法直接从 K^g 简单地得到 K_S^g ；见表 2。

	$R = E_7$	$R = E_8$
K_R的顶点数	17,642	881,760
K_R的室数	2,903,040	696,729,600
$\lvert W_R/H_\omega \rvert$	126	240
K^g的室数	23,040	2,903,040

TABLE 2. 当 $R = E_7$ 且 E_8 时， K_R 的统计数据

我们建立一个引理以改进时间复杂度。将 V_S^g 记为 K_S^g 中顶点的集合。

引理 2.4. 设 g、$h \in W_R/H_\omega$。若 $g \cdot V_S^h = V_S^{gh}$ ，则 $g \cdot K_S^h = K_S^{gh}$ 。

证明。对于 $g \in W_R/H_\omega$，我们自然地将 g 视为从 K^h 到 K^{gh} 的单纯同胚。若 $g \cdot V_S^h = V_S^{gh}$ ，则 g 在 K_S^h 上的限制是良定义的。因此， g 也可视为 K_S^h 与 K_S^{gh} 之间的单纯同胚。□

根据上述引理，在 $g \cdot V_S^h = V_S^{gh}$, K_S^{gh} 的情况下，无需任何计算即可获得结果。由于检验该引理的假设远比构造 K_S^g from K^g 容易，因此可以节省大量时间。使用这种方法，借助标准计算机硬件，可以在合理的时间内得到 K_S 。

3. Simplicial complexes for types E_7 and E_8

由于类型为 E_7 或 E_8 的每个 K_S 都过于庞大，无法直接计算，因此用现有方法不可能直接计算它们的贝蒂数。本节介绍 $\widehat{}$ 这一特定的较小单纯复形 K_S，其同调群与 K_S 的同调群作为群同构。

设 K 是一个单纯复形。K 中 v 的链接 $Lk_K(v)$ 是满足 $v \notin \sigma$ 和 $\{v\} \cup \sigma \in K$ 的所有面 $\sigma \in K$ 所组成的集合，而 K 中 v 的（闭）星形 $St_K(v)$ 是满足 $\{v\} \cup \sigma \in K$ 的所有面 $\sigma \in K$ 所组成的集合。对于满足 $Lk_K(v) \neq \emptyset$ 的 K_S 的一个顶点 v，我们考虑以下 Mayer-Vietoris序列：

$$\cdots \to \widetilde{H}_k(Lk_K(v)) \to \widetilde{H}_k(K-v) \oplus \widetilde{H}_k(St_K(v)) \to \widetilde{H}_k(K) \to \widetilde{H}_{k-1}(Lk_K(v)) \to \cdots,$$

$\sim$其中 $K - v = \{\sigma - \{v\} \mid \sigma \in K\}$，且 k 是一个正整数。注意，对于 $k \geq 0$，有 $H_k(St_K(v)) = 0$ $\sim$，因为 $St_K(v)$ 是一个拓扑锥。因此，对于 $k \geq 0$，如果 $H_k(Lk_K(v))$ 是平凡的，那么作为群，

$\sim$ $\sim H_k(K-v) \cong H_k(K)$。在这种情况下，我们称 v 为 K 的一个可删除顶点。

考虑 Weyl群 W_R 在 K_R的顶点集 V_R 上的典范作用。已知 K_R恰有 n 个顶点轨道 V_1, ..., V_n，其中 n 是 W_R的单根数。

定理 3.1. 对于 K_R的子复形 L，由下述算法得到的单纯复形与 L具有相同的同调群。

算法

1: $K \leftarrow L$
2: </style>对于 $i = 1$, ... , n **do**
3: $W \leftarrow \emptyset$
4: 对每个 $v \in V_i$ 执行
5: 如果 v 可从 K 中移除，则
6: $W \leftarrow W \cup \{v\}$
7: 结束条件判断
8: 结束循环
9: $K \leftarrow K - W := \{\sigma - W \mid \sigma \in K\}$
10: 结束循环
11: 返回 K

证明。根据 [7], 中的命题 8.29，对于 K_R的每个面 $\mathcal{C}$， K_R 的每个顶点轨道恰好包含 $\mathcal{C}$的一个顶点。也就是说，对于任意 v，$w \in V_i$、v 和 w 均不相邻。因此，对于 K_R的任意子复形 K 以及 v，v不包含于 Lk_K（w）。

注意，对于 K的可删除顶点 v和 w，若 w不在 K中 v的链接内，则 w在 $K-v$中仍然可删除；但一般而言，无法保证 w在 $K-v$中可删除。因此，我们可以一次性从 K 中移除 V_i 内 K 的所有可删除顶点，而不改变它们的同调群。我们对每个顶点轨道归纳地执行此过程，得到 K；显然，H_*（K）与≅ H_*（L）作为群同构。□

请注意，顶点轨道的顺序并不重要。在本文中，我们按轨道大小确定顺序，其中 $|V_i| < |V_{i+1}|$。令 K_S 为根据定理 3.1 中的$\widehat{}$算法，由 K_S 得到的复形。然后，按照表 3 中的方法得到的 K_S 的大小，远小于 K_S 的大小。

E_7	$S = S_1$	$S = S_2$	$S = S_3$
K_S	9,176	8,672	4,664
$\widehat{K}_S$	408	928	4,664

E_8	$S = S_4$	$S = S_5$
K_S	432,944	451,200
$\widehat{K}_S$	9,328	15,488

$\frown$Table 3. K_S 和 K_S的顶点数

以下命题给出了 K_S 和 K_S 的一些性质。

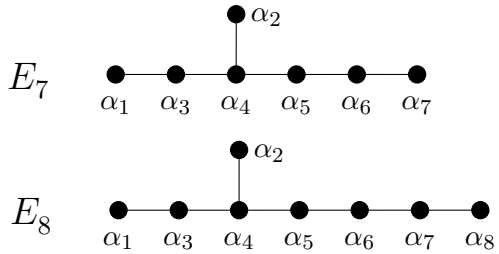
命题 3.2.

(1) K_{S_1} 和 K_{S_4} 有两个连通分支；其余 K_S 均连通。(2) 对于 $S = S_1$， K_S 的两个分支同构。(3) 所有 K_S 都是纯单纯复形。(4) K_{S_1} 的每个分支都与 K_{D_6} 的某个诱导子复形同构。(5) K_{S_4} 的每个分支都与 K_{S_3} 同构。

上述命题已通过计算机程序验证。用于验证的 Python 代码已发布于 https://github.com/Seonghyeon-Yu/E7-and-E8。

总之，根据命题 3.2，就我们的目的而言，只需计算 $S = S_2$、S_3和 S_5的 K_S 的贝蒂数，因为对于所有 $S \in Row(\Lambda_{D_6})$， K_{D_6} 的 K_S 的贝蒂数已在[3] 中计算完毕。

注记 3.3.



(1) 命题 3.2 (2) 中的每个同构都可以表示为一个单根；参见上面的 Dynkin图。对于类型 E_7，单根 α_3 表示 K_{S_1} 的各个分量之间的同构；对于类型 E_8，单根 α_2 表示 K_{S_4} 的各个分量之间的同构。

(2) 记 K_S 为 K_S 的一个连通分量。以下是 K_S 的 f-向量 $f(K_S)$:

$f(\bar{K}_{S_1})$ = (204, 1312, 1920)
$f(\bar{K}_{S_2})$ = (928, 6848, 15360, 11520)
$f(\bar{K}_{S_3})$ = (4664, 36288, 60480)
$f(\bar{K}_{S_4}) = (4664, 36288, 60480)$
$f(\bar{K}_{S_5})$ = (15488, 193536, 645120)

如所见，由于命题 3.2 (5)， f和 K_{S_3} 的向量与 K_{S_4} 的相同。根据 f向量，我们可以计算 K_S的欧拉示性数。

4. Computation of the Betti numbers

在本节中，我们将使用计算机程序 SageMath 9.3 [11], 来计算给定单纯复形的贝蒂数。根据命题 3.2，我们已经知道 K_{S_1}的贝蒂数。对于 S_2 和 S_3，我们可以在合理的时间内计算 K_S 的贝蒂数；参见表 4。

$\widetilde{\beta}_k(K_S)$	$S = S_1$	$S = S_2$	$S = S_3$
$k = 0$	1	0	0
$k = 1$	0	129	0
$k = 2$	1,622	0	28,855
$k = 3$	0	1,952	0
# 轨道	63	63	1

Table 4. S 在行空间(Λ_{E_7})中的 K_S 的非零约化贝蒂数

由表 4 可立即得出以下定理。

定理 4.1。 k阶贝蒂数 β_k 在 $X_{E_7}^{\mathbb{R}}$ 中如下：

$$\beta_k(X_{E_7}^{\mathbb{R}}) = \begin{cases} 1, & if\ k=0 \\ 63, & if\ k=1 \\ 8{,}127, & if\ k=2 \\ 131{,}041, & if\ k=3 \\ 122{,}976, & if\ k=4 \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

根据命题 3.2 和上述结果，我们现在得到了 K_{S_4}的贝蒂数。对于 K_{S_5}的任意顶点 v，通过计算可得 $H_0(Lk_{\widehat{K}_{S_5}}(v)) = H_1(Lk_{\widehat{K}_{S_5}}(v)) = 0$。因此，我们得到 Mayer-Vietoris序列

$$0 = \widetilde{H}_1(Lk_{\widehat{K}_{S_5}}(v)) \to \widetilde{H}_1(\widehat{K}_{S_5} - v) \oplus \widetilde{H}_1(St_{\widehat{K}_{S_5}}(v)) \to \widetilde{H}_1(\widehat{K}_{S_5}) \to \widetilde{H}_0(Lk_{\widehat{K}_{S_5}}(v)) = 0.$$

由于 $H_1(St_{\widehat{K}_{S_5}}(v))$ 是平凡的，因此 $H_1(K_{S_5} - v)$ 与 $H_1(K_{S_5})$ 同构。对于 K_{S_5}的最大顶点轨道 V，按照定理 3.1 的相同证明思路， $H_1(K_{S_5} - V)$ 与 $H_1(K_{S_5})$ 同构。注意， $K_{S_5} - V$的规模远小于 K_{S_5}。因此，可以从 $K_{S_5} - V$而非 K_{S_5}在合理时间内计算出 $\beta_1(K_{S_5})$。然而，不存在 K_{S_5}的顶点使得 $H_2(Lk_{\widehat{K}_{S_5}}(v)) = 0$。因此，对于 $k=2$，我们必须直接计算 $\beta_k(K_{S_5})$，这需要几天的运行时间。结果见表 5。

$\widetilde{\beta}_k\ (K_S)$	$S=S_1$	$S=S_2$
$k=0$	1	0
$k=1$	0	769
$k=2$	57,710	0
$k=3$	0	177,280
# 轨道	120	135

TABLE 5. K_S 的非零约化贝蒂数，适用于 S 行空间(Λ_{E_8})

表 5 推出以下定理。

定理 4.2. $X_{E_8}^{\mathbb{R}}$ 的第 k 个贝蒂数 β_k 如下：

$$\beta_k(X_{E_8}^{\mathbb{R}}) = \begin{cases} 1, & if\ k=0 \\ 120, & if\ k=1 \\ 103{,}815, & if\ k=2 \\ 6{,}925{,}200, & if\ k=3 \\ 23{,}932{,}800, & if\ k=4 \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

拓扑空间 X 的欧拉示性数 $\chi(X)$ 等于 X的贝蒂数 $\beta_k(X)$的交错和。我们可以将这一事实用作检验结果可信度的依据。

注 4.3. 众所周知，欧拉示性数 $\chi(X_{E_7}^{\mathbb{R}})$ 和 $\chi(X_{E_8}^{\mathbb{R}})$ 分别为 0 和 17,111,296。显然，基于我们的结果得到的贝蒂数交错和与 $\chi(X_{E_7}^{\mathbb{R}})$ 和 $\chi(X_{E_8}^{\mathbb{R}})$ 相符。

REFERENCES

[1] 安德斯 比约纳。考克斯特复形和蒂茨建筑的一些组合与代数性质。 *Adv. in Math.*, 52(3):173–212, 1984。

[2] Soojin Cho、Suyoung Choi 和 Shizuo Kaji。有限群在实环面空间上的几何表示。*J. Korean Math. Soc.*，56(5):1265–1283，2019。[3] Suyoung Choi、Shizuo Kaji 和 Hanchul Park。与 C 和 D型魏尔室相关的实托里克簇的上同调群。 *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)*，62(3):861–874，2019。[4] Suyoung Choi、Boram Park 和 Seonjeong Park。伪图及其相关的实环面流形。

J. , ( ): *Math. Soc. Japan* 69 2 693 714, 2017 – 。[5] Suyoung Choi 和 Hanchul Park。关于实环面对象的上同调及其挠元。 *Forum Math.*，29 3 543 553, 2017 ( ): – 。[6] Michael W. Davis 和 Tadeusz Januszkiewicz。凸多胞体、考克斯特轨形与环面作用。 *Duke Math. J.* 62 2 417 451, 1991 , ( ): – 。[7] Brian Hall。 *Lie groups*， *Lie algebras*， *and representations*， *Graduate Texts in Mathematics* 第222卷。Springer，2015。[8] Anthony Henderson。A型实考克斯特环面簇的有理上同调。载于 *Configuration spaces*， *CRM Series*第14卷，第313–326页。Ed. Norm.，比萨，2012年。[9] Claudio Procesi。与魏尔室相关的环面簇。载于 *Mots*，Lang. Raison. Calc.，第153–161页。Herm`es，巴黎，1990年。[10] Neil JA Sloane。在线整数数列百科全书。http://oeis.org。[11] W. A. Stein 等。 *Sage Mathematics Software (Version 9.3)*。Sage开发团队，2023年。http://www.sagemath.org。[12] Alexander I. Suciu 和 Alvise Trevisan。实托里克簇与广义 Davis-Januszkiewicz 空间的阿贝尔覆盖。2012年。

Department of mathematics， Ajou University，206， World cup-ro， Yeongtong-gu， Suwon 16499， Republic of Korea*Email address*: schoi@ajou.ac.krDepartment of mathematics， Ajou University，206， World cup-ro， Yeongtong-gu， Suwon 16499， Republic of Korea *Email address*: younghan300@ajou.ac.krDepartment of mathematics， Ajou University，206， World cup-ro， Yeongtong-gu， Suwon 16499， Republic of Korea*Email address*: yoosh0319@ajou.ac.kr