arXiv:2304.07565v1 [math.OA] 15 Apr 2023

群-子群子因子再探

Masaki Izumi *京都大学
理学研究科，日本京都左京区
606-8502,
izumi@math.kyoto-u.ac.jp

谨以此文纪念 *Vaughan Jones*

摘要

对于所有 Frobenius 群以及一大类有限多重传递置换群，我们证明，相应的群-子群子因子完全由其主图刻画。该类包括所有满足 k-传递性的置换群，其中 $k = 2$，3，4；特别包括次数为 11 的 Mathieu 群 M_{11} 。

1 引言

经典的 Goldman 定理 [6] 用现代术语表述为：每个 II_1 型因子的指标 2 包含 $M \supset N$ 都由交叉积 $M = N \rtimes \mathbb{Z}_2$给出，其中$\mathbb{Z}_2$ 是二阶循环群。这是一个著名的故事：当 Vaughan Jones 为子因子 [20]引入其著名的指标概念时，这一事实正是激发他的动机之一。在指标 3 的情形中，有两种不同的情况：它们的主图要么是 Coxeter 图 D_4 ，要么是 A_5 （例如参见 [4], [7] ）。在 D_4情形中，子因子由交叉积 $M = N \rtimes \mathbb{Z}_3$给出。在 A_5 情形中，我们在 [11] 中证明，存在一个唯一子因子 $R \subset N$（在内共轭意义下），使得

$$M = R \rtimes \mathfrak{S}_3 \supset N = R \rtimes \mathfrak{S}_2$$

成立，其中 $\mathfrak{S}_n$ 表示次数为 n 的对称群。我们将这类结果称为*Goldman* 型定理，它仅凭 $M \supset N$ 的一个主图，就能唯一确定子因子 R 及其上的群作用。 [9],[8],和 [12], 中还得到了更多 Goldman 型定理，但这里我们应强调的是，直到最近我们证明了交错群 $\mathfrak{S}_n$ 的 Goldman 型定理（ n定理 A）之前，研究对象一直只有 Frobenius

*部分获得 JSPS KAKENHI 资助项目编号 JP20H01805 的支持

此前一直在研究群，直到我们最近为交错群证明了 Goldman 型定理 $\mathfrak{A}_5 > \mathfrak{A}_4$ ([19, 定理 A1])。

设 G 是一个有限群， H 是它的一个子群，且 α 是 G 在因子 R 上的外作用。则包含

$$M = R \rtimes_\alpha G \supset N = R \rtimes_\alpha H$$

称为 群-子群子因子。设 L 是 G 作用于 G/H 的置换表示的核，也就是 G 中包含于 H 的最大正规子群。那么，包含 $M \supset N$ 至多保留 $G/L > H/L$ 的信息。因此，每当讨论群-子群子因子时，我们总是假设 L 是平凡的；更自然地说，我们将 G 视为作用于一个有限集上的传递置换群，并将 H 视为点稳定子。Frobenius 群 G 是一个半直积 $K \rtimes H$，其中 H 在 $K \setminus \{e\}$ 上自由作用。本文为所有 Frobenius 群以及一大类多重传递置换群证明了 Goldman 型定理。

人们或许会认为，关于群-子群子因子的每个问题，都可以归结为置换群论或表示论中的一个简单练习，但事实并非总是如此。事实上，Kodiyalam-Sunder [23] 指出，两对群 $\mathfrak{S}_4 > \mathbb{Z}_4$ 和 $\mathfrak{S}_4 > \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 所给出的群-子群子因子彼此同构，而这无法通过置换群论或表示论来理解。在 [14], 中，我们用融合范畴和群上同调完整刻画了来自两个不同置换群的两个同构群-子群子因子。要理解这类现象，必须将群的表示范畴视为抽象融合范畴；通常的表示论并不足以胜任。

十多年前，我与 Vaughan 讨论上述结果 [14] 时，他问我 Kodiyalam-Sunder 型现象是否会出现在本原置换群中；换句话说，当 H 是 G 中的极大子群时，是否会出现这种现象。 [14] 的定理 2.3 表明答案是“否”。我把这个答案告诉他时，不知为何，他看起来很满意。我猜 Vaughan 认为，要在群-子群子因子中得到合理的结果，就应当假设置换群 G 是本原的。他很可能是对的，因为 G 的本原性等价于相应的群-子群子因子没有非平凡中间子因子，而众所周知，这类子因子具有很强的刚性。这个假设还排除了下面这个令人费解的例子：尽管 $\mathfrak{D}_8 = \mathbb{Z}_4 \rtimes_{-1} \mathbb{Z}_2 > \mathbb{Z}_2$ 对应的群-子群子因子的主图是 Coxeter 图 $D_6^{(1)}$ ，但还有另外 3 个子因子具有相同的主图，它们却不是群-子群子因子（[16,定理 3.4]）。这意味着 Goldman 型定理对于 $\mathfrak{D}_8 > \mathbb{Z}_2$永远不成立。注意， $\mathbb{Z}_2$ 不是 $\mathfrak{D}_8$的极大子群，因此 $\mathfrak{D}_8$在 $\mathfrak{D}_8/\mathbb{Z}_2$上的作用不是本原的。

本原置换群的典型例子是多重传递置换群，而本文主要研究关于它们的 Goldman 型定理。

我们在此简要回顾与之相关的基本定义。设 G 是有限集 X 上的置换群。对于 $k \in \mathbb{N}$，我们将由 X 中互不相同的元素组成的所有有序元组（a_1， a_2，……， a_k）记为 $X^{[k]}$。群 G 通过 $g \cdot (a_1, a_2, \ldots\ldots, a_k) = (ga_1, ga_2, \ldots\ldots, ga_k)$ 作用于 $X^{[k]}$，我们始终考虑这一作用。对于 $x \in X$，我们将 x 在 G 中的稳定子记为 G_x；对于（x_1， x_2，……， x_k） $\in X^{[k]}$，我们记

$$G_{x_1,x_2,\ldots,x_k} = \bigcap_{i=1}^{k} G_{x_i}.$$

我们称 G 为 k-传递的，如果 G 在 $X^{[k]}$ 上的作用是传递的。这等价于 $G_{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{k-1}}$ 在 $X \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$ 上的作用是传递的这一条件。我们称 G 为正则的，如果 G 是自由且传递的。对于正则置换群，Goldman 型定理不过是交叉积的刻画（见 [26],[24]）。

正如我们将在第2.5小节中详细说明的，我们证明 $G > G_{x_1}$ 的 Goldman 型定理的策略，是通过归纳论证将其归约为 $G_{x_1} > G_{x_1,\ x_2}$ 的情形。假设 G 是 k-传递的，但不是 $k+1$-传递的。那么归纳的第一步是证明 $G_{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{k-1}} > G_{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k}$ 的 Goldman 型定理；为确保这一点，我们需要对 $X \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$ 上的 $G_{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{k-1}}$ 作用作出恰当假设。因此，本文将讨论以下两种情形：

(i) $G_{x_1,x_2,\ldots,x_{k-1}}$ 是正则的，

(ii) $G_{x_1,x_2,\ldots,x_{k-1}}$ 是一个本原弗罗贝尼乌斯群。

满足 (i) 的置换群称为严格 k-传递群，其完整分类已为人所知。除对称群和交错群外，以下列表囊括了所有这类群（见 [10, 第十二章]）。

(1) 我们用 $\mathbb{F}_q$ 表示含有 q 个元素的有限域。每个严格二重传递群要么是 $\mathbb{F}_q$上的一类变换群，其变换形式为 $x \mapsto ax^\sigma + b$，其中$a \in \mathbb{F}_q^\times$、 $b \in \mathbb{F}_q$，且 $\theta \in \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q)$；要么是 7 个例外群之一。它们全都是 Frobenius 群。(2) 锐 3-传递置换群恰有 2 个无限族：$L(q) = PGL_2(q)$作用在有限域 $\mathbb{F}_q$上的射影几何 $PG_1(q) = (\mathbb{F}_q^2 \setminus \{0\})/\mathbb{F}_q^\times$，以及它的变体 $M(q)$，后者作用在 $PG_1(q)$上，并带有一个 $\mathbb{F}_q$ 的对合，其中 q 是奇素数的偶次幂。当 q 为奇数时，这两个群都包含 $PSL_2(q)$作为指数为 2 的子群。(3) 次数为 11 的 Mathieu 群 M_{11} 是一个尖锐 4-传递群，而次数为 12 的 Mathieu 群 M_{12} 是一个尖锐 5-传递置换群。

猜想 1.1。 对于每个锐 k 传递置换群，*Goldman* 型定理都成立。

在第3节中，我们证明了所有 Frobenius 群的 Goldman 型定理，并将猜想验证为 $k = 2$ 的一个特例（定理 3.1）。我们还对相关融合范畴进行了分类，推广了 Etingof-Gelaki-Ostrik 的结果 [3, 推论 7.4]（定理 3.5）。我们在第 4 节中验证了 $k = 3$ 的猜想（定理 4.1），并在第6节中验证了 $k = 4$ 的猜想（定理 6.1、6.2、6.4）。当 q 为奇数时， $PSL_2(q)$ 在 $PG_1(q)$ 上的作用是二重传递的，并且满足上述条件 (ii)。我们将在第5节中证明 $PSL_2(q)$ 作用于 $PG_1(q)$ 时的 Goldman 型定理（定理 5.1）。

满足某些条件的 Frobenius 群的二重传递扩张被称为 Zassen- haus 群（精确定义见 [10, 第 XI 章] ），这类群恰好有 4 个无限族： $L(q)$、 $M(q)$、如上所述的 $PSL_2(q)$, 以及 Suzuki 群$Sz(2^{2n+1})$, 其次数为 2^{4n+2} ，适用于 $n \geq 1$。人们可能希望 Goldman 型定理对 Suzuki 群也成立。然而，利用我们目前的技术很难证明这一点，因为 Suzuki 群的点稳定子是非本原 Frobenius 群，而 Frobenius 核是非交换的。

2 预备知识

2.1 Frobenius 群

有限集 X 上的传递置换群 G 称为 Frobenius 群，如果它不是正则的，并且每个 $g \in G \setminus \{e\}$ 至多有一个不动点。设 $H = G_{x_1}$为一个点稳定子。则 G 为 Frobenius 群等价于 H-作用在 $X \setminus \{x_1\}$ 上是自由的，并进一步等价于对所有 $g \in G \setminus H$均有$H \cap gHg^{-1} = \{e\}$ 。

对于 Frobenius 群 G,

$$K = G \setminus \bigcup_{x \in X} G_x$$

G 是一个正规子群，称为 Frobenius 核，而 G 是一个半直积 $K \rtimes H$ （参见 [27, 8.5.5]）。点稳定子 H 称为 Frobenius 补。现在，集合 X 可视为 K，而 H 在 $X \setminus \{x_1\}$ 上的作用可视为其在 $K \setminus \{e\}$ 上的作用。已知 K 是幂零的（Thompson），且 H 具有周期上同调（Burnside），其含义是：当 p 为奇数时， H 的 Sylow p 子群是循环群；当 $p = 2$ 为 [27, 10.5.6] 时，它们则是循环群或广义四元数群。我们归纳出以下之后将要用到的 Frobenius 群性质。

回忆一下，传递置换群是本原的，当且仅当其点稳定子在 G 中是极大的。

引理 2.1。 设 G 是一个 *Frobenius* 群，其核为 K ，补为 H。则有以下结论：

(1) G 是本原的，当且仅当 K 是一个初等阿贝尔 p群 $\mathbb{Z}_p^l$ ，其阶为素数p，且 K不存在非平凡的 H不变子群。

(2) *Schur* 乘子 $H^2(H, \mathbb{T})$ 是平凡的。

(3) H 的每个阿贝尔子群都是循环群。

证明。(1) 注意，G 是本原的，当且仅当不存在 K的非平凡 H-不变子群。假设 G 是本原的。由于 K 是幂零的，其中心 $Z(K)$不等于 $\{e\}$，且为 H-不变，因此 $K = Z(K)$。设 p 是一个素数，使得 K 的p-分量 K_p 不为 $\{e\}$。由于 K_p 是 H-不变的，我们得到 $K = K_p$。对 $L = \{x \in K;\ x^p = 0\}$ 应用同样的论证可知，K 是一个初等阿贝尔p-群。

(2) 由于每个循环群和广义四元数群的 Schur 乘子都是平凡的（例如参见 [22, 命题 2.1.1、例 2.4.8]），结论由 [1, 定理 10.3] 得出。

(3) 结论由以下事实得出：广义四元数群的每个阿贝尔子群都是循环群。

□

2.2 锐传递置换群

若有限集 X 上的传递置换群 G 的 G 作用在 $X^{[k]}$ 上是正则的，则称其为锐 k 传递置换群。若 G 的次数为 n，则锐 k 置换群的阶为 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$。

对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$。由于 $X_n^{[n-1]}$ 和 $X_n^{[n]}$ 可以自然地对应起来，$\mathfrak{S}_n$ 在 X_n 上的定义作用既是锐 $n-1$ 传递的，也是 n 传递的。由于这一事实可能引起混淆，本文将 $\mathfrak{S}_n$ 视为锐 $n-1$ 传递群。$\mathfrak{A}_n$ 在 X_n 上的自然作用是锐 $n-2$ 传递的。

已知每个锐 2-传递置换群 G 都是一个 Frobenius 群，因此具有如下形式：$G = \mathbb{Z}_p^k \rtimes H$，其中 p是一个素数，且 Frobenius 补 H在 $\mathbb{Z}_p^k \setminus \{0\}$ 上正则作用。令 $q = p^k$，并令 $T(q) = \mathbb{F}_q^\times \rtimes \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q)$，它在 $\mathbb{F}_q$上作为一个与 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^k$同构的加法群作用。于是 Zassenhaus 定理指出，H 要么可视为 $T(q)$的一个子群，要么属于以下例外情形：$SL_2(3)$ 在 $\mathbb{Z}_5^2$上作用，$GL_2(3)$ 在 $\mathbb{Z}_7^2$上作用，$SL_2(3) \times \mathbb{Z}_5$ 在 $\mathbb{Z}_{11}^2$上作用，$SL_2(5)$ 在 $\mathbb{Z}_{11}^2$上作用，$GL_2(3) \times \mathbb{Z}_{11}$ 在 $\mathbb{Z}_{23}^2$上作用，$SL_2(5) \times \mathbb{Z}_7$ 在 $\mathbb{Z}_{29}^2$上作用，以及 $SL_2(5) \times \mathbb{Z}_{29}$在 $\mathbb{Z}_{59}^2$上作用。关于这一事实，读者可参阅第十二章第 p]节。

尖锐 2-传递置换群有两个重要的族 $H(q)$ 和 $S(q)$。如果 $G = \mathbb{Z}_p^k \rtimes H$ 是一个具有阿贝尔弗罗贝尼乌斯补的尖锐 2-传递群，那么它必定具有形式 $G = \mathbb{F}_q \rtimes \mathbb{F}_q^\times$，记作 $H(q)$。现在假设 p 是一个奇素数，并且 $q = p^{2l}$。那么域 $\mathbb{F}_q$ 有一个对合 $x^\sigma = x^{p^l}$。群 $S(q)$ 作为一个集合有一个 Frobenius 补 $\mathbb{F}_q^\times$，但它在$\mathbb{F}_q$ 上的作用如下：

$$a \cdot x = \begin{cases} ax, & \text{if } a \text{ is a square in } \mathbb{F}_q^\times, \\ ax^\sigma, & \text{if } a \text{ is not a square in } \mathbb{F}_q^\times. \end{cases}$$

例如，群 $S(3^2)$ 同构于 $\mathbb{Z}_3^2 \rtimes Q_8$。我们有小阶数巧合 $\mathfrak{S}_3 = H(3)$ 和 $\mathfrak{A}_4 = H(2^2)$。

锐 3-传递置换群 $L(q)$ 和 $M(q)$ 恰有两个族，它们分别是 $H(q)$ 和 $S(q)$ 的传递扩张（参见 [10, 第 XI 章第 2] 节）。为了描述它们的作用，将射影几何 $PG_1(q)$ 视为 $\mathbb{F}_q \sqcup \{\infty\}$ 会更方便。 $L(q) = PGL_2(q)$ 的三重传递作用如下：

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] \cdot x = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

群 $M(q)$ 作为集合是 $PGL_2(q)$，但它在 $PG_1(q)$ 上的作用由下式给出

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] \cdot x = \begin{cases} \frac{ax+b}{cx+d}, & \text{if } ad-bc \text{ is a square in } \mathbb{F}_q^\times, \\ \frac{ax^\sigma+b}{cx^\sigma+d}, & \text{if } ad-bc \text{ is not a square in } \mathbb{F}_q^\times. \end{cases}$$

我们有一些低阶重合： $\mathfrak{S}_4 = L(3)$ 和 $\mathfrak{A}_5 = L(2^2)$。

当 q 为奇数时， $L(q)$ 在 $PG_1(q)$ 上的作用限制到 $PSL_2(q)$ 后是二重传递的，其点稳定子同构于 $\mathbb{Z}_p^k \rtimes \mathbb{Z}_{(p^k-1)/2}$。

除对称群和交错群外，Mathieu 群 M_{11} 和 M_{12} 是仅有的尖锐四重和五重传递置换群，其次数分别为 11 和 12（见第十二章第 3] 节）。为了证明次数为 11 的置换群 M_{11} 的一个 Goldman 型定理，我们实际上并不需要构造它。相反，我们只需要知道，该作用是次数为 3^2 的集合上的尖锐 3-传递置换群 $M(3^2)$ 的一个传递扩张（见第十二章定理 1.3]）。

2.3 群-子群子因子

对于因子的有限指数包含 $M \supset N$，我们需要区分它的两个主图及其符号。因此，我们将 $M \supset N$的主图定义为由该包含产生的 N-N双模与 M-N双模之间的诱导-约化图，并记为 $\mathcal{G}_{M\supset N}$；而将对偶主图定义为 M-M双模与 M-N双模之间的诱导-约化图，并记为 $\mathcal{G}^d_{M\supset N}$。

设 G 是有限集 X 上的传递置换群，且 $H = G_{x_1}$ 满足 $x_1 \in X$。令

$$M = R \rtimes_\alpha G \supset N = R \rtimes_\alpha H,$$

是因子 R 上具有外部 G-作用的群-子群子因子。关于由群-子群子因子 $M \supset N$ 产生的 M-M、 M-N、 N-M 和 N-N 双模的张量范畴结构，请读者参阅 [25]。 M-M 双模范畴等价于 G 的表示范畴 Rep(G)，我们用 $\widehat{\ }$符号 G 来参数化不可约 M-M 双模的等价类。不可约 M-N 双模的等价类集合由 H参数化，而 $\mathcal{G}^d_{G>H}$ 是 $\widehat{G}$ 与 $\widehat{H}$之间的诱导-约化图。因此，我们将对偶主图 $\mathcal{G}^d_{M\supset N}$记为 $\mathcal{G}^G_H$。

N-N 双模范畴的描述要复杂得多。我们从 $X\backslash\{x_1\}$ 中的每个 G_{x_1}-轨道选取一个点，并将它们编号为 x_2，x_3，……，x_k。于是，由$M \supset N$ 产生的不可约 N-N 双模等价类集合由以下不交并参数化

$$\widehat{G_{x_1}} \sqcup \widehat{G_{x_1,x_2}} \sqcup \cdots \sqcup \widehat{G_{x_1,x_k}},$$

$\widehat{\ }$而图 $\mathcal{G}_{M\supset N}$ 是 G_{x_1} 与 $\frown$ 之间的诱导-约化图的并集$G_{x_1,\ x_i}$ 在 $1 \le i \le k$ 上，约定为 $G_{x_1,\ x_1} = G_{x_1}$。对应于 $\pi \in G_{x_1,\ x_2}$ 的不可约$\widehat{\ }$对象的维数为$|G_{x_1}/G_{x_1,\ x_2}|\dim\pi$。根据具体情况，我们将主图 $\mathcal{G}_{M\supset N}$ 记作 $\mathcal{G}_{(G,X)}$ 或 $\mathcal{G}_{G>G_{x_1}}$。

$N \supset R$ 的 N-N 双模范畴等价于 Rep(H)，我们将其中不可约对象的等价类记为 $\{[\beta_\pi]\}_{\pi\in\widehat{H}}$。那么$\widehat{\ }$集合 $\{[\beta_\pi]\}_{\pi\in\widehat{H}}$ 实际上与 $\mathcal{G}_{G>H}$ 中的 H 一致，二者都是 N-N 双模的等价类（这一事实通常不会特别强调，但可以从 [25] 看出）。令 $\iota = {}_MM_N$ 为基本双模。那么，由 $M \supset N$ 得到的不可约M-N 双模的等价类集合为 $\{[\iota \otimes_N \beta_\pi]\}_{\pi\in\widehat{H}}$。

若 G 是二重传递的，则有 $k = 2$，而图 $\mathcal{G}_{(G,X)}$ 可由$\mathcal{G}_{G_{x_1,\ x_2}}^{G_{x_1}}$ 通过向 $\mathcal{G}_{G_{x_1'\ x_2}}^{G_{x_1,\ x_2}}$的每个偶顶点添加一条长度为一的边得到。更一般地，对于二分图 $\mathcal{G}$，我们用 $\mathcal{G}$ 表示通过向 $\mathcal{G}$的每个偶顶点添加一条长度为$\frown$一的边所得到的图。于是有 $\mathcal{G}_{(G,X)} = \mathcal{G}_{G_{x_1'\ x_2}}^{G_{x_1,\ x_2}}$。

设 $\mathcal{G}_n$ 是一个没有重边且有 n 个偶顶点的深度 2 图。假设 $\mathcal{G}_n$ 是因子有限指数包含 $M \supset N$ 的主图 $\mathcal{G}_{M\supset N}$。那么，交叉积的刻画表明 $M = N \rtimes_\alpha G$，并且G作用在内共轭意义下唯一。因此，对于正则置换群，Goldman 型定理以较弱的形式成立，因为图 $\mathcal{G}_n$ 只能确定 G的阶 n；除非 n 是素数，否则无法确定其群结构。即使指定了 $M \supset N$的对偶主图，也无法区分阶为 8 的二面体群 $\mathfrak{D}_8$ 和四元数群 Q_8。正如这个例子所表明的，我们应当明确究竟所说的 Goldman 型定理是什么意思。

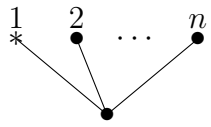

图1： $\mathcal{G}_n$

定义2.2。令 $\mathcal{G}$ 为一个二分图。

(1) 如果满足以下条件，我们就称 $\mathcal{G}$（或 (G, X)，若 $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{(G,X)}$）具有强 Goldman 型定理：在有限集上存在唯一的传递置换群 G（在置换共轭意义下），使得每当有限指数子因子 $\mathcal{G}$ 的主图

为 $\mathcal{G}$ 时，存在唯一的 N 的子因子R（在 N 中内共轭意义下），满足 $M \cap R' = \mathbb{C}$ 并且

$$M = R \rtimes_\alpha G \supset N = R \rtimes_\alpha H,$$

其中， H 是 G的点稳定子。

（2）如果满足以下条件，我们称关于 $\mathcal{G}$ 的弱 Goldman 型定理成立：每当有限指数子因子 $M \supset N$ 的主图为 $\mathcal{G}$时，都存在 N的唯一子因子 R（在 N中的内共轭意义下），满足 $M \cap R' = \mathbb{C}$以及

$$M = R \rtimes_\alpha G \supset N = R \rtimes_\alpha H,$$

对于某个作用在带有 H的点稳定子的有限集上的传递置换群 G 。

注意，由于 R 在 M中的不可约性，作用 α 自动是唯一的（在内共轭意义下）。

我们将证明所有 Frobenius 群（包括锐 2-传递置换群）的弱 Goldman 型定理，以及锐 3-及 4-传递置换群和作用在 $PG_1(q)$ 上的 $PSL_2(q)$ 的强 Goldman 型定理。

2.4 中间子因子

下文中，我们对各子因子采用扇区记号（例如参见 [13, 第 2] 节或 [15,第 2.1] 小节），不过所有结果都针对一般因子陈述。陈述中的包含映射 $\iota : N \hookrightarrow M$ 应在 II $_1$ 情形下理解为基本双模$\iota = {}_M M_N$。在证明中，我们始终假设所涉及的因子要么是 II $_\infty$，要么是 III 型，而不另行说明。在 II $_1$ 情形下，这一点可以通过直接处理双模而非扇区，或将$M \supset N$ 替换为 $M \otimes B(\ell^2) \supset N \otimes B(\ell^2)$ 来证明。例如，假设某个陈述要求存在具有某种性质的子因子 $P \subset N$。在后一种情形下，找到适当的子因子 $P \subset N \otimes B(\ell^2)$ 后，我们可以转到角 $(1 \otimes e)P(1 \otimes e) \subset N \otimes \mathbb{C}e$，从而恢复原陈述，其中 $e \in B(\ell^2)$ 是一个极小投影（我们总可以在N中通过内共轭假设 $1 \otimes e \in P$）。

我们在下一个定理中汇集了关于中间子因子的有用结论，这些子因子取自 [18,推论 3.10]。2.3

定理 2.3。 设 $M \supset N$ 是有限指数因子的不可约包含，并设 ι: $N \hookrightarrow M$ 是包含映射。设

$$[\iota\bar{\iota}] = \bigoplus_{\xi \in \Lambda} n_\xi [\xi]$$

为不可约分解。

(1) 设 P 是 M 与 N 之间的一个中间子因子，并设 $\kappa:\ P \hookrightarrow M$ 为包含映射。如果 ξ_1、$\xi_2 \in \Lambda$ 包含于 $\kappa\bar{\kappa}$，且 $\xi_3 \in \Lambda$ 包含于 $\xi_1\xi_2$，那么 ξ_3 包含于 $\kappa\bar{\kappa}$。

(2) 假设 P 和 Q 是 M 与 N之间的中间子因子，且包含映射 $\kappa:\ P \hookrightarrow M$ 和 $\kappa_1:\ P_1 \hookrightarrow M$ 满足 $[\kappa\bar{\kappa}] = [\kappa_1\bar{\kappa_1}]$。若对每个$\xi \in \Lambda$，$\xi$ 在 $\kappa\bar{\kappa}$ 中的重数不是 0 就是 n_ξ，则 $P = Q$。

(3) 假设 Λ_1 是 Λ 的自共轭子集，并且对于某些 ξ_1、$\xi_2 \in \Lambda_1$，只要 $\xi_3 \in \Lambda$ 包含于 $\xi_1\xi_2$，就有 $\xi_3 \in \Lambda_1$。那么，在 M 与 N 之间存在唯一的中间子因子 P，使得包含映射κ: $P \hookrightarrow M$ 满足

$$[\kappa\bar{\kappa}] = \bigoplus_{\xi\in\Lambda_1} n_\xi[\xi].$$

2.5 证明策略

设 Γ 是作用在有限集 X上的二重传递置换群，且$x_1, x_2 \in X$是不同的点。我们进一步假设，Γ_{x_1,x_2}在 $X\backslash\{x_1, x_2\}$上的作用没有长度为 1 的轨道。我们证明关于 $\Gamma > \Gamma_{x_1}$ 的 Goldman 型定理的基本策略，是将其归约为关于$\Gamma_{x_1} > \Gamma_{x_1,x_2}$的定理。为了解释这一点，我们首先讨论前者的群-子群子因子与后者的群-子群子因子之间的关系。为简便起见，记 $G = \Gamma_{x_1}$ 和 $H = \Gamma_{x_1,x_2}$。

假设给定因子 R 上 Γ 的一个外作用 α。令 $N = R\rtimes_\alpha H$、$M = R \rtimes_\alpha G$ 和 $L = R \rtimes_\alpha \Gamma$。我们将包含映射记为 $\iota_1:\ M \hookrightarrow L$、$\iota_2:\ N \hookrightarrow M$ 和 $\iota_3:\ R \hookrightarrow N$。由于 Γ 在 X 上的作用是双重传递的，存在一个交换 x_1 与 x_2 的 $g_0 \in \Gamma$。这样的 g_0 规范化 H，因此我们得到一个将 α_{g_0} 延拓的 $\theta \in \mathrm{Aut}(N)$，即 $\theta\iota_3 = \iota_3\alpha_{g_0}$。令

$$[\iota_3\bar{\iota_3}] = \bigoplus_{\pi\in\hat{H}} d(\pi)[\beta_\pi]$$

这就是不可约分解。如上所述，自同构 θ 并不唯一，而且总可以将 θ 替换为 $\theta\beta_\pi$，并带有 $d(\pi) = 1$ 这一自由度。

由于

$$[\iota_1\iota_2\theta\iota_3] = [\iota_1\iota_2\iota_3\alpha_{g_0}] = [\iota_1\iota_2\iota_3],$$

我们有

$$1 = \dim(\iota_1\iota_2\theta\iota_3, \iota_1\iota_2\iota_3) = (\iota_2\theta\iota_3\bar{\iota_3}\bar{\iota_2}, \bar{\iota_1}\iota_1) = \sum_{\pi\in\widehat{H}} d(\pi)\dim(\iota_2\theta\beta_\pi\bar{\iota_2}, \bar{\iota_1}\iota_1).$$

我们断言，对所有 π，$(\iota_2\theta\beta_\pi\bar{\iota_2},\ \mathrm{id}) = 0$。事实上，若不然，则有 π，其中 $d(\beta\pi) = 1$ 满足 $[\iota_2\theta\beta_\pi] = [\iota_2]$，这由弗罗贝尼乌斯互反律可知。然而，这意味着 $\theta\beta_\pi$ 包含于 $\iota_2\iota_2$ 中。由于 $d(\theta\beta_\pi) = 1$，这与 H 在 $G/H \setminus H$ 上的作用没有长度为 1 的轨道这一假设矛盾。

由于 Γ 是双重传递的，存在不可约的 τ，使得 $d(\tau) = |X|-1$ 满足$[\bar{\iota_1}\iota_1] = [\mathrm{id}] \oplus [\tau]$。另一方面，我们有 $d(\iota_2\theta\beta_\pi\bar{\iota_2}) = (|X|-1)d(\pi)$，这^表明存在 $\pi \in H$，使得 $d(\pi) = 1$ 满足 $[\tau] = [\iota_2\theta\beta_\pi\bar{\iota_2}]$。这意味着，如有必要，可将 θ 替换为 $\theta\beta_\pi$，因此我们总可以假设

$$[\bar{\iota_1}\iota_1] = [\mathrm{id}] \oplus [\iota_2\theta\bar{\iota_2}].$$

现在先不考虑 R、 α、 N，并假设我们只给定了一个包含 $L \supset M$，其中 $\mathcal{G}_{L\supset M} = \mathcal{G}_{\Gamma>G}$。我们将包含映射记为 $\iota_1 : M \hookrightarrow L$。假设已知关于 $G > H$ 的 Goldman 型定理。我们的任务是从包含 $L \supset M$ 中恢复 R 和 α。我们的策略分为以下几个步骤:

(1) 在由 $\bar{\iota_1}\iota_1$ 生成的融合范畴 $\mathcal{C}$ 中，找出一个融合子范畴 $\mathcal{C}_1$，使其看起来像是 G 的表示范畴。.

(2) 证明 $\mathcal{C}_1$ 中与诱导表示 $\mathrm{Ind}_H^G 1$ 对应的对象具有唯一的 Q-系统，满足以下条件：若 $N \subset M$ 是与 Q-系统对应的子因子，且 $\iota_2 : N \hookrightarrow M$ 是包含映射，则存在满足下式的 $\theta \in \mathrm{Aut}(N)$

$$[\bar{\iota_1}\iota_1] = [\mathrm{id}] \oplus [\iota_2\theta\bar{\iota_2}].$$

(3) 证明 $\mathcal{G}_{M\supset N} = \mathcal{G}_{G>H}$。

(4) 对 $G > H$ 应用 Goldman 型定理，得到一个子因子 R，以及有限群 G 在 $R \subset N$ 上的外作用 γ，满足 $M = R\rtimes_\gamma G$ 和 $N = R\rtimes_\gamma H$。证明 R 在 L 中不可约。令 $\iota_3 : R \hookrightarrow N$ 为包含映射。

(5) 证明 $L \supset R$ 是深度 2 包含。

(6) 证明存在满足 $[\theta\iota_3] = [\iota_3\theta_1]$ 的 $\theta_1 \in \mathrm{Aut}(R)$。

引理 2.4。 假设上述 *(1)-(6)* 均已完成。那么存在一个有限群 Γ_0，其中 G 是指标为 $|X|$ 的子群；并且存在群 Γ_0 在 R 上的外作用 α，使得 α 是 γ 和 $L = R \rtimes_\alpha \Gamma_0$ 的扩张。此外， Γ_0 在 Γ_0/G 上的作用是 G 作用在 $X \setminus \{x_0\}$ 上的双重传递扩张。

证明。由（2）可知,

$$[\bar{\iota_3}\bar{\iota_2}\bar{\iota_1}\iota_1\iota_2\iota_3] = [\bar{\iota_3}\bar{\iota_2}(\mathrm{id} \oplus \iota_2\theta\bar{\iota_2})\iota_2\iota_3] = \bigoplus_{g\in G}[\gamma_g] \oplus [\bar{\iota_3}\bar{\iota_2}\iota_2\theta\bar{\iota_2}\iota_2\iota_3],$$

其中包含

$$\bigoplus_{g\in G}[\gamma_g] \oplus [\bar{\iota_3}\theta\iota_3] = \bigoplus_{g\in G}[\gamma_g] \oplus [\bar{\iota_3}\iota_3\theta_1] = \bigoplus_{g\in G}[\gamma_g] \oplus \bigoplus_{h\in H}[\gamma_h\theta_1].$$

由 (6) 可知。令 Γ_0 为包含在 $[\bar{\iota_3}\bar{\iota_2}\bar{\iota_1}\iota_1\iota_2\iota_3]$ 中的一维扇区群。于是 Γ_0 严格大于 $[\gamma_G]$, 且 $R \rtimes \Gamma_0$ 是一个严格大于 M 的 L 子因子。根据定理 2.3, L 与 M 之间不存在非平凡的中间子因子，因此我们得出 $L = R \rtimes \Gamma_0$。从图 $\mathcal{G}_{\Gamma>G}$ 的形状可以看出, Γ_0 在 Γ_0/G 上的作用是双重传递的。 □

为识别 Γ_0 与 Γ，我们将使用双重传递置换群的分类。

在本文所处理的具体例子中，(1) 和 (3) 纯粹是组合论论证，(2) 由定理 2.3 得出，(4) 是归纳假设，而 (5) 是对维数的简单计算。为处理 (6)，我们现在给出一些有用的判据。

引理 2.5。设 G 是有限集上的传递置换群，其点稳定子为 H；设 α 是 G 在因子 R 上的外作用。设 $M = R \rtimes_\alpha G \supset N = R \rtimes_\alpha H$。设 L 是一个包含 M 的因子，其中 M 是指标为 $|G/H| + 1$ 的不可约子因子。我们将包含映射记为 ι_1: $M \hookrightarrow L$、 ι_2: $N \hookrightarrow M$ 和 ι_3: $R \hookrightarrow N$。我们作如下两个假设:

(1) 包含 $L \supset R$ 是不可约的，且具有深度 2。

(2) 存在 $\theta \in \mathrm{Aut}(N)$ 满足 $[\iota_1\iota_1] = [\text{恒等对象}] \oplus [\iota_2\theta\bar{\iota_2}]$

于是我们有

$$\dim(\theta\bar{\iota_2}\iota_2\iota_3\bar{\iota_3}\theta^{-1}, \bar{\iota_2}\iota_2\iota_3\bar{\iota_3}) = |H|.$$

证明。由于 $[L : M] = (|G/H| + 1)|G|$, 深度 2 条件意味着

$$\begin{aligned}(|G/H| + 1)|G| &= \dim(\bar{\iota_3}\bar{\iota_2}\bar{\iota_1}\iota_1\iota_2\iota_3, \bar{\iota_3}\bar{\iota_2}\bar{\iota_1}\iota_1\iota_2\iota_3)\\ &= \dim(\bar{\iota_3}\bar{\iota_2}(\mathrm{id} \oplus \iota_2\theta\bar{\iota_2})\iota_2\iota_3, \bar{\iota_3}\bar{\iota_2}(\mathrm{id} \oplus \iota_2\theta\bar{\iota_2})\iota_2\iota_3)\\ &= \dim(\bigoplus_{g\in G} \alpha_g \oplus \bar{\iota_3}\bar{\iota_2}\iota_2\theta\bar{\iota_2}\iota_2\iota_3, \bigoplus_{g\in G} \alpha_g \oplus \bar{\iota_3}\bar{\iota_2}\iota_2\theta\bar{\iota_2}\iota_2\iota_3)\\ &= |G| + \dim(\bar{\iota_3}\bar{\iota_2}\iota_2\theta\bar{\iota_2}\iota_2\iota_3, \bar{\iota_3}\bar{\iota_2}\iota_2\theta\bar{\iota_2}\iota_2\iota_3),\end{aligned}$$

and

$$|G/H||G| = \dim(\bar{\iota_3}\bar{\iota_2}\iota_2\theta\bar{\iota_2}\iota_2\iota_3, \bar{\iota_3}\bar{\iota_2}\iota_2\theta\bar{\iota_2}\iota_2\iota_3) = \dim(\theta\bar{\iota_2}\iota_2\iota_3\bar{\iota_3}\bar{\iota_2}\iota_2\theta^{-1}, \bar{\iota_2}\iota_2\iota_3\bar{\iota_3}\bar{\iota_2}\iota_2),$$

根据弗罗贝尼乌斯互反律。因此，要证明该陈述，只需证明

$$[\bar{\iota_2}\iota_2\iota_3\bar{\iota_3}\bar{\iota_2}\iota_2] = |G/H|[\bar{\iota_2}\iota_2\iota_3\bar{\iota_3}].$$

事实上，注意到 $\iota_2\iota_3\bar{\iota_3}\bar{\iota_2}$ 是一个 M-M 扇区，对应于 G的正则表示，因此 $(\iota_2\iota_3\bar{\iota_3}\bar{\iota_2})\iota_2$ 是一个 M-N 扇区，对应于 G 在 H上的正则表示的限制表示，而这等价于 H 的正则表示的 $|G/H|$ 个副本。由于 $\iota_3\bar{\iota_3}$ 是一个 N-N 扇区，对应于 H的正则表示，我们得到

$$[(\iota_2\iota_3\bar{\iota_3}\bar{\iota_2})\iota_2] = |G/H|[\iota_2(\bar{\iota_3}\iota_3)],$$

从而完成证明。 □

在应用引理 2.5 的具体情形下，我们还可以证明

$$\dim(\theta\iota_3\bar{\iota_3}\theta^{-1}, \iota_3\bar{\iota_3}) = |H|,$$

从而得到 $[\theta\iota_3\bar{\iota_3}\theta^{-1}] = [\iota_3\bar{\iota_3}]$。

根据 [17], 中的定理 3.3 和引理 4.1，我们可以证明以下全局不变性判据。

引理 2.6。设 H 是一个有限群， α 是 H 在因子R上的一个外作用。设 $N = R \rtimes_\alpha H$，并令 $\iota\colon\ R \hookrightarrow N$ 为包含映射。我们假设不存在非平凡的阿贝尔正规子群 $K \triangleleft H$，使其具有一个在共轭作用下不变的非退化上同调类 $\omega \in H^2(\widehat{K}, \mathbb{T})$。若 $\theta \in \mathrm{Aut}(N)$满足 $[\theta\iota\bar{\iota}\theta^{-1}] = [\iota\bar{\iota}]$，则存在满足 $[\theta\iota] = [\iota\theta_1]$的 $\theta_1 \in \mathrm{Aut}(R)$。

即使引理 2.6 中的上同调假设不成立，我们仍有机会应用以下判据。对于因子 $N \supset R$ 的包含，我们用 Aut(N, R) 表示全局保持 R 的 N 自同构集合。

引理 2.7。设 $N \supset R$ 是有限指数因子的不可约包含，且 P 是 N 与 R 之间的中间子因子。我们将包含映射记为 $\iota\colon\ R \hookrightarrow N$ 和 $\kappa\colon\ P \hookrightarrow N$。令

$$[\iota\bar{\iota}] = \bigoplus_{\xi\in\Lambda} n_\xi[\xi]$$

为不可约分解。我们假设，对于每个 $\xi \in \Lambda$，ξ 在 $\kappa\bar{\kappa}$ 中的重数不是 0 就是 n_ξ。若 $\theta \in$ 自同构(N, R) 满足 $[\theta\kappa\bar{\kappa}\theta^{-1}] = [\kappa\bar{\kappa}]$，则 $\theta(P) = P$。

证明。令 $Q = \theta(P)$，令 $\varphi\colon\ P \to Q$ 为将 θ 限制到 P 后得到的映射，并将其视为从 P 到 Q 的同构；再令 $\kappa_1\colon\ Q \hookrightarrow N$ 为包含映射。根据定义，我们有 $\theta \circ \kappa = \kappa_1 \circ \varphi$。因此

$$[\kappa_1\bar{\kappa_1}] = [\kappa_1\varphi\bar{\varphi}\bar{\kappa_1}] = [\theta][\kappa\bar{\kappa}][\theta^{-1}] = [\kappa\bar{\kappa}],$$

而该陈述由定理 2.3 得出。 □

3 Frobenius 群的 Goldman 型定理

在本节中，我们为所有 Frobenius 群建立弱 Goldman 型定理，从而推广了 [12]中的结果。

对于一组自然数 $\mathbf{m} = (m_0, m_1, \ldots\ldots, m_l)$，其中 $m_0 = 1$ 且 $l \geq 1$，以及一个自然数 n，我们按如下方式定义一个二分图 $\mathcal{G}_{\mathbf{m},\ n}$。设 $I = \{0, 1, \ldots, l\}$，并令 J 为一个满足 $|J| = n$的指标集。偶顶点的集合为 $\{v_i^0\}_{i\in I} \sqcup \{v_j^2\}_{j\in J}$，奇顶点的集合为 $\{v_i^1\}_{i\in I}$。邻接矩阵 Δ 中$\mathcal{G}_{\mathbf{m},\ n}$ 唯一的非零项为

$$\Delta(v_i^0, v_i^1) = \Delta(v_i^1, v_i^0) = 1, \quad \forall i \in I,$$

$$\Delta(v_i^1, v_j^2) = \Delta(v_j^2, v_i^1) = m_i, \quad \forall i \in I,\ \forall j \in J.$$

顶点 v_0^0 被视为特殊顶点 $*$。

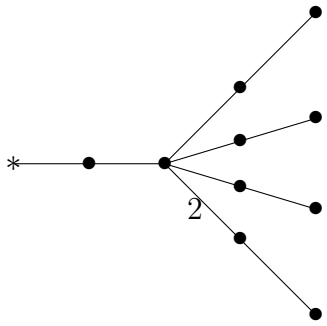

图2：$\mathcal{G}_{(1^4,2)\,1} = \mathcal{G}_{S(3^2)>Q_8}$

$_a$我们用记号 $k^a = k, \underbrace{k, \ldots, k}_{a}$ 来简记。采用这一约定， [12] 中考虑的图 $\mathcal{G}_{m,n}$为 $\mathcal{G}_{(1^m)\,n}$。带有数字 b 的边表示重数为 b 的重边。

Let

$$m := \|\mathbf{m}\|^2 = \sum_{i=0}^{l} m_i^2.$$

于是， Δ 的 Perron-Frobenius特征值为 $\sqrt{1+\overline{mn}_\circ}$ 归一化条件为 $d(v_0^0) = 1$ 的 Perron-Frobenius特征向量 d 为

$$d(v_i^0) = m_i, \quad d(v_i^1) = m_i\sqrt{1+mn}, \quad d(v_j^2) = m.$$

设 $G = K \rtimes H$ 是一个 Frobenius 群，其 Frobenius 核为 K，Frobenius 补为 H。那么我们有 $\mathcal{G}_{G>H} = \mathcal{G}_{\mathbf{m},n}$，其中 n 是 H在$K \setminus \{e\}$中的轨道数，而 $\mathbf{m}$ 是 H的不可约表示的秩。因此我们有 $|H| = m$ 和 $|K| = 1 + mn$。此外，若 K 是阿贝尔群，则图 $\mathcal{G}_H^G$ 也是$\mathcal{G}_{\mathbf{m},n}$。

反过来，我们可以证明以下定理。

定理 3.1. 设 $N \supset P$ 是因子的有限指数包含，且 $\mathcal{G}_{N\supset P} = \mathcal{G}_{\mathbf{m},n}$。那么存在唯一子因子 $R \subset P$（在内共轭意义下唯一），使得 $N \cap R' = \mathbb{C}$；并且存在一个 *Frobenius* 群 $G = K \rtimes H$，其 *Frobenius* 核为K，*Frobenius* 补为 H，满足 $|K| = 1 + mn$, $|H| = m$，其中元组$(m_0, m_1, \ldots, m_l)$ 是 H的不可约表示的维数，并且

$$N = R \rtimes G \supset P = R \rtimes H.$$

此外，

(1) 如果 $n=1$，那么 $1+m$ 是一个素数幂 p^k，其中有一个素数 p 和 $K=\mathbb{Z}_p^k$。G在 G/H 上的作用是严格二重传递的。对偶主图在这种情况下也为$\mathcal{G}_{\mathbf{m},\,1}$。

(2) 如果 $n=2$ 或 $n=3$，那么 $1+mn$ 是一个以素数 p为底的素数幂 p^k，且 G 是一个具有 $K=\mathbb{Z}_p^k$的本原弗罗贝尼乌斯群。此时，对偶主图也是 $\mathcal{G}_{\mathbf{m},\,n}$。

我们分几步证明该定理。令 $\iota: P\hookrightarrow N$ 为包含映射。我们用 α_i 表示与 v_i^0对应的 N 的不可约端同态，并用 ρ_j 表示与 v_j^2对应的那些端同态。于是，$\iota\circ\alpha_i$ 对应于 v_i^1。由图 $\mathcal{G}_{\mathbf{m},\,n}$，可得以下融合规则：

$$[\bar{\iota}][\iota]=[\mathrm{id}]\oplus\bigoplus_{j\in J}[\rho_j],$$

$$[\iota][\rho_j]=\bigoplus_{i\in I}m_i[\iota\alpha_i],$$

$$[\bar{\iota}][\iota\alpha_i]=[\alpha_i]+m_i\bigoplus_{j\in J}[\rho_j],$$

$$d(\alpha_i)=m_i,\quad d(\iota)=\sqrt{1+mn},\quad d(\rho_j)=m.$$

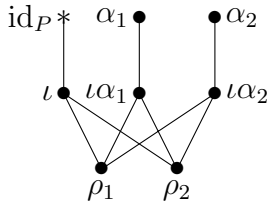

图 3：$\mathcal{G}_{(1^3)\,2}=\mathcal{G}_{\mathbb{Z}_7\rtimes\mathbb{Z}_3>\mathbb{Z}_3}$

令 $\mathcal{C}$ 为由 $\bar{\iota}\iota$生成的融合范畴。由于 $d(\alpha_{i_1}\alpha_{i_2})$ 小于$m=d(\rho_j)$，我们有一个融合子范畴 $\mathcal{C}_0$，其简单对象的集合（按等价类计）为 $\mathrm{Irr}(\mathcal{C}_0)=\{\alpha_i\}_{i\in I}$。

我们通过 $[\alpha_i]=[\alpha_{\bar{i}}]$ 和 $[\rho_j]=[\rho_{\bar{j}}]$引入$I$ 和 J 的对合。注意，$\rho_j\rho_{\bar{j}}$ 至多包含 α_i 个 $d(\alpha_i)=m_i$ 次（见 [18, 第 39] 页）。由于它包含恒等对象，维数计数表明它以完整重数 m_i 包含 α_i。因此，弗罗贝尼乌斯互反律意味着

$$[\alpha_i\rho_j]=m_i[\rho_j].$$

引理 3.2. 沿用上述记号。存在唯一的中间子因子 $P\supset R_j\supset\rho_j(P)$ 以及一个同构 $\theta_j:\ R_{\bar{j}}\to R_j$，对每个 $j\in J$，使得若 $\kappa_j: R_j\hookrightarrow P$ 是包含映射，

$$[\rho_j]=[\kappa_j\theta_j\overline{\kappa_{\bar{j}}}],$$

$$[\kappa_j\overline{\kappa_j}] = \bigoplus_{i\in I} m_i[\alpha_i].$$

此外， $P \supset R_j$ 是一个指标为 m 的深度 2 包含。

证明。 定理 2.3 表明，存在唯一的中间子因子 $P \supset R_j \supset \rho_j(P)$，使得若 $\kappa_j : R_j \hookrightarrow P$ 是包含映射，则有

$$[\kappa_j\overline{\kappa_j}] = \bigoplus_{i\in I} m_i[\alpha_i].$$

由于 $m_i = d(\alpha_i)$，弗罗贝尼乌斯互反律推出

$$[\alpha_i][\kappa_i] = m_i[\kappa_i],$$

且 $P \supset R_j$ 是指标为 m 的深度 2 包含。

令 σ_j 为视作从 P到 R_j的映射的 ρ_j。根据定义，我们有 $\rho_j = \kappa_j \circ \sigma_j$；又由于 $d(\rho_j) = m$ 且 $d(\kappa_j) = \sqrt{m}$，可得 $d(\sigma_j) = \sqrt{m}$。取共轭，得到 $[\rho_{\bar{j}}] = [\sigma_j][\kappa_j]$。必要时，对 σ_j 施以内自同构扰动，我们可以并且确实假设 $\rho_{\bar{j}} = \sigma_j \circ \kappa_j$。由于 $[\sigma_j\sigma_j]$ 包含恒等对象且包含于 $\rho_{\bar{j}}\rho_j$，维数计数表明

$$[\overline{\sigma_j}\sigma_j] = \bigoplus_{i\in I} m_i[\alpha_i],$$

而定理 2.3 蕴含 $\sigma_j(R_j) = R_{\bar{j}}$。令 θ_j 为 σ_j的逆映射，它是一个从 $R_{\bar{j}}$ 到 R_j的同构。于是我们得到 $\rho_{\bar{j}} = \kappa_{\bar{j}} \circ \theta_j^{-1} \circ \kappa_j$，并且

$$[\rho_j] = [\kappa_j\theta_j\overline{\kappa_{\bar{j}}}].$$

□

引理 3.3. 采用上述记号，对于所有 j、 $k \in J$， $\bar{\kappa}_j\kappa_k$ 都分解为一维扇区。

证明。令

$$[\overline{\kappa_j}\kappa_k] = \bigoplus_{a\in\Lambda_{j,k}} n_{jk}^a[\xi_{jk}^a]$$

为其不可约分解。由于

$$[\overline{\kappa_j}\kappa_k\overline{\kappa_k}\kappa_l] = \bigoplus_{i\in I} m_i[\overline{\kappa_j}\alpha_i\kappa_l] = \bigoplus_{i\in I} m_i^2[\overline{\kappa_j}\kappa_l] = m[\overline{\kappa_j}\kappa_l],$$

乘积 $\xi_{jk}^a\xi_{kl}^b$ 是来自 $\{\xi_{jl}^c\}_{c\in\Lambda_{j,l}}$ 的不可约对象的直和。由于 $[\kappa_k\kappa_j] = [\kappa_j\kappa_{\bar{k}}]$，我们可以调整指标集，使得对于任意 $a \in \Lambda_{j,k}$，都存在 $a \in \Lambda_{k,j}$ 满足$[\xi_{jk}^a] = [\xi_{kj}^a]$。

由于

$$\delta_{j,k} = \dim(\rho_j, \rho_k) = \dim(\overline{\kappa_{\bar{j}}}\kappa_{\bar{k}}, \theta_j^{-1}\overline{\kappa_j}\kappa_k\theta_k),$$

我们有

$$\{[\theta_j^{-1}][\xi_{jj}^a][\theta_j]\}_{a\in\Lambda_{j,j}} \cap \{[\xi_{\bar{j}\bar{j}}^b]\}_{b\in\Lambda_{\bar{j},\bar{j}}} = [\mathrm{id}], \tag{3.1}$$

且对于 $j \neq k$,

$$\{[\theta_j^{-1}][\xi_{jk}^a][\theta_k]\}_{a\in\Lambda_{j,k}} \cap \{[\xi_{\bar{j}\bar{k}}^b]\}_{b\in\Lambda_{\bar{j},\bar{k}}} = \emptyset. \tag{3.2}$$

假设我们有 ξ_{jk}^a，其中 $d(\xi_{jk}^a) > 1$。由于 $\kappa_{\bar{j}}\theta_j^{-1}\xi_{jk}^a\theta_k\overline{\kappa_{\bar{k}}}$ 包含于 $\rho_{\bar{j}}\rho_k$中，前者包含 α_i 且满足 $i \in I$，或包含 ρ_l 且满足 $l \in J$。第一种情况不会发生，因为

$$\dim(\kappa_{\bar{j}}\theta_j^{-1}\xi_{jk}^a\theta_k\overline{\kappa_{\bar{k}}}, \alpha_i) = \dim(\theta_j^{-1}\xi_{jk}^a\theta_k, \overline{\kappa_{\bar{j}}}\alpha_i\kappa_{\bar{k}}) = m_i \dim(\theta_j^{-1}\xi_{jk}^a\theta_k, \overline{\kappa_{\bar{j}}}\kappa_{\bar{k}}) = 0.$$

Thus

$$0 \neq \dim(\kappa_{\bar{j}}\theta_j^{-1}\xi_{jk}^a\theta_k\overline{\kappa_{\bar{k}}}, \rho_l) = \dim(\theta_j^{-1}\xi_{jk}^a\theta_k, \overline{\kappa_{\bar{j}}}\kappa_l\theta_l\overline{\kappa_{\bar{l}}}\kappa_{\bar{k}}),$$

并且存在 $\xi_{\bar{j}l}^b$ 和 $\xi_{\bar{l}k}^c$，使得 $\theta_j^{-1}\xi_{jk}^a\theta_k$ 包含于 $\xi_{\bar{j}l}^b\theta_l\xi_{\bar{l}k}^c$中。事实上，后者是不可约的，这是因为

$$\dim(\xi_{\bar{j}l}^b\theta_l\xi_{\bar{l}\,\bar{k}}^c, \xi_{\bar{j}l}^b\theta_l\xi_{\bar{l}\,\bar{k}}^c) = (\theta_l^{-1}\xi_{l\bar{j}}^{\bar{b}}\xi_{\bar{j}l}^b\theta_l, \xi_{\bar{l}\,\bar{k}}^c\xi_{\bar{k}\bar{l}}^{\bar{c}}),$$

以及公式（3.1）。因此我们得到

$$[\theta_j^{-1}\xi_{jk}^a\theta_k] = [\xi_{\bar{j}l}^b\theta_l\xi_{\bar{l}\,\bar{k}}^c]. \tag{3.3}$$

由于 $d(\xi_{jk}^a) > 1$，我们有 $d(\xi_{\bar{j}l}^b) > 1$ 或 $d(\xi_{\bar{l}\,\bar{k}}^c) > 1$。我们先假设$d(\xi_{\bar{l}\,\bar{k}}^c) > 1$。我们有 $[\xi_{jk}^a\theta_k] = [\theta_j\xi_{\bar{j}l}^b\theta_l\xi_{\bar{l}\,\bar{k}}^c]$。由于$\kappa_j\theta_j\xi_{\bar{j}l}^b\theta_l\kappa_{\bar{l}}$包含于 $\rho_j\rho_l$中，前者包含 α_i 且满足 $i \in I$，或包含 ρ_r 且满足 $r \in J$。在第一种情况下，我们有

$$0 \neq \dim(\kappa_j\theta_j\xi_{\bar{j}l}^b\theta_l\overline{\kappa_{\bar{l}}}, \alpha_i) = \dim(\theta_j\xi_{\bar{j}l}^b\theta_l, \overline{\kappa_{\bar{j}}}\alpha_i\kappa_{\bar{l}}) = m_i \dim(\theta_j\xi_{\bar{j}l}^b\theta_l, \overline{\kappa_{\bar{j}}}\kappa_{\bar{l}}),$$

并且存在满足 $[\theta_j\xi_{\bar{j}l}^b\theta_l] = [\xi_{j\bar{l}}^d]$的 $\xi_{j\bar{l}}^d$，以及 $[\xi_{jk}^a\theta_k] = [\xi_{j\bar{l}}^d\xi_{\bar{l}k}^c]$。根据弗罗贝尼乌斯互反律，存在满足 $[\theta_k] = [\xi_{k\bar{k}}^e]$的 $\xi_{k\bar{k}}^e$。由于

$$[\kappa_k\overline{\kappa_{\bar{k}}}\kappa_{\bar{k}}] = \bigoplus_{i_1\in I} m_{i_1}[\alpha_g\kappa_{\bar{k}}] = m[\kappa_{\bar{k}}],$$

我们得到$[\kappa_k\xi_{k\bar{k}}^e] = [\kappa_{\bar{k}}]$，并且

$$[\rho_k] = [\kappa_k\theta_k\overline{\kappa_{\bar{k}}}] = [\kappa_k\xi_{k\bar{k}}^e\overline{\kappa_{\bar{k}}}] = [\kappa_{\bar{k}}\overline{\kappa_{\bar{k}}}] = \bigoplus_{i_1\in I}[\alpha_{i_1}],$$

这与矛盾相悖。因此我们只剩下

$$0 \neq \dim(\kappa_j\theta_j\xi_{\bar{j}l}^b\theta_l\overline{\kappa_{\bar{l}}}, \rho_r) = \dim(\theta_j\xi_{\bar{j}l}^b\theta_l, \overline{\kappa_{\bar{j}}}\kappa_r\theta_r\overline{\kappa_{\bar{r}}}\kappa_{\bar{l}}),$$

这表明存在满足条件的 ξ_{jr}^e 和 $\xi_{\bar{r}\bar{l}}^f$

$$\dim(\theta_j\xi_{\bar{j}l}^b\theta_l, \xi_{jr}^e\theta_r\xi_{\bar{r}\bar{l}}^f) \neq 0.$$

和之前一样，右边是不可约的，因此我们得到 $[\theta_j \xi^b_{\bar{j}l} \theta_l] = [\xi^e_{jr} \theta_r \xi^f_{\bar{r}\bar{l}}]$，以及 $[\xi^a_{jk}\theta_k] = [\xi^e_{jr}\theta_r \xi^f_{\bar{r}\bar{l}} \xi^c_{\bar{l}k}]$。由于左边是不可约的，$\xi^f_{\bar{r}\bar{l}}\xi^c_{\bar{l}k}$也不可约，并且存在满足 $[\xi^f_{\bar{r}\bar{l}}\xi^c_{\bar{l}\,\bar{k}}] = [\xi^s_{\bar{r}\bar{k}}]$的 $\xi^s_{\bar{r}\bar{k}}$，以及 $[\xi^a_{jk}\theta_k] = [\xi^e_{jr}\theta_r \xi^s_{\bar{r}\,\bar{k}}]$。注意，我们有$d(\xi^s_{\bar{r}\bar{k}}) > 1$。根据弗罗贝尼乌斯互反律，

$$1 = \dim(\xi^a_{jk}\theta_k, \xi^e_{jr}\theta_r \xi^s_{\bar{r}\bar{k}}) = \dim(\theta_r^{-1}\xi^{\bar{e}}_{rj}\xi^a_{jk}\theta_k, \xi^s_{\bar{r}\bar{k}}),$$

并且存在满足 $[\theta_r^{-1}\xi^t_{rk}\theta_k] = [\xi^s_{\bar{r}\bar{k}}]$的 ξ^t_{rk}，这与公式（3.1）矛盾。

现在唯一的可能性是 $d(\xi^b_{\bar{j}l}) > 1$。对公式（3.3）取共轭，得到 $[\theta_k^{-1}\xi^{\bar{a}}_{kj}\theta_j] = [\xi^{\bar{c}}_{\bar{k}l}\theta_l^{-1}\xi^{\bar{b}}_{l\bar{j}}]$，且 $[\xi^{\bar{a}}_{kj}\theta_j] = [\theta_k \xi^{\bar{c}}_{\bar{k}l}\theta_l^{-1}\xi^{\bar{b}}_{l\bar{j}}]$。由于 $\kappa_k\theta_k\xi^{\bar{c}}_{\bar{k}l}\theta_l^{-1}\kappa_l$ 包含于 $\rho_k\rho_{\bar{l}}$，上述类似的论证仍然成立，我们再次得到矛盾。因此，对于所有 j，k，a，$d(\xi^a_{jk}) = 1$。 □

定理 *3.1* 的证明。固定 $j_0 \in J$。由于 $\kappa_{j_0}\kappa_k$ 包含一个同构 $\varphi_j\colon R_j \to R_{j_0}$，根据弗罗贝尼乌斯互反律，我们得到 $[\kappa_j] = [\kappa_{j_0}\varphi_j]$。因此，存在一个酉元$u_j \in P$满足 $\mathrm{Ad}u_j \circ \kappa_j = \kappa_{j_0} \circ \varphi_j$，这意味着对于每个 $x \in R_j$，

$$u_j x u_j^* = \varphi_j(x).$$

这意味着 $u_j R_j u_j^* = R_{j_0}$.。如有必要，用 $\mathrm{Ad}u_j \circ \rho_j$ 替换 ρ_j 后，我们可以假设对所有 $j \in J$，$R_j = R_{j_0}$ 成立。为简便起见，我们记 $R = R_{j_0}$ 和 $\kappa = \kappa_{j_0}$。现在有 $\theta_j \in \mathrm{Aut}(R)$，且 $[\rho_j] = [\kappa\theta_j\kappa]$。

由于 $\bar{\kappa}\kappa$ 分解为一维扇区，包含 $P \supset R$ 是一个由阶为 m 的有限群（记作 H）给出的交叉积，并且存在 H 在 R 上的外作用β，使得 $P = R \rtimes_\beta H$，且

$$[\bar{\kappa}\kappa] = \bigoplus_{h\in H} [\beta_h].$$

注意到 $N \supset R$ 是不可约的，因为

$$\dim(\iota\kappa, \iota\kappa) = \dim(\bar{\iota}\iota, \kappa\bar{\kappa}) = 1.$$

现在我们有

$$[\overline{(\iota\kappa)}\iota\kappa] = [\bar{\kappa}\bar{\iota}\iota\kappa] = [\bar{\kappa}\kappa] \oplus \bigoplus_{j\in J} [\bar{\kappa}\rho_j\kappa] = \bigoplus_{h\in H} [\beta_h] \oplus \bigoplus_{j\in J,\, h_1,h_2\in H} [\beta_{h_1}\theta_j\beta_{h_2}].$$

这表明存在一个有限群 G，其中包含 H，且其在 R 上的外作用 γ 延拓了 β，并满足 $N = R \rtimes_\gamma G$。此外，

$$\bigoplus_{g\in G} [\gamma_g] = \bigoplus_{h\in H} [\beta_h] \oplus \bigoplus_{j\in J,\, h_1,h_2\in H} [\beta_{h_1}\theta_j\beta_{h_2}],$$

成立，这表明除 H 外，每个 $(H,\ H)$-双陪集的大小均为 $|H|^2$。因此，G 是一个 Frobenius 群，其 Frobenius 补为 H，且其形式为 $K \rtimes H$，其中 Frobenius 核为 K。由于 $|K| = [N\colon P]$，我们得到 $|K| = 1 + mn$。

当 $n=1$ 时，我们有 $|K|=|H|+1$，而 G 在 G/H 上的作用是一个锐 2-传递置换群。

对于（2），只需证明 H 在 G 中是极大的。为此，只需证明 N 与 P 之间不存在非平凡的中间子因子。先假设 $n=2$。设 Q 是一个非平凡的中间子因子，并令 $\iota_1 : P \hookrightarrow Q$ 为包含映射。由于 $[\bar{\iota}\iota] = [\mathbf{id}] \oplus [\rho_1] \oplus [\rho_2]$，我们有 $[\iota_1\iota_1] = [\mathbf{id}] \oplus [\rho_1]$ 或 $[\iota_1\iota_1] = [\mathbf{id}] \oplus [\rho_2]$。无论哪种情况，都得到 $[Q : P] = 1+m$，而

$$[N:Q] = \frac{[N:P]}{[Q:P]} = \frac{1+2m}{1+m} = 2 - \frac{1}{1+m},$$

这与琼斯定理矛盾。

情形 $n=3$ 可以用类似的方法处理。 □

注 3.4。 上述定理结合对具有阿贝尔点稳定子的锐二传递置换群的分类表明，图 $\mathcal{G}_{(1^m),1}$ 唯一刻画了 $H(q) = \mathbb{F}_q \rtimes \mathbb{F}_q^\times > \mathbb{F}_q^\times$ 且具有 $q = m+1$ 的群-子群子因子。对于非交换的 H 情形，图 $\mathcal{G}_{\mathbf{m},1}$ 大概不能唯一确定一般情况下的群 $K \rtimes H$。然而，[10, 第十二章，定理 9.7] 表明，对于给定的 $q = m+1$，$H \rtimes K$ 的可能性受到很大限制。例如，图 $\mathcal{G}_{(1^4,2),1}$ 唯一刻画 $S(3^2) > Q_8$。

在本节余下部分，我们将对相关的融合范畴进行分类，这是对 [3, (7.1)] 的推广。

设 $\mathcal{C}_0$ 是一个 C^*-融合范畴，其简单对象（等价类）的集合为 $\mathrm{Irr}(\mathcal{C}) = \{\alpha_i\}_{i\in I}$。我们不妨假设 $0 \in I$ 和 $\alpha_0 = 1$。设 $\mathcal{C}$ 是一个包含 $\mathcal{C}_0$ 的融合范畴，且 $\mathrm{Irr}(\mathcal{C}) = \{\alpha_i\}_{i\in I} \cup \{\rho\}$。于是有 $\alpha_i \otimes \rho \cong \rho \otimes \alpha_i = d(\alpha_i)\rho$。事实上，若 $\alpha_i \otimes \rho$ 包含 α_j，则由弗罗贝尼乌斯互反律可知 $\alpha_i \otimes \alpha_j$ 将包含 ρ，这是不可能的，因此结论成立。特别地，$m_i = d(\alpha_i)$ 是一个整数。再次应用弗罗贝尼乌斯互反律可得

$$\rho \otimes \rho \cong \bigoplus_{i\in I} m_i\alpha_i \oplus k\rho,$$

其中 k 是一个非负整数。现在考虑 $k = m-1$ 的情形，此时

$$m = \sum_{i\in I} m_i^2.$$

那么 $d(\rho) = m$。

定理 3.5. 设 $\mathcal{C}$ 如上所述。那么存在一个严格二重传递置换群 $G = K \rtimes H$，其 *Frobenius* 核为 K，*Frobenius* 补为 H，使得 $\mathcal{C}_0$ 等价于 H 的表示范畴。特别地，数 $m+1$ 是一个素数幂 p^k。范畴 $\mathcal{C}$ 由以下内容分类

$$\{\omega \in H^3(K \rtimes H, \mathbb{T}) \mid \omega|_H = 0\} / \operatorname{Aut}(K \rtimes H, H),$$

（或等价地，通过 $H^3(K,\mathbb{T})^H/N_{\mathrm{Aut}(K)}(H)$）。

证明。为了证明定理 3.5，我们可以假设范畴 $\mathcal{C}$ 嵌入到 III 型因子 P 的 End(P) 中。

与定理 3.1 的证明相同，存在唯一子因子$R \subset P$（模内共轭），唯一的阶为 m 的有限群 H $\theta \in \mathrm{Aut}(R)$，以及 H 在 R 上的外作用 β，使得

$$P = R \rtimes_\beta H,$$

并且若 $\kappa : \hookrightarrow P$ 是包含映射，

$$[\kappa\overline{\kappa}] = \bigoplus_{i\in I} m_i[\alpha_i],$$

$$[\overline{\kappa}\kappa] = \bigoplus_{h\in H} [\beta_h],$$

$$[\rho] = [\kappa\theta\overline{\kappa}].$$

令 G 为 Out(R) 中由 $[\beta_H] = \{[\beta_h]\}_{h\in H}$ 和 $[\theta]$ 生成的群。我们将证明

$$G = [\beta_H] \sqcup [\beta_H][\theta][\beta_H],$$

其阶为 $m(m+1)$，且它是一个 Frobenius 群，其 Frobenius 补为$[\beta_H]$。

引理 3.3 的证明表明 $[\theta] \notin [\beta_H]$，

$$[\theta][\beta_H][\theta^{-1}] \cap [\beta_H] = [\mathrm{id}],$$

以及 $|[\beta_H][\theta][\beta_H]| = m^2$。令 $G_0 = [\beta_H] \cup [\beta_H][\theta][\beta_H]$为 G 的一个子集，且$|G_0| = m(m+1)$。要证明 G_0 与 G 重合，只需证明 $[\theta][\beta_H][\theta] \subset G_0$和 $[\theta^{-1}] \in [\beta_H][\theta][\beta_H]$。

设 $h \in H$。由于 $\kappa\theta\beta_h\theta\bar{\kappa}$ 包含于 ρ^2，它包含 α_i（其中 $i \in I$）或 ρ。若它包含 α_i，则有

$$\begin{aligned} 0 \neq \dim(\kappa\theta\beta_h\theta\bar{\kappa}, \alpha_i) &= \dim(\theta\beta_h\theta, \bar{\kappa}\alpha_i\kappa) = m_i \dim(\theta\beta_h\theta, \bar{\kappa}\kappa) \\ &= m_i \sum_{k\in H} \dim(\theta\beta_h\theta, \beta_k), \end{aligned}$$

这表明 $[\theta\beta_h\theta] \in [\beta_H]$。若它包含 ρ，

$$0 \neq \dim(\kappa\theta\beta_h\theta\bar{\kappa}, \kappa\theta\bar{\kappa}) = \dim(\theta\beta_h\theta, \bar{\kappa}\kappa\theta\bar{\kappa}\kappa) = \sum_{k,l} \dim(\theta\beta_h\theta, \beta_k\theta\beta_l),$$

这表明 $[\theta\beta_h\theta] \in [\beta_H][\theta][\beta_H]$。因此我们得到 $[\theta][\beta_H][\theta] \subset G_0$。

由于 ρ 是自共轭的，我们有

$$1 = \dim(\bar{\rho}, \rho) = \dim(\kappa\theta^{-1}\bar{\kappa}, \kappa\theta\bar{\kappa}) = \dim(\theta^{-1}, \bar{\kappa}\kappa\theta\bar{\kappa}\kappa) = \sum_{h,k\in H} \dim(\theta^{-1}, \beta_h\theta\beta_k),$$

这表明 $[\theta^{-1}] \in [\beta_H][\theta][\beta_H]$。因此我们得到 $G = G_0$。

由于 G 只有两个 (H、H)-双陪集，且 $[\beta_H][\theta][\beta_H]$ 的大小为 $|H|^2$，群 G 是一个 Frobenius 群，其 Frobenius 补为 $[\beta_H]$。此外， G 在 G/H 上的作用是严格二重传递的。

为对范畴 $\mathcal{C}$ 进行分类，我们不妨假设 R 是单射型 III_1 因子。于是， G 在 Out(R) 中的共轭类完全由其障碍类 $\omega \in H^3(G、\ \mathbb{T})$ 确定。由于 H 有一个提升 $\beta_H \subset \mathrm{Aut}(R)$, ω 在 H 上的限制表示是平凡的。由于 H 是一个 Frobenius 补，Schur 乘子 $H^2(H、\mathbb{T})$ 是平凡的，因此该提升在余循环共轭意义下唯一，并且可以从 R 和 $[\beta_H]$ 唯一地恢复 P。这意味着范畴 $\mathcal{C}$ 的生成元 ρ 由 ω 唯一确定。另一方面，对于给定的 $\omega \in H^3(G、\ \mathbb{T})$，Out($R$) 中总存在一个 G-核，这表明该陈述的存在性部分成立。

最后，由于 $|K|$ 和 $|H|$ 互素，我们有

$$E_2^{p,q} = H^p(H, H^q(K, \mathbb{T})) = 0,$$

在针对 $G = K \rtimes H$的 Lindon/Hochschild–Serre 谱序列中， $p, q \geq 1$。因此，群

$$\{\omega \in H^3(G, \mathbb{T}) \mid \omega|_H = 0\},$$

同构于 $H^3(K, \mathbb{T})^H$。 □

当 H 是阿贝尔群时（实际上在此情形下是循环群），群 $H^3(K, \mathbb{T})^H$ 在 [3, 推论 7.4]中得到了明确计算。

4 Goldman 型定理：关于锐 3-传递置换群

$\widetilde{\ }$设 $\mathbf{m}$、 n、 I和 m 如上一节所述。现在我们考虑图 $\mathcal{G}_{\mathbf{m},1}$$\widetilde{\ }$（关于给定 $\mathcal{G}$ 的 $\mathcal{G}$ 定义，见第 2.3 小节），其描述如下。$\widetilde{\ }$$\mathcal{G}_{\mathbf{m},1}$ 的偶顶点集合为

$$\{v_i^0\}_{i\in I} \sqcup \{v_i^2\}_{\in I} \sqcup \{v^4\},$$

奇顶点集合为

$$\{v_i^1\}_{i\in I} \sqcup \{v^3\}.$$

$\widetilde{\ }$邻接矩阵 Δ 中唯一的非零项是 $\mathcal{G}_{\mathbf{m},1}$

$$\Delta(v_i^0, v_i^1) = \Delta(v_i^1, v_i^0) = 1, \quad \forall i \in I,$$

$$\Delta(v_i^1, v_i^2) = \Delta(v_i^2, v_i^1) = 1, \quad \forall i \in I,$$

$$\Delta(v_i^2, v^3) = \Delta(v^3, v_i^2) = m_i, \quad \forall i \in I,$$

$$\Delta(v^3, v^4) = \Delta(v^4, v^3) = 1.$$

顶点 v_0^0 被视为特殊顶点 $*$。 Δ 的 Perron-Frobenius特征值为 $\sqrt{2+m}$。
Perron-Frobenius特征向量 d 归一化为 $d(v_0^0) = 1$ 后为

$$d(v_i^0) = m_i, \quad d(v_i^2) = m_i(1+mn), \quad d(v_4) = m.$$

$$d(v_i^1) = m_i\sqrt{2+mn}, \quad d(v_3) = m\sqrt{2+mn}.$$

在 [19], 中，我们证明了关于$\mathcal{G}_{(1^3),1}$的一个强 Goldman 型定理。现在，我们将其推广到一般的锐 3-传递置换群。

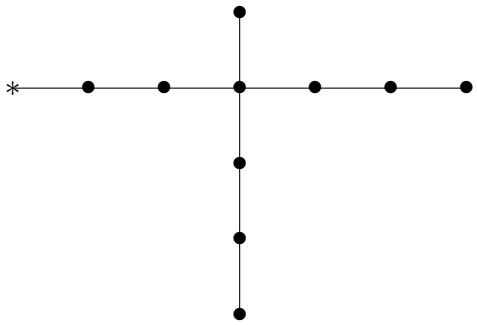

图4: $\widetilde{\mathcal{G}_{(1^3)\,1}} = \mathcal{G}_{(L(2^2)\,PG_1(2^2))} = \mathcal{G}_{(\mathfrak{A}_5, X_5)}$

尽管我们在第3节的定义中排除了$\mathbf{m} = (1)$的情形，但对于$\mathbf{m} = (1)$，图本身仍然有意义，因此我们在下一个定理中纳入这种情形。

定理 4.1. 设 $M \supset N$ 是一个具有$\mathcal{G}_{M\supset N} = \mathcal{G}_{\mathbf{m},1}$的有限指数子因子。那么 $q = 1+m$ 是一个素数幂，并且存在唯一的子因子 $R \subset N$，它在 M 中不可约，使得若 $\mathbf{m} = 1^m$,

$$M = R \rtimes L(q) \supset N = R \rtimes H(q),$$

以及其他情况

$$M = R \rtimes M(q) \supset N = R \rtimes S(q).$$

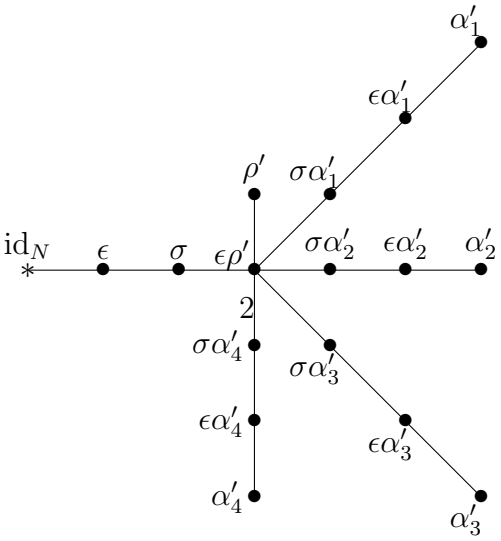

图 5： $\mathcal{G}_{(1^4,2)\ 1} = \mathcal{G}_{(M(3^2)\ PG_1(3^2))}$

证明。 如果$\mathbf{m} = (1)$，则图 $\mathcal{G}_{(1),\ 1}$ 不过是 Coxeter 图 A_5，结论由 [11] as $(\mathfrak{S}_3,\ X_3) \cong (PGL_2(2)\ PG_1(2))$ 得出。下文中我们假设$\mathbf{m} \neq (1)$。

我们按照第2.5小节中所述的策略，分为 6 个步骤。

(1) 令 $\epsilon :\ N \hookrightarrow M$ 为包含映射，并令 $\mathcal{C}$ 为由 $\bar{\epsilon}\epsilon$生成的融合范畴。我们首先对 $\mathrm{Irr}(\mathcal{C})$进行参数化。设 $[\bar{\epsilon}\epsilon] = [\mathrm{id}] \oplus [\sigma]$ 为不可约分解，这意味着 σ 对应于顶点 v_0^2。我们分别用 α_i'和 ρ' 表示与 v_i^0 和 v^4 相对应的 N 的端同态。于是 $\epsilon\alpha_i'$、$\sigma\alpha_i'$和 $\epsilon\rho'$ 均不可约，分别对应于 v_i^1、 v_i^2和 v^3 。因此

$$\mathrm{Irr}(\mathcal{C}) = \{\alpha_i'\}_{i\in I} \sqcup \{\sigma\alpha_i'\}_{i\in I} \sqcup \{\rho'\}.$$

我们有

$$d(\alpha_i) = m_i, \quad d(\epsilon) = \sqrt{2+m}, \quad d(\sigma) = 1+m, \quad d(\rho') = m.$$

两个端同态 σ 和 ρ' 是自共轭的。我们通过 $[\alpha_i'] = [\alpha_{\bar{i}}']$ 和 $[\sigma\alpha_i'] = [\sigma\alpha_{i^*}']$定义 I的两个对合。于是它们满足关系 $[\sigma\alpha_{i^*}'] = [\alpha_{\bar{i}}'\sigma]$。

通过维数计数，我们可以看出存在一个融合子范畴 $\mathcal{C}_0$，它属于 $\mathcal{C}$，并且

$$\mathrm{Irr}(\mathcal{C}_0) = \{\alpha_i'\}_{i\in I}.$$

我们断言，存在另一个融合子范畴 $\mathcal{C}_1$，它属于 $\mathcal{C}$，并且

$$\mathrm{Irr}(\mathcal{C}_1) = \{\alpha_i'\}_{i\in I} \sqcup \{\rho'\}.$$

事实上，若 $\rho'\alpha_i$ 包含 $\sigma\alpha_{i_1}'$，根据弗罗贝尼乌斯互反律， $\sigma\alpha_{i_1}'\alpha_{\bar{i}}'$ 将包含 ρ'，因此对于某个 i_2， $\sigma\alpha_{i_2}'$ 将包含 ρ'，这就产生了矛盾。因此

$\rho\alpha_i$ 分解为 $\{\alpha'_{i_1}\}_{i_1\in I}\cup\{\rho'\}$ 中若干扇区的直和，通过维数计数可得

$$[\rho'\alpha'_i]=m_i[\rho'],\quad [\alpha'_i\rho]=m_i[\rho], \tag{4.1}$$

其中第二个等式可由第一个等式通过共轭得到。

从图的形状 $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathbf{m},\,1}}$，我们可以看出

$$[\sigma^2]=[\mathrm{id}]\oplus[\rho']\oplus\bigoplus_{i\in I}m_i[\sigma\alpha'_i], \tag{4.2}$$

$$[\sigma\rho']=\bigoplus_{i\in I}m_i[\sigma\alpha'_i]. \tag{4.3}$$

利用这些结果以及结合律，我们得到

$$\begin{aligned}[\sigma][\sigma\rho'] &= \bigoplus_{i_1\in I}m_i[\sigma][\sigma\alpha'_i]\\ &= \bigoplus_{i\in I}m_i([\mathrm{id}]\oplus[\rho']\oplus\bigoplus_{i'\in I}m_{i'}[\sigma\alpha'_{i'}])[\alpha'_i]\\ &= \bigoplus_{i\in I}m_i[\alpha'_i]\oplus m[\rho']\oplus\bigoplus_{i,i'}m_{i'}[\sigma\alpha'_{i'}\alpha'_i].\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}&[\sigma][\sigma\rho']=[\sigma^2][\rho']=([\mathrm{id}]\oplus[\rho']\oplus\bigoplus_{i\in I}m_i[\sigma\alpha'_i])[\rho']\\ &=[\rho']\oplus[{\rho'}^2]\oplus\bigoplus_{i\in I}m_i^2[\sigma\rho']=[\rho']\oplus[{\rho'}^2]\oplus m\bigoplus_{i\in I}m_i[\sigma\alpha'_i].\end{aligned}$$

由于 $\sigma\alpha'_{i'}\alpha'_i$ 是由形如 $\sigma\alpha'_{i''}$ 的不可约对象直和而成，端同态 ρ^2 包含

$$\bigoplus_{i\in I}m_i[\alpha'_i]\oplus(m-1)[\rho'],$$

比较维数后，我们得到

$$[{\rho'}^2]=\bigoplus_{i\in I}m_i[\alpha'_i]\oplus(m-1)[\rho']. \tag{4.4}$$

因此，所要证明的结论成立。

(2) 根据式（4.2）和定理 2.3，存在唯一的中间子因子$N\supset P\supset\sigma(N)$，使得若 $\iota\colon P\hookrightarrow N$ 是包含映射，则有 $[\iota\bar{\iota}]=[\mathrm{id}]\oplus[\rho']$。令 $\mathcal{C}_2$ 为由 $\bar{\iota}\iota$ 生成的融合范畴。与引理 3.2 的证明一样，存在 $\tau\in\mathrm{Aut}(P)$ 满足

$$[\sigma]=[\iota\tau\bar{\iota}]. \tag{4.5}$$

(3) 根据 $\mathcal{C}_1$的融合规则可知，对偶主图 $\mathcal{G}^d_{N\supset P}$ 是$\mathcal{G}_{\mathbf{m},\ 1}$，而定理 3.1,(1) 表明主图 $\mathcal{G}_{N>P}$ 也如此。因此，我们可以安排 $\mathcal{C}_2$ 中不可约对象的标记，使得

$$\mathrm{Irr}(\mathcal{C}_2) = \{\alpha_i\} \sqcup \{\rho_i\},$$

且 $[\alpha_i'\iota] = [\iota\alpha_i]$ 且 $[\bar{\iota}\iota] = [$恒等对象$] \oplus [\rho]$。

(4) 现在应用定理 3.1，得到一个唯一子因子 $R \subset P$，在内共轭意义下唯一，使得 $R' \cap P = \mathbb{C}$，并且存在 Frobenius 群 $K \rtimes H$ 的外作用 β，满足

$$N = R \rtimes_\beta (H \rtimes K) \supset P = R \rtimes_\beta H.$$

此外，$K \rtimes H$ 对 $(K \rtimes H)/H$ 的作用是严格二重传递的。我们将包含映射记为κ: $R \hookrightarrow P$。于是有

$$[\iota\kappa\bar{\kappa}\bar{\iota}] = \bigoplus_{i\in I} m_i[\iota\alpha_i\bar{\iota}] = \bigoplus_{i\in I} m_i[\alpha_i'\iota\bar{\iota}] = \bigoplus_{i\in I} m_i[\alpha_i'](\mathrm{[id]} \oplus \rho') = \bigoplus_{i\in I} m_i[\alpha_i'] \oplus m[\rho'],$$

这表明

$$\dim(\epsilon\iota\kappa, \epsilon\iota\kappa) = \dim(\bar{\epsilon}\epsilon, \iota\kappa\bar{\kappa}\bar{\iota}) = 1,$$

且 R 在 M 中不可约。

(5) 由于

$$[M : P] = [M : N][N : P][P : R] = (m + 2)(m + 1)m,$$

要证明包含 $L \supset R$ 是深度 2，只需证明数值 $(m + 2)(m + 1)m$ 与下列维数相同:

$$\dim(\epsilon\iota\kappa\overline{(\epsilon\iota\kappa)}, \epsilon\iota\kappa\overline{(\epsilon\iota\kappa)}) = \dim(\bar{\epsilon}\epsilon\iota\kappa\bar{\kappa}\bar{\iota}, \iota\kappa\bar{\kappa}\bar{\iota}\bar{\epsilon}\epsilon) = \dim((\mathrm{id} \oplus \sigma)\iota\kappa\bar{\kappa}\bar{\iota}, \iota\kappa\bar{\kappa}\bar{\iota}(\mathrm{id} \oplus \sigma)).$$

注意，$[\sigma]$与 $[\rho']$对易，并且

$$\bigoplus_{i\in I} m_i[\alpha_i'],$$

因此也与 $[\iota\kappa\bar{\kappa}\bar{\iota}]$对易。所以这个数等于

$$= \dim((\mathrm{id} \oplus \sigma)\iota\kappa\bar{\kappa}\bar{\iota}, (\mathrm{id} \oplus \sigma)\iota\kappa\bar{\kappa}\bar{\iota}) = \dim((\mathrm{id} \oplus \sigma)^2, (\iota\kappa\bar{\kappa}\bar{\iota})^2).$$

由于由 $\iota\kappa\bar{\kappa}\bar{\iota}$ 生成的融合范畴等价于表示范畴 Rep($K \rtimes H$)，且 $\iota\kappa\bar{\kappa}\bar{\iota}$ 对应于 $K \rtimes H$ 的正则表示，因此我们得到

$$[(\iota\kappa\bar{\kappa}\bar{\iota})^2] = m(m + 1)[\iota\kappa\bar{\kappa}\bar{\iota}].$$

Thus

$$\begin{aligned}&\dim((\mathrm{id}\oplus\sigma)^2,(\iota\kappa\bar{\kappa}\bar{\iota})^2)=m(m+1)(\mathrm{id}\oplus 2\sigma\oplus\sigma^2,\iota\kappa\bar{\kappa}\bar{\iota})\\&=m(m+1)\dim(2\mathrm{id}\oplus\rho\oplus 2\sigma\oplus\bigoplus_{i\in I}m_i\sigma\alpha_i',\bigoplus_{i\in I}m_i\alpha_i'\oplus m\rho')\\&=m(m+1)(m+2),\end{aligned}$$

并且包含 $M\supset R$ 的深度为 2。

(6) 现在，引理 2.5 表明我们有

$$m=\dim(\tau\bar{\iota}\iota\kappa\bar{\kappa}\tau^{-1},\bar{\iota}\iota\kappa\bar{\kappa}),$$

and

$$[\bar{\iota}\iota\kappa\bar{\kappa}]=[(\mathrm{id}\oplus\rho)\bigoplus_{i\in I}m_i\alpha_i]=\bigoplus_{i\in I}m_i[\alpha_i]\oplus m[\rho].$$

维数计数可得

$$m=\dim(\bigoplus_{i\in I}m_i\tau\alpha_i\tau^{-1},\bigoplus_{i\in I}m_i\alpha_i),$$

而这只有在 $[\tau\kappa\bar{\kappa}\tau^{-1}]=[\kappa\bar{\kappa}]$ 时才可能。由于 H 是 Frobenius 补， H 的每个阿贝尔子群都是循环群，并且由引理 2.6 可知，存在满足 $[\tau\kappa]=[\kappa][\tau_1]$ 的 $\tau_1\in\mathrm{Aut}(R)$。

现在，引理 2.4 表明，存在一个包含 $K\rtimes H$ 的群 G，以及 R 上扩展 β 且满足 $M=R\rtimes_\gamma G$ 的外部 G-作用。主图 $\mathcal{G}_{M\supset N}$ 表明， G 在 $G/(K\rtimes H)$ 上的作用是 3-传递的。由于 $|G/(K\rtimes H)|=m+2$，且 $|G|=m(m+1)(m+2)$，置换群 G 是锐 3-传递的。现在，结论可由锐 3-传递置换群的分类得出。 □

本节余下部分将为 Mathieu 群的 Goldman 型定理 M_{11} 做准备。由于 $M(3^2)$ 和 $S(3^2)$ 分别是 M_{11} 的锐 4- 传递作用中的点稳定子和双点稳定子，我们将 $M(3^2)=M_{10}$ 和 $S(3^2)=M_9$。我们首先确定 $M_{10}>M_9$ 情形下的对偶主图 $\mathcal{G}_N^M$。由于此图是诱导-约化图 $\mathcal{G}_{M_9}^{M_{10}}$，不可约$M$-$M$ 扇区由 M_{10} 的不可约表示参数化，其维数分别为 1，1， 9，9，10，10， 10，16（见 [5, 表 8]）。

按照上述证明和图 5 中的方法，我们将不可约 N-N 和 M-N 扇区参数化。定理 3.1,(1) 表明， $N\supset P$ 及其对偶包含是与 ($S(3^2)$ $\mathbb{F}_{3^2}$) 相关的同构子因子（见注 3.4），且两个融合范畴 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 等价。另一方面， $\mathcal{C}_2$ 中由 $\kappa\bar{\kappa}$ 生成的融合子范畴等价于 $\mathrm{Rep}(Q_8)$。因此，融合范畴 $\mathcal{C}_0$ 等价于 $\mathrm{Rep}(Q_8)$。特别地，对所有 i，都有 $\bar{i}=i$。由于 $\{1,2,3\}$ 中至少有一个被另一个对合 $i\mapsto i^*$ 固定，我们可以且不妨假设 $1^*=1$，并且 $\sigma\alpha_1$ 是自共轭的。由于 $d(\alpha_4')=2$，两个扇区 α_4' 和 $\sigma\alpha_4'$ 都是自共轭的。

令 $[\epsilon\bar{\epsilon}] = [\mathrm{id}] \oplus [\pi]$ 为不可约分解。则 $d(\pi) = 9$。由于 $\dim(\epsilon\alpha_i'\bar{\epsilon},\ \epsilon\alpha_i'\bar{\epsilon}) = \dim(\bar{\epsilon}\epsilon\alpha_i',\ \alpha_i'\bar{\epsilon}\epsilon) = \dim((\mathrm{id} \oplus \sigma)\alpha_i',\ \alpha_i'(\mathrm{id} \oplus \sigma)) = 1 + \dim(\sigma\alpha_i',\ \sigma\alpha_{i^*}')$,

如果 $i^* = i$，端态射 $\epsilon\alpha_i'\bar{\epsilon}$ 可分解为两个不可约对象；否则它就是不可约的。因此，$\epsilon\alpha_1'\bar{\epsilon}$ 可分解为两个不可约对象。由于 $d(\epsilon\alpha_1'\bar{\epsilon}) = 10$，它是一个一维表示与一个九维表示的直和，我们将前者记为 χ。那么，弗罗贝尼乌斯互反律表明 $[\chi\epsilon] = [\epsilon\alpha_1']$，并且

$$[\epsilon\alpha_1'\bar{\epsilon}] = [\chi\epsilon\bar{\epsilon}] = [\chi] \oplus [\chi\pi].$$

由于 $\epsilon\alpha_i'\bar{\epsilon}$ 对于 $i = 2, 3$，不可能包含一维表示，因此我们有$2^* = 3$，且 $\xi := \epsilon\alpha_2'\bar{\epsilon}$ 是不可约的。根据

$$\begin{aligned}[\epsilon\alpha_i'\bar{\epsilon}][\epsilon] &= [\epsilon\alpha_i'(\mathrm{id} \oplus \sigma)] = [\epsilon\alpha_i'] \oplus [\epsilon\alpha_i'\sigma] \\ &= [\epsilon\alpha_i'] \oplus [\epsilon\sigma\alpha_{i^*}'] = [\epsilon\alpha_i'] \oplus [\epsilon\alpha_{i^*}'] \oplus d(\alpha_i')[\epsilon\rho'],\end{aligned}$$

以及弗罗贝尼乌斯互反律，我们还有 $[\epsilon\alpha_2'\bar{\epsilon}] = [\xi]$，并且

$$[\xi\epsilon] = [\epsilon\alpha_2'] \oplus [\epsilon\alpha_3'] \oplus [\epsilon\rho'].$$

由于 $d(\epsilon\alpha_4'\bar{\epsilon}) = 20$，我们有

$$[\epsilon\alpha_4'\bar{\epsilon}] = [\eta_1] \oplus [\eta_2],$$

其中 $d(\eta_1) = d(\eta_2) = 10$，并且

$$[\eta_1\epsilon] = [\epsilon\alpha_4'] \oplus [\epsilon\rho'].$$

$$[\eta_2\epsilon] = [\epsilon\alpha_4'] \oplus [\epsilon\rho'].$$

缺少一个 M_{10} 的不可约表示，我们将其记为 ζ。根据弗罗贝尼乌斯互反律和 $d(\zeta) = 16$，我们得到

$$[\epsilon\rho'\bar{\epsilon}] = [\pi] \oplus [\chi\pi] \oplus [\xi] \oplus [\eta_1] \oplus [\eta_2] \oplus 2[\zeta].$$

因此，图 $\mathcal{G}_{M_9}^{M_{10}}$如下。

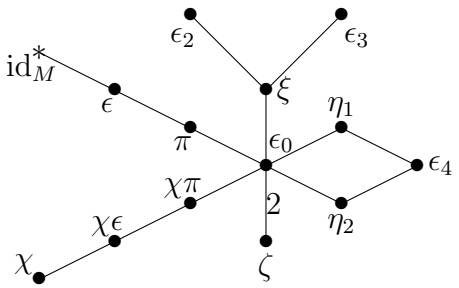

图 6： $\mathcal{G}_{M_9}^{M_{10}}$

定理 4.2。 设 $M \supset N$ 是一个有限指数子因子，且满足 $\mathcal{G}^d_{M\supset N} = \mathcal{G}^{M_{10}}_{M_9}$。那么我们有 $\mathcal{G}_{M\supset N} = \mathcal{G}_{M_{10}>M_9}$。因此，存在一个唯一子因子 $R \subset N$ （在内共轭意义下），它在 M 中不可约，并且满足

$$M = R \rtimes M_{10} \supset N = R \rtimes M_9.$$

我们将证明分为几个步骤。我们按照图 6 的方式参数化 M-M 扇区和 M-N扇区。然后

$$d(\chi) = 1, \quad d(\pi) = 9, \quad d(\xi) = d(\eta_1) = d(\eta_2) = 10, \quad d(\zeta) = 16,$$

$$d(\epsilon) = d(\epsilon_2) = d(\epsilon_3) = \sqrt{10}, \quad d(\epsilon_4) = 2\sqrt{10}, \quad d(\epsilon_0) = 8\sqrt{10}.$$

从图中可以看出， π, $\chi\pi$, χ, ζ 都是自共轭的,

$$\{[\bar{\xi}], [\overline{\eta_1}], [\overline{\eta_1}]\} = \{[\xi], [\eta_1], [\eta_2]\},$$

而这一点结合图对称性可推出

$$[\chi^2] = [\mathrm{id}], \quad [\chi\pi] = [\pi\chi], \quad [\chi\zeta] = [\zeta\chi] = [\zeta], \quad [\chi\xi] = [\xi],$$

$$\{[\chi\eta_1], [\chi\eta_2]\} = \{[\eta_1], [\eta_2]\}.$$

由图得到的基本融合规则为:

$$[\pi\epsilon] = [\epsilon] \oplus [\epsilon_0], \quad [\zeta\epsilon] = 2[\epsilon_0], \quad [\xi\epsilon] = [\epsilon_2] \oplus [\epsilon_3] \oplus [\epsilon_0],$$

$$[\eta_1\epsilon] = [\eta_2\epsilon] = [\epsilon_4] \oplus [\epsilon_0],$$

$$[\epsilon\bar{\epsilon}] = [\mathrm{id}] \oplus [\pi], \quad [\epsilon_2\bar{\epsilon}] = [\epsilon_3\bar{\epsilon}] = [\xi], \quad [\epsilon_4\bar{\epsilon}] = [\eta_1] \oplus [\eta_2],$$

$$[\epsilon_0\bar{\epsilon}] = [\pi] \oplus [\chi\pi] \oplus [\xi] \oplus [\eta_1] \oplus [\eta_2] \oplus 2[\zeta].$$

为简便起见，我们将最后一个扇区记为 Σ 。于是有 $\Sigma = \Sigma\bar{}$ 而结合律可推出

$$[\pi^2] = [\mathrm{id}] \oplus \Sigma, \quad [\xi\pi] = [\xi] \oplus \Sigma, \quad [\eta_1\pi] = [\eta_2] \oplus \Sigma, \quad [\eta_2\pi] = [\eta_1] \oplus \Sigma,$$

$$[\zeta\pi] \oplus [\zeta] = 2\Sigma.$$

弗罗贝尼乌斯互反律可推出

$$\dim(\bar{\xi}\xi, \pi) = \dim(\overline{\eta_2}\eta_1, \pi) = \dim(\overline{\eta_1}\eta_2, \pi) = 2, \tag{4.6}$$

$$\dim(\overline{\eta_i}\xi, \pi) = \dim(\bar{\xi}\eta_i, \pi) = \dim(\overline{\eta_i}\eta_i, \pi) = 1. \tag{4.7}$$

$$\dim(\bar{\xi}\zeta, \pi) = \dim(\overline{\eta_i}\zeta, \pi) = 2, \tag{4.8}$$

$$\dim(\bar{\zeta}\zeta, \pi) = 3. \tag{4.9}$$

引理 4.3。 根据上述记号，我们有 $[\xi] = [\xi]$ 和 $[\bar{\chi}\eta_1] = [\eta_1\chi] = [\eta_2]$。

证明。注意，我们有 $[\chi\xi]=[\xi]$。首先，我们断言 $[\xi\chi]=[\xi]$。事实上，假设情况并非如此。那么我们可以假设 $[\xi\chi]=[\eta_1]$，这意味着

$$[\chi\eta_1]=[\chi\xi\chi]=[\xi\chi]=[\eta_1],$$

因此 $[\chi\eta_2]=[\eta_2]$。由于 $\{[\xi],[\eta_1],[\eta_2]\}=\{[\xi],[\eta_1],[\eta_2]\}$，我们得到矛盾，命题得证。

现在要证明该结论，只需证明 $[\eta_2\chi]=[\eta_3]$。为此，我们假设$[\eta_1\chi]=[\eta_1]$（因此 $[\eta_2\chi]=[\eta_2]$），并将推出矛盾。取共轭后，在这种情况下我们还有 $[\chi\eta_1]=[\eta_1]$ 和 $[\chi\eta_2]=[\eta_2]$。由于$[\xi\xi]$包含重数为 2 的 π 以及 $[\chi\xi]=[\xi]$，因此它包含重数为 2 的 $[\chi\pi]$，由维数计数可得

$$[\bar{\xi}\xi]=[\mathrm{id}]\oplus[\chi]\oplus 2[\pi]\oplus 2[\chi\pi]\oplus 2[\zeta]\oplus 3\times 10\ \dim, \tag{4.10}$$

其中 $3\times 10\dim$ 表示由 $\{\xi,\eta_1,\eta_2\}$中的 3 个元素构成的直和。同理，我们得到

$$[\overline{\eta_1}\eta_1]=[\mathrm{id}]\oplus[\chi]\oplus[\pi]\oplus[\chi\pi]\oplus 80\ \dim,$$

其中最后一部分分解为 $80=5\times 16$ 或 $80=8\times 10$。此外，我们得到

$$[\overline{\eta_1}\eta_2]=[\overline{\eta_2}\eta_1]=2[\pi]\oplus 2[\chi\pi]\oplus 4[\zeta].$$

这意味着

$$\begin{aligned}0&=\dim(\overline{\eta_1}\eta_2,\xi)=\dim(\overline{\eta_1}\eta_2,\eta_1)=\dim(\overline{\eta_1}\eta_2,\eta_2)\\&=\dim(\overline{\eta_2}\eta_1,\xi)=\dim(\overline{\eta_2}\eta_1,\eta_1)=\dim(\overline{\eta_2}\eta_1,\eta_2).\end{aligned} \tag{4.11}$$

此外，弗罗贝尼乌斯互反律意味着

$$d(\eta_1\zeta,\eta_2)=4.$$

由于 $[\zeta\chi]=[\zeta]$，方程 (4.8) 表明

$$\dim(\eta_1\zeta,\chi\pi)=\dim(\eta_1\zeta,\pi\chi)=\dim(\eta_1\zeta,\pi)=2,$$

and

$$[\eta_1\zeta]=2[\pi]\oplus 2[\chi\pi]\oplus 4[\zeta]\oplus 4[\eta_2]\oplus 2\times 10\ \dim.$$

由于 $\dim(\eta_1,\eta_1\zeta)=\dim(\eta_1\eta_1,\zeta)$ 不是 5 就是 0，因此我们得到

$$[\eta_1\zeta]=2[\pi]\oplus 2[\chi\pi]\oplus 4[\zeta]\oplus 4[\eta_2]\oplus 2[\xi],$$

and

$$[\overline{\eta_1}\eta_1]=[\mathrm{id}]\oplus[\chi]\oplus[\pi]\oplus[\chi\pi]\oplus 8\times 10\ \dim. \tag{4.12}$$

类似的推理表明

$$[\overline{\eta_i}\xi]=[\pi]\oplus[\chi\pi]\oplus 2[\zeta]\oplus 5\times 10\ \dim, \tag{4.13}$$

对于对偶映射，除重新标记η_1 和 η_2外，有以下 3 种可能：

(i) $[\xi] = [\xi]$, $[\eta_1] = [\eta_1]$, $[\eta_2] = [\eta_2]$, (ii) $[\xi] = [\xi]$, $[\eta_1] = [\eta_2]$, $[\eta_2] = [\eta_1]$, (iii) $[\xi] = [\eta_1]$, $[\eta_1] = [\xi]$, $[\eta_2] = [\eta_2]$,

然而，直接计算表明，在每种情况下，都不存在与方程(4.10)、(4.11)、(4.12)和(4.13)一致的融合规则。 □

引理 4.4. 采用上述记号，

$$[\chi\epsilon_2] = [\epsilon_3],$$

$$[\epsilon_2\overline{\epsilon_2}] = [\mathrm{id}] \oplus [\pi],$$

$$[\pi\epsilon_2] = [\epsilon_0] \oplus [\epsilon_2], \quad [\pi\epsilon_3] = [\epsilon_0] \oplus [\epsilon_3],$$

$$[\pi\epsilon_4] = 2[\epsilon_0] \oplus [\epsilon_4],$$

$$[\pi\epsilon_0] = [\epsilon] \oplus [\chi\epsilon] \oplus [\epsilon_2] \oplus [\epsilon_3] \oplus 2[\epsilon_4] \oplus 8[\epsilon_0].$$

证明。由于 $d(\epsilon_2\overline{\epsilon_2}) = 10$，且 $\epsilon_2\overline{\epsilon_2}$ 包含恒等对象，我们只有以下两种可能：

$$[\epsilon_2\overline{\epsilon_2}] = [\mathrm{id}] \oplus [\pi],$$

$$[\epsilon_2\overline{\epsilon_2}] = [\mathrm{id}] \oplus [\chi\pi].$$

由于无论如何 $\epsilon_2\epsilon_2$ 都不包含 χ，因此我们有 $[\chi\epsilon_2] \neq [\epsilon_2]$，于是 $[\chi\epsilon_2] = [\epsilon_3]$。

假设 $[\epsilon_2\epsilon_2] = [\text{恒等对象}] \oplus [\chi\pi]$ 成立。那么

$$\dim(\eta_1\epsilon_2, \eta_1\epsilon_2) = \dim(\eta_1, \eta_1\epsilon_2\overline{\epsilon_2}) = \dim(\eta_1, \eta_1(\mathrm{id} \oplus \chi\pi)) = 1 + \dim(\eta_1, \eta_2\pi) = 3.$$

由于 $d(\eta_1\epsilon_2) = 10\sqrt{10}$，我们有

$$[\eta_1\epsilon_2] = [\epsilon_0] \oplus 2 \times \sqrt{10}\ \dim.$$

然而，我们有

$$\dim(\eta_1\epsilon_2, \epsilon) = \dim(\eta_1, \epsilon\overline{\epsilon_2}) = \dim(\eta_1, \overline{\xi}) = \dim(\eta_1, \xi) = 0,$$

$$\dim(\eta_1\epsilon_2, \chi\epsilon) = \dim(\eta_2\epsilon_2, \epsilon) = \dim(\eta_2, \epsilon\overline{\epsilon_2}) = \dim(\eta_2, \overline{\xi}) = \dim(\eta_2, \xi) = 0,$$

$$\dim(\eta_1\epsilon_2, \epsilon_2) = \dim(\eta_1, \mathrm{id} \oplus \chi\pi) = 0.$$

$$\dim(\eta_1\epsilon_2, \epsilon_3) = \dim(\eta_1\epsilon_2, \chi\epsilon_2) = \dim(\eta_1, \chi \oplus \pi) = 0,$$

从而得到矛盾。因此我们得到 $[\epsilon_2\epsilon_2] = [\text{恒等对象}] \oplus [\pi]$。

由弗罗贝尼乌斯互反律可知，$\dim(\pi\epsilon_2, \epsilon_2) = 1$。由于 $d(\pi\epsilon_2) = 9\sqrt{10}$，我们得到 $[\pi\epsilon_2] = [\epsilon_2] \oplus [\epsilon_0]$，并且同理可得 $[\pi\epsilon_3] = [\epsilon_3] \oplus [\epsilon_0]$。

根据结合律,

$$\begin{aligned}
&2[\pi\epsilon_0] = [\pi\zeta\epsilon] = [\overline{\zeta\pi}\epsilon] \\
&= [(2\pi \oplus 2\chi\pi \oplus 2\xi \oplus 2\eta_1 \oplus 2\eta_2 \oplus 3\zeta)\epsilon] \\
&= 2([\epsilon] \oplus [\epsilon_0]) \oplus 2([\chi\epsilon] \oplus [\epsilon_0]) \oplus 2([\epsilon_2] \oplus [\epsilon_3] \oplus [\epsilon_0]) \\
&\oplus 2([\epsilon_4] \oplus [\epsilon_0]) \oplus 2([\epsilon_4] \oplus [\epsilon_0]) \oplus 6[\epsilon_0],
\end{aligned}$$

这说明了最后一个方程。弗罗贝尼乌斯互反律结合目前得到的方程，推出了第四个方程。 □

⁀⁀定理 *4.2* 的证明。只需证明 $\mathcal{G}_{M\supset N} = \mathcal{G}_{M_{10}>M_9}$ （即 $\mathcal{G}_{(1^42)\ ,\ 1}$）。令 $[\bar{\epsilon}\epsilon] = [\mathrm{id}] \oplus [\sigma]$ 为不可约分解。由于

$$[\epsilon\bar{\epsilon}\epsilon] = [(\mathrm{id} \oplus \pi)\epsilon] = 2[\epsilon] \oplus [\epsilon_0],$$

我们得到 $[\epsilon\sigma] = [\epsilon] \oplus [\epsilon_0]$。

由于

$$\dim(\bar{\epsilon}\chi\epsilon, \bar{\epsilon}\chi\epsilon) = \dim(\epsilon\bar{\epsilon}\chi, \chi\epsilon\bar{\epsilon}) = \dim(\chi \oplus \pi\chi, \chi \oplus \chi\pi) = 2,$$

扇区 $\bar{\epsilon}\chi\epsilon$ 分解为两个不同的不可约对象。由于 $d(\bar{\epsilon}\chi\epsilon) = 10$ 且

$$[\epsilon\bar{\epsilon}\chi\epsilon] = [(\mathrm{id} \oplus \pi)\chi\epsilon] = [\chi\epsilon] \oplus [\chi][\pi\epsilon] = 2[\chi\epsilon] \oplus [\mu_0],$$

$\bar{\epsilon}\chi\epsilon$ 的一个不可约分量是 N 的一个自同构，记作 α_1，而弗罗贝尼乌斯互反律推出 $[\chi\epsilon] = [\epsilon\alpha_1]$。因此

$$[\bar{\epsilon}\chi\epsilon] = [\sigma\alpha_1] \oplus [\alpha_1],$$

且 $[\epsilon\sigma\alpha_1] = [\chi\epsilon] \oplus [\epsilon_0]$。由于

$$[\epsilon\sigma\alpha_1] = [(\epsilon \oplus \epsilon_0)\alpha_1],$$

我们得到 $[\epsilon_0][\alpha_1] = [\epsilon_0]$。

同理，引理 4.4 推出

$$\dim(\bar{\epsilon}\epsilon_2, \bar{\epsilon}\epsilon_2) = (\epsilon\bar{\epsilon}, \epsilon_2\overline{\epsilon_2}) = \dim(\mathrm{id} \oplus \pi, \mathrm{id} \oplus \pi) = 2,$$

并且存在满足 $[\epsilon_2] = [\epsilon\alpha_2]$ 的 $\alpha_2 \in \mathrm{Aut}(N)$，且

$$[\bar{\epsilon}\epsilon_2] = [\sigma\alpha_2] \oplus [\alpha_2].$$

令 $[\alpha_3] = [\alpha_1\alpha_2]$，我们得到

$$[\epsilon_3] = [\chi\epsilon_2] = [\chi\epsilon\alpha_2] = [\epsilon\alpha_1\alpha_2] = [\epsilon\alpha_3],$$

and

$$[\bar{\epsilon}\epsilon_3] = [\sigma\epsilon_3] \oplus [\alpha_3].$$

由于

$$[\epsilon\bar{\epsilon}\epsilon_2] = [(\mathrm{id} \oplus \pi)\epsilon_2] = 2[\epsilon_2] \oplus [\epsilon_0],$$

我们得到 $[\epsilon\sigma\alpha_2] = [\epsilon_2] \oplus [\epsilon_0]$。由于

$$[\epsilon\sigma\alpha_2] = [(\epsilon \oplus \epsilon_0)\alpha_2] = [\epsilon\alpha_2] \oplus [\epsilon_0\alpha_2],$$

我们得到 $[\epsilon_0\alpha_2] = [\epsilon_0]$，而且 $[\epsilon_0\alpha_3] = [\epsilon_0]$ 也如此。

引理 4.4 推出

$$\dim(\bar{\epsilon}\epsilon_4, \bar{\epsilon}\epsilon_4) = \dim(\epsilon_4, \epsilon\bar{\epsilon}\epsilon_4) = (\epsilon_4, (\mathrm{id} \oplus \pi)\epsilon_4) = 1 + (\epsilon_4, \pi\epsilon_4) = 2,$$

并且 $\bar{\epsilon}\epsilon_4$ 分解为两个不同的不可约对象，记作 $\hat{}\eta_1$ 和 $\hat{}\eta_2$。另一方面，我们有

$$[\epsilon\bar{\epsilon}\epsilon_4] = [(\mathrm{id} \oplus \pi)\epsilon_4] = 2[\epsilon_4] \oplus 2[\epsilon_0].$$

因此有以下两种可能：

(i) $[\epsilon\hat{}\eta_1] = [\epsilon\hat{}\eta_2] = [\epsilon_4] \oplus [\epsilon_0]$。

(ii) $[\epsilon\hat{}\eta_1] = [\epsilon_4] \oplus 2[\epsilon_0]$ 且 $[\epsilon\hat{}\eta_2] = [\epsilon_4]$。

假设情形 (i) 成立。那么 $d(\hat{}\eta_1) = d(\hat{}\eta_2) = 10$。引理 4.4 推出

$$\dim(\bar{\epsilon}\epsilon_0, \bar{\epsilon}\epsilon_0) = (\epsilon_0, \epsilon\bar{\epsilon}\epsilon_0) = 1 + \dim(\epsilon_0, \pi\epsilon_0) = 9.$$

因此，弗罗贝尼乌斯互反律以及迄今得到的融合规则表明，存在互不相同的不可约对象 ρ_1，ρ_2，ρ_3，满足 $d(\rho_1) = d(\rho_2) = d(\rho_3) = 8$

$$[\bar{\epsilon}\epsilon_0] = \bigoplus_{i=0}^{3} [\sigma\alpha_i] \oplus [\hat{\eta}_1] \oplus [\hat{\eta}_2] \oplus [\rho_1] \oplus [\rho_2] \oplus [\rho_3],$$

$$[\epsilon\rho_1] = [\epsilon\rho_2] = [\epsilon\rho_3] = [\epsilon_0],$$

其中 α_0 =为恒等对象。对于由 $\bar{\epsilon}\epsilon$生成的融合范畴 $\mathcal{C}$，我们有

$$\mathrm{Irr}(\mathcal{C}) = \{[\alpha_i]\}_{i=0}^{4} \sqcup \{[\sigma\alpha_i]\}_{i=0}^{3} \sqcup \{[\hat{\eta}_1], [\hat{\eta}_2], [\rho_1], [\rho_2], [\rho_3]\}.$$

设 $\Lambda = \{[\alpha_i]\}_{i=0}^{4}$，它构成一个 4 阶群。于是，$\Lambda$通过左乘对 $\{[\rho_1], [\rho_2], [\rho_3]\}$的作用有一个不动点，我们不妨设该不动点为 $[\rho_1]$。因此，在 $N \supset \rho_1(N)$ 与 ρ_1 之间存在一个指数为 4 的中间子因子，而 ρ_1 分解为$\rho_1 = \mu_1\mu_2$，其中 $d(\mu_1) = 2$，$d(\mu_2) = 4$。由于 $\mu_2\mu_2$ 包含于 $\rho_1\rho_1$，它属于$\mathcal{C}$。然而，我们有 $d(\bar{\mu}\mu) = 16$，且 $\bar{\mu}\mu$ 含有 1、2 或 4 个自同构，这不可能，因为 $d(\sigma\alpha_i) = 9$，$d(\hat{}\eta_i) = 10$，并且 $d(\rho_i) = 8$。因此，（i）不会发生。

现在只剩下情形（ii）。在这种情形下，我们有 $d(\hat{\eta}_1) = 2$，并且

$$[\bar{\epsilon}\epsilon_4] = [\bar{\epsilon}\epsilon\hat{\eta}_2] = [(\mathrm{id} \oplus \sigma)\hat{\eta}_2],$$

推出 $[\hat{\eta}_1] = [\sigma\hat{\eta}_2]$。由弗罗贝尼乌斯互反律和 $\dim(\bar{\epsilon}\epsilon_0,\ \bar{\epsilon}\epsilon_0) = 9$ 可知，存在一个不可约的 ρ 满足

$$[\bar{\epsilon}\epsilon_0] = \bigoplus_{i=0}^{3}[\sigma\alpha_i] \oplus 2[\sigma\hat{\eta}_2] \oplus [\rho],$$

$$[\epsilon\rho] = [\epsilon_0],$$

这表明 $\mathcal{G}_{M\supset N} = \mathcal{G}_{(1^4 2),\ 1}$。 □

5 关于 $(PSL_2(q)\ PG_1(q))$ 的 Goldman 型定理

定理 5.1。设 $M \supset N$ 是一个有限指数子因子，满足 $\mathcal{G}_{M\supset N} = \mathcal{G}_{(1^m),\ 2}$。那么 $q = 1 + 2m$ 是奇数素数幂，并且存在一个子因子 $R \subset N$，在内共轭意义下唯一，使得 R 在 M 中不可约，且

$$M = R \rtimes PSL_2(q) \supset N = R \rtimes \Lambda,$$

其中

$$\Lambda = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix};\ a \in \mathbb{F}_q^{\times},\ b \in \mathbb{F}_q\}/\{\pm 1\}.$$

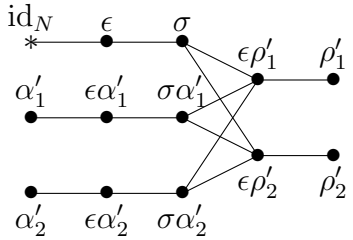

图 7：$\mathcal{G}_{(1^3),\ 2}$

证明。注意，如果 $m = 1$，我们有 $\widetilde{\mathcal{G}_{(1)}}_{,\ 2} = E_6^{(1)} = \mathcal{G}_{(1^3),\ 1}$，结论便由 [8]（或定理 3.1）得出，因为 $(\mathfrak{A}_4,\ X_4) \cong (PSL_2(3)\ PG_1(3))$。以下假设 $m > 1$。

令 $\epsilon\colon N \hookrightarrow M$ 为包含映射，并令 $[\bar{\epsilon}\epsilon] = [\mathrm{id}] \oplus [\sigma]$ 为不可约分解。令 $\mathcal{C}$ 为由 $\bar{\epsilon}\epsilon$ 生成的融合范畴，并令 I 为 $\mathcal{C}$ 中可逆对象（等价类）构成的群。于是 $|I| = m$。

我们可以分别对不可约的 N-N和 M-N扇区作如下参数化：

$$\{\alpha_i'\}_{i\in I} \sqcup \{\sigma\alpha_i'\}_{i\in I} \sqcup \{\rho_1', \rho_2'\},$$

$$\{\epsilon\alpha_i'\}_{i\in I}\sqcup\{\epsilon\rho_1',\epsilon\rho_2'\},$$

其性质如下：

$$d(\alpha_i')=1,\quad d(\epsilon)=\sqrt{2+2m},\quad d(\sigma)=1+2m,\quad d(\rho_1')=d(\rho_2')=m,$$

$$[\bar{\epsilon}\epsilon]=[\mathrm{id}]\oplus[\sigma],$$
$$[\alpha_{i_1}'\alpha_{i_2}']=[\alpha_{i_1i_2}'],$$
$$[\epsilon\sigma]=[\epsilon]\oplus[\epsilon\rho_1]\oplus[\epsilon\rho_2],$$
$$[\sigma\rho_1']=[\sigma\rho_2']=\bigoplus_{i\in I}[\sigma\alpha_i'],\tag{5.1}$$
$$[\sigma^2]=[\mathrm{id}]\oplus[\rho_1']\oplus[\rho_2']\oplus 2\bigoplus_{i\in I}[\sigma\alpha_i'].\tag{5.2}$$

根据 I 的定义，我们有 $[\alpha_i']=\overline{[\alpha_{i^{-1}}']}$。我们可以通过 $[(\sigma\alpha_i')]=[\sigma\alpha_{i^*}']$ 在 I 中引入另一个对合。我们还在 $\{1,2\}$ 中引入一个对合 $[\rho_j']=[\rho_{\bar{j}}']$。对方程 (5.1) 取共轭，也有

$$[\rho_1'\sigma]=[\rho_2'\sigma]=\bigoplus_{i\in I}[\sigma\alpha_i'].$$

我们声称存在一个 $\mathcal{C}$ 的融合子范畴 $\mathcal{C}_1$，满足

$$\mathrm{Irr}(\mathcal{C}_1)=\{\alpha_i'\}_{i\in I}\sqcup\{\rho_1,\rho_2\}.$$

事实上，令

$$I_j=\{i\in I;\ [\alpha_i'][\rho_j']=[\rho_j']\},$$
$$I_j'=\{i\in I;\ [\rho_j'][\alpha_i']=[\rho_j']\}.$$

由于群 I 通过左乘（也通过右乘）作用在含两个点的集合 $\{[\rho_1'],[\rho_2']\}$ 上，因此有以下两种情况。

(i) $I_1=I_2=I$。在这种情况下，我们还有 $I_1'=I_2'=I$，如 $\{[\rho_1'],\overline{\{[\rho_2']\}}\}=\{[\rho_1'],[\rho_2']\}$ 所示。

(ii) $|I_1|=|I_2|=m/2$。在这种情况下，我们还有 $|I_1'|=|I_2'|=m/2$。

假设 (i) 首先出现。于是 Fobenius互反律推出

$$[\rho_j'\overline{\rho_j'}]=\bigoplus_{i\in I}[\alpha_i']\oplus a_{j1}[\rho_1']\oplus a_{j2}[\rho_2']\oplus\bigoplus_{i\in I}b_{ji}[\sigma\alpha_i'].$$

Let

$$b_j=\sum_{i\in I}b_{ji}.$$

Then

$$m^2=m+(a_{j1}+a_{j2})m+b_j(2m+1),$$

并且我们看到 m 整除 b_j。若 $b_j \geq m$，则会有 $m \geq 2m+1$，这就矛盾了。因此，对所有 i，j，都有 $b_{ji} = 0$。弗罗贝尼乌斯互反律表明，$[\rho_1'\rho_2']$ 和 $[\rho_2'\rho_1']$ 都不包含任何自同构；通过与上述类似的论证可知，$\rho_1'\rho_2'$ 和 $\rho_2'\rho_1'$ 也都是 $\{\alpha_i'\} \sqcup \{\rho_1', \rho_2'\}$ 中扇区的直和。这就证明了情形 (i) 下的断言。

现在假设情形（ii）成立。那么 $l = m/2$ 是一个自然数。与上述类似的论证表明，对于

$$a_j = \dim(\rho_j'\overline{\rho_j'}, \rho_1') + \dim(\rho_j'\overline{\rho_j'}, \rho_2'),$$

$$b_j = \sum_{i \in I} \dim(\rho_j'\overline{\rho_j'}, \sigma\alpha_i'),$$

我们有

$$4l^2 = l + 2a_j l + b_j(4l+1).$$

这表明 l 整除 b_j，因此 $b_j = 0$。注意，存在满足$[\rho_1'] = [\alpha_{i_0}'\rho_2']$的 $i_0 \in I$，这意味着

$$[\rho_1'\overline{\rho_2'}] = [\rho_1'\overline{\rho_1'}\alpha_{i_0}'], \quad [\rho_2'\overline{\rho_1'}] = [\alpha_{i_0^{-1}}'\rho_1'\overline{\rho_1'}].$$

因此，$\rho_{j_1}'\rho_{j_2}'$、$\overline{1} \leq j_1, j_2 \leq 2$是 $\{\alpha_i'\} \sqcup \{\rho_1', \rho_2'\}$中扇区的直和，这证明了情形（ii）下的结论。

证明的其余部分与定理 4.1 的证明非常相似，我们在此简要说明，但略去最后确定 Γ的群结构的部分。定理 2.3 和方程 (5.2) 表明，在 N与 σ之间存在唯一的中间子因子 P（N），使得若我们设 ι： $P \hookrightarrow N$ 表示包含映射，则有

$$[\iota\bar{\iota}] = [\mathrm{id}] \oplus [\rho_1] \oplus [\rho_2].$$

此外，存在满足 $[\sigma] = [\iota\tau\bar{\iota}]$的 $\tau \in \mathrm{Aut}(P)$。$\mathcal{C}_1$ 的融合规则表明，对偶主图 $\mathcal{G}_{N\supset M}^d$ 是$\mathcal{G}_{(1^m),\ 2}$，而定理 3.1 表明 $\mathcal{G}_{M\supset N}$ 也是$\mathcal{G}_{(1^m),\ 2}$。群 I 现在是循环群 $\mathbb{Z}_m$。令 $\mathcal{C}_2$ 为由 $\bar{\iota}\iota$ 生成的融合范畴。于是我们可以对 $\mathrm{Irr}(\mathcal{C}_2)$ 进行参数化，使得

$$\mathrm{Irr}(\mathcal{C}_2) = \{[\alpha_i]\}_{i\in I} \sqcup \{[\rho_1], [\rho_2]\},$$

$$[\iota\alpha_i] = [\alpha_i'\iota],$$

$$[\bar{\iota}\iota] = [\mathrm{id}] \oplus [\rho_1] \oplus [\rho_2].$$

应用定理 3.1，我们可知，存在唯一的子因子 $R \subset P$（在内共轭意义下），它在 M 中不可约，并且存在一个本原弗罗贝尼乌斯群 $K \rtimes H$，满足 $|H| = m$、$|K| = 1+2m$，以及它在 R 上的一个外作用 β，使得

$$N = R \rtimes_\beta (K \rtimes H) \supset P = R \rtimes_\beta H.$$

注意，数 $q = 1 + 2m$ 是一个奇素数幂 p^k，且 $K = \mathbb{Z}_p^k$、$H = \mathbb{Z}_m$。此外，存在一个包含 $K \rtimes H$ 的群 Γ，使得 β 可扩张为 Γ 的一个外作用 γ，满足 $M = R \rtimes_\gamma \Gamma$。

从图 $\mathcal{G}_{M\supset N}$ 可以看出，Γ 在 $\Gamma/(K \rtimes H)$ 上的作用是 Frobenius 群 $K \rtimes H$ 在 $(K \rtimes H)/H$ 上作用的一个二重传递但非 3- 传递的扩张。注意，$|\Gamma| = (2m + 2)(2m + 1)m$。因此，[10, 第 XI 章，定理 1.1] 表明Γ 是一个 Zassenhaus 群。Γ 的阶表明它并非 Suzuki 群之一。由于 Γ 不是 3-传递的，我们由 [10, 第 XI 章，定理 11.16] 得出$\Gamma = PSL_2(q)$。 □

6 Goldman 型定理：关于锐 4-传递置换群

由于指标为 5 的有限深子因子已在 [19], 中得到完全分类，以下定理的唯一目的就是说明如何从主图中找到一个子因子 R 及其上的 $\mathfrak{S}_5$ 作用。

定理 6.1。设 $L \supset M$ 是一个因子的有限指数包含，且 $\mathcal{G}_{L\supset M} = \mathcal{G}_{(\mathfrak{S}_5,X_5)}$。那么存在唯一子因子 $R \subset M$（在内共轭意义下唯一），使得 $R' \cap L = \mathbb{C}$，并且存在 $\mathfrak{S}_5$ 在 R 上的外作用 γ，满足

$$L = R \rtimes_\gamma \mathfrak{S}_5 \supset M = R \rtimes_\gamma \mathfrak{S}_4.$$

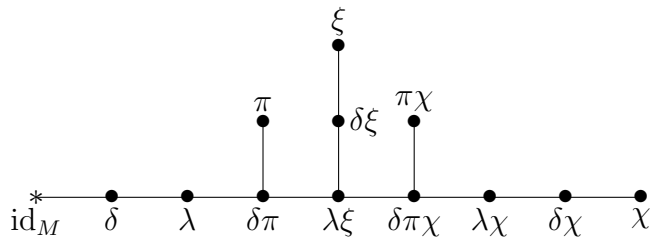

图 8：$\mathcal{G}_{(\mathfrak{S}_5,X_5)}$

证明。我们采用第2.5小节中所述的策略。

(1) 令 δ: $M \hookrightarrow L$ 为包含映射，并令 $[\delta\delta] = [\mathrm{id}] \oplus [\lambda]$ 为不可约分解。我们按照图 8 的方式对不可约 M-M 扇区以及由 δ 生成的 L-M 扇区进行参数化。于是有

$$d(\lambda) = 4, \quad d(\pi) = 3, \quad d(\xi) = 2, \quad d(\chi) = 1, \quad d(\delta) = \sqrt{5}.$$

从图中可以看出，所有 M-M 扇区都是自共轭的，这意味着$[\chi\lambda] = [\lambda\chi]$, $[\chi\pi] = [\pi\chi]$。图对称性意味着 $[\xi\chi] = [\xi]$，而由于 ξ 是自共轭的，我们得到

$$[\xi^2] = [\mathrm{id}] \oplus [\chi] \oplus [\xi]$$

通过维数计数。

由图得到的基本融合规则为

$$[\lambda^2] = [\mathrm{id}] \oplus [\lambda] \oplus [\pi] \oplus [\lambda\xi], \tag{6.1}$$

$$[\lambda\pi] = [\lambda] \oplus [\lambda\xi],$$

$$[\lambda(\lambda\xi)] = [\lambda] \oplus [\lambda\chi] \oplus [\pi] \oplus [\pi\chi] \oplus [\xi] \oplus 2[\lambda\xi].$$

取共轭后，我们还得到

$$[\pi\lambda] = [\lambda] \oplus [\lambda\xi].$$

现在，利用弗罗贝尼乌斯互反律和结合律直接计算可得以下融合规则：

$$[\pi^2] = [\mathrm{id}] \oplus [\pi] \oplus [\pi\chi] \oplus [\xi]$$

$$[\pi\xi] = [\xi\pi] = [\pi] \oplus [\pi\chi].$$

令 $\mathcal{C}$ 为由 $\delta\delta$生成的融合范畴。那么，上述融合规则表明，存在 $\mathcal{C}$ 的一个融合子范畴 $\mathcal{C}_1$，使得

$$\mathrm{Irr}(\mathcal{C}_1) = \{\mathrm{id}, \chi, \xi, \pi, \pi\chi\}.$$

(2) 定理 2.3 和方程(6.1)表明，在 M 和 $\lambda(M)$之间存在唯一的中间子因子 N，使得若 $\epsilon: N \hookrightarrow M$ 是包含映射，则有

$$[\epsilon\bar{\epsilon}] = [\mathrm{id}] \oplus [\pi].$$

与引理 3.2 的证明相同，存在满足$[\lambda] = [\epsilon\varphi\bar{\epsilon}]$的 $\varphi \in \mathrm{Aut}(N)$。

(3) 注意，我们有 $[M: N] = 1 + d(\pi) = 4$。得益于指数4子因子的分类（见 [21, 第3.2]小节）以及 $\mathrm{Irr}(\mathcal{C}_1)$，我们可以看出 $\mathcal{G}^d_{M\supset N}$ 是 Coxeter 图 $E_7^{(1)}$，$\mathcal{G}_{M\supset N}$ 也同样如此。注意，我们有 $E_7^{(1)} = \widetilde{\mathcal{G}_{(1^2\ ),\ 1}}$，以及 $(L(3)\ PG_1(3)) \cong (\mathfrak{S}_4,\ X_4)$。令 $\mathcal{C}_2$为由 $\bar{\epsilon}\epsilon$生成的融合范畴。与定理 4.1 中一样，我们可以将 $\mathrm{Irr}(\mathcal{C}_2)$ 参数化为

$$\mathrm{Irr}(\mathcal{C}_2) = \{\mathrm{id}, \alpha', \rho', \sigma, \sigma\alpha'\},$$

具有以下性质：

$$d(\alpha') = 1, \quad d(\rho') = 2, \quad d(\sigma) = 3,$$

$$[\alpha'^2] = [\mathrm{id}],$$

$$[\alpha'\rho] = [\rho'\alpha'] = [\rho'],$$

$$[\rho'^2] = [\mathrm{id}] \oplus [\alpha'] \oplus [\rho'],$$

$$[\sigma^2] = [\mathrm{id}] \oplus [\sigma] \oplus [\rho'] \oplus [\sigma\alpha'],$$
$$[\alpha'\sigma] = [\sigma\alpha'],$$
$$[\sigma\rho'] = [\rho'\sigma] = [\sigma] \oplus [\sigma\alpha'],$$
$$[\bar{\epsilon}\epsilon] = [\mathrm{id}] \oplus [\sigma].$$

（4）定理 4.1 表明，存在唯一子因子 $R \subset N$，在内共轭意义下唯一，使得 $R' \cap M = \mathbb{C}$，并且存在 $\mathfrak{S}_4$ 在 R 上的外作用 β，满足

$$M = R \rtimes_\beta \mathfrak{S}_4 \supset N = R \rtimes_\beta \mathfrak{S}_3.$$

为使记号与定理 3.1 和定理 4.1 中的记号一致，我们令 $P = R \rtimes_\beta \mathfrak{S}_3 \subset N$，并令 ι：$P \hookrightarrow N$ 和 κ：$R \hookrightarrow P$ 为包含映射。令$\epsilon_1 = \epsilon\iota\kappa$。于是，$\epsilon_1\epsilon_1$ 对应于 $\mathfrak{S}_4$的正则表示，且

$$[\epsilon_1\overline{\epsilon_1}] = [\mathrm{id}] \oplus [\chi] \oplus 2[\xi] \oplus 3[\pi] \oplus 3[\pi\chi].$$

因此，由于 $[\delta\delta] = [$恒等对象$] \oplus [\lambda]$,

$$\dim(\delta\epsilon_1, \delta\epsilon_1) = \dim(\bar{\delta}\delta, \epsilon_1\overline{\epsilon_1}) = 1,$$

并且 $L \supset R$ 是不可约的。

(5) 注意，我们有 $[L\colon R] = 120$。另一方面，

$$\dim(\delta\epsilon_1\overline{(\delta\epsilon_1)}, \delta\epsilon_1\overline{(\delta\epsilon_1)}) = \dim(\bar{\delta}\delta\epsilon_1\overline{\epsilon_1}, \epsilon_1\overline{\epsilon_1}\bar{\delta}\delta).$$

注意，$[\lambda]$ 与 $[\epsilon_1\epsilon_1]$ 可交换，且$[(\epsilon_1\epsilon_1)^2] = |\mathfrak{S}_4|[\epsilon_1\epsilon_1]$。因此

$$\begin{aligned}\dim(\bar{\delta}\delta\epsilon_1\overline{\epsilon_1}, \epsilon_1\overline{\epsilon_1}\bar{\delta}\delta) &= \dim(\bar{\delta}\delta\epsilon_1\overline{\epsilon_1}, \bar{\delta}\delta\epsilon_1\overline{\epsilon_1}) \\ &= \dim((\bar{\delta}\delta)^2, (\epsilon_1\overline{\epsilon_1})^2) = 24\dim((\mathrm{id} \oplus \lambda)^2, \epsilon_1\overline{\epsilon_1}) = 120.\end{aligned}$$

因此，包含 $L \supset R$ 的深度为 2。

(6) 我们记 $\iota_3 = \iota\kappa$。由引理 2.5，得

$$\dim(\varphi\bar{\epsilon}\epsilon\iota_3\overline{\iota_3}\varphi^{-1}, \bar{\epsilon}\epsilon\iota_3\overline{\iota_3}) = |\mathfrak{S}_3| = 6.$$

注意，$\iota_3\iota_3$ 对应于 Rep($\mathfrak{S}_3$) 中的正则表示，并且

$$[\iota_3\overline{\iota_3}] = [\mathrm{id}] \oplus [\alpha'] \oplus 2[\rho'].$$

Thus

$$[\bar{\epsilon}\epsilon\iota_3\overline{\iota_3}] = [(\mathrm{id} \oplus \sigma)(\mathrm{id} \oplus \alpha' \oplus 2\rho')] = [\mathrm{id}] \oplus [\alpha'] \oplus 2[\rho'] \oplus 3[\sigma] \oplus 3[\sigma\alpha'].$$

维数计数意味着

$$\dim(\varphi(\mathrm{id} \oplus \alpha' \oplus 2\rho')\varphi^{-1}, \mathrm{id} \oplus \alpha' \oplus 2\rho') = 6,$$

以及 $[\varphi\overline{\iota_3}\iota_3\varphi^{-1}]=[\overline{\iota_3}\iota_3]$。

现在我们可以对 $\mathfrak{S}_3$ 应用引理 2.6，从而得到满足 $[\varphi\epsilon_1]=[\epsilon_1\varphi_1]$ 的 $\varphi_1\in \mathrm{Aut}(R)$。引理 2.4 表明，存在一个包含 $\mathfrak{S}_4$ 的群 Γ，使得 β 扩张为满足 $L=R\rtimes_\gamma\Gamma$ 的 Γ 的外作用 γ。注意，$|\Gamma|=[L:\ R]=120$。由于图 $\mathcal{G}_{(\mathfrak{S}_5,X_5)}$ 表明，Γ 在 $\Gamma/\mathfrak{S}_4$ 上的作用是 $(\mathfrak{S}_4,X_4)$ 的一个 3-传递扩张，因此我们得出结论 $\Gamma=\mathfrak{S}_5$。□

剩下的两种情形最为微妙，因为在步骤 (6) 中，我们无法对 $\mathfrak{A}_4=H(2^2)$ $=\mathbb{Z}_2^2\rtimes\mathbb{Z}_3$ 或 $M_9=\underbrace{S(3^2)}=\mathbb{Z}_3^3\rtimes Q_8$ 应用引理 2.6。

由于 $\mathcal{G}_{(\mathfrak{A}_6,X_6)}=\mathcal{G}_{\mathfrak{A}_4}^{\mathfrak{A}_5}$，我们可以从 $\mathfrak{A}_5$ 与 $\mathfrak{A}_4$ 之间的诱导-约化图 $\mathcal{G}_{\mathfrak{A}_4}^{\mathfrak{A}_5}$ 中得到它（关于后者，参见例如 [19]）。

定理 6.2. 设 $L\supset M$ 是因子的有限指数包含，且 $\mathcal{G}_{L\supset M}=\mathcal{G}_{(\mathfrak{A}_6,X_6)}$。那么，存在唯一子因子 $R\subset M$（在内共轭意义下唯一），使得 $R'\cap L=\mathbb{C}$；并且存在 $\mathfrak{A}_6$ 在 R 上的外作用 γ，满足

$$L=R\rtimes_\gamma\mathfrak{A}_6\supset M=R\rtimes_\gamma\mathfrak{A}_5.$$

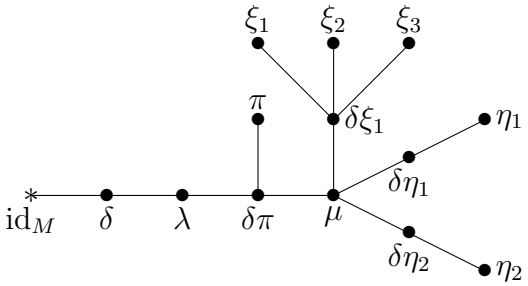

图 9：$\mathcal{G}_{(\mathfrak{A}_6,X_6)}$

证明。(1) 设 $\delta:\ M\hookrightarrow L$ 为包含映射，且 $[\delta\delta]=[\mathrm{id}]\oplus[\lambda]$ 为不可约分解。我们按照图 9 对不可约的 M-M 扇区以及由 δ 生成的 L-M 扇区进行参数化。于是有

$$d(\lambda)=d(\xi_1)=d(\xi_2)=d(\xi_3)=5,\quad d(\pi)=4,\quad d(\mu)=15,\quad d(\eta_1)=d(\eta_2)=3,$$

$$d(\delta)=\sqrt{6}.$$

从图中可以看出，λ、π 和 μ 都是自共轭的，并且

$$\{[\overline{\xi_1}],[\overline{\xi_2}],[\overline{\xi_3}]\}=\{[\xi_1],[\xi_2],[\xi_3]\},\quad \{[\overline{\eta_1}],[\overline{\eta_2}]\}=\{[\eta_1],[\eta_2]\}.$$

为简便起见，我们使用记号 $[\xi_i]=[\overline{\xi_i}]$ 和 $[\eta_j]=[\eta_{\bar{j}}]$。

由图及其共轭得到的基本融合规则为

$$[\lambda^2]=[\mathrm{id}]\oplus[\lambda]\oplus[\pi]\oplus[\mu],\tag{6.2}$$

$$[\lambda\pi] = [\pi\lambda] = [\lambda] \oplus [\mu], \tag{6.3}$$

$$[\lambda\mu] = [\mu\lambda] = [\lambda] \oplus [\pi] \oplus [\xi_1] \oplus [\xi_2] \oplus [\xi_3] \oplus [\eta_1] \oplus [\eta_2] \oplus 3[\mu], \tag{6.4}$$

$$[\lambda\xi_i] + [\xi_i] = [\xi_i\lambda] \oplus [\xi_i] = [\xi_1] \oplus [\xi_2] \oplus [\xi_3] \oplus [\mu], \tag{6.5}$$

$$[\lambda\eta_i] = [\eta_i\lambda] = [\mu]. \tag{6.6}$$

根据结合律，我们得到

$$[\pi^2] \oplus [\mu\pi] = [\mathrm{id}] \oplus [\lambda] \oplus [\pi] \oplus [\xi_1] \oplus [\xi_2] \oplus [\xi_3] \oplus [\eta_1] \oplus [\eta_2] \oplus 3[\mu], \tag{6.7}$$

$$[\pi\mu] \oplus [\mu^2] = [\text{恒等对象}] \oplus 4[\lambda] \oplus 3[\pi] \oplus 4[\xi_1] \oplus 4[\xi_2] \oplus 4[\xi_3] \oplus 2[\eta_1] \oplus 2[\eta_2] \oplus 12[\mu], \tag{6.8}$$

$$[\pi\xi_i] \oplus [\mu\xi_i] = [\xi_i] \oplus [\lambda] \oplus [\pi] \oplus [\xi_1] \oplus [\xi_2] \oplus [\xi_3] \oplus [\eta_1] \oplus [\eta_2] \oplus 4[\mu]. \tag{6.9}$$

$$[\eta_i] \oplus [\pi\eta_i] \oplus [\mu\eta_i] = [\lambda] \oplus [\pi] \oplus [\xi_1] \oplus [\xi_2] \oplus [\xi_3] \oplus [\eta_1] \oplus [\eta_2] \oplus 2[\mu]. \tag{6.10}$$

方程（6.3）表明

$$1 = \dim(\lambda\pi, \mu) = \dim(\lambda, \mu\pi).$$

由于 $d(\eta_i\pi) < d(\mu)$，我们有

$$0 = \dim(\eta_i\pi, \mu) = \dim(\eta_i, \mu\pi).$$

方程（6.7）表明，π^2 包含恒等对象、η_1、η_2，并且根据维数计数，它不能包含 μ，这意味着根据弗罗贝尼乌斯互反律，$\dim(\pi, \mu\pi) = 0$。方程（6.7）再次表明，$\mu\pi$ 以重数 3 包含 μ，而 π^2 以重数 1 包含 π。因此我们得到

$$[\pi^2] = [\mathrm{id}] \oplus [\pi] \oplus [\eta_1] \oplus [\eta_2] \oplus 5\ \mathrm{dim}, \quad [\mu\pi] = [3\mu] \oplus [\lambda] \oplus 10\ \mathrm{dim},$$

其中余项为 $\xi_1 \oplus \xi_2 \oplus \xi_3$。因此，我们可以并且确实假设 π^2 包含 ξ_1，从而得到

$$[\pi^2] = [\mathrm{id}] \oplus [\pi] \oplus [\xi_1] \oplus [\eta_1] \oplus [\eta_2], \tag{6.11}$$

$$[\mu\pi] = [3\mu] \oplus [\lambda] \oplus [\xi_2] \oplus [\xi_3]. \tag{6.12}$$

因此，ξ_1 是自共轭的。对方程（6.12）取共轭，我们还得到 $[\mu\pi] = [\pi\mu]$，而方程（6.8）意味着

$$[\mu^2] = [\mathrm{id}] \oplus 3[\lambda] \oplus 3[\pi] \oplus 4[\xi_1] \oplus 3[\xi_2] \oplus 3[\xi_3] \oplus 2[\eta_1] \oplus 2[\eta_2] \oplus 9[\mu]. \tag{6.13}$$

弗罗贝尼乌斯互反律意味着

$$[\pi\xi_1] = [\pi] \oplus 16\ \mathrm{dim}, \quad [\mu\xi_1] = 4[\mu] \oplus [\lambda] \oplus 10\ \mathrm{dim},$$

而式(6.9)结合维数计数意味着

$$[\pi\xi_1] = [\pi] \oplus [\eta_1] \oplus [\eta_2] \oplus 10\ \mathrm{dim}, \quad [\mu\xi_1] = 4[\mu] \oplus [\lambda] \oplus 10\ \mathrm{dim},$$

其中余项为 $2[\xi_1] \oplus [\xi_2] \oplus [\xi_3]$.

对于 $i=2$, 3, 方程(6.9) 和 (6.13) 表明我们有

$$3=\dim(\xi_i,\mu^2)=\dim(\mu\xi_i,\mu),$$

并且 $\mu\xi_i$ 以重数 3 包含 μ，而不包含 π 作为

$$0=\dim(\pi^2,\xi_i)=\dim(\pi,\pi\xi_i).$$

Thus

$$[\pi\xi_i]=[\mu]\oplus 5\ \dim,\quad [\mu\xi_i]=[\lambda]\oplus[\pi]\oplus 3[\mu]\oplus[\eta_1]\oplus[\eta_2]\oplus 15\ \dim,$$

其中余项为 $[\xi_i]\oplus[\xi_1]\oplus[\xi_2]\oplus[\xi_3].$。如果 $\mu\xi_i$ 以重数 2 包含 ξ_i，那么弗罗贝尼乌斯互反律意味着 $\xi_i\xi_i$ 将以重数 2 包含 μ，这是不可能的。因此我们得到

$$[\pi\xi_i]=[\mu]\oplus[\xi_i],\quad i=2,3, \tag{6.14}$$

$$[\mu\xi_i]=[\lambda]\oplus[\pi]\oplus[\xi_1]\oplus[\xi_2]\oplus[\xi_3]\oplus[\eta_1]\oplus[\eta_2]\oplus 3[\mu],\quad i=2,3. \tag{6.15}$$

式(6.14)表明

$$0=\dim(\pi\xi_i,\xi_1)=\dim(\xi_i,\pi\xi_1),\quad i=2,3.$$

Thus

$$[\pi\xi_1]=[\pi]\oplus[\eta_1]\oplus[\eta_2]\oplus 2[\xi_1], \tag{6.16}$$

$$[\mu\xi_1]=4[\mu]\oplus[\lambda]\oplus[\xi_1]\oplus[\xi_2]. \tag{6.17}$$

弗罗贝尼乌斯互反律与目前得到的融合规则共同推出

$$[\pi\eta_1]=[\pi]\oplus[\xi_1]\oplus[\eta_2], \tag{6.18}$$

$$[\pi\eta_2]=[\pi]\oplus[\xi_1]\oplus[\eta_1], \tag{6.19}$$

$$[\mu\eta_i]=2[\mu]\oplus[\lambda]\oplus[\xi_2]\oplus[\xi_3]. \tag{6.20}$$

设 $\mathcal{C}$ 为由 $\delta\delta$生成的融合范畴。那么上述计算表明，由 π 生成的 $\mathcal{C}$ 的融合子范畴 $\mathcal{C}_1$ 满足

$$\mathrm{Irr}(\mathcal{C}_1)=\{\mathrm{id},\pi,\xi_1,\eta_1,\eta_2\}.$$

(2) 定理 2.3 和式(6.2)意味着存在唯一的中间子因子 N，位于 M 和 $\lambda(M)$ 之间，使得若 $\epsilon: N\hookrightarrow M$ 是包含映射，则有

$$[\epsilon\bar{\epsilon}]=[\mathrm{id}]\oplus[\pi].$$

注意，我们有 $d(\epsilon)=\sqrt{5}$。与引理 3.2 的证明相同，存在满足 $[\lambda]=[\epsilon\varphi\bar{\epsilon}]$ 的 $\varphi\in \mathrm{Aut}(N)$。

(3) 由于

$$\dim(\pi\epsilon,\pi\epsilon)=\dim(\pi^2,\epsilon\bar{\epsilon})=\dim(\pi^2,\mathrm{id}\oplus\pi)=2,$$

ther存在一个不可约扇区 ϵ'，满足 $[\pi\epsilon]=[\epsilon]\oplus[\epsilon']$，且 $d(\epsilon')=3\sqrt{5}$。由于 e

$$[\pi\epsilon\bar{\epsilon}]=[\pi(\mathrm{id}\oplus\pi)]=[\mathrm{id}]\oplus 2[\pi]\oplus[\xi_1]\oplus[\eta_1]\oplus[\eta_2],$$

我们得到

$$[\epsilon'\bar{\epsilon}]=[\pi]\oplus[\xi_1]\oplus[\eta_1]\oplus[\eta_2].$$

弗罗贝尼乌斯互反律和维数计数表明 $[\eta_1\epsilon]=[\eta_2\epsilon]=[\epsilon']$。由于 ξ_1 是自共轭的，

维数$(\xi_1\epsilon,\xi_1\epsilon)$ =维数$(\xi_1,\xi_1\epsilon\bar{\epsilon})$ =维数$(\xi_1,\xi_1$(恒等对象$\oplus\pi))$ = 1+维数$(\xi_1,\xi_1\pi)$ = 1+维数$(\xi_1,\pi\xi_1)$,

而式（6.16）表明维数$(\xi_1\epsilon,\xi_1\epsilon)=3$。这一结果与弗罗贝尼乌斯互反律共同表明，存在不可约扇区 ϵ'' 和 ϵ'''，满足 $d(\epsilon'')=d(\epsilon'')=\sqrt{5}$,

$$[\xi_1\epsilon]=[\epsilon']\oplus[\epsilon'']\oplus[\epsilon'''],$$

以及 $[\epsilon''\bar{\epsilon}]=[\epsilon'''\bar{\epsilon}]=[\xi_1]$。上述计算表明，对偶主图$\mathcal{G}^d_{M\supset N}$是$\mathcal{G}^{\mathfrak{A}_5}_{\mathfrak{A}_4}$，而指标为 5 的有限深度子因子分类表明，$\mathcal{G}_{M\supset N}$是$\mathcal{G}_{(\mathfrak{A}_5,X_5)}$（见 [19]）。注意，$(\mathfrak{A}_5,X_5)$ =$(L(2^2)$ $PG_1(2^2))$，且$\widetilde{\mathcal{G}_{M\supset N}}=\mathcal{G}_{(1^3),1}$。令 $\mathcal{C}_2$ 为由 $\bar{\epsilon}\epsilon$生成的融合范畴。与定理 4.1 的证明类似，我们可以将 Irr$(\mathcal{C}_2)$ 参数化为

$$\mathrm{Irr}(\mathcal{C}_2)=\{\mathrm{id},\alpha',\alpha'^2,\rho',\sigma,\sigma\alpha',\sigma\alpha'^2\},$$

具有以下性质:

$$d(\alpha')=1,\quad d(\rho')=3,\quad d(\sigma)=4,$$

$$[\alpha'^3]=[\mathrm{id}],$$
$$[\alpha'\rho]=[\rho'\alpha']=[\rho'],$$
$$[\rho'^2]=[\mathrm{id}]\oplus[\alpha']\oplus[\alpha'^2]+2[\rho'],$$
$$[\sigma^2]=[\mathrm{id}]\oplus[\rho']\oplus[\sigma]\oplus[\sigma\alpha']\oplus[\sigma\alpha'^2],$$
$$[\alpha'\sigma]=[\sigma\alpha'^2],$$
$$[\rho'\sigma]=[\sigma\rho']=[\sigma]\oplus[\sigma\alpha']\oplus[\sigma\alpha'^2],$$
$$[\bar{\epsilon}\epsilon]=[\mathrm{id}]\oplus[\sigma].$$

(4) 定理 4.1 表明，存在唯一子因子 $R\subset N$（在内共轭意义下唯一），使得 $R'\cap M=\mathbb{C}$，并且存在 $\mathfrak{A}_5$ 在 R 上的外作用 β，满足

$$M=R\rtimes_\beta\mathfrak{A}_5\supset N=R\rtimes_\beta\mathfrak{A}_4.$$

令 $P = R \rtimes_\beta \mathfrak{A}_3 \subset N$，并令 $\iota\colon P \hookrightarrow N$ 和 $\kappa\colon R \hookrightarrow P$ 为包含映射。令 $\epsilon_1 = \epsilon\iota\kappa$。那么 $\epsilon_1\epsilon_1$ 对应于 $\mathfrak{A}_5$ 的正则表示，并且

$$[\epsilon_1\overline{\epsilon_1}] = [\mathrm{id}] \oplus 3[\eta_1] \oplus 3[\eta_2] \oplus 4[\pi] \oplus 5[\xi].$$

因此，由于 $[\delta\delta] = [\text{恒等对象}] \oplus [\lambda]$，

$$\dim(\delta\epsilon_1, \delta\epsilon_1) = \dim(\bar{\delta}\delta, \epsilon_1\overline{\epsilon_1}) = 1,$$

并且 $L \supset R$ 是不可约的。

(5) 注意，我们有 $[L : R] = 6|\mathfrak{A}_5| = 360$。另一方面，由于 $[\lambda]$与 $[\epsilon_1\epsilon_1]$可交换，且 $[(\epsilon_1\epsilon_1)^2] = |\mathfrak{A}_5|[\epsilon_1\overline{\epsilon_1}]$，

$$\begin{aligned}
&\dim(\delta\epsilon_1\overline{(\delta\epsilon_1)}, \delta\epsilon_1\overline{(\delta\epsilon_1)}) = \dim(\bar{\delta}\delta\epsilon_1\overline{\epsilon_1}, \epsilon_1\overline{\epsilon_1}\bar{\delta}\delta)\\
&= \dim(\bar{\delta}\delta\epsilon_1\overline{\epsilon_1}, \bar{\delta}\delta\epsilon_1\overline{\epsilon_1}) = \dim((\bar{\delta}\delta)^2, (\epsilon_1\overline{\epsilon_1})^2) = 60\dim((\mathrm{id}\oplus\lambda)^2, \epsilon_1\overline{\epsilon_1})\\
&= 60\dim(2\mathrm{id}\oplus\pi\oplus 3\lambda\oplus\mu, \epsilon_1\overline{\epsilon_1}) = 360.
\end{aligned}$$

因此，包含 $L \supset R$ 的深度为 2。

(6) 我们记 $\iota_3 = \iota\kappa$。由引理 2.5，得到

$$\dim(\varphi\bar{\epsilon}\epsilon\iota_3\overline{\iota_3}\varphi^{-1}, \bar{\epsilon}\epsilon\iota_3\overline{\iota_3}) = |\mathfrak{A}_4| = 12.$$

注意，$\iota_3\iota_3$ 对应于 $\mathfrak{A}_4$的正则表示，并且

$$[\iota_3\overline{\iota_3}] = [\mathrm{id}] \oplus [\alpha'] \oplus [\alpha'^2] \oplus 3[\rho'].$$

Thus

$$[\bar{\epsilon}\epsilon\iota_3\overline{\iota_3}] = [(\mathrm{id}\oplus\sigma)(\mathrm{id}\oplus\alpha'\oplus\alpha'^2\oplus 3\rho')] = [\mathrm{id}]\oplus[\alpha']\oplus[\alpha'^2]\oplus 3[\rho']\oplus 4[\sigma]\oplus 4[\sigma\alpha']\oplus 4[\sigma\alpha'^2].$$

维数计数表明

$$\dim(\varphi(\mathrm{id}\oplus\alpha'\oplus\alpha'^2\oplus 3\rho')\varphi^{-1}, \mathrm{id}\oplus\alpha'\oplus\alpha'^2\oplus 3\rho') = 12,$$

以及 $[\varphi\overline{\iota_3}\iota_3\varphi^{-1}] = [\overline{\iota_3}\iota_3]$。我们还有

$$(\varphi(\sigma\oplus\sigma\alpha'\oplus\sigma\alpha'^2)\varphi^{-1}, (\sigma\oplus\sigma\alpha'\oplus\sigma\alpha'^2)) = 0. \tag{6.21}$$

为了完成证明，我们不能将引理 2.6 应用于 $\mathfrak{A}_4$，因此稍作绕行。我们更仔细地考察自同构 $\varphi \in \mathrm{Aut}(N)$。首先我们断言$[\varphi^2] = [\mathrm{id}]$。事实上，由于 λ 是自共轭的，

$$1 = \dim(\epsilon\varphi\bar{\epsilon}, \epsilon\varphi^{-1}\bar{\epsilon}) = \dim(\bar{\epsilon}\epsilon\varphi, \varphi^{-1}\bar{\epsilon}\epsilon) = \dim(\varphi\oplus\sigma\varphi, \varphi^{-1}\oplus\varphi^{-1}\sigma),$$

并且 $[\varphi^2] = [\text{恒等对象}]$ 或 $[\varphi\sigma\varphi] = [\sigma]$ 成立。假设后者成立。那么

$$[\lambda^2] = [\epsilon\varphi\bar{\epsilon}\epsilon\varphi\bar{\epsilon}] = [\epsilon\varphi(\mathrm{id}\oplus\sigma)\varphi\bar{\epsilon}] = [\epsilon\varphi^2\bar{\epsilon}] \oplus [\epsilon\varphi\sigma\varphi\bar{\epsilon}] = [\epsilon\varphi^2\bar{\epsilon}] \oplus [\epsilon\sigma\bar{\epsilon}].$$

由于

$$[\epsilon\bar{\epsilon}] \oplus [\epsilon\sigma\bar{\epsilon}] = [(\epsilon\bar{\epsilon})^2] = ([\mathrm{id}] \oplus [\pi])^2 = 2[\mathrm{id}] \oplus 3[\pi] \oplus [\xi_1] \oplus [\eta_1] \oplus [\eta_2],$$

我们得到

$$[\lambda^2] = [\epsilon\varphi^2\bar{\epsilon}] \oplus [\mathrm{id}] \oplus 2[\pi] \oplus [\xi_1] \oplus [\eta_1] \oplus [\eta_2],$$

这与假设矛盾。因此命题得证，且我们还有 $[\varphi\sigma\varphi] \neq [\sigma]$。

设 $\omega = \sigma\varphi\bar{\epsilon}$。我们证明 ω 的以下三个性质。

(i) ω 是不可约的。(ii) $\dim(\rho', \omega\bar{\omega}) = 1$。(iii) $[\varphi\omega] = [\omega]$。

事实上，由方程(6.21)，我们得到

$$\dim(\omega, \omega) = \dim(\sigma^2, \varphi\bar{\epsilon}\epsilon\varphi^{-1}) = \dim(\mathrm{id} \oplus \rho' \oplus \sigma \oplus \sigma\alpha' \oplus \sigma\alpha'^2, \varphi(\mathrm{id} \oplus \sigma)\varphi^{-1}) = 1,$$

并且 ω 是不可约的。(ii) 也可由方程(6.21)推出，因为我们有

$$\dim(\rho', \omega\bar{\omega}) = \dim(\rho'\omega, \omega) = \dim(\sigma\rho'\sigma, \varphi(\mathrm{id} \oplus \sigma)\varphi^{-1}),$$

并且 $\sigma\rho'\sigma$ 包含重数为 1 的恒等对象。(iii) 可由

$$\begin{aligned} 1 &= \dim(\lambda, \lambda^2) = \dim(\epsilon\varphi\bar{\epsilon}, \epsilon\varphi\bar{\epsilon}\epsilon\varphi\bar{\epsilon}) = \dim(\bar{\epsilon}\epsilon\varphi\bar{\epsilon}, \varphi\bar{\epsilon}\epsilon\varphi\bar{\epsilon}) \\ &= \dim((\mathrm{id} \oplus \sigma)\varphi\bar{\epsilon}, \varphi(\mathrm{id} \oplus \sigma)\varphi\bar{\epsilon}) = \dim(\varphi\bar{\epsilon} \oplus \omega, \bar{\epsilon} \oplus \varphi\omega) \\ &= \dim(\varphi, \bar{\epsilon}\epsilon) + \dim(\omega, \varphi\omega) = \dim(\omega, \varphi\omega). \end{aligned}$$

定理 4.1 的证明表明，存在 $\tau \in \mathrm{Aut}(P)$，使得 σ 因子化为 $\sigma = \iota\tau\bar{\iota}$。因此我们有 $N \supset P \supset \omega(M)$。由于 $[\iota\bar{\iota}] = [\text{恒等对象}] \oplus [\rho']$，引理 2.7 表明存在酉元 $u \in N$，满足 $\mathrm{Ad}u \circ \varphi(P) = P$，这意味着存在 $\psi \in \mathrm{Aut}(P)$ 满足 $[\varphi\iota] = [\iota\psi]$。现在我们有

$$12 = \dim(\iota\psi\kappa\bar{\kappa}\psi^{-1}\bar{\iota}, \iota\kappa\bar{\kappa}\bar{\iota}) = \dim(\psi\kappa\bar{\kappa}\psi^{-1}, \bar{\iota}\iota\kappa\bar{\kappa}\bar{\iota}\iota).$$

我们按照定理 3.1 的证明，对由 $\bar{\iota}\iota$ 生成的 P-P 扇区进行参数化。于是$[\bar{\iota}\iota] = [$恒等对象$] \oplus [\rho]$, $[\kappa\bar{\kappa}] = [$恒等对象$] \oplus [\alpha] \oplus [\alpha^2]$, $d(\rho) = 3$, $d(\alpha) = 1$, $\alpha^3 =$ 恒等对象，并且它们满足以下融合规则:

$$[\alpha\rho] = [\rho\alpha] = [\rho],$$
$$[\rho^2] = [\mathrm{id}] \oplus [\alpha] \oplus [\alpha^2] \oplus 2[\rho].$$

现在我们有

$$[\bar{\iota}\iota\kappa\bar{\kappa}\bar{\iota}\iota] = 4([\mathrm{id}] \oplus [\alpha] \oplus [\alpha^2] \oplus 3[\rho]),$$

于是得到

$$3 = \dim(\psi(\mathrm{id} \oplus \alpha \oplus \alpha^2)\psi^{-1}, \mathrm{id} \oplus \alpha \oplus \alpha^2 \oplus 3\rho).$$

因此 $[\psi\kappa\bar{\kappa}\psi^{-1}]=[\kappa\bar{\kappa}]$。引理 2.6 表明，存在满足$[\psi\kappa]=[\kappa\varphi_1]$的 $\varphi_1\in\mathrm{Aut}(R)$，因此 $[\varphi\iota\kappa]=[\iota\kappa\varphi_1]$。引理 2.4 表明，存在一个包含 $\mathfrak{A}_5$ 的群 Γ，使得 γ 可扩展为 Γ 在 R 上的外作用，从而

$$L=R\rtimes\Gamma.$$

图 $\mathcal{G}_{L\supset M}$表明， Γ在 $\Gamma/\mathfrak{A}_5$ 上的作用是 $(\mathfrak{A}_5,X_5)$ 的 3-传递扩张，由此可得 $\Gamma=\mathfrak{A}_6$。□

注 6.3。对 $(\mathfrak{S}_6,X_6)$ 也可以采用类似的论证。在这种情况下，最后一步可以应用引理 2.6 于 $\mathfrak{S}_3=\mathbb{Z}_3\rtimes\mathbb{Z}_2$，而不是 $\mathfrak{A}_3=\mathbb{Z}_3$。

注意，我们已在第 4 节中计算出图 $\mathcal{G}_{M_9}^{M_{10}}$，而 Mathieu 群 M_{11} 关于$\sim$ $\mathcal{G}_{M_{11}>M_{10}}$ 的图可以通过 $\mathcal{G}_{M_{11}>M_{10}}=\mathcal{G}_{M_9}^{M_{10}}$ 得到。

定理 6.4。设 $L\supset M$ 是因子的一个有限指数包含，且满足 $\mathcal{G}_{L\supset M}=\mathcal{G}_{M_{11}>M_{10}}$。那么存在唯一子因子 $R\subset M$，在内共轭意义下唯一，使得 $R'\cap L=\mathbb{C}$；并且存在 M_{11} 在 R 上的外作用 γ，满足

$$L=R\rtimes_\gamma M_{11}\supset M=R\rtimes_\gamma M_{10}.$$

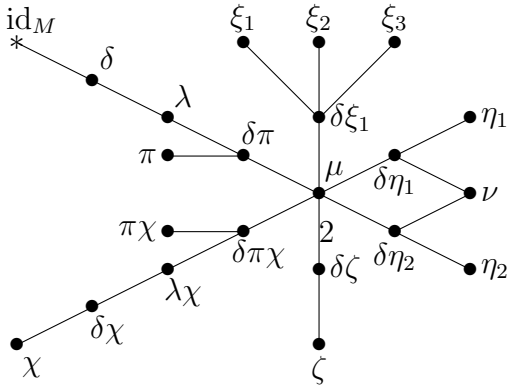

图 10： $\mathcal{G}_{M_{11}>M_{10}}$

证明。(1) 令 δ：$M\hookrightarrow L$ 为包含映射，并令 $[\delta\delta]=[\text{恒等对象}]\oplus[\lambda]$ 为不可约分解。我们按照图 10 中的方式对不可约 M-M 扇区以及由 δ 生成的L-M 扇区进行参数化。于是有

$$d(\chi)=1,\quad d(\pi)=9,\quad d(\lambda)=d(\xi_1)=d(\xi_2)=d(\xi_3)=d(\eta_1)=d(\eta_2)=10,$$

$$d(\zeta)=16,\quad d(\nu)=20,\quad d(\mu)=80,\quad d(\delta)=\sqrt{11}.$$

从图中可以看出，λ、π、$\pi\chi$、μ、ν和 χ 都是自共轭的，并且

$$\{[\chi\lambda],[\overline{\xi_1}],[\overline{\xi_2}],[\overline{\xi_3}],[\overline{\eta_1}],[\overline{\eta_2}]\}=\{[\lambda\chi],[\xi_1],[\xi_2],[\xi_3],[\eta_1],[\eta_2]\}.$$

由于 $\pi\chi$ 是自共轭的，因此有 $[\pi\chi]=[\chi\pi]$。根据图对称性，有$[\zeta\chi]=[\zeta]$、 $[\mu\chi]=[\mu]$、$[\nu\chi]=[\nu]$，以及

$$\{[\xi_1\chi],[\xi_2\chi],[\xi_3\chi]\}=\{[\xi_1],[\xi_2],[\xi_3]\},$$

$$\{[\eta_1\chi],[\eta_2\chi]\}=\{[\eta_1],[\eta_2]\}.$$

由图得到的基本融合规则为

$$[\lambda^2]=[\mathrm{id}]\oplus[\lambda]\oplus[\pi]\oplus[\mu], \tag{6.22}$$

$$[\lambda\pi]=[\lambda]\oplus[\mu], \tag{6.23}$$

$$[\lambda\mu]=[\lambda]\oplus[\lambda\chi]\oplus[\pi]\oplus[\pi\chi]\oplus[\xi_1]\oplus[\xi_2]\oplus[\xi_3]\oplus[\eta_1]\oplus[\eta_2]\oplus 2[\zeta]\oplus 2[\nu]\oplus 8[\mu], \tag{6.24}$$

$$[\lambda\xi_i]+[\xi_i]=[\xi_1]\oplus[\xi_2]\oplus[\xi_3]\oplus[\mu], \tag{6.25}$$

$$[\lambda\eta_i]=[\nu]\oplus[\mu], \tag{6.26}$$

$$[\lambda\zeta]=2[\mu], \tag{6.27}$$

$$[\lambda\nu]=[\eta_1]\oplus[\eta_2]\oplus[\nu]\oplus 2[\mu]. \tag{6.28}$$

由于方程(6.23)、(6.24)、(6.26)、(6.27)的右端均为自共轭，因此我们有$[\lambda\pi]=[\pi\lambda]$、$[\lambda\mu]=[\mu\lambda]$、 $[\lambda\eta_i]=[\eta_i\lambda]$和 $[\lambda\zeta]=\overline{[\zeta\lambda]}$。由于 $[\lambda^2\pi]=[\pi\lambda^2]$，我们得到$[\mu\pi]=[\pi\mu]$。

根据结合律，我们得到

$$\begin{aligned}[\pi^2]\oplus[\mu\pi]=[\mathrm{id}]&\oplus[\lambda]\oplus[\lambda\chi]\oplus[\pi]\oplus[\pi\chi]\\&\oplus[\xi_1]\oplus[\xi_2]\oplus[\xi_3]\oplus[\eta_1]\oplus[\eta_2]\oplus 2[\zeta]\oplus 2[\nu]\oplus 8[\mu],\end{aligned} \tag{6.29}$$

$$\begin{aligned}[\pi\mu]\oplus[\mu^2]=[\mathrm{id}]&\oplus[\chi]\oplus 9[\lambda]\oplus 9[\lambda\chi]\oplus 8[\pi]\oplus 8[\pi\chi]\\&\oplus 9[\xi_1]\oplus 9[\xi_2]\oplus 9[\xi_3]\oplus 9[\eta_1]\oplus 9[\eta_2]\oplus 14[\zeta]\oplus 18[\nu]\oplus 72[\mu],\end{aligned} \tag{6.30}$$

$$\begin{aligned}[\pi\xi_i]\oplus[\mu\xi_i]=[\lambda]&\oplus[\lambda\chi]\oplus[\pi]\oplus[\pi\chi]\\&\oplus[\xi_i]\oplus[\xi_1]\oplus[\xi_2]\oplus[\xi_3]\oplus[\eta_1]\oplus[\eta_2]\oplus 2[\zeta]\oplus 2[\nu]\oplus 9[\mu],\end{aligned} \tag{6.31}$$

$$\begin{aligned}[\eta_i]\oplus[\pi\eta_i]\oplus[\mu\eta_i]=[\lambda]&\oplus[\lambda\chi]\oplus[\pi]\oplus[\pi\chi]\\&\oplus[\xi_1]\oplus[\xi_2]\oplus[\xi_3]\oplus 2[\eta_1]\oplus 2[\eta_2]\oplus 2[\zeta]\oplus 2[\nu]\oplus 9[\mu],\end{aligned} \tag{6.32}$$

$$\begin{aligned}[\pi\zeta]\oplus[\mu\zeta]=2[\lambda]&\oplus 2[\lambda\chi]\oplus 2[\pi]\oplus 2[\pi\chi]\\&\oplus 2[\xi_1]\oplus 2[\xi_2]\oplus 2[\xi_3]\oplus 2[\eta_1]\oplus 2[\eta_2]\oplus 3[\zeta]\oplus 4[\nu]\oplus 14[\mu],\end{aligned} \tag{6.33}$$

$$\begin{aligned}[\pi\nu]\oplus[\mu\nu]=2[\lambda]&\oplus 2[\lambda\chi]\oplus 2[\pi]\oplus 2[\pi\chi]\\&\oplus 2[\xi_1]\oplus 2[\xi_2]\oplus 2[\xi_3]\oplus 2[\eta_1]\oplus 2[\eta_2]\oplus 4[\zeta]\oplus 5[\nu]\oplus 18[\mu].\end{aligned} \tag{6.34}$$

我们给出一个判据，用于分离等式左边的求和项。对于不可约的 X 和 Y，我们有

$$\dim(\lambda\pi X, Y) = \dim(\pi X, \lambda Y),$$

另一方面，

$$\dim(\lambda\pi X, Y) = \dim((\lambda \oplus \mu)X, Y) = \dim(\lambda X, Y) + \dim(\mu X, Y).$$

Thus

$$\dim(\pi X \oplus \mu X, Y) = \dim(\pi X, Y \oplus \lambda Y) - \dim(\lambda X, Y). \tag{6.35}$$

由弗罗贝尼乌斯互反律可得 $\dim(\pi^2, \lambda) = 0$ 且 $\dim(\mu\pi, \lambda) = 1$。我们断言，$\pi^2$ 不包含 μ。反设 π^2 包含 μ。那么公式（6.29）推出 $\dim(\mu\pi, \mu) = 7$。由于 $[\lambda]$ 与 $[\zeta]$可交换，公式（6.27）表明$2[\mu] = [\zeta\lambda]$，并且

$$14 = \dim(2\mu\pi, \mu) = \dim(\zeta\lambda\pi, \mu) = \dim(\zeta(\lambda \oplus \mu), \mu) = \dim(2\mu \oplus \zeta\mu, \mu).$$

由于 μ 和 ζ 是自共轭的，我们得到 $\dim(\mu\zeta, \mu) = 12$。然而，这一点与公式（6.33）表明 $\dim(\pi\zeta, \mu) = 2$，这是不可能的，因为 $d(\pi\zeta) < 2d(\mu)$。因此，断言得证。由弗罗贝尼乌斯互反律可得 $\dim(\mu\pi, \pi) = 0$。由于$[\mu\pi\chi] = [\mu\chi\pi] = [\mu\pi]$，我们也得到 $\dim(\mu\pi, \pi\chi) = 0$。因此，由维数计数可知，我们可以令

$$[\pi^2] = [\mathrm{id}] \oplus [\pi] \oplus [\pi\chi] \oplus 2[\zeta] \oplus \bigoplus_{i=1}^{3} a_i[\xi_i] \oplus \bigoplus_{i=1}^{2} b_i[\eta_i] \oplus c[\nu],$$

其中 a_i、b_i 和 c 是满足以下条件的非负整数

$$\sum_{i=1}^{3} a_i + \sum_{i=1}^{2} b_i + 2c = 3.$$

将公式（6.35）应用于此，我们得到 $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ 和 $b_i = 1 - c$。我们可以并且确实假设 $a_1 = 1$、$a_2 = a_3 = 0$ 以及

$$[\pi^2] = [\mathrm{id}] \oplus [\pi] \oplus [\pi\chi] \oplus 2[\zeta] \oplus [\xi_1] \oplus (1-c)[\eta_1] \oplus (1-c)[\eta_2] \oplus c[\nu],$$

$$[\mu\pi] = 8[\mu] \oplus [\lambda] \oplus [\lambda\chi] \oplus [\xi_2] \oplus [\xi_3] \oplus c[\eta_1] \oplus c[\eta_2] \oplus (2-c)[\nu].$$

由于 $[\mu\pi] = [\pi\mu]$，方程（6.30）表明 $\dim(\mu^2,\ \xi_i) = 8$ 对 $i = 2,\ 3$ 成立；而弗罗贝尼乌斯互反律和公式（6.31）表明 $\pi\xi_i$ 包含 μ。因此

$$[\pi\xi_i] = [\mu] \oplus 10\ \dim, \quad i = 2, 3.$$

如果 ξ_i 不包含在 $\pi\xi_i$中，公式（6.31）意味着 $\mu\xi_i$ 将以重数 2 包含 ξ_i ，进而 $\xi_i\xi_i$ 也将以重数 2 包含 μ ，这与 $d(\xi_i)^2 < 2d(\mu)$。矛盾。因此我们有

$$[\pi\xi_i] = [\mu] \oplus [\xi_i], \quad i = 2, 3, \tag{6.36}$$

$$\begin{aligned}[\mu\xi_i] &= [\lambda] \oplus [\lambda\chi] \oplus [\pi] \oplus [\pi\chi] \\ &\oplus [\xi_1] \oplus [\xi_2] \oplus [\xi_3] \oplus [\eta_1] \oplus [\eta_2] \oplus 2[\zeta] \oplus 2[\nu] \oplus 8[\mu], \quad i = 2, 3.\end{aligned} \tag{6.37}$$

由于 我们的论证已经很长，因此我们将下一个断言单独列为一个引理 a. □

引理 6.5。 在上述记号下，我们有 $c = 0$。

证明。 反设 $c = 1$。由于

$$2[\pi\mu] = [\pi\lambda\zeta] = [(\mu \oplus \lambda)\zeta] = [\mu\zeta] \oplus 2[\mu],$$

我们可以得到 $\mu\zeta$ 和 $\pi\zeta$ 的不可约分解。

现在，公式（6.35）、弗罗贝尼乌斯互反律以及维数计数表明:

$$[\pi^2] = [\mathrm{id}] \oplus [\pi] \oplus [\pi\chi] \oplus 2[\zeta] \oplus [\xi_1] \oplus [\nu], \tag{W1}$$

$$[\mu\pi] = [\lambda] \oplus [\lambda\chi] \oplus [\xi_2] \oplus [\xi_3] \oplus [\eta_1] \oplus [\eta_2] \oplus [\nu] \oplus 8[\mu], \tag{W2}$$

$$\begin{aligned}[\mu^2] &= [\mathrm{id}] \oplus [\chi] \oplus 8[\lambda] \oplus 8[\lambda\chi] \oplus 8[\pi] \oplus 8[\pi\chi] \\ &\oplus 9[\xi_1] \oplus 8[\xi_2] \oplus 8[\xi_3] \oplus 8[\eta_1] \oplus 8[\eta_2] \oplus 14[\zeta] \oplus 17[\nu] \oplus 64[\mu],\end{aligned} \tag{W3}$$

$$[\pi\zeta] = 2[\pi] \oplus 2[\pi\chi] \oplus 2[\xi_1] \oplus 3[\zeta] \oplus 2[\nu], \tag{W4}$$

$$[\mu\zeta] = 2[\lambda] \oplus 2[\lambda\chi] \oplus 2[\xi_2] \oplus 2[\xi_3] \oplus 2[\eta_1] \oplus 2[\eta_2] \oplus 2[\nu] \oplus 14[\mu], \tag{W5}$$

$$[\pi\xi_1] = [\pi] \oplus [\pi\chi] \oplus 2[\zeta] \oplus 2[\xi_1] \oplus [\nu], \tag{W6}$$

$$[\mu\xi_1] = [\lambda] \oplus [\lambda\chi] \oplus [\xi_2] \oplus [\xi_3] \oplus [\eta_1] \oplus [\eta_2] \oplus [\nu] \oplus 9[\mu], \tag{W7}$$

$$[\pi\nu] = [\pi] \oplus [\pi\chi] \oplus 2[\zeta] \oplus [\xi_1] \oplus 2[\nu] \oplus [\mu], \tag{W8}$$

$$[\mu\nu] = 2[\lambda] \oplus 2[\lambda\chi] \oplus [\pi] \oplus [\pi\chi] \tag{W9}$$
$$\oplus [\xi_1] \oplus 2[\xi_2] \oplus 2[\xi_3] \oplus 2[\eta_1] \oplus 2[\eta_2] \oplus 2[\zeta] \oplus 3[\nu] \oplus 17[\mu]$$

这里字母"W"代表错误方程。由于右端是自共轭的，我们看到 $[\mu]$ 与 $[\pi]$、$[\xi_1]$、$[\zeta]$ 和 $[\nu]$ 交换。

与 $\pi\xi_i$ 中 $i = 2,3$ 的情形类似的论证表明 $[\pi\eta_1] = [\mu] \oplus [\eta_2]$ 和 $[\pi\eta_2] = [\mu] \oplus [\eta_1]$。公式（6.31）表明

$$2 = \dim(\mu\eta_i, \zeta) = \dim(\eta_i\zeta, \mu),$$

因此 $[\eta_i\zeta] = 2[\mu]$。同理，我们有 $[\xi_2\zeta] = [\xi_3\zeta] = 2[\mu]$；取共轭后，也得到

$$[\xi_2\zeta] = [\xi_3\zeta] = [\eta_1\zeta] = [\eta_2\zeta] = [\zeta\xi_2] = [\zeta\xi_3] = [\zeta\eta_1] = [\zeta\eta_2] = 2[\mu]. \tag{W10}$$

$$[\pi\eta_1] = [\mu] \oplus [\eta_2], \quad [\pi\eta_1] = [\mu] \oplus [\eta_1], \tag{W11}$$

$$[\mu\xi_2] = [\mu\xi_3] = [\mu\eta_1] = [\mu\eta_2] \tag{W12}$$
$$= [\lambda] \oplus [\lambda\chi] \oplus [\pi] \oplus [\pi\chi] \oplus [\xi_1] \oplus [\xi_2] \oplus [\xi_3] \oplus [\eta_1] \oplus [\eta_2] \oplus 2[\zeta] \oplus 2[\nu] \oplus 8[\mu].$$

由此，

$$2[\mu\xi_2] = [\zeta\lambda\xi_1] = [\zeta(\mu \oplus \xi_2 \oplus \xi_3)] = [\zeta\mu] \oplus [\zeta(\xi_1 \oplus \xi_3)] = [\zeta\mu] \oplus 2[\mu] \oplus [\zeta\xi_1],$$

我们得到 $\zeta\xi_1$ 的不可约分解。

From

$$2[\mu\eta_i] = [\zeta\lambda\eta_i] = [\zeta(\mu \oplus \nu)] = [\zeta\mu] \oplus [\zeta\nu],$$

我们得到 $[\zeta\nu]$ 的不可约分解。弗罗贝尼乌斯互反律和维数计数表明

$$[\zeta\xi_1] = 2[\pi] \oplus 2[\pi\chi] \oplus 4[\zeta] \oplus 2[\xi_1] \oplus 2[\nu], \tag{W13}$$

$$[\zeta\nu] = 2[\pi] \oplus 2[\pi\chi] \oplus 4[\zeta] \oplus 2[\xi_1] \oplus 2[\nu] \oplus 2[\mu], \tag{W14}$$

$$[\zeta^2] = [\mathrm{id}] \oplus [\chi] \oplus 3[\pi] \oplus 3[\pi\chi] \oplus 5[\zeta] \oplus 4[\xi_1] \oplus 4[\nu]. \tag{W15}$$

接下来，我们通过对 $[\pi^2 X]$ 应用结合律，确定 $[\xi_1]$ 和 $[\nu]$ 的左乘法。这两个方程

$$[\pi(\pi\xi_1)] = [\pi(\pi \oplus \pi\chi \oplus 2\zeta \oplus 2\xi_1 \oplus \nu)],$$

$$[\pi^2\xi_1] = [(\mathrm{id} \oplus \pi \oplus \pi\chi \oplus 2\zeta \oplus \xi_1 \oplus \nu)\xi_1],$$

show

$$[\xi_1^2] \oplus [\nu\xi_1] = [\mathrm{id}] \oplus [\chi] \oplus 3[\pi] \oplus 3[\pi\chi] \oplus 4[\zeta] \oplus 2[\xi_1] \oplus 4[\nu] \oplus [\mu].$$

根据弗罗贝尼乌斯互反律和维数计算，我们得到

$$[\xi_1^2] = [\mathrm{id}] \oplus [\chi] \oplus 2[\pi] \oplus 2[\pi\chi] \oplus 2[\zeta] \oplus [\xi_1] \oplus [\nu], \tag{W16}$$

$$[\nu\xi_1] = [\pi] \oplus [\pi\chi] \oplus 2[\zeta] \oplus [\mu] \oplus [\xi_1] \oplus 3[\nu]. \tag{W17}$$

这两个方程

$$[\pi(\pi\nu)] = [\pi(\pi \oplus \pi\chi \oplus 2\zeta \oplus \xi_1 \oplus 2\nu \oplus \mu)],$$

$$[\pi^2\nu] = [(\mathrm{id} \oplus \pi \oplus \pi\chi \oplus 2\zeta \oplus \xi_1 \oplus \nu)\nu],$$

show

$$\begin{aligned}[\xi_1\nu] \oplus [\nu^2] = [\mathrm{id}] \oplus [\chi] \oplus [\lambda] \oplus [\lambda\chi] \oplus 3[\pi] \oplus 3[\pi\chi] \\ \oplus 4[\zeta] \oplus 4[\xi_1] \oplus 3[\nu] \oplus 4[\mu] \oplus [\xi_2] \oplus [\xi_3] \oplus [\eta_1] \oplus [\eta_2],\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}[\nu^2] = [\mathrm{id}] \oplus [\chi] \oplus [\lambda] \oplus [\lambda\chi] \oplus 2[\pi] \oplus 2[\pi\chi] \\ \oplus 2[\zeta] \oplus 3[\mu] \oplus 3[\xi_1] \oplus [\xi_2] \oplus [\xi_3] \oplus [\eta_1] \oplus [\eta_2].\end{aligned} \tag{W18}$$

这两个方程

$$[\pi(\pi\eta_1)] = [\pi\mu] \oplus [\pi\eta_2] = [\pi\mu] \oplus [\mu] \oplus [\eta_1],$$

$[\pi^2\eta_1] = [$（恒等对象 $\oplus \pi \oplus \pi\chi \oplus 2\zeta \oplus \xi_1 \oplus \nu$）
$\eta_1] = [\eta_1] \oplus [\eta_2] \oplus [\chi\eta_2] \oplus 6[\mu] \oplus [\xi_1\eta_1] \oplus [\nu\eta_1]$.表明 $[\chi\eta_2] = [\eta_1]$，并且

$$[\xi_1\eta_1] \oplus [\nu\eta_1] = [\lambda] \oplus [\lambda\chi] \oplus [\xi_2] \oplus [\xi_3] \oplus [\nu] \oplus 3[\mu].$$

类似地，我们有 $[\chi\xi_2] = [\xi_3]$ 并且

$$[\xi_1\xi_2] \oplus [\nu\xi_2] = [\lambda] \oplus [\lambda\chi] \oplus [\eta_1] \oplus [\eta_2] \oplus [\nu] \oplus 3[\mu].$$

我们断言

$$\{[\overline{\xi_2}, [\overline{\xi_3}], [\overline{\eta_1}], [\overline{\eta_2}]\} = \{[\xi_2], [\xi_3], [\eta_1], [\eta_2]\}.$$

事实上，由于 $[\lambda\chi\xi_2] = [\lambda\xi_3]$ 不包含恒等对象，我们可知 $\lambda\chi$ 不是 ξ_2 的共轭扇区。将类似的论证应用于 ξ_3、η_1 和 η_2，即可证明这一断言。

首先假设 $[\xi_2]$ 是 $[\overline{\eta_1}]$ 或 $[\eta_2]$。注意，在这种情况下，$[\xi_3] = [\xi_2\chi]$ 也属于 η_1 或 η_2。于是

$$\dim(\xi_1\eta_2, \lambda) = \dim(\lambda\xi_1, \overline{\eta_2}) = 1,$$

同理，$\dim(\xi_1\eta_2,\ \lambda\chi) = 1$。我们有

$$\dim(\nu\xi_2, \lambda) = \dim(\lambda\nu, \overline{\xi_2}) = 1,$$

并且以同样的方式有 $\dim(\nu\xi_2, \lambda\chi) = 1$。因此

$$[\xi_1\eta_1] = [\xi_1\eta_2] = [\lambda] \oplus [\lambda\chi] \oplus [\mu], \tag{W19}$$

$$[\nu\eta_1] = [\nu\eta_2] = [\xi_2] \oplus [\xi_3] \oplus [\nu] \oplus 2[\mu], \tag{W20}$$

$$[\xi_1\xi_2] = [\xi_1\xi_3] = [\eta_1] \oplus [\eta_2] \oplus [\mu], \tag{W21}$$

$$[\nu\xi_2] = [\nu\xi_3] = [\lambda] \oplus [\lambda\chi] \oplus [\nu] \oplus 2[\mu]. \tag{W22}$$

将方程(W20)和(W21)两边从左侧乘以 $[\lambda]$，得到

$$[\eta_1^2] \oplus [\eta_2\eta_1] = [\eta_1\eta_2] \oplus [\eta_2^2] = 2[\xi_1] \oplus [\eta_1] \oplus [\eta_2] \oplus 2[\mu],$$

$$[\xi_2^2] \oplus [\xi_3\xi_2] = [\xi_2\xi_3] \oplus [\xi_3^2] = 2[\mu] \oplus 2[\nu].$$

取共轭后，得到矛盾。

现在假设$[\xi_2]$是 $[\xi_2]$或 $[\xi_3]$。在这种情况下，$[\xi_3]$也要么是 $[\overline{\xi_2}]$，要么是 $[\xi_3]$。弗罗贝尼乌斯互反律和维数计数表明

$$[\xi_1\eta_1] = [\xi_1\eta_2] = [\mu] \oplus [\xi_2] \oplus [\xi_3], \tag{W23}$$

$$[\nu\eta_1] = [\nu\eta_2] = [\lambda] \oplus [\lambda\chi] \oplus [\nu] \oplus 2[\mu], \tag{W24}$$

$$[\xi_1\xi_2] = [\xi_1\xi_3] = [\lambda] \oplus [\lambda\chi] \oplus [\mu], \tag{W25}$$

$$[\nu\xi_2] = [\nu\xi_3] = [\eta_1] \oplus [\eta_2] \oplus [\nu] \oplus 2[\mu]. \tag{W26}$$

M将方程(W23)和(W26)两边从左侧乘以 $[\lambda]$，得到 t

$$[\xi_2\eta_1] \oplus [\xi_3\eta_1] = [\xi_2\eta_2] \oplus [\xi_3\eta_2] = 2[\xi_1] \oplus [\xi_2] \oplus [\xi_3] \oplus 2[\mu],$$

$$[\eta_1\xi_2] \oplus [\eta_2\xi_2] = [\eta_1\xi_3] \oplus [\eta_2\xi_3] = 2[\nu] \oplus 2[\mu],$$

这再次导致矛盾。最后我们得出结论：$c = 0$。 □

定理 *6.4* 证明的继续。上述引理和公式（6.29）表明

$$[\pi^2] = [\mathrm{id}] \oplus [\pi] \oplus [\pi\chi] \oplus 2[\zeta] \oplus [\xi_1] \oplus [\eta_1] \oplus [\eta_2], \tag{6.38}$$

$$[\mu\pi] = 8[\mu] \oplus [\lambda] \oplus [\lambda\chi] \oplus [\xi_2] \oplus [\xi_3] \oplus 2[\nu]. \tag{6.39}$$

由公式（6.38）可知

$$\{[\overline{\xi_1}], [\overline{\eta_1}], [\overline{\eta_2}]\} = \{[\xi_1], [\eta_1], [\eta_2]\}, \tag{6.40}$$

因此

$$\{[\chi\lambda], [\overline{\xi_2}], [\overline{\xi_3}]\} = \{[\lambda\chi], [\xi_2], [\xi_3]\}. \tag{6.41}$$

由于

$$2[\pi\mu] = [\pi\lambda\zeta] = [(\mu \oplus \lambda)\zeta] = [\mu\zeta] \oplus 2[\mu],$$

我们得到

$$[\mu\zeta] = 2[\lambda] \oplus 2[\lambda\chi] \oplus 2[\xi_2] \oplus 2[\xi_3] \oplus 4[\nu] \oplus 14[\mu], \tag{6.42}$$

并且由公式（6.33），

$$[\pi\zeta] = 2[\pi] \oplus 2[\pi\chi] \oplus 2[\xi_1] \oplus 2[\eta_1] \oplus 2[\eta_2] \oplus 3[\zeta]. \tag{6.43}$$

公式（6.39）表明， $\pi\nu$ 包含 μ ，其重数为 2。若 $\pi\nu$ 包含 ν 的重数至多为 1，则公式（6.34）表明， ν^2 将包含 μ ，其重数为 4；这是不可能的，因为 $d(\nu^2) = 4d(\mu)$，且 ν^2 包含恒等对象。因此我们得到

$$[\pi\nu] = 2[\mu] \oplus 2[\nu]. \tag{6.44}$$

现在，由弗罗贝尼乌斯互反律可知， $\pi\xi_1$、 $\pi\eta_1$和 $\pi\eta_2$ 均不包含 λ、$\lambda\chi$、 ξ_2、 ξ_3和 ν，因此我们得到

$$[\pi\xi_1] = [\pi] \oplus [\pi\chi] \oplus 2[\xi_1] \oplus [\eta_1] \oplus [\eta_2] \oplus 2[\zeta], \tag{6.45}$$

$$[\pi\eta_1] = [\pi] \oplus [\pi\chi] \oplus [\xi_1] \oplus [\eta_1] \oplus 2[\eta_2] \oplus 2[\zeta], \tag{6.46}$$

$$[\pi\eta_2] = [\pi] \oplus [\pi\chi] \oplus [\xi_1] \oplus 2[\eta_1] \oplus [\eta_2] \oplus 2[\zeta]. \tag{6.47}$$

该 述融合规则表明，由 π 生成的融合范畴 $\mathcal{C}_1$ 满足 s

$$\mathrm{Irr}(\mathcal{C}_1) = \{\mathrm{id}, \chi, \pi, \pi\chi, \xi_1, \eta_1, \eta_2, \zeta\}.$$

（2）定理 2.3 和公式（6.22）表明，存在唯一的中间子因子 N，位于 M 与 $\lambda(M)$ 之间，使得若 $\epsilon: N \hookrightarrow M$ 是包含映射，则有

$$[\epsilon\bar{\epsilon}] = [\mathrm{id}] \oplus [\pi].$$

注意，我们有 $d(\epsilon) = \sqrt{10}$。写引理 3.2 的证明相同，存在 $\varphi \in \mathrm{Aut}(N)$ 满足 $[\lambda] = [\epsilon\varphi\bar{\epsilon}]$。

（3）我们证明，对偶主图 $\mathcal{G}^d_{M\supset N}$ 是在第 4 节中计算得到的 $\mathcal{G}^{M_{10}}_{M_9}$。由于

$$\dim(\pi\epsilon, \pi\epsilon) = \dim(\pi, \pi\epsilon\bar{\epsilon}) = \dim(\pi, \pi(1 \oplus \pi)) = 2,$$

存在一个不可约 ϵ_0，满足 $[\pi\epsilon] = [\epsilon] \oplus [\epsilon_0]$ 和 $d(\epsilon_0) = 8\sqrt{10}$。由于公式（6.40）以及

$$[\pi\epsilon\bar{\epsilon}] = [\pi] \oplus [\pi^2] = [\mathrm{id}] \oplus 2[\pi] \oplus [\chi\pi] \oplus [\xi_1] \oplus [\eta_1] \oplus [\eta_2] \oplus 2[\zeta],$$

我们得到

$$[\epsilon_0\bar{\epsilon}] = [\pi] \oplus [\chi\pi] \oplus [\overline{\xi_1}] \oplus [\overline{\eta_1}] \oplus [\overline{\eta_2}] \oplus 2[\zeta].$$

根据弗罗贝尼乌斯互反律，

$$[\zeta\epsilon] = 2[\epsilon_0].$$

由于

$$\dim(\overline{\xi_1}\epsilon, \overline{\xi_1}\epsilon) = \dim(\overline{\xi_1}, \overline{\xi_1}(\mathrm{id} \oplus \pi)) = 3,$$

存在两个不可约对象 ϵ_2 和 ϵ_3 满足

$$[\overline{\xi_1}\epsilon] = [\epsilon_0] \oplus [\epsilon_2] \oplus [\epsilon_3],$$

且 $d(\epsilon_2) + d(\epsilon_3) = 2\sqrt{10_\circ}$ 根据弗罗贝尼乌斯互反律，我们得到 $d(\epsilon_2) = d(\epsilon_3) = \sqrt{10}$ 且

$$[\epsilon_2\bar{\epsilon}] = [\epsilon_2\bar{\epsilon}] = [\overline{\xi_1}].$$

类似地，我们可以证明

$$\dim(\overline{\eta_1}\epsilon, \overline{\eta_1}\epsilon) = \dim(\overline{\eta_2}\epsilon, \overline{\eta_2}\epsilon) = \dim(\overline{\eta_1}\epsilon, \overline{\eta_2}\epsilon) = 2,$$

并且存在不可约对象 ϵ_4 满足

$$[\eta_1\epsilon] = [\eta_2\epsilon] = [\epsilon_4],$$

且 $d(\epsilon_4) = 2\sqrt{10_\circ}$ 弗罗贝尼乌斯互反律表明

$$[\epsilon_4\bar{\epsilon}] = [\overline{\eta_1}] \oplus [\overline{\eta_2}].$$

注意，ξ_1 是自共轭的，且 $\{[\eta_1], [\overline{\eta_2}]\} = \{[\eta_1], [\eta_2]\}$。因此我们得到 $\mathcal{G}^d_{M\supset N} = \mathcal{G}^{M_{10}}_{M_9}$。

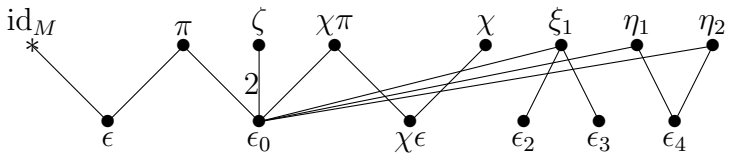

图11： $\mathcal{G}^d_{M\supset N}$

现在，定理 4.2 表明 $\mathcal{G}_{M\supset N} = \mathcal{G}_{M_{10}>M_9}$。

其余证明与定理 6.2 的证明非常相似，我们只指出与之不同之处。

(4) 定理 4.1 表明，存在唯一子因子 $R \subset N$，在内共轭意义下唯一，使得 $R' \cap M = \mathbb{C}$，并且存在 M_{10} 在 R 上的一个外作用 β，满足

$$M = R \rtimes_\beta M_{10} \supset N = R \rtimes_\beta M_9.$$

包含 $L \supset R$ 是不可约的。

(5) T 要证明 $L \supset R$ 是深度 2，只需证明 $[\lambda]$ 与.....对易 h

$$[\mathrm{id}] \oplus [\chi] \oplus 9[\pi] \oplus 9[\pi\chi] \oplus 10[\xi_1] \oplus 10[\eta_1] \oplus 10[\eta_2] \oplus 16[\zeta],$$

它对应于 M_{11} 的正则表示。事实上，由.....可得

$$\begin{aligned}&[\lambda]([\text{恒等对象}] \oplus [\chi] \oplus 9[\pi] \oplus 9[\pi\chi] \oplus 10[\xi_1] \oplus 10[\eta_1] \oplus 10[\eta_2] \oplus 16[\zeta])\\&= [\lambda] \oplus [\lambda\chi] \oplus 9([\lambda] \oplus [\mu]) \oplus 9([\lambda\chi] \oplus [\mu]) \oplus 10([\mu] \oplus [\xi_2] \oplus [\xi_3]) \oplus 10(\\&[\mu] \oplus [\nu]) \oplus 10([\mu] \oplus [\nu]) \oplus 32[\mu] \models 10(\\&[\lambda] \oplus [\lambda\chi] \oplus [\xi_2] \oplus [\xi_3] \oplus 2[\nu] \oplus 8[\mu]),\end{aligned}$$

由于我们可以对等式两边取共轭，因此它是自共轭的。(6) 我们可以对 Q_8 应用引理 2.6 来完成证明。 □

参考文献

[1] Brown, Kenneth S.群上同调。 数学研究生教材，87。Springer-Verlag, 纽约—柏林，1982。[2] Dixon, John D.; Mortimer, Brian. 置换群。 数学研究生教材，163。Springer-Verlag，纽约，1996。[3] Etingof, Pavel; Gelaki, Shlomo; Ostrik, Viktor.维数为 pq 的融合范畴分类。 Int. Math. Res. Not. 2004, 第57期，3041–3056。[4] Evans, David E.; Kawahigashi, *Yasuyuki* 算子代数上的量子对称性。 牛津数学专著。牛津科学出版物。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1998。[5] Gill, Nick; Hughes, Sam.次数为 *12* 的交错群的严格五重传递子群的特征标表。 Int. J. Group Theory 10 (2021)，第1期，11–30。[6] Goldman, Malcolm.关于 *II* 型因子的子因子$_1$。Michigan Math. J. 6(1959), 167–172。[7] Goodman, Frederick M.; de la Harpe, Pierre; Jones, Vaughan F. R. *Coxeter* 图与代数塔。 数学科学研究所出版物，14。Springer-Verlag，纽约，1989。[8] Hong, Jeon Hee.主图为 $\mathbf{E}_6^{(1)}$ 的子因子，Acta Appl. Math. 40(1995)，第3期，255–264。[9]Hong, Jeon Hee ; W. Szyma´nski. 主图为$\mathbf{D}_{2n+1}/\mathbf{Z}_2$，的有限子因子，J. Funct. Anal. 141 (1996)，第2期，294–300。[10] Huppert, Bertram; Blackburn. 有限群 *III*。 数学科学基础丛书，243。Springer-Verlag，柏林—纽约，1982。

[11] 泉正樹。指数 3 的 Goldman 型定理。数理科学研究所出版物 28 (1992)，第5期，833–843。[12] 泉正樹。指标理论中的 Goldman 型定理。算子代数与量子场论（罗马，1996），249–269，Int. Press，马萨诸塞州剑桥，1997。[13] 泉正樹。具有有限 Watatani 指数的无限 C*-代数的子代数。II. Cuntz-Krieger 代数。Duke Math. J. 91 (1998)，第3期，409–461。[14] 泉正樹。群-子群子因子同构的刻画。Int. Math. Res. Not. 2002，第34期，1791–1803。[15] 泉正樹。 3^n 子因子及相关融合范畴的分类。Quantum Topol. 9 (2018)，第3期，473–562。[16] 泉正樹；川东泰之。主图为 $D_n^{(1)}$ 的子因子分类。J. Funct. Anal. 112 (1993)，第2期，257–286。[17] 泉正樹；Kosaki, Hideki。第二上同调的子因子类比。Rev. Math. Phys. 14 (2002)，第7–8期，733–757。[18] 泉正樹；Roberto Longo；Sorin Popa。冯·诺依曼代数的紧自同构群的伽罗瓦对应及其向 Kac 代数的推广。J. Funct. Anal. 155 (1998)，第1期，25–63。[19] 泉正樹；Scott Morrison；David Penneys；Emily Peters；Noah Snyder。指数恰为 5 的子因子。Bull. Lond. Math. Soc. 47 (2015)，第2期，257–269。[20] Vaughan F. R. Jones。子因子的指标。Invent. Math. 72 (1983)，第1期，1–25。[21] Vaughan F. R. Jones；Scott Morrison；Noah Snyder。指标至多为 5 的子因子分类。Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 51 (2014)，第2期，277–327。[22] Gregory Karpilovsky Schur 乘子。Schur 乘子。伦敦数学学会专著，新辑，2。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1987。[23]Vijay Kodiyalam；V. S. Sunder。子群子因子。Math. Scand. 86 (2000)，第1期，45–74。[24] Kosaki, Hideki。交叉积的刻画（适当无限情形）。Pacific J. Math. 137 (1989)，第1期，159–167。[25]Kosaki, Hideki ; Shigeru Yamagami。与交叉积代数相关的不可约双模。Internat. J. Math. 3 (1992)，第5期，661–676。

[26] Pimsner, Mihai；Popa, Sorin。子因子的熵与指标。《Ann.Sci. ´Ecole Norm. Sup. (4)》19 (1986)，第 1 期，57–106 页。[27] Robinson, Derek J. S. 群论教程。《数学研究生教材》第 80 卷。Springer-Verlag，纽约，1993 年。